arXiv:2301.08723v1 [math.FA] 20 Jan 2023

鞅 Hardy 空间中的元素与其对偶空间之间的乘法

ODYSSEAS B AKAS、ZHENDONG XU、YUJIA ZHAI 和 HAO Z HANG

Abstract. 本文建立了连续双线性分解，用于研究鞅 Hardy 空间中的元素与其对偶空间中的函数之间的乘积。我们的分解基于鞅副乘积。作为本文工作的推论，我们还得到了齐次型空间上二进鞅的类似结果，其中这些空间配备了倍增测度。 H^p $(0 < p \leqslant 1)$

1. Introduction

经典 Hardy 空间中函数的逐点乘积 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 与 $\mathbb{R}^n$ 上有界平均振荡函数的逐点乘积未必属于 $L^1(\mathbb{R}^n)$；例如参见 §《 [24]》第四章 6.2 节。然而，利用 Fefferman 对偶定理 [10] 以及逐点乘积属于相应空间这一事实：一个BMO-函数与一个 C_0^∞-函数的乘积属于 $BMO(\mathbb{R}^n)$, Bonami、Iwaniec、Jones 和 Zinsmeister 在 [5] 中将 $f \times g$ 函数 $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ 与函数 $g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ 的乘积定义为如下分布：

$$\langle f \times g, \phi \rangle := \langle g \cdot \phi, f \rangle, \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{1.1}$$

其中，在右端的（1.1）中使用了 $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ 与 $g \cdot \phi \in BMO(\mathbb{R}^n)$之间的对偶性。此外， [5] 中证明，对于任意固定的 $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ ，存在两个线性连续算子 S_f，从 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 映到 $L^1(\mathbb{R}^n)$，以及 T_f，从 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 映到一个加权 Hardy–Orlicz 空间，使得

$$f \times g = S_f(g) + T_f(g)$$

对所有 $g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ 均成立；见定理 1.6] 的 [5, 。

在 [4], 中，Bonami、Grellier 和 Ky 利用小波分析证明，存在两个连续双线性算子 S，其定义域和值域分别为 $H^1(\mathbb{R}^n) \times BMO(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^1(\mathbb{R}^n)$；另一个算子 T，其定义域和值域分别为 $H^1(\mathbb{R}^n) \times BMO(\mathbb{R}^n)$ 和 $H^{\log}(\mathbb{R}^n)$ ，使得

$$f \times g = S(f, g) + T(f, g)$$

对所有 $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ 和所有 $g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ 均成立；见定理 1.1] 的 [4, 。Musielak Hardy–Orlicz 空间 $H^{\log}(\mathbb{R}^n)$ 定义为由所有满足下述条件的 $\mathbb{R}^n$ 上的分布 h 构成的类：其大极大函数 $\mathcal{M}h$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathcal{M}h(x)|}{\log(e + |x|) + \log(e + |\mathcal{M}h(x)|)} dx < \infty$$

并且比 [5] 中出现的加权 Hardy–Orlicz 空间更小。事实上，正如在[5], 中所解释的，鉴于 Nakai 和 Yabuta [22] 关于 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 的逐点乘子和对偶性的结果，Musielak Hardy–Orlicz 空间 $H^{\log}(\mathbb{R}^n)$ 是最优的。

2020 Mathematics Subject Classification. 主要分类：47A07、60G42、60G46。次要分类：42B30、46E30、46F10。
Key words: 副乘积；鞅；Hardy–Orlicz空间；Musielak–Orlicz空间；倍增空间。O. Bakas 部分获得以下项目资助：CEX2021-001142-S、RYC2018-025477-I、由国家研究署资助的 PID2021-122156NB-I00/AEI/10.13039/501100011033 项目，以及 Juan de la Cierva Incorporación 项目 IJC2020-043082-I 和巴斯克政府的 BERC 2022-2025 资助。Y. Zhai 感谢欧洲研究委员会项目 FAnFArE（编号 637510）和卢瓦尔河地区的部分资助。

此外，关于 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 中元素乘积的连续双线性分解定理、关于 $0<p<1$ 的连续双线性分解定理及其对偶空间的相关结果，已在 [3]中建立。

利用 Auscher 和 Hyt¨onen 在 [1], 中发展起来的齐次型空间上的小波理论，Liu、Yang 和 Yuan [15] 以及 Xing、Yang 和 Liang [29]将上述结果推广到了齐次型空间。更具体地说，在 [15] 和[29], 中，针对原子 Hardy 空间$H^p{}_{\rm at}(\Omega)$ （按照 Coifman 和 Weiss [7]的定义）中的元素及其对偶空间，建立了乘积的连续双线性分解，条件为 $p\in(\frac{n}{n+1},1]$。这里， n 定义为齐次空间 Ω 的维数。

最近，在 [2], 中建立了 Bonami、Grellier 和 Ky 上述结果的一个二进制变体；参见 [2, 定理 24], ，该结果随后被用于推导 [4,定理1.1]的周期版本；参见 [2, 定理 28]。

受 [2], 本文第一部分旨在研究概率空间 Ω 上鞅 Hardy 空间与其对偶空间之间的乘法。更具体地说，我们研究鞅 Hardy 空间 $H^1(\Omega)$中的函数与其对偶空间 $BMO(\Omega)$ 中的函数之间的乘法，如我们的第一个结果定理1.1所述。我们还研究 $0<p<1$ 的情形，即 $H^p(\Omega)$ 中元素与其对偶空间（即所谓的鞅 Lipschitz 空间） $\Lambda_1(\alpha_p)$ 之间的乘法，其中 $\alpha_p:=\frac{1}{p}-1$，详见定理1.2。由于对于某些非正则鞅，其对偶空间 $(H^p(\Omega))^*$ 可能是 $\{0\}$，我们将只考虑正则鞅，其中相应滤过中的每个 σ–代数 $\mathcal{F}_k$ 均由可数多个原子生成。

我们谨此说明，Yong Jiao、Guangheng Xie、Dachun Yang 和 Dejian Zhou 已独立证明了定理1.1，并由此得到了关于涉及交换子的算子在 [14] 上有界性的有趣应用。

定理 1.1. 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是配备滤过 $\{\mathcal{F}_k\}_{k\geqslant1}$ 的概率空间。

存在连续双线性算子 $\Pi_1:\ H^1(\Omega)\times BMO(\Omega)\to L^1(\Omega)$, $\Pi_2:\ H^1(\Omega)\times BMO(\Omega)\to H^1(\Omega)$ 以及 $\Pi_3:\ H^1(\Omega)\times BMO(\Omega)\to H^\Phi(\Omega)$，使得

$$f\cdot g=\Pi_1(f,g)+\Pi_2(f,g)+\Pi_3(f,g)$$

for 对所有 $f\in H^1(\Omega)$ 和 $g\in BMO(\Omega)$ 均成立，其中 $f\cdot g$ 是逐点乘法意义下的乘积。

在定理 1.1中， $H^\Phi(\Omega)$ 是以增长函数 $\Phi(t)$定义的鞅 Hardy–Orlicz 空间；参见下文定义 2.15 和（2.3）。我们将称 $\Pi_2(f、\ g)$ 和$\Pi_3(f$为$g)$ 鞅副乘积。

定理 1.1 可视为 [2, 定理 24] 在一般鞅情形下的推广。

对于 $0<p<1$，若 $f\in H^p(\Omega)$、 $g\in\Lambda_1(\alpha_p)$ 且 $f_0=g_0=0$，则它们的乘积可视为 $L^\infty(\Omega)\cap\Lambda_1(\alpha_p)$ 上的连续线性泛函。更精确地说，对于任意 $h\in L^\infty(\Omega)\cap\Lambda_1(\alpha_p)$，定义

$$\langle f\times g,h\rangle:=\langle h\cdot g,f\rangle,$$

其中，右端用到了 $H^p(\Omega)$ 与 $\Lambda_1(\alpha_p)$ 之间的对偶性。注意，由于 h 是 $\Lambda_1(\alpha_p)$ 上的逐点乘子（见 [21]），$h\cdot g$ 属于 $\Lambda_1(\alpha_p)$。

下面的定理在 $0<p<1$ 时，为 $H^p(\Omega)$ 中的元素与对偶空间 $\Lambda_1(\alpha_p)$ 中的函数之间的乘积建立了连续双线性分解。

定理 1.2. 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是配备滤过 $\{\mathcal{F}_k\}_{k\geqslant1}$ 的概率空间，其中 $\mathcal{F}_k$ 对任意 $k\geqslant1$ 均由可数多个原子生成。

若 $H^p(\Omega)$ $(0<p<1)$ 是鞅 Hardy 空间，则存在连续双线性算子 $\Pi_1:\ H^p(\Omega)\times\Lambda_1(\alpha_p)\to L^1($ Ω)、 $\Pi_2:\ H^p(\Omega)\times\Lambda_1(\alpha_p)\to H^1(\Omega)$ 以及 $\Pi_3:\ H^p(\Omega)\times\Lambda_1(\alpha_p)\to H^p(\Omega)$，使得

$$f\times g=\Pi_1(f,g)+\Pi_2(f,g)+\Pi_3(f,g)$$

对于所有 $f \in H^p(\Omega)$ 和 $g \in \Lambda_1(\alpha_p)$。

本文的第二部分研究定理1.1 和1.2 在齐次型空间上的二进鞅情形下的类似结论。这类鞅最初由[13]构造。我们研究相应的鞅 Hardy 空间，并将 Mei 在 [17]中的结果推广到这一更一般的情形。与概率情形相比，齐次型空间的情形更难处理，因为会出现反向鞅，且齐次空间上的底层测度可能是无穷的。

本文结构安排如下。第2节列出记号，并介绍有关鞅 Hardy–Orlicz 空间的一些背景知识。第3节证明定理1.1。第4节给出鞅 Lipschitz 空间的刻画 $\Lambda_1(\alpha_p)$，这一结果本身也很有意义（见下文定理4.4 和注4.5），随后证明定理1.2。接下来的几节讨论齐次型空间。为方便读者，第5节回顾 Coifman 和 Weiss 意义下齐次型空间上的 Hardy 空间和 Lipschitz 空间的若干定义与事实 [7]。第6节基于鞅方法和齐次空间上二进鞅的存在性，为 [7] 中的结果给出一些新的证明。第7节建立定理1.1 和1.2 对齐次型空间上的二进鞅的类比结果；见下文定理7.7 。最后一节将定理7.7 应用于齐次型空间上的 Hardy 空间及其对偶空间中的函数乘积分解。

2. Notation and Background

本节将介绍本文中会用到的一些记号和背景知识 .

2.1. 记号。本文的若干部分会涉及拟赋范向量空间的和与交。为方便读者，下面回顾这些概念。

定义 2.1. 设 $(X_1、\ \|\cdot\|_{X_1})$、$(X_2、\ \|\cdot\|_{X_2})$ 为两个拟赋范向量空间，并设 X 为一个拓扑向量空间 X，使得 $X_1、\ X_2 \subset X$ 连续。

(1) $(X_1 \cap X_2、\ \|\cdot\|_{X_1\cap x_2})$ 是 X_1 与 X_2 的交，其中

$$\|x\|_{X_1\cap X_2} := \max\{\|x\|_{X_1}, \|x\|_{X_2}\}$$

对所有 $x \in X_1 \cap X_2$;

(2) $(X_1 + X_2, \|\cdot\|_{X_1+X_2})$ 是 X_1和 X_2的和，其中

$$\|x\|_{X_1+X_2} := \inf\{\|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2} :\ x = x_1 + x_2,\ x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\}$$

对所有 $x \in X_1 + X_2$均成立。

为方便起见，和 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 与交集 $X_1 \cap X_2 + \cdots \cap X_n$ 也分别记为 $\sum X_k$ 和 $\bigcap_{k=1}^n X_k$。$k=1$

注意，$(X_1 \cap X_2, \|\cdot\|_{X_1\cap X_2})$和 $(X_1 + X_2, \|\cdot\|_{X_1+X_2})$都是拟赋范向量空间。此外，若 $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$ 和 $(X_2, \|\cdot\|_{X_2})$ 是巴拿赫空间，则 $(X_1 \cap X_2, \|\cdot\|_{X_1\cap X_2})$ 和$(X_1 + X_2, \|\cdot\|_{X_1+X_2})$ 也都是巴拿赫空间。

本文将使用以下标准记号： $A \lesssim B$ （分别）表示存在某个绝对正常数 C（分别为仅依赖于参数 p 的正数C_p），使得 $A \leqslant CB$（分别为 $A \leqslant C_pB$）。若 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$（分别为 $A \lesssim_p B$ 和 $B \lesssim_p A$），则记作 $A \approx B$（分别记作 $A \approx_p B$）。

本文中，“齐性空间”和“齐次型空间”将交替使用。

2.2. Musielak–Orlicz 型空间。我们首先回顾 Orlicz 型空间和 Musielak–Orlicz 型空间的一些定义与性质。下文中，$(\Omega\ \mathcal{F}, \mu)$ 表示一个 σ-有限测度空间。

若函数 $\Phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ 在 $(0,\infty)$ 上严格为正、单调不减、无界且 $\Phi(0) = 0$，则称其为 Orlicz 函数。若可测函数 $\Psi: \Omega \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ 满足对于所有 $x \in \Omega$，$\Psi(x,\cdot)$ 都是 Orlicz 函数，则称其为 Musielak–Orlicz 函数。

Musielak–Orlicz 型空间 $L^{\Psi}(\Omega)$ 是由 Ω 上所有可测函数 f 组成的集合 Ω s使得

$$\int_{\Omega} \Psi(x, \lambda^{-1}|f(x)|)d\mu < \infty$$

对于某个 $\lambda > 0$ 成立。我们在 $L^{\Psi}(\Omega)$ 上赋予 Luxembourg 准范数

$$\|f\|_{L^{\Psi}(\Omega)} := \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{\Omega} \Psi(x, \lambda^{-1}|f(x)|)d\mu \leqslant 1\right\}, \quad f \in L^{\Psi}(\Omega).$$

设 $p \in \mathbb{R}$。若存在正的常数 C 使得.....，则称 Musielak–Orlicz 函数具有一致下型（分别地，上型） p

$$\Psi(x, st) \leqslant Cs^{p}\Psi(x,t)$$

对所有 $x \in \Omega$、$t \geqslant 0$ 和 $s \in (0、1)$（分别为 $s \in [1、\infty)$）。特别地，若 Ψ 具有一致下型 p，其中 $0 < p < 1$，且具有一致上型 1，则

$$\Psi(x, ct) \approx_{c} \Psi(x,t) \quad \text{for all } c > 0. \tag{2.1}$$

在下文中，$\Psi(x,\ t)$ 始终假设具有一致下型 p，其中 $0 < p < 1$，且具有一致上型 1，并且关于 t 变量连续。关于 Musielak–Orlicz空间的更多信息，请参阅 [4] 和 [30]。

2.3. 鞅。设 $(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 是一个固定的概率空间。给定一个由一列 σ 代数构成的滤过

$$\mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_k \subset \cdots \subset \mathcal{F}$$

使得 $\sigma(\cup_{k=1}^{\infty}\mathcal{F}_k) = \mathcal{F}$，对于随机变量 $f \in L^{1}(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 和 $k \in \mathbb{N}_{+}$，我们定义

$$f_k = \mathbb{E}\left(f \mid \mathcal{F}_k\right), \quad d_k f = f_k - f_{k-1},$$

其中我们采用约定 $f_0 = 0$。我们还将 f_k 记作 $\mathbb{E}_k(f)$。序列 $\{f_k\}_{k\geqslant 0}$ 称为 f 的鞅，而 $\{d_k f\}_{k\geqslant 1}$ 称为 f 的鞅差。若 f 和 $\{f_k\}_{k\geqslant 0}$ 如上所述，我们也记作 $f = \{f_k\}_{k\geqslant 0}$。为简化记号，我们用 $L^{p}(\Omega)$ 代替 $L^{p}(\Omega\ \mathcal{F}, P)$, $0 < p < \infty$。

定义 2.2. 若 f、$\{f_k\}_{k\geqslant 0}$ 和 $\{d_k f\}_{k\geqslant 1}$ 如上所述，我们定义：

(1) 极大函数

$$f^{*} := \sup_{k\geqslant 0}|f_k|;$$

(2) 平方函数

$$S(f) := \left(\sum_{k=1}^{\infty}|d_k f|^{2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

(3) 条件平方函数

$$s(f) := \left(\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}_{k-1}|d_k f|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

