arXiv:2301.08818v1 [math.RA] 20 Jan 2023

m-弱核逆

D.E. Ferreyra*和 Saroj B. Malik†

摘要

自 Bakasarly 和 Tren-kler 在一篇论文中提出核逆以来，它一直受到广泛研究。迄今为止，对于任意指标的矩阵，这种逆有四种推广，即 BT逆、DMP逆、核-EP逆和 WC逆。本文介绍一种适用于任意指标矩阵的新型广义逆，称为 m-弱核逆，它推广了核-EP逆和 WC逆，因而也推广了核逆。我们利用矩阵分解研究 m-弱核逆的若干性质和刻画。

AMS分类：15A09，15A24。
关键词：Drazin逆， m-弱核逆， m-弱群逆，DMP逆，核-EP逆，WC逆，核逆。

1 引言

广义矩阵逆是矩阵理论中的重要对象。它们最初是为求解代数方程组而定义的，随着时间推移，已被证明不仅是求解矩阵方程的有用工具，也广泛应用于网络、编码理论、环境化学、电气工程和统计学等领域 [2]。

最早已知的广义逆是 Moore-Penrose逆和 Drazin逆（更具体地说，是群逆）。利用 Moore-Penrose逆和群逆，Baksalary 和 Trenkler [3]引入了指标至多为 1 的方阵的核逆。过去十年间，文献中关于这种广义逆的研究论文层出不穷， [5, 6, 7, 10, 11] 此外还有许多其他研究，此处不一一列举。核逆进一步得到推广，由此产生了若干新的广义逆，即 BT逆 [4], DMP逆 [16], 核-EP逆 [17] 和 WC逆 [12]。这些近期提出的广义逆展现了新的研究趋势，涵盖理论与应用两个方面。这些广义逆的一些有趣应用可见

*国立里奥夸尔托大学，CONICET，FCEFQyN，RN 36 KM 601，5800 里奥夸尔托，科尔多瓦，阿根廷。电子邮箱：deferreyra@exa.unrc.edu.ar

†安贝德卡尔大学文理学院，印度德里克什米尔门。电子邮箱：saroj.malik@gmail.com

例如， [8, 19, 24, 27]。此外，正如 [5, 6, 18, 30] 所示，它们在矩阵偏序研究中也发挥着重要作用。

本文的主要目标是引入一种新的任意指标矩阵广义逆，称为 m-弱核逆，它统一了核逆的两种推广，即核-EP逆和WC逆。我们研究了 m-弱核逆的若干性质和刻画，并给出了它的一些主要表示形式和典范形式。

2 记号和术语

我们首先给出本文将要用到的记号，并列出一些与本文相关的已知广义逆的定义。

我们用 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 表示所有 $m\times n$ 复矩阵的集合。对于 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，符号$A^*$、 A^{-1}、rk(A)、 $\mathcal{N}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A)$ 分别表示 A 的共轭转置、逆（当$m=n$时）、秩、零空间和列空间。此外， I_n表示 $n\times n$ 单位矩阵。

满足等式 $AXA=A$ 的矩阵 $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 称为内逆，而 A 的所有内逆组成的集合记为 $A\{1\}$。满足等式 $XAX=X$ 的矩阵 $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 则称为 A 的外逆。

对于 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$， A 的 Moore-Penrose逆是唯一满足以下四个方程 [2] 的矩阵 $A^\dagger\in\mathbb{C}^{n\times m}$

$$AA^\dagger A=A,\quad A^\dagger AA^\dagger=A^\dagger,\quad (AA^\dagger)^*=AA^\dagger,\quad \text{and}\quad (A^\dagger A)^*=A^\dagger A.$$

Moore-Penrose逆可用于表示分别投影到 $\mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{R}(A^*)$ 上的正交投影算子 $P_A:=AA^\dagger$ 和 $Q_A:=A^\dagger A$。当 $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(A^*)$（或等价地，$P_A=Q_A$）时，我们称 A 为 EP矩阵。

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$。使得 $\mathcal{R}(A^k)=\mathcal{R}(A^{k+1})$ 成立的最小非负整数 k 称为 A 的指标，记作 Ind(A)。众所周知，如果 A 是 EP矩阵，则 A 的指标至多为一。