鞅 Hardy 空间有几种类型，分别根据极大函数、平方函数和条件平方函数来定义。

定义 2.3. 对于 $1 \leqslant p < \infty$，鞅 Hardy 空间 $h^p(\Omega)$、$H^p(\Omega)$、$H_m^p(\Omega)$ 定义如下

$$\begin{aligned} h^p(\Omega) &:= \{f \in L^1(\Omega) : \|f\|_{h^p} := \|s(f)\|_p < \infty\}, \\ H^p(\Omega) &:= \{f \in L^1(\Omega) : \|f\|_{H^p} := \|S(f)\|_p < \infty\}, \\ H_m^p(\Omega) &:= \{f \in L^1(\Omega) : \|f\|_{H_m^p} := \|f^*\|_p < \infty\}, \end{aligned}$$

分别。

对于 $0 < p < 1$, $h^p(\Omega)$，其定义为以下空间的完备化：$\{f \in L^1(\Omega) : \|f\|_{h^p} := \|s(f)\|_p < \infty\}$，其中范数为 $\|\cdot\|_{h^p}$。类似地，$H^p(\Omega)$ 定义为以下空间的完备化：$\{f \in L^1(\Omega) : \|f\|_{H^p} := \|S(f)\|_p < \infty\}$，其中范数为 $\|\cdot\|_{H^p}$；而 $H_m^p(\Omega)$ 定义为以下空间的完备化：$\{f \in L^1(\Omega) : \|f\|_{H_m^p} := \|f^*\|_p < \infty\}$，其中范数为 $\|\cdot\|_{H_m^p}$。

一般而言，上述三个鞅 Hardy 空间彼此不同。然而，对于 $1 \leqslant p < \infty$，$H^p(\Omega) = H_m^p(\Omega)$（见 [6], [9], [26]）。

定义 2.4。（正则滤过）若存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $k \geqslant 2$、$F_k \in \mathcal{F}_k$，都存在一个 $G_k \in \mathcal{F}_{k-1}$ 满足

$$F_k \subset G_k, \quad P(G_k) \leqslant C \cdot P(F_k).$$

此外，相对于此类正则滤过的鞅 $f = \{f_k\}_{k \geqslant 0}$ 称为正则鞅。

注 2.5。设正随机变量 $f \in L^1(\Omega)$ 对应的鞅 $\{f_k\}_{k \geqslant 0}$ 是正则的。那么对任意 $k \geqslant 2$

$$f_k \leqslant A \cdot f_{k-1},$$

其中 $A > 0$ 是一个常数，仅取决于定义 C 中的常数 2.4。

关于正则滤过和鞅的更多信息，参见 [16]。

注 2.6。对于正则鞅滤过，当 $0 < p < \infty$ 时，$H^p(\Omega) = h^p(\Omega) = H_m^p(\Omega)$。更多信息参见 [27], [26] 和 [16]。

鞅 Hardy 空间的一个重要特征是它们具有原子分解。鞅情形下原子的定义如下。

定义 2.7. 随机变量 $a : \Omega \to \mathbb{C}$ 称为鞅简单 (p, q)-原子（$0 < p \leqslant 1, 1 \leqslant q \leqslant \infty$），如果存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 $A \in \mathcal{F}_k$ 使得

（1）$\mathbb{E}_k(a) = 0$;

（2）$\operatorname{supp}(a) \subset A$;

（3）$\|a\|_q \leqslant P(A)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$,

其中，按照约定，当 $q = \infty$ 时，$\frac{1}{q} := 0$。

定义 2.8. 我们定义鞅原子 Hardy 空间 $H^{p,q}$ 在 (Ω) 上的 $0 < p < 1 \leqslant q \leqslant \infty$或 $p = 1$, $1 < q \leqslant \infty$ 如下：

$$H_{\text{at}}^{p,q}(\Omega) := \left\{ f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a^j \text{ where } a^j \text{ is a simple } (p,q)\text{-atom and } \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p < \infty \right\},$$

其中，对于 $f \in H^{p,}$ $_q$ 在 (Ω)

$$\|f\|_{H_{\text{at}}^{p,q}(\Omega)} := \inf \left\{ \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^p \Big)^{\frac{1}{p}} : f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a^j, \text{ where } a^j \text{ is a simple } (p,q)\text{-atom} \right\}.$$

众所周知， $h^p(\Omega) = H^{p,\ 2}$ 在 (Ω) 当 $0 < p \leqslant 1$ （参见 [27]）。特别地，若鞅过滤是正则的，则 $h^p(\Omega) = H^{p,\ q}$ 在 (Ω) 当 $0 < p \leqslant 1$ 且 $1 < q \leqslant \infty$时。下面的结果是 $H^1(\Omega)$的原子分解，它由文献 [23]中的非交换结果推出。特别地，该结果揭示了 $H^1(\Omega)$ 与 $h^1(\Omega)$ 之间的关系，并表明对于一般鞅，$H^1(\Omega) \neq h^1(\Omega)$ 。

定理 2.9. 我们有 $H^1(\Omega) = h^1(\Omega) + h_d^1(\Omega)$，其中 h_d^1 表示鞅差的对角 Hardy 空间

$$h_d^1(\Omega) := \left\{ h \in L^1(\Omega) : \|h\|_{h_d^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{\infty} \|d_k h\|_1 < \infty \right\}.$$

我们现在将引入鞅 BMO 和 bmo 空间，它们分别是 $H^1(\Omega)$和 $h^1(\Omega)$的对偶空间（见下文定理 2.13）。

定义2.10. 设 $f, g \in L^2(\Omega)$。若 f是一个鞅 BMO函数，则称之为

$$\|f\|_{BMO(\Omega)} := \sup_{n \geqslant 1} \|\mathbb{E}_n |f - f_{n-1}|^2\|_\infty^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

若 g 是一个鞅 bmo 函数，则称之为

$$\|g\|_{bmo(\Omega)} := \sup_{n \geqslant 0} \|\mathbb{E}_n |g - g_n|^2\|_\infty^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

用 $BMO(\Omega)$和 $bmo(\Omega)$表示分别由所有鞅 BMO函数和 bmo函数构成的空间。

对于正则鞅， $BMO(\Omega) = bmo(\Omega)$。以下结果称为鞅 John–Nirenberg不等式，见 [12]。

定理 2.11. 存在一个充分小的常数 $\kappa > 0$ ，使得对于任意满足 $\|f\|_{BMO(\Omega)} \leqslant \kappa$ 的 $f \in BMO(\Omega)$，我们有

$$\mathbb{E}\left(e^{|f|}\right) \leqslant 1.$$

注2.12. 根据鞅 John–Nirenberg不等式，对于任意 $1 \leqslant p < \infty$，我们有

$$\|f\|_{BMO(\Omega)} \approx_p \sup_{n \geqslant 1} \|\mathbb{E}_n |f - f_{n-1}|^p\|_\infty^{\frac{1}{p}}.$$

Ho然而，在一般鞅情形下，上述 John–Nirenberg 不等式对 $bmo(\Omega)$ 不成立 .

以下对偶定理见 [12], [16], [26]。

定理 2.13. $(H^1(\Omega))^* = BMO(\Omega)$ 且 $(h^1(\Omega))^* = bmo(\Omega)$。

下面的命题可见于 [8] 和 [12], 是定理2.9 和 2.13 的推论，并描述了 $BMO(\Omega)$ 与 $bmo(\Omega)$之间的关系。特别地，它意味着，对于一般鞅， $BMO(\Omega) \subsetneqq bmo(\Omega)$ 。

命题 2.14。假设 f 是一个鞅 BMO 函数。那么

$$\|f\|_{BMO(\Omega)} \approx \|f\|_{bmo(\Omega)} + \sup_{k \geqslant 1} \|d_k f\|_\infty. \tag{2.2}$$

本节最后给出鞅 Musielak–Orlicz Hardy 空间的定义和广义 Hölder 不等式。

定义 2.15. 鞅 Musielak–Orlicz Hardy 空间 $H^{\Psi}(\Omega)$ (其中 Ψ 在第 2.2 节中给出）是由所有满足以下条件的鞅 $f=\{f_k\}_{k\geqslant 0}$ 组成的空间：平方函数$S(f)\in L^{\Psi}(\Omega)$。此外，我们定义拟范数

$$\|f\|_{H^{\Psi}(\Omega)}:=\|S(f)\|_{L^{\Psi}(\Omega)}.$$

若将 Ψ 替换为 Orlicz 函数 Φ，则相应的 Hardy–Orlicz 空间 $H^{\Phi}(\Omega)$ 以类似的方式定义。

为得到广义 H¨older 不等式，我们将引入一个特殊的 Orlicz 空间 $L^{\Phi}(\Omega)$，其中

$$\Phi(t):=\frac{t}{\log(e+t)},\quad t\geqslant 0. \tag{2.3}$$

注意， Φ 是一个一致下型为 p $(0<p<1)$ 、上型为 1 的 Orlicz 函数，这保证向量空间 $L^{\Phi}(\Omega)$ 是一个准赋范空间。注意， $L^1(\Omega)\subset L^{\Phi}(\Omega)$。

注 2.16. 由 [19] 可知，若 $f=\{f_k\}_{k\geqslant 0}$ 是正则鞅，则鞅 Hardy–Orlicz 空间 $H^{\Phi}(\Omega)$ 也可用鞅极大函数和条件平方函数来刻画。对于任意 $f\in H^{\Phi}(\Omega)$ ，有

$$\|f\|_{H^{\Phi}(\Omega)}=\|S(f)\|_{L^{\Phi}(\Omega)}\approx\|f^*\|_{L^{\Phi}(\Omega)}\approx\|s(f)\|_{L^{\Phi}(\Omega)}.$$

下面的引理是命题 2.1] 在鞅情形下的一个变体。

引理 2.17. 假设 $(\Omega\ \mathcal{F},P)$ 是一个概率空间， $f\in L^1(\Omega)$ 且 $g\in BMO(\Omega)$。则 $f\cdot g\in L^{\Phi}(\Omega)$ 并且

$$\|f\cdot g\|_{L^{\Phi}(\Omega)}\lesssim\|f\|_1\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{2.4}$$

证明。证明与相应的欧几里得结果类似，为方便读者，这里仅概述证明过程。由引理 2.1], 可得

$$\frac{st}{M+\log(e+st)}\leqslant e^{t-M}+s. \tag{2.5}$$

对所有 $M\geqslant 0,s\geqslant 0,t\geqslant 0,$ 均成立。

当 $\|f\|_1=0$或 $\|g\|_{BMO(\Omega)}=0$时， (2.4) 显然成立。假设 $g\in BMO(\Omega)$ 满足 $\|g\|_{BMO(\Omega)}>0$ 且 $f\in L^1(\Omega)$ 满足 $\|f\|_1>0$。令 κ 为定理 2.11中的常数， $M=0$, $t=\frac{\kappa|g(x)|}{\|g\|_{BMO(\Omega)}}$ 且 $s=\frac{|f(x)|}{\|f\|_1}$。于是由定理 2.11 和（2.5），可得

$$\int_{\Omega}\Phi\left(\frac{|f(x)\cdot g(x)|}{\kappa^{-1}\|f\|_1\|g\|_{BMO(\Omega)}}\right)dP\leqslant\int_{\Omega}e^{\frac{\kappa|g(x)|}{\|g\|_{BMO(\Omega)}}}dP+\left\|\frac{f}{\|f\|_1}\right\|_1\leqslant 2. \tag{2.6}$$

因此，由（2.1）可得

$$\|f\cdot g\|_{L^{\Phi}(\Omega)}\lesssim\kappa^{-1}\|f\|_1\|g\|_{BMO(\Omega)},$$

至此，引理得证。 □

我们将把（2.4）称为广义 H¨older 不等式。

3. Bilinear decompositions on $H^1(\Omega)\times BMO(\Omega)$

本节证明定理 1.1。设 $(\Omega\ \mathcal{F},\ P)$ 为一个固定的概率空间，并设$f\in H^1(\Omega)$，$g\in BMO(\Omega)$。若假设 f 和 g 具有有限鞅展开，则其逐点乘积 $f\cdot g$ 可写为如下形式

$$f\cdot g=\Pi_1(f,g)+\Pi_2(f,g)+\Pi_3(f,g), \tag{3.1}$$

其中

$$\Pi_1(f,g):=\sum_{k=1}^{\infty}d_kfd_kg,\quad \Pi_2(f,g):=\sum_{k=1}^{\infty}f_{k-1}d_kg\quad\text{and}\quad \Pi_3(f,g):=\sum_{k=1}^{\infty}g_{k-1}d_kf.$$

我们将分别估计 $\Pi_1(f、\ g)$、$\Pi_2(f、\ g)$、$\Pi_3(f和\ g)$。为此，我们将利用 $H^1(\Omega)$的原子分解。由下文的论证可知，算子 Π_1、Π_2和 Π_3 在乘积空间 $H^1(\Omega)\times BMO(\Omega)$上均有良好定义（按点态意义）。因此，定理的证明将由 Π_1、Π_2 和 Π_3的有界性性质、（3.1）以及一个极限论证得出。

在§3.4中，我们给出一种直接处理 $\Pi_3(f、\ g)$的方法，从而避免使用原子分解。

定理*1.1*的证明。由定理2.9可知，总存在两个函数 f^h和 f^d使得$f=f^h+f^d$，其中 $f^h\in h^1(\Omega)$且 $f^d\in h^1_d(\Omega)$。对于 f的任意此类分解，由于$f^h\in h^1(\Omega)$，存在 $\{\lambda_j\}_{j\geqslant1}\subset\mathbb{R}$ 以及简单的 (1, 2)原子 $\{a^j\}_{j\geqslant1}$ 使得

$$f^h=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_ja^j,\quad \|f^h\|_{h^1(\Omega)}\approx\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|, \tag{3.2}$$

其中假设 $\operatorname{supp}(a^j)\subset A_{n_j}$和 $A_{n_j}\in\mathcal{F}_{n_j}$满足 $P(A_{n_j})>0$，其中 $j\geqslant1$。于是

$$\Pi_i(f,g)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\Pi_i(a^j,g)+\Pi_i(f^d,g),\quad i=1,2,3. \tag{3.3}$$

3.1.关于 $\Pi_1(f^h,\ g)$和 $\Pi_1(f^d,\ g)$的估计。我们将证明 Π_1是一个有界双线性算子，其定义于 $H^1(\Omega)\times BMO(\Omega)$ 并映射到 $L^1(\Omega)$。事实上，Π_1 的有界性可由 $H^1(\Omega)$ 与 $BMO(\Omega)$之间的对偶性自然推出，即定理 2.13 （参见 [12]）。为方便读者，我们给出一个基于原子分解的证明。

我们首先关注 $\Pi_1(f^h,\ g)$，它还可以按照（3.2）所述进一步分解为原子。因此，只需考虑

$$\Pi_1(a^j,g)=\sum_{k=1}^{\infty}d_ka^jd_kg,$$

当 $k\geqslant n_j+1$ 时，由于 $A_{n_j}\in\mathcal{F}_{n_j}$，可以进一步将其局部化为 $d_ka^j=1_{A_{n_j}}d_ka^j$，即

$$\Pi_1(a^j,g)=\sum_{k=n_j+1}^{\infty}1_{A_{n_j}}d_ka^jd_kg.$$

现在，通过应用柯西-施瓦茨不等式，我们得出以下估计

$$\begin{aligned}\|\Pi_1(a^j,g)\|_1 &= \mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=n_j+1}^{\infty} 1_{A_{n_j}} d_k a^j d_k g\right|\right)\\ &\leqslant \left[\mathbb{E}\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}|d_k a^j|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}1_{A_{n_j}}|d_k g|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \|a^j\|_2\left[\mathbb{E}\mathbb{E}_{n_j}\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}1_{A_{n_j}}|d_k g|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant P(A_{n_j})^{-\frac{1}{2}}\left[\mathbb{E}\left(1_{A_{n_j}}\mathbb{E}_{n_j}\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}|d_k g|^2\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant P(A_{n_j})^{-\frac{1}{2}}\|g\|_{bmo(\Omega)}P(A_{n_j})^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

其中，第四个不等式由原子的定义得出。因此，由 bmo–范数的定义可知

$$\|\Pi_1(a^j,g)\|_1 \leqslant \|g\|_{bmo(\Omega)}. \tag{3.4}$$

利用（3.4）和（3.3），由定理 2.14

$$\begin{aligned}\|\Pi_1(f,g)\|_1 &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|\|g\|_{bmo(\Omega)} + \left\|\sum_{k=1}^{\infty} d_k f^d d_k g\right\|_1\\ &\lesssim \|f^h\|_{h^1}\|g\|_{bmo(\Omega)} + \left(\sup_{k\geqslant 1}\|d_k g\|_\infty\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|d_k f^d\|_1\right)\\ &\lesssim \left(\|f^h\|_{h^1(\Omega)} + \|f^d\|_{h_1^d(\Omega)}\right)\|g\|_{BMO(\Omega)}.\end{aligned}$$

由于 $f = f^h + f^d$的分解是任意的，由定理 2.9可得

$$\|\Pi_1(f,g)\|_1 \lesssim \|f\|_{H^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.5}$$

3.2.关于 $\Pi_2(f^h、\ g)$和 $\Pi_2(f^d、\ g)$的估计。 我们将证明 Π_2是一个有界双线性算子，其定义于 $H^1(\Omega)\times BMO(\Omega)$，值域为 $H^1(\Omega)$。仿照第 3.1节的论证，我们对每一项进行局部化

$$\Pi_2(a^j,g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1}^j d_k g = \sum_{k=n_j+2}^{\infty} 1_{A_{n_j}} a_{k-1}^j d_k g.$$

容易验证，

$$d_k(\Pi_2(a^j,g)) = a_{k-1}^j d_k g, \quad k\geqslant n_j+2 \ \text{ and } \ d_k(\Pi_2(a^j,g)) = 0, \quad 1\leqslant k\leqslant n_j+1.$$

我们考虑相应的平方函数

$$\begin{aligned} S\left(\Pi_2(a^j,g)\right) &= \left(\sum_{k=n_j+2}^{\infty}\left(|a_{k-1}^j|^2 1_{A_{n_j}}|d_k g|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant |(a^j)^*|\left(\sum_{k=n_j+2}^{\infty} 1_{A_{n_j}}\left(|d_k g|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

因此，应用柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} \|\Pi_2(a^j,g)\|_{H^1(\Omega)} &= \mathbb{E}\left[S\left(\Pi_2(a^j,g)\right)\right] \\ &\leqslant \|(a^j)^*\|_2\left[\mathbb{E}\left(\sum_{k=n_j+2}^{\infty} 1_{A_{n_j}}(|d_k g|^2)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \|a^j\|_2\left[\mathbb{E}\left(1_{A_{n_j}}\mathbb{E}_{n_j}\left(\sum_{k=n_j+2}^{\infty}|d_k g|^2\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant P(A_{n_j})^{-\frac{1}{2}}\|g\|_{BMO(\Omega)}P(A_{n_j})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

因此，

$$\|\Pi_2(a^j,g)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.6}$$

同理，根据定理2.14

$$\begin{aligned} \left\|\Pi_2(f^d,g)\right\|_{H^1(\Omega)} &= \mathbb{E}\left[S\left(\Pi_2(\sum_{m=1}^{\infty} d_m f^d, g)\right)\right] \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[S\left(\Pi_2(d_m f^d,g)\right)\right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}_m\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}|d_m f^d|^2|d_k g|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[|d_m f^d|\mathbb{E}_m\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}|d_k g|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\left(\|d_m f^d\|_1\left\|\mathbb{E}_m\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}|d_k g|^2\right)\right\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

因此，

$$\left\|\Pi_2(f^d,g)\right\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \|f^d\|_{h_d^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.7}$$

利用（3.7）、（3.2）和（3.3），由定理 2.9

$$\begin{aligned}\|\Pi_2(f,g)\|_{H^1(\Omega)} &\leqslant \left\|\Pi_2(f^h,g)\right\|_{H^1(\Omega)} + \left\|\Pi_2(f^d,g)\right\|_{H^1(\Omega)}\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|\|g\|_{BMO(\Omega)} + \|f^d\|_{h_1^d(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}\\ &\lesssim \left(\|f^h\|_{h^1(\Omega)} + \|f^d\|_{h_d^1(\Omega)}\right)\|g\|_{BMO(\Omega)}.\end{aligned}$$

由于 $f = f^h + f^d$的分解是任意的，根据定理 2.9我们得出

$$\|\Pi_2(f,g)\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.8}$$

3.3. $\Pi_3(f^h、\ g)$和 $\Pi_3(f^d、\ g)$的估计。我们将证明，Π_3是一个从 $H^1(\Omega)\times BMO(\Omega)$到 $H^{\Phi}(\Omega)$的有界双线性算子。为此，我们先处理 $\Pi_3(f^h、\ g)$。注意，

$$\begin{aligned}S(\Pi_3(f^h,g)) &= S\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j g_{k-1}d_k a^j\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j S\left(\sum_{k=1}^{\infty} g_{k-1}d_k a^j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}|g_{k-1}|^2|d_k a^j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}|g_{k-1}-g_{n_j}|^2|d_k a^j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j|g_{n_j}|S(a^j)\\ &=: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

因此，只需处理 I_1 和 I_2。对于 I_1，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(I_1) &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|\mathbb{E}\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}1_{A_{n_j}}|g_{k-1}-g_{n_j}|^2|d_k a^j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|\left[\mathbb{E}\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}1_{A_{n_j}}|g_{k-1}-g|^2|d_k a^j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}1_{A_{n_j}}|g-g_{n_j}|^2|d_k a^j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|\left\{P(A_{n_j})^{\frac{1}{2}}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}|g_{k-1}-g|^2|d_k a^j|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}\left(1_{A_{n_j}}|g-g_{n_j}|S(a^j)\right)\right\}\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|\left\{P(A_{n_j})^{\frac{1}{2}}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}|d_k a^j|^2\mathbb{E}_k(|g_{k-1}-g|^2)\right)\right]^{\frac{1}{2}} + \|a^j\|_2 P(A_{n_j})^{\frac{1}{2}}\|g\|_{BMO(\Omega)}\right\}\\ &\leqslant 2\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|P(A_{n_j})^{\frac{1}{2}}\|g\|_{BMO(\Omega)}\|a^j\|_2\end{aligned}$$

因此，

$$\mathbb{E}(I_1) \lesssim \|f^h\|_{h^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.9}$$

接下来，我们对 I_2 得到一个估计。为此，请注意

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_{n_j}}|\lambda_j|S(a^j)\right)\cdot|g| + \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|1_{A_{n_j}}|g_{n_j}-g|S(a^j) \\ &=: I_3 + I_4. \end{aligned}$$

由于 a^j 是一个简单的 $(1,2)$-原子，我们有 $\|1_{A_{n_j}}S(a^j)\|_1 \leqslant 1$，并且

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_{n_j}}|\lambda_j|S(a^j)\right\|_1 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j| \lesssim \|f^h\|_{h^1(\Omega)}.$$

根据引理 2.17，我们有

$$\|I_3\|_{L^\Phi(\Omega)} \lesssim \left\|\sum_{j=1}^{\infty} 1_{A_{n_j}}|\lambda_j|S(a^j)\right\|_1 \|g\|_{BMO(\Omega)} \lesssim \|f^h\|_{h^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.10}$$

以下估计隐含于（3.9）的证明中：

$$\mathbb{E}(I_4) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|P(A_{n_j})^{\frac{1}{2}}\|g\|_{BMO(\Omega)}\|a^j\|_2 \lesssim \|f^h\|_{h^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.11}$$

结合（3.10）和（3.11），我们推得

$$\|I_2\|_{L^\Phi(\Omega)} \lesssim \|f^h\|_{h^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.12}$$

总之，由（3.9）和（3.12）可得

$$\|\Pi_3(f^h,g)\|_{H^\Phi(\Omega)} \lesssim \|f^h\|_{h^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.13}$$

剩下需要处理 $\Pi_3(f^d,g)$。我们有

$$\begin{aligned} S(\Pi_3(f^d,g)) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_{k-1}|^2|d_kf^d|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|g_{k-1}||d_kf^d| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}|g_{k-1}-g||d_kf^d| + |g|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|d_kf^d|\right). \end{aligned}$$

根据引理 2.17，

$$\left\|g\left(\sum_{k=1}^{\infty}|d_kf^d|\right)\right\|_{L^\Phi(\Omega)} \lesssim \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|d_kf^d\|_1\right)\|g\|_{BMO(\Omega)} = \|f^d\|_{h_d^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.14}$$

对于剩余项，我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_{k-1}-g||d_kf^d|\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|d_kf^d|\mathbb{E}_k|g_{k-1}-g|\right) \\ &\leqslant \|g\|_{BMO(\Omega)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|d_kf^d\|_1\right) \end{aligned}$$

因此

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_{k-1}-g||d_kf^d|\right) \leqslant \|f^d\|_{h_d^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.15}$$

因此，由（3.14）和（3.15），可得

$$\|\Pi_3(f^d,g)\|_{H^\Phi(\Omega)} \lesssim \|f^d\|_{h_d^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.16}$$

由（3.13）和（3.16），可得

$$\|\Pi_3(f,g)\|_{H^\Phi(\Omega)} \lesssim \left(\|f^h\|_{h^1(\Omega)} + \|f^d\|_{h^1_d(\Omega)}\right)\|g\|_{BMO(\Omega)}.$$

因此我们得出

$$\|\Pi_3(f,g)\|_{H^\Phi(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.17}$$

定理1.1的证明至此完成 □

3.4. 处理 $\Pi_3(f、\ g)$的另一种方法。本节将介绍一种处理 $\Pi_3(f、\ g)$的不同方法，它比上文所述的方法简洁得多，也更为简单，并且基于 [12]中证明的以下定理。

定理 3.1. 若 $g \in BMO(\Omega)$ 且 $g_0 = 0$，则 $(g^*)_0 \lesssim \|g\|_{BMO(\Omega)}$ 且 $g^* \in BMO(\Omega)$。此外，$\|g^*\|_{BMO(\Omega)} \lesssim \|g\|_{BMO(\Omega)}$.

我们先对 $S(\Pi_3(f、\ g))$给出一个逐点估计。为此，注意到 $d_k(\Pi_3(f、\ g)) = g_{k-1}d_k f$，这意味着

$$S(\Pi_3(f,g)) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_{k-1}|^2|d_k f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant |g^*|S(f) \leqslant J_1 + J_2,$$

其中

$$J_1 := |g^* - (g^*)_0|S(f) \quad \text{and} \quad J_2 := S(f)\|g\|_{BMO(\Omega)}.$$

显然，

$$\|J_2\|_1 \lesssim \|f\|_{H^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.18}$$

由定理3.1，可得 $g^* \in BMO(\Omega)$，因此由引理2.17

$$\|J_1\|_{L^\Phi(\Omega)} \lesssim \|g^*\|_{BMO(\Omega)}\|S(f)\|_1 \lesssim \|f\|_{H^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)}. \tag{3.19}$$

由于 $S(\Pi_3(f,\ g)) \leqslant J_1 + J_2$，结合（3.18）与（3.19），并利用 $L^1(\Omega) \subset L^\Phi(\Omega)$这一事实，我们得出

$$\|\Pi_3(f,g)\|_{H^\Phi(\Omega)} = \|S(\Pi_3(f,g))\|_{L^\Phi(\Omega)} \lesssim \|f\|_{H^1(\Omega)}\|g\|_{BMO(\Omega)},$$

如所需。

本节最后，我们想比较一下我们的证明与 [14]中给出的证明。尽管这两种论证都大量依赖 $H^1(\Omega)$的原子分解，但前者还使用了对角 Hardy 空间的弱原子分解，而我们的证明则更为直接。此外，得益于定理3.1，本节对最具技术性的项 Π_3 的处理显著简化。

4. Bilinear decompositions on $H^p(\Omega) \times \Lambda_1(\alpha_p)$ for $0 < p < 1$

在本节中，我们证明定理1.2。仿照定理1.1的证明，只需为双线性算子 Π_1、 Π_2 和 Π_3建立适当的估计。

设 $(\Omega\ \mathcal{F}, P)$ 为一个固定的概率空间。若考虑滤过 $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing,\ \Omega\}$ 并且对于所有 $k \geqslant 1$都有 $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}$，则当 $0 < p < \infty$时， $H^p(\Omega) = L^p(\Omega)$ 。众所周知，当 $0 < p < 1$时，概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ P)$ 包含至少一个测度非零的原子，当且仅当 $(L^p(\Omega))^* \neq \{0\}$。这意味着 $(H^p(\Omega))^* = \{0\}$ 可能发生。因此，我们只关注正则鞅，其中每个 $\mathcal{F}_k$ 都由可数多个原子生成。

为了证明定理1.2，我们先给出以下引理，它对不一定正则的一般鞅也成立。该引理对本领域专家而言应当并不陌生，但为求完整起见，我们仍在此附上证明。

引理 4.1. 对任意 $0 < p < 1$，我们有 $L^1(\Omega) \subset H^p_m(\Omega)$。

证明. 根据 Doob 极大不等式，对于任意 $f \in L^1(\Omega)$ 以及任意 $\lambda > 0$，我们有

$$P(f^* > \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{\{f^* > \lambda\}} |f| dP. \tag{4.1}$$

不失一般性，我们可以假设 $\|f\|_1 \leqslant 1$。于是

$$\begin{aligned}
\|f^*\|_p^p &= \int_\Omega |f^*|^p dP = p \int_0^\infty P(|f^*| > \lambda) \lambda^{p-1} d\lambda \\
&= p \int_0^1 P(f^* > \lambda) \lambda^{p-1} d\lambda + p \int_1^\infty P(f^* > \lambda) \lambda^{p-1} d\lambda \\
&\leqslant p \int_0^1 \lambda^{p-1} d\lambda + p \int_1^\infty \frac{1}{\lambda} \left(\int_{\{f^* > \lambda\}} |f| dP \right) \lambda^{p-1} d\lambda \\
&= 1 + p \int_{\{f^* > 1\}} |f| \left(\int_1^{f^*} \lambda^{p-2} d\lambda \right) dP \\
&= 1 + \frac{p}{1-p} \int_{\{f^* > 1\}} |f| \left(1 - |f^*|^{p-1} \right) dP \\
&\leqslant 1 + \frac{p}{1-p} \int_{\{f^* > 1\}} |f| dP \leqslant \frac{1}{1-p}.
\end{aligned}$$

这意味着，对于任意 $f \in L^1(\Omega)$

$$\|f\|_{H_m^p(\Omega)} \leqslant \left(\frac{1}{1-p} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_1,$$

由此得到所需结果。 □

对于正则鞅，我们有 $L^1(\Omega) \subset H_m^p(\Omega) = H^p(\Omega) = h^p(\Omega)$。下文中，鞅均假设为正则鞅，且每个 $\mathcal{F}_k$ 均由可数原子生成。

推论 4.2. 对于 $0 < p < 1$ 和 $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $H^p(\Omega) = H^{p,\ q\ 在}(\Omega)$。

证明。考虑前述 $H^p(\Omega)$ 的原子分解以及定义 2.8，可得 $H^p(\Omega) = H^{p,8\ at}(\Omega)$。容易看出 $H^{p,8\ at}(\Omega) \subset H^{p,q\ at}(\Omega) \subset H^{p,1\ at}(\Omega)$。因此，只需证明 $H^{p,1\ at}(\Omega) \subset H^p(\Omega)$。由引理 4.1，若 a 是一个简单的 $(p,1)$- 原子，则

$$\|a\|_{H^p(\Omega)} \lesssim_p \|a\|_1,$$

这意味着 $a \in H^p(\Omega)$。因此，$H^{p,\ 1\ at}(\Omega) \subset H^p(\Omega)$，于是 $H^p(\Omega) = H^{p,\ q\ at}(\Omega)$。 □

4.1. 鞅 Lipschitz 空间的刻画。本小节中，我们给出一种鞅 Lipschitz 空间的刻画；据我们所知，这种刻画是新的，并且对我们的论证很有用。我们先回顾鞅 Lipschitz 空间的定义。对于 $0 < p < 1$，定义

$$\Lambda_q(\alpha_p) := \left\{ f \in L^2(\Omega) : \|f\|_{\Lambda_q(\alpha_p)} = \sup_{n \geqslant 0} \sup_{A \in \mathcal{F}_n} P(A)^{-\frac{1}{q} - \alpha_p} \left(\int_A |f - f_n|^q dP \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}, \tag{4.2}$$

其中 $q = 1$ 或 $q = 2$, $\alpha_p := \frac{1}{p} - 1 > 0$。

在 [27], 中，Weisz 证明了 $(H^p(\Omega))^* = \Lambda_1(\alpha_p)$ 和 $\Lambda_1(\alpha_p) = \Lambda_2(\alpha_p)$。