我们回顾一下， $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的 Drazin逆是满足以下三个方程 [2] 的唯一矩阵 $A^d\in\mathbb{C}^{n\times n}$

$$A^dAA^d=A^d,\quad AA^d=A^dA,\quad \text{and}\quad A^dA^{k+1}=A^k,$$

其中 $k=\text{Ind}(A)$。若 $k\le 1$，则称 A 的 Drazin逆为 A 的群逆，记作 $A^\#$。

2010 年，Baksalary 和 Trenkler [3] 引入了方阵的核逆。他们证明，矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的核逆是满足以下条件的唯一矩阵 $A^{⊕}\in\mathbb{C}^{n\times n}$

$$AA^{⊕}=P_A\quad\text{and}\quad\mathcal{R}(A^{⊕})\subseteq\mathcal{R}(A).\tag{2.1}$$

众所周知， A 的核逆存在，当且仅当 $\text{Ind}(A)\le 1$。在这种情况下，满足 (2.1) 的唯一解为 $A^{⊕}=A^\#AA^\dagger$。

2014年，针对$n \times n$ 任意指标为 k 的复矩阵，人们提出了两种最著名的核逆推广，即 DMP逆和核-EP逆。更确切地说，Malik 和 Thome [16] 将 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$的 DMP逆定义为满足以下条件的唯一矩阵 $A^{d,\dagger} \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$A^{d,\dagger}AA^{d,\dagger} = A^{d,\dagger}, \qquad A^{d,\dagger}A = A^dA, \quad \text{and} \quad A^kA^{d,\dagger} = A^kA^\dagger. \tag{2.2}$$

此外，已证明 $A^{d,\dagger} = A^dAA^\dagger$。

Manjunatha Prasad 和 Mohana [17] 将 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的核-EP逆定义为满足以下条件的唯一矩阵 $A^{⦶} \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$A^{⦶}AA^{⦶} = A^{⦶} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{R}(A^{⦶}) = \mathcal{R}((A^{⦶})^*) = \mathcal{R}(A^k). \tag{2.3}$$

正如 [11, 推论 3.8], 中所证明的，核-EP逆可由以下公式表示

$$A^{⦶} = A^dP_{A^k}. \tag{2.4}$$

利用矩阵的核-EP逆，Wang 和 Chen [26] 将矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的 WG逆定义为满足以下条件的唯一矩阵 $A^{ⓦ} \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$A(A^{ⓦ})^2 = A^{ⓦ} \quad \text{and} \quad AA^{ⓦ} = A^{⦶}A. \tag{2.5}$$

上述方程组的唯一解为

$$A^{ⓦ} = (A^{⦶})^2A. \tag{2.6}$$

若 Ind(A) ≤ 1，则 WG逆与群逆相同。在 [13] 中，作者将 WG逆的概念推广到了矩形矩阵。

在 [28], 中，Zhou等人提出了带对合环中的 m-弱群，并给出了它的一些刻画。对于 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 中的指标为 k的矩阵， m-弱群逆是满足以下方程的唯一矩阵 $A^{ⓦ_m} = X \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$XA^{k+1} = A^k, \quad AX^2 = X, \quad (A^*)^kA^{m+1}X = (A^*)^kA^m, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

最近， [15] 证明了 A 的 m-弱群逆可以由下列涉及核-EP逆的矩阵方程组刻画

$$AX^2 = X, \quad AX = (A^{⦶})^mA^m. \tag{2.8}$$

此外，作者证明了 m-弱群逆可以用核-EP逆表示为

$$A^{ⓦ_m} = (A^{⦶})^{m+1}A^m. \tag{2.9}$$

注 2.1. 由 (2.6) 和 (2.9) 可知，若 $m = 1$，则 m-弱群逆退化为 WG 逆，即 $A_{ⓦ}{}^{1} = A^{ⓦ}$。当 $m = 2$ 时， m-弱群逆与 Ferreyra 和 Malik 最近在 *[5],* 中研究的 GG 逆一致，即 $A^{ⓦ_2} = (A^{\dagger})^3A^2$。此外，若 $m \geq k = \text{Ind}(A)$，则 $A^{ⓦ_m} = A^d$。因此， m-弱群逆推广了 WG 逆、GG 逆和 Drazin 逆的概念。