推论 4.3. 对任意 $g \in \Lambda_1(\alpha_p)$，我们有 $\|g - g_0\|_\infty \lesssim_p \|g\|_{\Lambda_1(\alpha_p)}$。

证明。 根据对偶性和引理 4.1，对于任意 $f \in L^2(\Omega)$,

$$|\mathbb{E}\big(f(g-g_0)\big)| = \big|\mathbb{E}\left(g(f-f_0)\right)\big| \lesssim_p \|f\|_{H^p}\|g\|_{\Lambda_1(\alpha_p)} \lesssim_p \|f\|_1\|g\|_{\Lambda_1(\alpha_p)}.$$

由上述估计以及事实 $\big(L^1(\Omega)\big)^* = L^\infty(\Omega)$ ，可得

$$\|g-g_0\|_\infty \lesssim_p \|g\|_{\Lambda_1(\alpha_p)},$$

由此完成证明。 □

根据推论4.3，我们得到鞅 Lipschitz 空间的以下性质。

定理 4.4. 若 $g \in \Lambda_1(\alpha_p)$，则有 $\|1_A \cdot |g-g_n|\|_\infty \lesssim_p P(A)^{\alpha_p}\|g\|_{\Lambda_1(\alpha_p)}$，对任意 $n \in \mathbb{N}$及任意 $A \in \mathcal{F}_n$ 均成立。

证明. 注意，当 $P(A)=0$时，所需结果显然成立。固定满足$P(A) \neq 0$的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A \in \mathcal{F}_n$ 。对于 $k \geqslant 0$, 令 $\mathcal{F}_k^A := \{B \in \mathcal{F}_{k+n} : B \subseteq A\}$。注意，所有 $\mathcal{F}_k^A$的并集 $\mathcal{F}^A$ 恰为 $\{B \in \mathcal{F} | B \subset A\}$。因此，若我们定义

$$P_A(B) := \frac{P(B)}{P(A)} \quad (B \in \mathcal{F}^A)$$

那么 $(A, \mathcal{F}^A, P_A)$ 是一个概率空间。注意，对于任意 $g \in L^1(A, \mathcal{F}^A, P_A)$，都有

$$\mathbb{E}(g|\mathcal{F}_k^A) = 1_A \cdot \mathbb{E}(g|\mathcal{F}_{k+n}).$$

记 $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{F}_k^A)$ 为 $\mathbb{E}_k^A$。容易验证， $\{\mathbb{E}_k^A(g)\}_{k\geqslant 0}$ 也是 $(A, \mathcal{F}^A, P_A)$ 上的正则鞅。若 $g \in \Lambda_1(\alpha_p)$，则对于满足 $P(B) \neq 0$ 的 $B \in \mathcal{F}_k^A$,

$$\begin{aligned} P_A(B)^{-1-\alpha_p}\left(\int_B |g-\mathbb{E}_k^A(g)|dP_A\right) &= P(A)^{\alpha_p}\left(P(B)^{-1-\alpha_p}\left(\int_B |g-g_{k+n}|dP\right)\right) \\ &\leqslant P(A)^{\alpha_p}\|g\|_{\Lambda_1(\alpha_p)} \end{aligned}$$

这意味着，根据推论4.3,

$$\|1_A \cdot |g-g_n|\|_\infty = \|1_A \cdot |g-\mathbb{E}_0^A(g)|\|_\infty \lesssim_p P(A)^{\alpha_p}\|g\|_{\Lambda_1(\alpha_p)}.$$

定理的证明至此完成。 □

*Rem*理 4.5。 由定理 4.4 和（4.2），我们得出，对于 $g \in \Lambda_1(\alpha_p)$，有如下刻画特征

$$\|g\|_{\Lambda_1(\alpha_p)} \approx_p \sup_{n\geqslant 0}\sup_{A\in\mathcal{F}_n} P(A)^{-\alpha_p}\|1_A \cdot |g-g_n|\|_\infty. \tag{4.3}$$

注意，[18] 中的结果可以由（4.3）推导得出。

4.2. 定理 **1.2** 的证明。 与定理 1.1 的证明类似，我们将证明分为三部分。不失一般性，我们可以假设 $f_0 = g_0 = 0$。

4.2.1. $\Pi_1(f、g)$和 $\Pi_3(f、g)$的估计。由 $H^p(\Omega)$ 与 $\Lambda_1(\alpha_p)$之间的对偶性，可直接得到 Π_1 从 $H^p(\Omega) \times \Lambda_1(\alpha_p)$到$L^1(\Omega)$ 的有界性，细节从略。

我们还将证明， Π_3 是从 $H^p(\Omega) \times \Lambda_1(\alpha_p)$ 到 $H^p(\Omega)$的有界双线性算子。注意，

$$S(\Pi_3(f,g))^2 = \sum_{k=1}^\infty |g_{k-1}|^2|d_k f|^2 \leqslant (g^*)^2 S(f)^2. \tag{4.4}$$

He因此，我们由推论4.3 和 L^∞ 极大函数的有界性可得

$$\|\Pi_3(f,g)\|_{H^p(\Omega)}^p \lesssim \|g^*\|_\infty^p \mathbb{E}(S(f)^p) \leqslant \|g\|_\infty^p \|f\|_{H^p(\Omega)}^p \lesssim_p \|f\|_{H^p(\Omega)}^p \|g\|_{\Lambda_1(\alpha_p)}^p, \tag{4.5}$$

正如所期望的。

4.2.2. $\Pi_2(f,g)$ 的估计。我们将证明， Π_2 是从 $H^p(\Omega)\times\Lambda_1(\alpha_p)$ 到 $H^1(\Omega)$的有界双线性算子。注意， $H^p(\Omega)=h^p(\Omega)$，且 $h^p(\Omega)$ 具有原子分解。

于是，存在 $\{\lambda_j\}_{j\geqslant 1}\subset\mathbb{R}$ 和简单的 $(p、\infty)$-原子 $a^j\}_{j\geqslant 1}$，使得

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j a^j,\quad \|f\|_{H^p(\Omega)}\approx_p\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.6}$$

其中我们假设 $\operatorname{supp}(a^j)\subset A_{n_j}$ 且 $A_{n_j}\in\mathcal{F}_{n_j}$ 满足 $P(A_{n_j})>0$ 对于 $j\geqslant 1$。按照定理 1.1证明中相应情形的论证方法，

$$S(\Pi_2(a^j,g))=\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}1_{A_{n_j}}|a^j_{k-1}|^2|d_kg|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant|(a^j)^*|\left(\sum_{k=n_j+1}^{\infty}1_{A_{n_j}}|d_kg|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.7}$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S(\Pi_2(a^j,g))\right]&\leqslant\|(a^j)^*\|_\infty\left[\mathbb{E}\left(1_{A_{n_j}}\sum_{k=n_j+1}^{\infty}|d_kg|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\&\leqslant\|a^j\|_\infty\left(P(A_{n_j})\left(\mathbb{E}\sum_{k=n_j+1}^{\infty}|d_kg|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant P(A_{n_j})^{-\frac{1}{p}}\left(P(A_{n_j})\|g\|^2_{\Lambda_2(\alpha_p)}P(A_{n_j})^{1+2\alpha_p}\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\|g\|_{\Lambda_2(\alpha_p)}P(A_{n_j})^{-\frac{1}{p}}P(A_{n_j})^{1+\alpha_p}\\&\leqslant\|g\|_{\Lambda_2(\alpha_p)}\lesssim_p\|g\|_{\Lambda_1(\alpha_p)},\end{aligned}$$

最后一个不等式由条件 $\alpha_p=\frac{1}{p}-1$ 得出。由上述估计可知，

$$\|\Pi_2(f,g)\|^p_{H^1(\Omega)}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^p\left[\mathbb{E}S(\Pi_2(a^j,g))\right]^p\lesssim_p\|f\|^p_{H^p(\Omega)}\|g\|^p_{\Lambda_1(\alpha_p)}. \tag{4.8}$$

定理得证。

5. Homogeneous spaces

本节将介绍齐性空间的一些基本概念和重要定理，相关内容可见于 [7]。我们先给出齐性空间的定义。回顾一下，若 d 是 Ω 上的拟度量，则

(1) $d(x,x)\geqslant 0$, $\forall x\in\Omega$; (2) $d(x,y)=d(y,x)$, $\forall x,y\in\Omega$; (3) 存在一个常数 $A_0\geqslant 1$，使得

$$d(x,y)\leqslant A_0(d(x,z)+d(z,y)),\quad \forall x,y,z\in\Omega. \tag{5.1}$$

记 $B(x,r):=\{y\in\Omega:\ d(y,x)<r\}$ 为以 x 为中心、半径为 r的开球。本文假设所有拟度量空间都具有倍增性质：存在一个正整数 $A_1\in\mathbb{N}$，使得对每个 $x\in\Omega$ 以及每个 $r>0$，球 $B(x,r)$ 都能被至多 A_1 个球 $B(x_i,\frac{r}{2})$ 覆盖，其中某个 $x_i\in\Omega$。

定义 5.1. 配备拟度量 d 的 σ-有限测度空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\mu)$ 称为齐次空间，若 μ 是一个齐次类型的博雷尔测度:

$$0<\mu\left(B(x,2r)\right)\leqslant 2^{C_\mu}\mu\left(B(x,r)\right)<\infty,\quad \forall x\in\Omega,r>0, \tag{5.2}$$

其中常数 C_μ 与 x 和 r无关。

在[7], Coifman 和 Weiss 将齐次空间上的元素视为作用于某些适当拟赋范空间上的线性泛函，并据此定义了 Hardy 空间。为了陈述 Coifman 和 Weiss 的定义，我们需要引入齐次空间上的原子、 BMO 以及 Lipschitz 空间的概念。

定义 5.2. 若 $0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant\infty$ 且 $p<q$，则称函数 a 为 (p,q)-原子，如果

(1) $\operatorname{supp}(a)\subset B$，其中 B 为球;

(2) $\|a\|_q\leqslant(\mu(B))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$; (3) $\int_\Omega a d\mu=\int_B a d\mu=0$.

定义 5.3. 若局部可积函数 f 满足下列条件，则称其为 BMO 函数:

$$\|f\|_{BMO}:=\sup_B\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f-f_B|d\mu<\infty,$$

其中 $f_B:=\dfrac{1}{\mu(B)}\int_B f d\mu$，上确界取遍所有球 B。记 $BMO(\mu)$ 为由所有 BMO函数构成的 BMO空间。

定义 5.4. 对于 $\alpha>0$，若局部可积函数 l 满足以下条件，则称其为 Lipschitz 函数: f

$|l(x)-l(y)|\leqslant C_\alpha\left(\mu(B)\right)^\alpha$ 对任意 x、 $y\in\Omega$ 以及任意包含 x、 y的球 B，均成立。 (5.3)

此外,

$$\|l\|_{\mathcal{L}_\alpha}:=\inf\{C_\alpha:|l(x)-l(y)|\leqslant C_\alpha\left(\mu(B)\right)^\alpha,\ \forall x,y\in B\}, \tag{5.4}$$

其中下确界取遍所有球 B。记 $\mathcal{L}_\alpha(\mu)$ 为空间，由所有 Lipschitz 函数组成。

众所周知，每个 BMO 函数都可以视为定义在由 $1<q\leqslant\infty$ 的有限线性组合所生成的向量空间上的连续线性泛函（参见[7]）。因此，我们可以如下定义原子 Hardy 空间 $H^{1,\ q\text{于}}(\mu)\ (1<q\leqslant\infty)$:

$$H_{\mathrm{at}}^{1,q}(\mu):=\left\{f\in(BMO(\mu))^*:\ f=\sum_{j=0}^\infty\lambda_j a^j,\ \text{where } a^j \text{ is a } (1,q)\text{-atom and } \sum_{j=0}^\infty|\lambda_j|<\infty\right\} \tag{5.5}$$

赋予范数

$$\|f\|_{H_{\mathrm{at}}^{1,q}(\mu)}:=\inf\left\{\sum_{j=0}^\infty|\lambda_j|:f=\sum_{j=0}^\infty\lambda_j a^j,\ \text{where } a^j \text{ is a } (1,q)\text{-atom}\right\}.$$

类似地，每个 Lipschitz 函数 $l\in\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)$ 也可以视为由 (p,q)-原子的有限线性组合所生成的向量空间上的连续线性泛函，其中 $0<p<1\leqslant q\leqslant\infty$ 且 $\alpha_p=\frac{1}{p}-1$ （参见 [7]）。我们如下定义原子 Hardy 空间 $H^{p,\ q\text{于}}(\mu)$:

$$H_{\mathrm{at}}^{p,q}(\mu):=\left\{f\in\left(\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)\right)^*:\ f=\sum_{j=0}^\infty\lambda_j a^j,\ \text{where } a^j \text{ is a } (p,q)\text{-atom and } \sum_{j=0}^\infty|\lambda_j|^p<\infty\right\} \tag{5.6}$$

赋予拟范数

$$\|f\|_{H^{p,q}_{\mathrm{at}}(\mu)} := \inf\left\{\left(\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} : f=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j a^j,\ \text{where } a^j \text{ is a } (p,q)\text{-atom}\right\}.$$

尽管 Hardy 空间会随 p 和 q 按照上述定义而变化，但以下定理（见 [7], ）表明，Hardy 空间实际上只取决于 p。因此，我们可以据此将 $H^{p}_{在}(\mu)$ 处的 Hardy 空间定义为 $0<p\leqslant 1$ 的任意一个空间 $H^{p,\ q}_{在}(\mu)$ 处，其中 $0<p<q\leqslant\infty$，$1\leqslant q\leqslant\infty$。

定理 5.5. $H^{p,\ q}_{在}(\mu)=H^{p,\ \infty}_{在}(\mu)$ 处，当 $0<p\leqslant 1\leqslant q\leqslant\infty$ 且 $p<q$ 时成立。

我们以如下在 [7] 中得到的对偶定理结束本节。

定理 5.6. $\left(H^1_{\mathrm{at}}(\mu)\right)^*=BMO(\mu)$，且对于 $0<p<1$，$(H^{p}_{在}(\mu))^*=\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)$ 处成立。

定理 5.5 和定理 5.6 在 [7] 中的证明非常复杂。接下来的几节中，我们将运用鞅方法，对这些结论给出简单得多的证明。我们的方法基于这样一个事实： $H^{p}_{在}(\mu)$ 中， $0<p\leqslant 1$ 是若干个二进鞅 Hardy 空间的有限和。

6. Dyadic systems on homogeneous spaces

本节首先介绍齐次空间上的二进系统，这类系统最早见于 Hyt¨onen 和 Kairema[13]的工作。借助这些二进结构，我们随后证明， $H^{p}_{在}(\mu)$ 中，恰好是与某些相邻二进鞅相关联的鞅 Hardy 空间的有限和；这一结果将 Mei 的结论 [17] 推广到了齐次空间。

以下关于二进结构存在性的定理归功于 Hyt¨onen 和 Kairema [13]。

定理 6.1. 设 Ω 表示一个齐次空间。假设常数 $0<c_0\leqslant C_0<\infty$和 $\delta\in(0,1)$ 满足

$$12A_0^3C_0\delta\leqslant c_0,$$

其中 A_0 在拟度量的定义中指定，参见 (5.1)。

给定一组参考点 $\{z^k_\alpha\}_\alpha$，$\alpha\in\mathcal{A}_k$ （一个指标集），对于每个 $k\in\mathbb{Z}$，满足以下性质：

$$d(z^k_\alpha,z^k_\beta)\geqslant c_0\delta^k,\ (\alpha\neq\beta)\quad \min_\alpha d(x,z^k_\alpha)<C_0\delta^k,\ \textit{for all } x\in\Omega,$$

可以构造集合族 $\tilde{Q}^k_\alpha\subseteq Q^k_\alpha\subseteq\bar{Q}^k_\alpha$，分别称为开、半开和闭二进立方体，使得：

(6.1) $\tilde{Q}^k_\alpha$ *and* $\bar{Q}^k_\alpha$ *are the interior and closure of* Q^k_α;

(6.2) *if* $k\leqslant l$, *then either* $Q^l_\beta\subseteq Q^k_\alpha$ *or* $Q^l_\beta\cap Q^k_\alpha=\varnothing$;

(6.3) $X=\bigcup_\alpha Q^k_\alpha$ *(disjoint union) for all* $k\in\mathbb{Z}$;

(6.4) $B(z^k_\alpha,c_1\delta^k)\subseteq Q^k_\alpha\subseteq B(z^k_\alpha,C_1\delta^k)=:B(Q^k_\alpha)$ *where* $c_1=(3A_0^2)^{-1}c_0$ *and* $C_1=2A_0C_0$;

(6.5) *if* $k\leqslant l$ *and* $Q^l_\beta\subseteq Q^k_\alpha$ *then* $B(Q^l_\beta)\subseteq B(Q^k_\alpha)$.

开立方体 $\tilde{Q}^k_\alpha$ 和闭立方体 $\bar{Q}^k_\alpha$ 仅取决于点 z^l_β，其中 $l\geqslant k$。半开立方体 Q^k_α 取决于 z^l_β，其中 $l\geqslant\min(k,k_0)$，这里 $k_0\in\mathbb{Z}$ 是构造中预先指定的数。

显然，上述二进制系统的构造并不唯一，且取决于参考点集 $\{z_\alpha^k\}_\alpha$。我们将此二进制系统记为 $\mathscr{D}=\{Q_\alpha^k\}_{k,\alpha}$。令$\mathcal{F}_k=\sigma(\{Q_\alpha^k\}_\alpha)$ 为由 $\{Q_\alpha^k\}_\alpha$生成的 σ-代数。于是显然

$$\cdots\subset\mathcal{F}_{k-1}\subset\mathcal{F}_k\subset\cdots,$$

这意味着 $\{\mathcal{F}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是由原子生成的滤过。令 $\mathcal{F}=\sigma(\cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_k)$。注意，每个 Q_α^k 都是 $\mathcal{F}_k$的一个原子。

注 6.2. 实直线上的标准二进制网格是由下式给出的二进制系统

$$\mathcal{F}_k=\{[2^{-k}m,2^{-k}(m+1)):m\in\mathbb{Z}\}\quad\text{ for all }k\in\mathbb{Z}.$$

类似地， $\mathbb{R}^n$ 上的一个二进制系统示例由 $\mathbb{R}^n$中的标准二进立方体族给出。

回顾一下，对于 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega\ \mathcal{F},\ \mu)$，与 $(\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 相关联的 f 的鞅极大函数、平方函数和条件平方函数分别定义为

$$f^*:=\max_{k\in\mathbb{Z}}|f_k|,\quad S(f):=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|d_kf|^2\right)^{\frac12}\quad\text{and}\quad s(f):=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}_{k-1}|d_kf|^2\right)^{\frac12},$$

分别。

设 $0<p\leqslant1$。鞅 Hardy 空间 $H^p_{m,\ \mathscr{D}}(\mu)$ 定义为由所有满足 $f^*\in L^p(\Omega)$ 的 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 构成的空间关于拟范数 $\|f\|_{H^p_{m,\ \mathscr{D}}(\mu)}:=\|f^*\|_p$ 的完备化。

我们分别通过平方函数和条件平方函数定义 $H^p_{\mathscr{D}}(\mu)$ 和 $h^p_{\mathscr{D}}(\mu)$，并附加假设:

$$\lim_{n\to-\infty}\int_\Omega\sup_{k\leqslant n}|f_k|^pd\mu=0.\tag{6.6}$$

由（6.6），可得

$$\lim_{n\to-\infty}\sup_{k\leqslant n}|f_k|=0.$$

类似地，按照定义 2.8，定义鞅原子 Hardy 空间 $H^{p,\ q\text{ 在 }\mathscr{D}}(\mu)$ $(0<p<1\leqslant q\leqslant\infty$ 或 $p=1,\ 1<q\leqslant\infty)$。

为了证明定理 5.6，我们引入这些鞅原子 Hardy 空间的对偶空间。对于 $0<p<1,\ q=1$ 或 2 以及 $\alpha_p=\frac1p-1$，定义

$$BMO^{\mathscr{D}}(\mu):=\left\{f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mu)\ :\ \|f\|_{BMO^{\mathscr{D}}(\mu)}:=\sup_{Q\in\mathscr{D}}\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q|f-f_Q|d\mu<\infty\right\},$$

$$\Lambda_q^{\mathscr{D}}(\alpha_p):=\left\{f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega,\mu)\ :\ \|f\|_{\Lambda_q^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}:=\sup_{Q\in\mathscr{D}}\mu(Q)^{-\frac1q-\alpha_p}\left(\int_Q|f-f_Q|^qd\mu\right)^{\frac1q}<\infty\right\}.$$

空间 $\Lambda_q^{\mathscr{D}}(\alpha_p)$ 称为关于 $\mathscr{D}$ 的鞅 Lipschitz 空间。注意，$\Lambda_1^{\mathscr{D}}(\alpha_p)=\Lambda_2^{\mathscr{D}}(\alpha_p)$。

仿照 [27]，中的论证，可以证明

$$\left(H^1_{\mathrm{at},\mathscr{D}}(\mu)\right)^*=BMO^{\mathscr{D}}(\mu),$$

并且对于 $0<p<1$,

$$\left(H^p_{\mathrm{at},\mathscr{D}}(\mu)\right)^*=\Lambda_q^{\mathscr{D}}(\alpha_p).$$

注 6.3。 由于每个简单 $(p,\ q)$-原子都是局部支集的，由推论 4.2，我们得出，对于 $0<p<1\leqslant q\leqslant\infty$ 或 $p=1,\ 1<q\leqslant\infty$

$$H^{p,q}_{\mathrm{at},\mathscr{D}}(\mu)=H^{p,\infty}_{\mathrm{at},\mathscr{D}}(\mu).$$

因此，我们只关注 $H^{p}_{\text{处}\ \mathscr{D}}(\mu):=H^{p,\ \infty}_{\text{处}\ \mathscr{D}}(\mu)$。

命题 6.4. 对于 $0<p\leqslant 1$，上述定义的鞅 Hardy 空间彼此等价。也就是说，$H^p_{\mathscr{D}}(\mu)=H^{p,\ }_{m,\ \mathscr{D}}(\mu)=h^p_{\mathscr{D}}(\mu)=H^{p}_{\text{处}\ \mathscr{D}}(\mu)$。

证明。固定 $p\in(0,1]$。首先，我们证明 $H^p_{\mathscr{D}}(\mu)=H^{p,\ }_{m,\ \mathscr{D}}(\mu)$。假设 $f\in H^{p,\ }_{m,\ \mathscr{D}}(\mu)$。那么对于任意 $n>0$，根据 Burkholder–Davis–Gundy 的一个著名不等式，

$$\int_\Omega\left(|f_{-n}|^2+\sum_{k=-n+1}^{n}|d_kf|^2\right)^{\frac{p}{2}}d\mu\lesssim\int_\Omega\sup_{-n\leqslant k\leqslant n}|f_k|^pd\mu\lesssim\int_\Omega(f^*)^pd\mu$$

令 $n\to\infty$ 并应用 Fatou 引理，即可得到

$$\|S(f)\|_p\lesssim\|f^*\|_p.$$

因此 $H^{p,\ }_{m,\ \mathscr{D}}(\mu)\subset H^p_{\mathscr{D}}(\mu)$。

反之，若 $f\in H^p_{\mathscr{D}}(\mu)$，则对于 $n>0$，

$$\int_\Omega\sup_{-n\leqslant k\leqslant n}|f_k|^pd\mu\lesssim\int_\Omega\left(|f_{-n}|^2+\sum_{k=-n+1}^{n}|d_kf|^2\right)^{\frac{p}{2}}d\mu,$$

因此

$$\int_\Omega\sup_{-n\leqslant k\leqslant n}|f_k|^pd\mu\lesssim\int_\Omega\sup_{k\leqslant -n}|f_k|^pd\mu+\int_\Omega|S(f)|^pd\mu<\infty. \tag{6.7}$$

于是令 $n\to\infty$ 并应用 Fatou 引理，可得 $\|f^*\|_p<\infty$ 和

$$\|f^*\|_p\lesssim\|S(f)\|_p.$$

因此，$H^p_{\mathscr{D}}(\mu)\subset H^{p,\ }_{m,\ \mathscr{D}}(\mu)$ 且 $H^{p,\ }_{m,\ \mathscr{D}}(\mu)=H^p_{\mathscr{D}}(\mu)$。

用完全类似的方法可证明 $H^{p,\ }_{m,\ \mathscr{D}}(\mu)=h^p_{\mathscr{D}}(\mu)$。为证明 $h^p_{\mathscr{D}}(\mu)=H^{p}_{\text{处}\ \mathscr{D}}(\mu)$，可以仿照 [27] 和 [26] 中相应的证明。细节从略。□

以下定理可见于 [13]，它保证存在足够多的二进立方体，以覆盖齐次空间上的所有球。

定理 6.5. 给定一组参考点 $\{z^k_\alpha\},k\in\mathbb{Z},\alpha\in\mathcal{A}_k$，假设存在满足 $96A_0^6\delta\leqslant 1$ 的常数 $\delta\in(0,1)$。那么存在一个由族 $\mathscr{D}^t,t=1,2,\cdots,K=K(A_0,A_1,\delta)<\infty$ 构成的有限集，其中每个 $\mathscr{D}^t$ 都是一个由二进立方体组成的集合，并与二进点 $\{z^k_\alpha\},k\in\mathbb{Z},\alpha\in\mathcal{A}_k$ 相关联，且具有定理 6.1 中的性质 (6.1)-(6.5)。

此外，还满足以下性质：

(6.8) 对每个 $B(x,\ r)\subseteq\Omega$，都存在 t 和 $Q\in\mathscr{D}^t$，使得 $B(x,\ r)\subseteq Q$ 且 $diam(Q)\leqslant Cr$。式 $C<\infty$ 中的 (6.8) 常数仅取决于拟度量常数 A_0 和参数δ。

根据命题6.4 和定理 6.5，我们得到以下定理，它推广了 s
Mei在 [17] 中的结果。

定理 6.6。对于 $0<p\leqslant 1$，我们有

$$H^p_{\mathrm{at}}(\mu)=\sum_{t=1}^{K}H^p_{\mathrm{at},\mathscr{D}^t}(\mu)=\sum_{t=1}^{K}H^p_{\mathscr{D}^t}(\mu)=\sum_{t=1}^{K}H^p_{m,\mathscr{D}^t}(\mu)=\sum_{t=1}^{K}h^p_{\mathscr{D}^t}(\mu). \tag{6.9}$$

K证明。设 $p \in (0,\ 1]$ 为固定值。根据命题6.4，只需证明 $H^{p}{}_{\mathrm{at}}(\mu) = \sum_{t=1} H^{p}{}_{\mathrm{at}}{}_{\mathscr{D}^{t}}(\mu)$。我们通过比较原子来证明这一点。设 a 是 (p,∞)-原子，属于 $H^{p}{}_{\mathrm{at}}(\mu)$。那么存在一个球 B，使得

$$\operatorname{supp}(a) \subset B,\ \|a\|_{\infty} \leqslant (\mu(B))^{-\frac{1}{p}},\ \int_{B} a(x)d\mu = 0.$$

根据定理 6.5，存在 t 和一个立方体 $Q \in \mathscr{D}^{t}$ 使得 $B \subset Q$，且 $\mu(Q) \lesssim \mu(B)$。于是

$$\operatorname{supp}(a) \subset B \subset Q,\ \|a\|_{\infty} \leqslant (\mu(B))^{-\frac{1}{p}} \lesssim (\mu(Q))^{-\frac{1}{p}},\ \int_{Q} ad\mu = 0,$$

这意味着 a 是 $H^{p}{}_{\mathrm{at}}{}_{\mathscr{D}^{t}}(\mu)$ 中一个简单的 (p,∞)-原子的常数倍。因此

$$H^{p}_{\mathrm{at}}(\mu) \subset \sum_{t=1}^{K} H^{p}_{\mathrm{at},\mathscr{D}^{t}}(\mu). \tag{6.10}$$

对于任意 $t = 1$、2、$\cdots$、K，以及 $H^{p}{}_{\mathrm{at}}{}_{\mathscr{D}^{t}}(\mu)$ 中给定的简单 (p,∞)-原子 b，存在 $Q \in \mathscr{D}^{t}$ 使得

$$\operatorname{supp}(b) \subset Q,\ \|b\|_{\infty} \leqslant (\mu(Q))^{-\frac{1}{p}},\ \int_{Q} bd\mu = 0.$$

根据定理 6.1，存在一个球 B 使得 $Q \subset B$ 且 $\mu(Q) \gtrsim \mu(B)$。因此

$$\operatorname{supp}(b) \subset Q \subset B,\ \|b\|_{\infty} \leqslant (\mu(Q))^{-\frac{1}{p}} \lesssim (\mu(B))^{-\frac{1}{p}},\ \int_{B} bd\mu = 0,$$

这意味着 b 的倍数也是 $H^{p}{}_{\mathrm{at}}(\mu)$ 中的一个 (p,∞)-原子，因此

$$\sum_{t=1}^{K} H^{p}_{\mathrm{at},\mathscr{D}^{t}}(\mu) \subset H^{p}_{\mathrm{at}}(\mu). \tag{6.11}$$

为完成该定理的证明，结合（6.10）和（6.11）。 □

注 6.7。 定理 5.5 可由推论4.2、命题 6.4 和定理6.6立即推出，从而简化了 Coifman 和 Weiss 在 [7] 中的原始证明。

利用对偶性和定理 6.6，我们重新得到以下 [13], 结果，它推广了 Mei 的一项结果 [17]:

$$BMO(\mu) = \bigcap_{t=1}^{K} BMO^{\mathscr{D}^{t}}(\mu). \tag{6.12}$$

现在我们将为 $\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)$ $(0 < p < 1)$ 建立一个类似的结果。

定理 6.8。对于 $0 < p < 1$,

$$\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu) = \bigcap_{t=1}^{K} \Lambda_{2}^{\mathscr{D}^{t}}(\alpha_p).$$

证明。 由定理 6.1可知，对于任意 $Q \in \mathscr{D}^{t}$（以及 $t = 1,\ 2,\ \cdots,\ K$），存在一个球 B使得 $Q \subset B$ 并且 $\mu(B) \lesssim \mu(Q)$。若 $f \in \mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)$，则对于任意 $x,\ y \in Q$，有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \|f\|_{\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)} \mu(B)^{\alpha_p} \lesssim \|f\|_{\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)} \mu(Q)^{\alpha_p}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\|f\|_{\Lambda_2^{\mathscr{D}^t}(\alpha_p)} &\leqslant \sup_{Q\in\mathscr{D}^t}(\mu(Q))^{-\frac{1}{2}-\alpha_p}\left(\mu(Q)^{-2}\int_Q\left(\int_Q|f(x)-f(y)|d\mu(y)\right)^2 d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant \sup_{Q\in\mathscr{D}^t}(\mu(Q))^{-\frac{1}{2}-\alpha_p}\left(\int_Q\|f\|^2_{\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)}\mu(Q)^{2\alpha_p}\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\lesssim \|f\|_{\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)},\end{aligned}$$

由此可得

$$\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)\subset\bigcap_{t=1}^K\Lambda_2^{\mathscr{D}^t}(\alpha_p). \tag{6.13}$$

反过来，设 $f\in\bigcap_{t=1}^K\Lambda_2^{\mathscr{D}^t}(\alpha_p)$. 对于 $Q\in\mathscr{D}^t$，由定理 4.4，

$$|f(x)-f_Q|\lesssim\mu(Q)^{\alpha_p}\|f\|_{\Lambda_2^{\mathscr{D}^t}(\alpha_p)}\quad\forall x\in Q,$$

这意味着，对于任意 $x,y\in Q$,

$$|f(x)-f(y)|\lesssim\mu(Q)^{\alpha_p}\|f\|_{\Lambda_2^{\mathscr{D}^t}(\alpha_p)}. \tag{6.14}$$

对于任意球 $B\subset\Omega$，由定理6.5，存在 t 和 $Q\in\mathscr{D}^t$ 使得 $B\subset Q$ 且$\mu(Q)\lesssim\mu(B)$. 那么对于任意 x， $y\in B$，由（6.14）

$$|f(x)-f(y)|\lesssim\mu(B)^{\alpha_p}\|f\|_{\Lambda_2^{\mathscr{D}^t}(\alpha_p)}.$$

Thus

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{\alpha_p}}\lesssim\sum_{t=1}^K\|f\|_{\Lambda_2^{\mathscr{D}^t}(\alpha_p)},$$