最近，Ferreyra 等人 [12] 利用 WG 逆引入了核逆的另一种推广，即 WC 逆作为矩阵

$$A^{\textcircled{w},\dagger} = A^{\textcircled{w}} P_A. \tag{2.10}$$

本文的组织结构如下。第3节介绍一些预备知识。第4节利用核-EP分解引入 m-弱核逆，并介绍其一些主要性质。第5节推导这一新广义逆的更多性质。第6节致力于研究 m-弱核逆的另一种典范形式。第7节阐述 m-弱核逆与其他广义逆之间的关系。

3 预备知识

如 [25], 所证明的，任意指标为 k 的矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 均可写成其核-EP分解形式

$$A = U \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix} U^*, \tag{3.1}$$

其中 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵， $T \in \mathbb{C}^{t\times t}$ 为满足 t 的非奇异矩阵：$= \mathbf{rk}(T) = \mathbf{rk}(A^k)$，而 $N \in \mathbb{C}^{(n-t)\times(n-t)}$ 为指标为 k的幂零矩阵。

注意，若 $k = 0$、 N 和 S 在(3.1)中均不存在，且 $A = T$（其中 $U = I_n$）。此后，在应用核-EP分解时，我们可以假设Ind(A) $= k \geq 1$ 。

若 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 写成式 (3.1)，则 A 的核-EP逆为

$$A^{\textcircled{\dagger}} = U \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{3.2}$$

注记3.1. 若 A 具有式 (3.1) 的形式，则 $k = 1$ 当且仅当 $N = 0$。

注记3.2. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 如式 (3.1) 所示，并且 $\ell \in \mathbb{N}$。则

$$A^\ell = U \begin{bmatrix} T^\ell & \tilde{T}_\ell \\ 0 & N^\ell \end{bmatrix} U^*, \quad \tilde{T}_\ell := \sum_{i=0}^{\ell-1} T^i S N^{\ell-1-i}, \tag{3.3}$$

是 A^ℓ的核-EP分解。特别地，根据 *[11,* 定理 3.*9]* ，我们知道 A^ℓ 的 Moore-Penrose逆为

$$(A^\ell)^\dagger = U \begin{bmatrix} (T^\ell)^*\Delta_\ell & -(T^\ell)^*\Delta_\ell \tilde{T}_\ell (N^\ell)^\dagger \\ \Omega_\ell^*\Delta_\ell & (N^\ell)^\dagger - \Omega_\ell^*\Delta_\ell \tilde{T}_\ell (N^\ell)^\dagger \end{bmatrix} U^*, \tag{3.4}$$

其中

$$\Delta_\ell := (T^\ell (T^\ell)^* + \Omega_\ell \Omega_\ell^*)^{-1} \quad and \quad \Omega_\ell := \tilde{T}_\ell (I_{n-t} - Q_{N^\ell}).$$

由式（3.3）和（3.4）可得正交投影算子的下列表达式

$$P_{A^\ell} = U \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & P_{N^\ell} \end{bmatrix} U^*, \quad \ell \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

此外，正如在 [9], 中所证明的，对于每个整数 $\ell \geq k$，我们有

$$P_{A^\ell} = U \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{3.6}$$

4 m-弱核逆

本节利用 A 的 m-弱群逆 $A^{⑯_m}$ 以及到 $\mathcal{R}(A^m)$ 上的正交投影算子，为 $m \in \mathbb{N}$ 引入 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的一种广义逆。

定义 4.1. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $m \in \mathbb{N}$。满足下式的矩阵 $A^{⊕_m} \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$A^{⊕_m} = A^{⑯_m} P_{A^m}, \tag{4.1}$$

称为 A 的 m-弱核逆。

由于方阵的 m-弱群逆总是存在且唯一，由 (4.1) 可知，每个方阵的 m-弱核逆都存在且唯一。

由 (2.4)、(2.10) 和注 2.1 可知， m-弱核逆是 WC逆和核-EP逆的一种推广。

注 4.2. (i) 若 $m = 1$，则 m-弱核逆与 WC逆一致，即 $A^{⊕_1} = A_{\mathrm{w}}{}^{\dagger}_{\bigcirc}$。