这意味着

$$\bigcap_{t=1}^K\Lambda_2^{\mathscr{D}^t}(\alpha_p)\subset\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu). \tag{6.15}$$

该定理由（6.13）和（6.15）得出。 □

注 6.9。 定理 6.6 和定理 6.8 给出了定理 5.6 的一个简单证明；该定理最初由 Coifman 和 Weiss 提出 [7]:

$$(H^p_{\mathrm{at}}(\mu))^*=\left(\sum_{t=1}^K H^p_{\mathrm{at},\mathscr{D}^t}(\mu)\right)^*=\bigcap_{t=1}^K(H^p_{\mathrm{at},\mathscr{D}^t}(\mu))^*=\bigcap_{t=1}^K\Lambda_2^{\mathscr{D}^t}(\alpha_p)=\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu).$$

7. Bilinear decompositions for dyadic martingales on homogeneous spaces

本节着重讨论上一节引入的齐次空间上二鞅空间中元素的乘积所产生的双线性分解。在齐次空间的情形下，由于其拟度量和测度，二鞅的表现不如概率空间中的鞅，相关分析也更加复杂。

在§7.1 中，我们证明齐次空间上的适当广义 H¨older 型不等式（见下文引理7.2 和7.4 ）。随后，我们引入一类$\Lambda_1^{\mathscr{D}}{}_{,+}(\alpha_p)$ 和$BMO^{\mathscr{D}}(\mu)$的逐点乘子；见下文定理7.5。利用定理7.5，我们定义二进制

齐次空间上的鞅 Hardy 空间及其对偶空间，然后在§7.2 中，我们在齐次空间的框架下建立第3 节和第4 节结果的类似结论。

7.1. 广义 H¨older 型不等式。设 $0 < p \leqslant 1$ 和 $\mathscr{D}$ 是一个二进制系统，其构造如定理 6.1所述。鞅 Musielak–Orlicz Hardy 空间 $H_{\mathscr{D}}^{\Psi_p}(\mu)$ 由所有定义在 f上的可测函数组成，$(\Omega\ \mathcal{F},\ \mu)$ 满足 $s(f) \in L^{\Psi_p}(\Omega)$ 其中 $O \in \Omega$ 是一个固定点，并且

$$\Psi_1(x,t) := \frac{t}{\log(e + d(x,O)) + \log(e+t)},$$
$$\Psi_p(x,t) := \frac{t}{1 + \{t[1+\mu(B(O,d(x,O)))]\}^{1-p}} \quad (0 < p < 1).$$

注意，$L^{\Psi_p}(\Omega)$ 是一个准赋范空间。

令 $M: = (C_\mu + 1)\log(e + d(x,\ O))$。由（2.5）可得

$$\Psi_1(x,st) \lesssim (e+d(x,O))^{-(C_\mu+1)} e^t + s \lesssim w(x)e^t + s, \quad \text{for all } x \in \Omega, s,t > 0, \tag{7.1}$$

其中 $w : \Omega \to \mathbb{R}_+$ 是一个权函数，且满足

$$w(x) \lesssim \min\left\{1, d(x,O)^{-(C_\mu+1)}\right\}. \tag{7.2}$$

设 $Q^0 \in \mathcal{F}_0$是满足 $O \in Q^0$的二进立方体。对于 $g \in BMO^{\mathscr{D}}(\mu)$，定义

$$\|g\|_{BMO_+^{\mathscr{D}}(\mu)} := \sup_{\alpha\in\mathcal{A}_0} \frac{|g_{Q_\alpha^0} - g_{Q^0}|}{\log(e + d(z_\alpha^0, O))} + |g_{Q^0}| + \|g\|_{BMO^{\mathscr{D}}(\mu)},$$

其中 $Q_\alpha^0 \in \mathcal{F}_0$ 是一个二进立方体，其中心为 z_α^0，且 $\mathcal{A}_0$ 是定理6.1中的指标集。记 $BMO_+^{\mathscr{D}}(\mu)$为由所有满足 $g \in BMO^{\mathscr{D}}(\mu)$的 $\|g\|_{BMO_+^{\mathscr{D}}(\mu)} < \infty$组成的空间。不难验证，$\|\cdot\|_{BMO_+^{\mathscr{D}}(\mu)}$是 $BMO_+^{\mathscr{D}}(\mu)$上的范数。

注 7.1. 若我们考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的二进鞅，取适当的立方体 Q^0，即可证明若 $g \in BMO^{\mathscr{D}}(\mu)$，则 $g \in BMO_+^{\mathscr{D}}(\mu)$。注意，若 $g \in BMO(\mu)$，则 $g \in BMO_+^{\mathscr{D}}(\mu)$。此外，

$$\|g\|_{BMO_+^{\mathscr{D}}(\mu)} \lesssim \|g\|_{BMO(\mu)} + |g_{Q^0}|.$$

W我们现在为 $L^1(\Omega\ \mathcal{F}、\ \mu)$ 和 $BMO_+^{\mathscr{D}}(\mu$ 引入以下广义 Hölder 不等式).

引理 7.2. 若 $f \in L^1(\Omega\ \mathcal{F}、\ \mu)$ 和 $g \in BMO_+^{\mathscr{D}}(\mu)$，则 $f \cdot g \in L^{\Psi_1}(\Omega)$。此外，

$$\|fg\|_{L^{\Psi_1}(\Omega)} \lesssim \|f\|_1 \|g\|_{BMO_+^{\mathscr{D}}(\mu)}. \tag{7.3}$$

证明。不失一般性，假设 $\|f\|_1 \leqslant 1$、$\|g\|_{BMO_+^{\mathscr{D}}(\mu)} \leqslant 1$ 和 $g_{Q^0} = 0$。只需证明

$$\int_\Omega \Psi_1(x, |f(x)g(x)|)d\mu \lesssim 1.$$

设 $S_k: = B(O,\ C_0\delta^k)\backslash B(O,\ C_0\delta^{k+1})$ 对于 $k < 0$ 且 $S_0: = B(O,\ C_0)$，其中 $\delta \in (0,1)$ 是定理 6.1中的常数。于是，对每个 $k \leqslant 0$，都存在一个有限指标子集 $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{A}_0$ 使得 $B(O, C_0\delta^k) \subset \bigcup Q_\alpha^0$（其中 $Q_\alpha^0 \in \mathcal{F}_0$）并且$_{\alpha\in\mathcal{B}_k}$

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{B}_k} \mu\left(Q_\alpha^0\right) = \mu\left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{B}_k} Q_\alpha^0\right) \leqslant \mu\left(B(O, 2A_0C_0\delta^k)\right) \lesssim \delta^{C_\mu k}.$$

取 $s=\nu^{-1}|f(x)|$, $t=\nu|g(x)|$ 在（7.1）中，有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Psi_1(x,|f(x)g(x)|)d\mu &= \sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{\alpha\in\mathcal{B}_k}\int_{S_k\cap Q_\alpha^0}\Psi_1(x,|f(x)g(x)|)d\mu\\ &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{\alpha\in\mathcal{B}_k}\int_{S_k\cap Q_\alpha^0} w(x)e^{\nu|g(x)|}d\mu+\nu^{-1}\|f\|_1.\end{aligned}$$

因此，

$$\int_\Omega \Psi_1(x,|f(x)g(x)|)d\mu \lesssim T_1+\nu^{-1}\|f\|_1, \tag{7.4}$$

其中

$$T_1:=\sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{\alpha\in\mathcal{B}_k}\int_{S_k\cap Q_\alpha^0} w(x)e^{\nu\left|g(x)-g_{Q_\alpha^0}\right|}e^{\nu\left|g_{Q_\alpha^0}\right|}d\mu.$$

令 $\nu:=\frac{\min\{\kappa,1\}}{2}>0$，（其中 κ 在定理 2.11中定义），由（7.2）及定理 4.1，可得

$$\begin{aligned}T_1&\lesssim \sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{\alpha\in\mathcal{B}_k}\frac{\mu(Q_\alpha^0)\left(e+d(z_\alpha^0,O)\right)^{\frac{1}{2}}}{\delta^{(k+1)(C_\mu+1)}}\\ &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{\alpha\in\mathcal{B}_k}\frac{\mu(Q_\alpha^0)\delta^{\frac{k}{2}}}{\delta^{(k+1)(C_\mu+1)}}\lesssim\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{\delta^{C_\mu k}\delta^{\frac{k}{2}}}{\delta^{C_\mu k+k}}\\ &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{0}\delta^{-\frac{1}{2}k},\end{aligned}$$

从而

$$T_1\lesssim 1. \tag{7.5}$$

结合（7.4）、（7.5）以及 $\nu^{-1}\|f\|_1\lesssim 1$这一事实，证明完毕。 □

我们考虑 $0<p<1$ 的情形。定义

$$\|g\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}:=\sup_{\alpha\in\mathcal{A}_0}\frac{|g_{Q_\alpha^0}-g_{Q^0}|}{1+\mu\left\{B\left(O,d(z_\alpha^0,O)\right)\right\}^{\alpha_p}}+|g_{Q^0}|+\|g\|_{\Lambda_1^{\mathscr{D}}(\alpha_p)},$$

用 $\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)$ 表示由所有满足 $\|g\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}<\infty$ 的 $g\in\Lambda_1^{\mathscr{D}}(\alpha_p)$ 构成的空间。容易验证，$\|\cdot\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}$ 是 $\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)$ 上的一个范数。

注 7.3. 若考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的二进鞅，取适当的立方体 Q^0，可以证明，若 $g\in\Lambda_1^{\mathscr{D}}(\alpha_p)$，则 $g\in\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)$。注意，若 $g\in\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)$，则 $g\in\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)$。此外，

$$\|g\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}\lesssim\|g\|_{\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)}+|g_{Q^0}|.$$

接下来，我们给出适用于 $0<p<1$ 的 Ω $\mathcal{F}$、μ) 和 $\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)$ 的广义 H¨older 不等式。

引理 7.4. 若 $f\in L^p(\Omega\ \mathcal{F},\mu)$ 且 $g\in\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)$ 对于 $0<p<1$ 成立，则 $f\cdot g\in L^{\Psi_p}(\mu)$。此外，

$$\|fg\|_{L^{\Psi_p}(\Omega)}\lesssim\|f\|_p\|g\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}. \tag{7.6}$$

证明. 不失一般性，假设 $\|f\|_p \leqslant 1$, $\|g\|_{\Lambda^{\mathscr{D}}_{1,+}(\alpha_p)} \leqslant 1$ 且 $g_{Q^0} = 0$。只需证明

$$\int_\Omega \Psi_p(x, |f(x)g(x)|)d\mu \lesssim 1.$$

取与上文相同的集合族 $\{S_k\}_{k\leqslant 0}$。由定理 4.4，我们知道对于 $x \in Q^0_\alpha$，

$$\begin{aligned}|g(x)| = |g(x) - g_{Q^0}| &\leqslant \left|g(x) - g_{Q^0_\alpha}\right| + \left|g_{Q^0_\alpha} - g_{Q^0}\right| \\ &\leqslant \left(\mu(Q^0_\alpha)\right)^{\alpha_p} + \mu\left\{B\left(O, d(z^0_\alpha, O)\right)\right\}^{\alpha_p} + 1 \\ &\lesssim \mu\left(B(O, 2A_0C_0\delta^k)\right)^{\alpha_p} + 1.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Psi_p(x, |f(x)g(x)|)d\mu &= \sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{\alpha\in\mathcal{B}_k}\int_{S_k\cap Q^0_\alpha} \frac{|g(x)||f(x)|}{1 + \{|g(x)||f(x)|\left[1 + \mu\left(B(O, d(x, O))\right)\right]\}^{1-p}}d\mu \\ &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{\alpha\in\mathcal{B}_k}\int_{S_k\cap Q^0_\alpha} \frac{|g(x)|^p|f(x)|^p}{1 + \mu\left(B(O, d(x, O))\right)^{1-p}}d\mu \\ &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{\alpha\in\mathcal{B}_k}\int_{S_k\cap Q^0_\alpha} \frac{\mu\left(B(O, 2A_0C_0\delta^k)\right)^{\alpha_p p} + 1}{\{1 + \mu\left(B(O, C_0\delta^{k+1})\right\}^{1-p}}|f(x)|^p d\mu \\ &\lesssim 1,\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

现在我们将给出第 3 节和第 4 节中关于齐性空间上二进鞅双线性分解结果的类似结论。为此，我们首先需要定义鞅 Hardy 空间与其对偶空间之间的乘积。与概率情形一样，我们将乘积分布意义下定义如下：对于 $0 < p < 1$,

$$\langle f \times g, h\rangle := \langle h \cdot g, f\rangle, \quad f \in H^p_{\mathrm{at},\mathscr{D}}(\mu),\ g \in \Lambda^{\mathscr{D}}_{1,+}(\alpha_p),$$

其中 h 是一个测试函数，使得 $h \cdot g$ 属于 $\Lambda^{\mathscr{D}}_{1,+}(\alpha_p)$。对于 $p = 1$，我们可以类似地定义 $H^1_{\mathrm{at},\mathscr{D}}(\mu)$ 与 $BMO^{\mathscr{D}}(\mu)$ 之间的乘积。为此，我们需要引入 $\Lambda^{\mathscr{D}}_{1,+}(\alpha_p)$ 和 $BMO^{\mathscr{D}}(\mu)$的一些逐点乘子。

用 $\mathcal{H}(\alpha_p)$ $(0 < p \leqslant 1)$ 表示测试函数空间。若可测函数 h 满足以下性质，则称其为测试函数:

$$|h(x)| \lesssim \frac{1}{(1 + \mu(B(O, d(x, O)))^{\alpha_p})\log(e + d(x, O))}, \quad \forall x \in \Omega, \tag{7.7}$$

and

$$|h(y) - h(z)| \lesssim \frac{\mu(B)^{\alpha_p}}{(1 + \mu[B(O, 1 + r + d(c_B, O))]^{\alpha_p})\log(e + r + d(c_B, O))} \tag{7.8}$$

只要 y、z 均包含在以 c_B 为中心、半径为 $r \leqslant {}^{d(c_B}{}_{2A_0}{}^{O)} + 1$ 中。

显然， $\mathcal{H}(\alpha_p) \subset L^\infty(\Omega)$。下面的定理表明，若 $h \in \mathcal{H}(\alpha_p)$，则 h 是 $\Lambda^{\mathscr{D}}_{1,+}(\alpha_p)$ 的逐点乘子。

定理 7.5. 对于 $0 < p < 1$ 以及任意二进制系统 $\mathscr{D}$， $\mathcal{H}(\alpha_p)$ 是 $\Lambda^{\mathscr{D}}_{1,+}(\alpha_p)$ 的逐点乘子空间。对于 $p = 1$， $\mathcal{H}(0)$ 是 $BMO^{\mathscr{D}}_+(\mu)$ 的逐点乘子空间。更确切地说，对于任意 $g \in \Lambda^{\mathscr{D}}_{1,+}(\alpha_p)$ 和 $h \in \mathcal{H}(\alpha_p)$, 我们有

$$\|g \cdot h\|_{\Lambda^{\mathscr{D}}_{1,+}(\alpha_p)} \lesssim \|g\|_{\Lambda^{\mathscr{D}}_{1,+}(\alpha_p)}\left(\|h\|_{L^\infty(\Omega)} + 1\right),$$

并且对于任意 $g\in BMO_{+}^{\mathscr{D}}(\mu)$ 和 $h\in\mathcal{H}(0)$，我们有

$$\|g\cdot h\|_{BMO_{+}^{\mathscr{D}}(\mu)}\lesssim\|g\|_{BMO_{+}^{\mathscr{D}}(\mu)}\left(\|h\|_{L^{\infty}(\Omega)}+1\right).$$

证明。首先，我们考虑以下情形 $0<p<1$。假设 $g\in\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)$ 且 $h\in\mathcal{H}(\alpha_p)$。根据 [20], 只需证明

$$\sup_{Q}\frac{|g_Q|}{\mu(Q)^{\alpha_p+1}}\left(\int_Q|h(x)-h_Q|dx\right)<\infty, \tag{7.9}$$

其中，Q 遍历 $\mathscr{D}$中的所有二进立方体。

若对于某个 $\beta\in\mathcal{A}_0$有 $Q\subset Q_\beta^0$，则存在一族立方体 $Q=Q_0\subset Q_1\subset\cdots\subset Q_N=Q_\beta^0$，并且存在一个通用常数 $0<\delta^{'}<1$，使得 $\mu(Q_{k-1})\leqslant\delta^{'}\mu(Q_k)$。因此

$$\begin{aligned}|g_Q-g_{Q_\beta^0}|&\leqslant\sum_{k=1}^{N}|g_{Q_k}-g_{Q_{k-1}}|\lesssim\sum_{k=1}^{N}\mu(Q_k)^{\alpha_p}\|g\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}\\&\lesssim\|g\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}\sum_{k=1}^{N}\int_{\mu(Q_{k-1})}^{\mu(Q_k)}t^{\alpha_p-1}dt\\&\lesssim\mu(Q_\beta^0)^{\alpha_p}\|g\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}.\end{aligned}$$

类似地，若 $Q_\beta^0\subset Q$，则有

$$|g_Q-g_{Q_\beta^0}|\lesssim\mu(Q)^{\alpha_p}\|g\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}.$$

根据定理 6.1，存在一个球 B，其中心为 c_B，半径为 r，使得 $Q\subset B$ 且$\mu(B)\lesssim\mu(Q)$。

若 $Q_\beta^0\subset Q$ 且 $r>\frac{d(O,c_B)}{2A_0}+1$，则对任意 $x\in B(O,r)$，有 $d(c_B,x)\leqslant A_0(d(c_B,O)+d(O,x))<(2A_0^2+A_0)r$。于是 $\mu(Q)\gtrsim\mu(B)\gtrsim C_\mu^{-(2A_0^2+A_0)}\mu\left(B(O,r)\right)\gtrsim 1$。类似地，我们还有 $d(z_\beta^0,O)<(2A_0^2+A_0)r$ 以及 $\mu\left\{B\left(O,d(z_\beta^0,O)\right)\right\}\lesssim\mu(B)\lesssim\mu(Q)$。因此

$$\begin{aligned}\frac{|g_Q|}{\mu(Q)^{\alpha_p+1}}\left(\int_Q|h(x)-h_Q|dx\right)&\lesssim\frac{|g_Q-g_{Q_\beta^0}|+|g_{Q_\beta^0}-g_{Q^0}|+|g_{Q^0}|}{\mu(Q)^{\alpha_p}}\cdot\|h\|_{L^{\infty}(\Omega)}\\&\lesssim\frac{\mu(Q)^{\alpha_p}+\mu\left\{B\left(O,d(z_\beta^0,O)\right)\right\}^{\alpha_p}+1}{\mu(Q)^{\alpha_p}}\cdot\|g\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}\|h\|_{L^{\infty}(\Omega)}\\&\lesssim\|g\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}\|h\|_{L^{\infty}(\Omega)}.\end{aligned}$$

若 $Q_\beta^0\subset Q$ 且 $r\leqslant\frac{d(O,c_B)}{2A_0}+1$，则对任意 $x\in B$，有 $d(x,O)\leqslant A_0(d(O,c_B)+r)$，进而$\mu(Q)\lesssim\mu\left(B(O,A_0(d(O,c_B)+r)\right)$。因此

$$\begin{aligned}\frac{|g_Q|}{\mu(Q)^{\alpha_p+1}}\left(\int_Q|h(x)-h_Q|dx\right)&\lesssim\frac{|g_Q-g_{Q_\beta^0}|+|g_{Q_\beta^0}-g_{Q^0}|+|g_{Q^0}|}{\mu(Q)^{\alpha_p+1}}\frac{\mu(B)^{\alpha_p+1}}{(1+\mu[B(O,1+r+d(O,c_B))])^{\alpha_p}}\\&\lesssim\frac{\left(\mu(Q)^{\alpha_p}+\mu\left\{B\left(O,d(z_\beta^0,O)\right)\right\}^{\alpha_p}+1\right)\|g\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}}{(1+\mu[B(O,1+r+d(O,c_B))])^{\alpha_p}}\\&\lesssim\|g\|_{\Lambda_{1,+}^{\mathscr{D}}(\alpha_p)}.\end{aligned}$$

若 $Q\subset Q_\beta^0$，由定理6.1，我们可以选取足够小的 C_0，使得 $C_1=2A_0C_0\leqslant 1$，于是 $r\leqslant C_1\leqslant\frac{d(c_B,O)}{2A_0}+1$。对于任意 $x\in Q_\beta^0$，我们有 $d(O,x)\leqslant A_0(d(O,z_\beta^0)+C_1)$。于是

$$\mu(Q_\beta^0)\lesssim\mu\left\{B\left(O,A_0(d(O,z_\beta^0)+C_1)\right)\right\}.$$

通过类似于上述计算的推导，我们得到所需结果。

结合上述估计，我们完成了对 $0 < p < 1$ 的证明。 $p = 1$ 的情形类似。□

注7.6。注意，在定理7.5中，二进制系统 $\mathscr{D}$ 是任意的。因此，由定理6.8 和（6.12），我们得出 $\mathcal{H}(\alpha_p)$ 是 $\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)$ 的逐点乘子空间，而 $\mathcal{H}(0)$ 是 $BMO(\mu)$的逐点乘子空间。

7.2. 双线性分解。设 $f \in H^1_{\mathscr{D}}(\mu), g \in BMO^{\mathscr{D}}_+(\mu)$ 或 $f \in H^p_{\mathscr{D}}(\mu), g \in \Lambda^{\mathscr{D}}_{1,\,+}(\alpha_p), 0 < p < 1$。

记 $\mathcal{H}^p_{\mathscr{D},\,\text{有限}}(\mu)$ $(0 < p \leqslant 1)$ 为由所有可写成有限个简单 (p,∞)-原子的函数组成的线性空间。因此，若 $f \in \mathcal{H}^p_{\mathscr{D},\,\text{有限}}(\mu)$，$f$ 局部有支集，$f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 且 $\int_\Omega f d\mu = 0$。注意，$\mathcal{H}^p_{\mathscr{D},\,\text{有限}}(\mu)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{H^p_{\mathscr{D}}(\mu)}$ 在 $H^p_{\mathscr{D}}(\mu)$ 中稠密。

下文中，我们只考虑 $f \in \mathcal{H}^p_{\mathscr{D},\text{fin}}(\mu)$ 的情形。此时 $f \cdot g \in L^1(\Omega)$，并且可以写成

$$f \cdot g = \Pi_1(f,g) + \Pi_2(f,g) + \Pi_3(f,g), \tag{7.10}$$

其中

$$\Pi_1(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} d_k f d_k g, \quad \Pi_2(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} f_{k-1} d_k g \quad \text{and} \quad \Pi_3(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} g_{k-1} d_k f.$$

定理 7.7。我们有以下结论：

(1) Π_1 是从 $H^1_{\mathscr{D}}(\mu) \times BMO^{\mathscr{D}}_+(\mu)$ 到 $L^1(\Omega)$ 的双线性有界算子；当 $0 < p < 1$ 时，Π_1 是从 $H^p_{\mathscr{D}}(\mu) \times \Lambda^{\mathscr{D}}_{1,+}(\alpha_p)$ 到 $L^1(\Omega)$ 的双线性有界算子。(2) Π_2 是从 $H^1_{\mathscr{D}}(\mu) \times BMO^{\mathscr{D}}_+(\mu)$ 到 $H^1_{\mathscr{D}}(\mu)$ 的双线性有界算子；当 $0 < p < 1$ 时，Π_2 是从 $H^p_{\mathscr{D}}(\mu) \times \Lambda^{\mathscr{D}}_{1,+}(\alpha_p)$ 到 $H^1_{\mathscr{D}}(\mu)$ 的双线性有界算子。(3) Π_3 是从 $H^1_{\mathscr{D}}(\mu) \times BMO^{\mathscr{D}}_+(\mu)$ 到 $H^{\Psi_1}_{\mathscr{D}}(\mu)$ 的双线性有界算子；当 $0 < p < 1$ 时，Π_3 是从 $H^p_{\mathscr{D}}(\mu) \times \Lambda^{\mathscr{D}}_{1,+}(\alpha_p)$ 到 $H^{\Psi_p}_{\mathscr{D}}(\mu)$ 的双线性有界算子。

证明。对于 Π_1 和 Π_2，我们可以仿照定理 1.1 证明中相应部分的论证。至于 Π_3，我们也可以仿照定理 1.1 证明中相应部分的论证；在齐次情形下，需要应用引理 7.2 和引理 7.4。细节从略。□

注 7.8。对于 Π_1和 Π_2，条件 $H^1_{\mathscr{D}}(\mu) \times BMO^{\mathscr{D}}_+(\mu)$和 $H^p_{\mathscr{D}}(\mu) \times \Lambda^{\mathscr{D}}_{1,\,+}(\alpha_p)$实际上可以分别替换为 $H^1_{\mathscr{D}}(\mu) \times BMO^{\mathscr{D}}(\mu)$和 $H^p_{\mathscr{D}}(\mu) \times \Lambda^{\mathscr{D}}_1(\alpha_p)$。

8. Applications to Homogeneous spaces

本节第一部分将证明，$H^{\Psi_p}_{\mathscr{D}}(\mu)$ 对于$0 < p < 1$存在原子分解，这使我们能够在齐次空间上整合若干相邻的二进制系统。

给定 Ω 上的二进制系统 $\mathscr{D}$，我们定义如下二进制 H^{Ψ_p} at $\mathscr{D}$-原子。

定义 8.1. 若可测函数 a 满足以下条件，则称其为 H^{Ψ_p} at $\mathscr{D}$-原子：

(i) $\operatorname{supp}(a) \subset Q$，其中 $Q \in \mathscr{D}$ 是一个立方体；(ii) $\int_\Omega a d\mu = 0$；(iii) $\|a\|_\infty \leqslant \|1_Q\|^{-1}_{L^{\Psi_p}(\Omega)}$。

原子二进制鞅 Musielak–Orlicz Hardy 空间 H^{Ψ_p} 在 $\mathscr{D}(\mu)$ $(0 < p < 1)$ 中的定义方式类似于（5.5）和（5.6）。我们先引入空间 $BMO^{\mathscr{D}}_{\Psi_p}(\mu)$，它是定义在有限个原子之和上的连续线性泛函所构成的子空间。

定义 8.2. 若局部可积函数 g 是与二进制系统 $\mathscr{D}$ 相关的二进制$BMO^{\mathscr{D}}_{\Psi_p}(\mu)$ 函数，则称其为二进制 $BMO^{\mathscr{D}}_{\Psi_p}(\mu)$ 函数。

$$\|g\|_{BMO^{\mathscr{D}}_{\Psi_p}(\mu)} := \sup_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{Q\in\mathcal{F}_k}\frac{1}{\|1_Q\|_{L^{\Psi_p}(\Omega)}}\int_Q |g(x)-g_k(x)|dx<\infty.$$

接下来，我们定义原子 Musielak–Orlicz 鞅 Hardy 空间 $H^{\Psi_p}{}_{\mathrm{at}}{}_{\mathscr{D}}(\mu)$ 如下:

$$H^{\Psi_p}_{\mathrm{at},\mathscr{D}}(\mu):=$$
$$\left\{f\in\left(BMO^{\mathscr{D}}_{\Psi_p}(\mu)\right)^*:\ f=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i a_i,\ \text{where } a_i \text{ is an } H^{\Psi_p}_{\mathrm{at},\mathscr{D}}(\mu)\text{-atom supported on a cube } Q_i.\right\},$$

其中

$$\sum_{i=0}^{\infty}\int_{Q_i}\Psi_p(x,|\lambda_i|\|a_i\|_\infty)d\mu<\infty.$$

此外,

$$\|f\|_{H^{\Psi_p}_{\mathrm{at},\mathscr{D}}(\mu)}:=\inf\left\{\rho>0:\sum_{i=0}^{\infty}\int_{Q_i}\Psi_p(x,\rho^{-1}|\lambda_i|\|a_i\|_\infty)d\mu\leqslant 1\right\}$$

按照 [28], 中的论证，可以证明，对于 $0<p<1$

$$H^{\Psi_p}_{\mathscr{D}}(\mu)=H^{\Psi_p}_{\mathrm{at},\mathscr{D}}(\mu). \tag{8.1}$$

现在，我们将在齐次空间 Ω 上引入原子 Musielak–Orlicz Hardy 空间 $H^{\Psi_p}{}_{\mathrm{at}}(\mu)$ $(0<p\leqslant 1)$。首先，我们给出 $H^{\Psi_p}{}_{\mathrm{at}}(\mu)$ 中原子的定义。

定义 8.3. 若可测函数 $a(x)$ 是一个 $H^{\Psi_p}{}_{\mathrm{at}}(\mu)$-原子，则

(i) $\mathrm{supp}(a)\subset B$，其中 $B\subset\Omega$ 是一个球；(ii) $\int_\Omega a d\mu=0$；(iii) $\|a\|_\infty\leqslant\|1_B\|^{-1}_{L^{\Psi_p}(\Omega)}$。

定义 8.4. 若局部可积函数 g 是一个 $BMO_{\Psi_p}(\mu)$ 函数，则

$$\|g\|_{BMO_{\Psi_p}(\mu)}:=\sup_B\frac{1}{\|1_B\|_{L^{\Psi_p}(\Omega)}}\int_B|g(x)-g_B|dx<\infty,$$

其中 B 遍历 Ω 中的所有球。

定义 8.5. 原子 Musielak–Orlicz Hardy 空间 $H^{\Psi_p}{}_{\mathrm{at}}(\mu)$ $(0<p\leqslant 1)$ 定义如下:

$$H^{\Psi_p}_{\mathrm{at}}(\mu):=$$
$$\left\{f\in\left(BMO_{\Psi_p}(\mu)\right)^*:f=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i a_i,\ \text{where } a_i \text{ is an } H^{\Psi_p}_{\mathrm{at}}(\mu)\text{-atom supported on a ball } B_i\right\},$$

其中

$$\sum_{i=0}^{\infty}\int_{B_i}\Psi_p(x,|\lambda_i|\|a_i\|_\infty)d\mu<\infty.$$

此外,

$$\|f\|_{H^{\Psi_p}_{\mathrm{at}}(\mu)}:=\inf\left\{\rho>0:\sum_{i=0}^{\infty}\int_{B_i}\Psi_p(x,\rho^{-1}|\lambda_i|\|a_i\|_\infty)d\mu\leqslant 1\right\}.$$

设 $\mathscr{D}^t$ $(1 \leqslant t \leqslant K)$ 为定理6.5中的相邻系统。仿照定理6.6的证明，可得如下结论:

引理 8.6. 对于 $0 < p < 1$, H^{Ψ_p}处 $(\mu) = H^{\Psi_p}$ 处 $\mathscr{D}^1(\mu) + H^{\Psi_p}$ 处 $\mathscr{D}^2(\mu) + \cdots + H^{\Psi_p}$ 处 $\mathscr{D}^K(\mu)$。

证明. 只需证明任意一个二进制 $H^{\Psi_p}_{\mathscr{D}^t}$-原子 a 都是某个 $H^{\Psi_p}(\mu)$-原子的常数倍，并且任意一个 $H^{\Psi_p}(\mu)$-原子 b 都是某个二进制 $H^{\Psi_p}_{\mathscr{D}^t}$-原子的常数倍。

若 $B := B(x_0, r)$，则将球 $B(x_0, Dr)$ 记为 DB，其中 $D \geqslant 1$。记 $d := d(x_0, O)$。下文中，$C(D, p, A_0, C_\mu)$ 表示一个依赖于 D, p, A_0, C_μ 且可能逐行变化的常数。我们首先证明，若

$$\int_B \frac{1}{1 + [1 + \mu(B(O, d(x, O)))]^{1-p}} d\mu(x) = 1,$$

then

$$\int_{DB} \frac{1}{1 + [1 + \mu(B(O, d(x, O)))]^{1-p}} d\mu(x) \leqslant C(D, p, A_0, C_\mu). \tag{8.2}$$

注意到

$$\begin{aligned} 1 &= \int_B \frac{1}{1 + [1 + \mu(B(O, d(x, O)))]^{1-p}} d\mu(x) \\ &\geqslant \frac{\mu(B)}{\sup\limits_{x \in B} \{1 + [1 + \mu(B(O, d(x, O)))]^{1-p}\}} \\ &\geqslant \frac{\mu(B)}{1 + [1 + \mu(B(O, A_0(d + r)))]^{1-p}}, \end{aligned}$$

这意味着

$$\mu(B) \leqslant 1 + [1 + \mu(B(O, A_0(d + r)))]^{1-p}.$$

如果 $d \leqslant 2A_0 Dr$，则有

$$\begin{aligned} \mu(B) &\leqslant 1 + [1 + \mu(B(O, A_0(2A_0 D + 1)r))]^{1-p} \\ &\leqslant 1 + \{1 + \mu[B(x_0, A_0(A_0 + 1)(2A_0 D + 1)r)]\}^{1-p} \\ &\leqslant 1 + \left\{1 + [A_0(A_0 + 1)(2A_0 D + 1)]^{C_\mu} \mu(B)\right\}^{1-p}, \end{aligned}$$

因此 $\mu(B) \leqslant C(D、\ p、\ A_0、\ C_\mu)$.

Then

$$\int_{DB} \frac{1}{1 + [1 + \mu(B(O, d(x, O)))]^{1-p}} d\mu(x) \leqslant \mu(DB) \leqslant D^{C_\mu} \mu(B) \leqslant C(D, p, A_0, C_\mu). \tag{8.3}$$

若 $d > 2A_0Dr$，则

$$\begin{aligned}
&\int_{DB} \frac{1}{1+[1+\mu(B(O,d(x,O)))]^{1-p}} d\mu(x)\\
\leqslant &\frac{\mu(DB)}{\inf\limits_{x\in DB}\{1+[1+\mu(B(O,d(x,O)))]^{1-p}\}}\\
\leqslant &\frac{D^{C_\mu}\mu(B)}{1+[1+\mu(B(O,d/A_0-Dr))]^{1-p}},\\
\leqslant &\frac{D^{C_\mu}\{1+\mu[B(O,[A_0+1/(2D)]d)]\}^{1-p}+D^{C_\mu}}{1+\{1+\mu[B(O,d/(2A_0))]\}^{1-p}}\\
\leqslant &\frac{D^{C_\mu}\left\{1+[(2A_0+1/D)A_0]^{C_\mu}\mu[B(O,d/(2A_0))]\right\}^{1-p}}{1+\{1+\mu[B(O,d/(2A_0))]\}^{1-p}}+D^{C_\mu}.
\end{aligned}$$

因此

$$\int_{DB} \frac{1}{1+[1+\mu(B(O,d(x,O)))]^{1-p}} d\mu(x) \leqslant C(D,p,A_0,C_\mu) \tag{8.4}$$

将（8.3）与（8.4）结合，得到（8.2）。

假设 a 是一个 $H^{\Psi_p}(\mu)$-原子，其支集为 B。根据定理 6.5，存在 t 和一个立方体 $Q\in\mathscr{D}^t$ 使得 $B\subset Q$ 且 $\mathrm{diam}(Q)\leqslant Cr$，因此 $B\subset Q\subset CB$。

注意，$\mathrm{supp}(a)\subset Q$、$\int_Q a(x)d\mu(x)=0$ 和

$$\|1_Q\|_{L^{\Psi_p}(\mu)} \leqslant \|1_{CB}\|_{L^{\Psi_p}(\mu)} \leqslant C(C,p,A_0,C_\mu)\|1_B\|_{L^{\Psi_p}(\mu)},$$

这由（8.2）可得。因此

$$\|a\|_\infty \leqslant \|1_B\|^{-1}_{L^{\Psi_p}(\mu)} \lesssim \|1_Q\|^{-1}_{L^{\Psi_p}(\mu)},$$

这意味着 a 是一个支集包含于 Q 上的二进制 $H^{\Psi_p}_{\mathscr{D}^t}$-原子倍数。

对于任意 $t=1,\ 2\cdots,\ K$，假设 b是一个支集包含于 Q^k_β上的二进制 $H^{\Psi_p}_{\mathscr{D}^t}$-原子。根据定理 6.1，存在两个球，使得 $B(z^k_\beta,\ c_1\delta^k)\subset Q^k_\beta\subset B(z^k_\beta,\ C_1\delta^k)$。

因此 $\mathrm{supp}(b)\subset B(z^k_\beta,C_1\delta^k)$, $\int_{B(z^k_\beta,\ C_1\delta^k)} b(x)d\mu(x)=0$ 以及

$$\|1_{B(z^k_\beta,C_1\delta^k)}\|_{L^{\Psi_p}(\mu)} \leqslant C\left(\frac{C_1}{c_1},p,A_0,C_\mu\right)\|1_{B(z^k_\beta,c_1\delta^k)}\|_{L^{\Psi_p}(\mu)} \lesssim \|1_{Q^k_\beta}\|_{L^{\Psi_p}(\mu)},$$

这由（8.2）可得。因此，

$$\|b\|_\infty \leqslant \|1_{Q^k_\beta}\|^{-1}_{L^{\Psi_p}(\mu)} \lesssim \|1_{B(z^k_\beta,C_1\delta^k)}\|^{-1}_{L^{\Psi_p}(\mu)},$$

这意味着 b 是一个支集包含于 $B(z^k_\beta,C_1\delta^k)$ 上的二进制 H^{Ψ_p}-原子倍数。 □

注 8.7. 在 [11], Fu、Ma 和 Yang 通过大极大函数定义了另一类 Musielak–Orlicz Hardy 空间，并且还证明，当 $p\in(\frac{C_\mu}{C_\mu+1},1]$时，这些 Musielak–Orlicz Hardy 空间关于相应范数与 $H^{\Psi_{p_{\mathrm{at}}}}(\mu)$ 等价。

令 $B_1:=B(O,1)$。定义

$$\|g\|_{BMO_+(\mu)} := |g_{B_1}| + \|g\|_{BMO(\mu)},\quad \text{for } g\in BMO(\mu),$$

and

$$\|g\|_{\mathcal{L}_{+,\alpha}(\mu)} := |g_{B_1}| + \|g\|_{\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)},\quad \text{for } g\in \mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu).$$

因此，$\|\cdot\|_{BMO_+(\mu)}$和$\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{+,\ \alpha_p}(\mu)}$分别是 $BMO(\mu)$和 $\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)$上的准范数 y.

定理 8.8. 设 $0 < p < 1$ 和 $f \in H^p$ 属于(μ)。存在三个线性连续算子Π_1^f: $\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu) \to L^1(\Omega)$、$\Pi_2^f$: $\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu) \to H^1_{\rm at}(\mu)$ 和 Π_3^f: $\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu) \to H^{\Psi_p}$属于 (μ)，使得

$$f \cdot g = \Pi_1^f(g) + \Pi_2^f(g) + \Pi_3^f(g) \quad for\ all\ g \in \mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu),$$

其中 $\mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)$ 配备拟范数$\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{+,\ \alpha_p}(\mu)}$。

Pro由。令$f \in H^p$在(μ)。根据定理 6.6 存在 $f^t \in H^p_{\mathscr{D}^t}(\mu)$ $(t = 1,\ 2,\ \cdots,\ K)$ 使得 t $f = f^1 + f^2 + \cdots + f^K$，并且

$$\sum_{t=1}^{K} \|f^t\|_{H^p_{\mathscr{D}^t}(\mu)} \approx \|f\|_{H^p_{\rm at}(\mu)}.$$

定义 $\Pi_i^f(g) := \sum_{t=1}^{K} \Pi_i(f^t,\ g)$ 对于 $i = 1,\ 2,\ 3$ 和 $g \in \mathcal{L}_{\alpha_p}(\mu)$ (Π_i 定义如定理 7.7中）。则

$$f \cdot g = \Pi_1^f(g) + \Pi_2^f(g) + \Pi_3^f(g).$$

根据定理 7.7、定理6.6 和引理 8.6，我们有

$$\|\Pi_1^f(g)\|_1 \lesssim \sum_{t=1}^{K} \|\Pi_1(f^t, g)\|_1 \lesssim \sum_{t=1}^{K} \|f^t\|_{H^p_{\mathscr{D}^t}(\mu)} \|g\|_{\Lambda^{\mathscr{D}^t}_{1,+}(\alpha_p)} \lesssim \|f\|_{H^p_{\rm at}(\mu)} \|g\|_{\mathcal{L}_{+,\alpha_p}(\mu)},$$

$$\|\Pi_2^f(g)\|_{H^1_{\rm at}(\mu)} \lesssim \sum_{t=1}^{K} \|\Pi_2(f^t, g)\|_{H^1_{\mathscr{D}^t}(\mu)} \lesssim \sum_{t=1}^{K} \|f^t\|_{H^p_{\mathscr{D}^t}(\mu)} \|g\|_{\Lambda^{\mathscr{D}^t}_{1,+}(\alpha_p)} \lesssim \|f\|_{H^p_{\rm at}(\mu)} \|g\|_{\mathcal{L}_{+,\alpha_p}(\mu)},$$

$$\|\Pi_3^f(g)\|_{H^{\Psi_p}_{\rm at}(\mu)} \lesssim \sum_{t=1}^{K} \|\Pi_3(f^t, g)\|_{H^{\Psi_p}_{\mathscr{D}^t}(\mu)} \lesssim \sum_{t=1}^{K} \|f^t\|_{H^p_{\mathscr{D}^t}(\mu)} \|g\|_{\Lambda^{\mathscr{D}^t}_{1,+}(\alpha_p)} \lesssim \|f\|_{H^p_{\rm at}(\mu)} \|g\|_{\mathcal{L}_{+,\alpha_p}(\mu)}.$$

至此，证明完成。 □

备注 8.9. 若齐次空间 $(\Omega\ \mu)$ 满足反向倍增条件，则引理 8.6 对 $p = 1$成立。由此得到以下结论。

设 $f \in H^1_{\rm at}(\mu)$。存在三个线性连续算子 Π_1^f: $BMO(\mu) \to L^1(\Omega)$、Π_2^f: $BMO(\mu) \to H^1_{\rm at}(\mu)$ 和 Π_3^f: $BMO(\mu) \to H^{\Psi_1}$在 (μ)，使得

$$f \cdot g = \Pi_1^f(g) + \Pi_2^f(g) + \Pi_3^f(g) \quad \text{for all } g \in BMO(\mu),$$

其中 $BMO(\mu)$ 赋予范数 $\|\cdot\|_{BMO_+(\mu)}$。

致谢。感谢徐全华教授给予的宝贵讨论和建议。O.B. 和 Y.Z. 谨向徐教授表示感谢，感谢他在2022年3月 邀请他们访问贝桑松并给予热情款待。

我们还要感谢 Yong Jiao、Guangheng Xie、Dachun Yang 和 Dejian Zhou 与我们交流他们相关工作的情况。

References

[1] P. Auscher 和 T. Hyt¨onen. 齐次型空间中正则小波的标准正交基. 应用与计算调和分析 34 (2013), no. 2, 266–296；《齐次型空间中正则小波的标准正交基》的补遗. 应用与计算调和分析 39 (2015), no. 3, 568–569. [2] O. Bakas, S. Pott, S. Rodr´ıguez-L´opez 和 A. Sola. 关于 $H^{\log}$ 的札记：结构性质、二进变体及双线性 H^1-BMO 映射. 《数学档案》 60 (2022), no. 2, 231–275. [3] A. Bonami, J. Cao, L. D. Ky, L. Liu, D. Yang 和 W. Yuan. Hardy 空间与其对偶空间之间的乘法. 《纯粹与应用数学杂志》(9) 131 (2019), 130–170.

[4] A. Bonami, S. Grellier 和 L. D. Ky. 通过小波研究 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 与 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 中的副乘积及函数乘积. 《纯粹与应用数学杂志》(9) 97 (2012), no. 3, 230–241. [5] A. Bonami, T. Iwaniec, P. Jones 和 M. Zinsmeister. 关于 BMO 与 H^1中函数的乘积. 《傅里叶研究所年刊》(Grenoble) 57 (2007), no. 5, 1405–1439. [6] D. L. Burkholder. 鞅变换. 《数学统计年刊》37 (1966), no. 6, 1494–1504. [7] R. R. Coifman 和 G. Weiss. Hardy 空间的扩张及其在分析中的应用. 《美国数学会通报》, 83 1977 4, 569 645 ( ), no. – J. M. Conde-Alonso 和 J. Parcet. 非交换鞅的原子块. [8] 《印第安纳大学数学杂志》65 (2016), no. 4, 1425–1443. [9] B. Davis. 关于鞅平方函数的可积性. 《以色列数学杂志》8 (1970), 187–190. [10] C. Fefferman. 有界平均振荡的刻画. 《美国数学会通报》77 (1971), 587–588. [11] X. Fu, T. Ma 和 D. Yang. 齐次型空间上 Musielak-Orlicz Hardy 空间的实变量刻画. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 45 (2020), no. 1, 343–410. [12] A. M. Garsia. 鞅不等式：近期进展研讨班讲义. 数学讲义丛书. W. A. Benjamin, Inc., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1973. viii+184 页. [13] T. Hyt¨onen 和 A. Kairema. 倍增度量空间中的二进立方体系统. 《数学讨论》126 (2012), no. 1, 1–33.[14] Y. Jiao, G. Xie, D. Yang, D. Zhou. 鞅 Hardy 空间 $H^1(\Omega)$ 与鞅 $BMO(\Omega)$乘积的双线性分解. 手稿. [15] L. Liu, D. Yang 和 W. Yuan. 齐次型空间上 Hardy 空间与 Lipschitz 空间乘积的双线性分解. 《数学论文集》 533 (2018), 93 pp. [16] R. Long. 鞅空间与不等式 . 北京大学出版社 , 北京；Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1993. iv+346 页.[17] T. Mei. BMO 是两个二进 BMO 平移空间的交集. 《巴黎科学院数学报告》336 (2003), no. 12, 1003–1006.[18] N. G. Meyers. 立方体上的平均振荡与 H¨older 连续性. 《美国数学会会刊》15 (1964), 717–721.[19] T. Miyamoto, E. Nakai 和 G. Sadasue. 鞅 Orlicz-Hardy 空间. 《数学通讯》285 6, 670 2012 5 686 ( ), no. - – .[20] E. Nakai. 加权 BMO 空间上的逐点乘子. 《数学研究》125 (1997), no. 1, 35–56. [21] E. Nakai 和 G. Sadasue. 鞅 Campanato 空间上的逐点乘子. 《数学研究》220 (2014), no. 1, 87–100.[22] E. Nakai 和 K. Yabuta. 有界平均振荡函数的逐点乘子. 《日本数学会杂志》37 (1985), no. 2, 207–218. [23] M. Perrin. 鞅的非交换 Davis 分解. 《伦敦数学会杂志》(2) 80 (2009), no. 3, 627–648.[24] E. M. Stein. 调和分析：实变量方法、正交性与振荡积分. Timothy S. Murphy 协助编写. 普林斯顿数学丛书, 43. 调和分析专著, III. 普林斯顿大学出版社, Princeton, NJ, 1993. xiv+695 页.[25] B. E. Viviani. $BMO(\rho)$的预对偶空间的原子分解. 《伊比利亚美洲数学评论》3 (1987), no. 3 4, 401 425 - – F. Weisz. 鞅 Hardy 空间及其在傅里叶分析中的应用. 数学讲义, 1568. 施普林格出版社, [26] Berlin, 1994. viii+218 页. [27] F. Weisz. $0 < p \leqslant 1$的鞅 Hardy 空间. 《概率论及相关领域》84 (1990), no. 3, 361–376. [28] G. Xie, Y. Jiao 和 D. Yang. 鞅 Musielak-Orlicz Hardy 空间. 《中国科学：数学》62 8, 1567 2019 1584 ( ), no. – .[29] F. Xing, D. Yang 和 Y. Liang. 通过小波研究齐次型空间上 $BMO(\mathcal{X})$ 与 $H^1_{\mathrm{at}}(\mathcal{X})$ 中的函数乘积. 《傅里叶分析与应用杂志》23 (2017), no. 4, 919–990. [30] D. Yang, Y. Liang 和 L. D. Ky. Musielak-Orlicz Hardy 空间的实变量理论. 数学讲义, 2182. 施普林格, 尚, 2017. xiii+466 页.

(O. Bakas) BCAM - Basque Center for Applied Mathematics, 48009 Bilbao, Spain*Email address*: obakas@bcamath.org(Z. Xu) Laboratoire de Mathématiques, Université de Bourgogne Franche-Comté, 25030 BesançonCedex, France*Email address*: xu.zhendong@univ-fcomte.fr(Y. Zhai) School of Mathematical and Statistical Sciences, Clemson University, 29634 South Car-olina, USA *Email address*: zhai@clemson.edu(H. Zhang) Laboratoire de Mathématiques, Université de Bourgogne Franche-Comté, 25030 BesançonCedex, France*Email address*: hao.zhang@univ-fcomte.fr