(ii) 若 $m \geq k$，则 m-弱核逆与核-EP逆一致，即 $A^{⊕_m} = A^{\dagger}_{\bigcirc}$。

(iii) 若 A^m 是 EP矩阵，则 $A_{\#\bigcirc^m} = A_{\mathrm{w}}{}^{\dagger}_{\bigcirc^m}$。事实上，由于 A^m 是 EP矩阵，因此 $P_{A^m} = Q_{A^m}$。于是，$A_{\#\bigcirc^m} = A_{\mathrm{w}}{}^{\dagger}_{\bigcirc^m} P_{A^m} = (A^{\dagger}_{\bigcirc})^{m+1} A^m Q_{A^m} = (A^{\dagger}_{\bigcirc})^{m+1} A^m = A_{\mathrm{w}}{}^{\dagger}_{\bigcirc^m}$。

请注意，一般而言，注 2.1 (iii) 的逆命题不成立。

例 4.3. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。容易验证 $\mathrm{Ind}(A) = 4$。考虑 $m = 1$。因此， m-弱群逆与 m-弱核逆相同，即

$$A^{⑯_1} = A^{⊕_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

然而，显然 A 不是 EP矩阵。

注 4.4. 若 $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$，众所周知， $A^{\dagger}_{\bigcirc} = A^{⊕}$。因此，由注 2.1 (ii) 可知，只要 $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$，m-弱核逆就与核逆对所有 $m \in \mathbb{N}$ 一致。

接下来，我们给出 m-弱核逆的一些基本性质。

定理 4.5。设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $m \in \mathbb{N}$。则

(a) $A\#\bigcirc^{m} = (A^{\dagger\bigcirc})^{m+1}A^{m}P_{A^{m}}$。(b) $A\#\bigcirc^{m} = (A\mathrm{w}\bigcirc)^{m}A^{m-1}P_{A^{m}}$。(c) $AA^{\textcircled{\#}_m} = (A^{\dagger\bigcirc})^{m}A^{m}P_{A^{m}} = A\mathrm{w}\bigcirc^{m-1}AP_{A^{m}}$。(d) $A\#\bigcirc^{m}A = (A^{\dagger\bigcirc})^{m+1}A^{m}P_{A^{m}}A$。(e) $A\#\bigcirc^{m}A^{m} = A\mathrm{w}\bigcirc^{m}A^{m} = (A^{\dagger\bigcirc})^{m+1}A^{2m}$。(f) $A\#\bigcirc^{m} = YAA\#\bigcirc^{m}$，其中 $YAY = Y$和 $\mathcal{R}(Y) = \mathcal{R}(A^{k})$。

证明。(a) 由 (2.9) 和 (4.1) 可直接得出。
(b) 由 (2.6) 可知 $A^{\textcircled{w}} = (A^{\dagger\bigcirc})^{2}A$。此外，众所周知，$A(A^{\dagger\bigcirc})^{2} = A^{\dagger\bigcirc}$。因此，对 m 应用归纳法，很容易看出 $(A^{\textcircled{w}})^{m} = (A^{\dagger\bigcirc})^{m+1}A$。现在，结论由 (a) 得出。

(c) 由于 $A_{\#\bigcirc^{m}} = A_{\mathrm{w}\bigcirc^{m}}P_{A^{m}}$，(c) 中的第一个等式由 (2.8) 得出。第二个等式则由 (2.9) 得出。

(d) 这是 (a) 的推论。
(e) 第一个等式可由定义 4.1 立即得出。第二个等式则由 (2.9) 得出。

(f) 注意，$A_{\#\bigcirc^{m}} = YAA_{\#\bigcirc^{m}}$成立当且仅当 $\mathcal{R}(A_{\#\bigcirc^{m}}) \subseteq \mathcal{N}(I_n - YA) = \mathcal{R}(YA) = \mathcal{R}(Y) = \mathcal{R}(A^{k})$，因为 Y是 A的一个外逆。现在，由定理 4.7 (h)，我们还有$\mathcal{R}(A_{\#\bigcirc^{m}}) = \mathcal{R}(A^{k})$。因此，断言得证。

□

现在，我们利用核-EP分解来确定 m-弱核逆的一种表示。

定理 4.6. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 具有 (3.1) 的形式，且 $m \in \mathbb{N}$。那么

$$A^{\textcircled{\#}_m} = U\begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(m+1)}\tilde{T}_m P_{N^m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^{*}. \tag{4.2}$$

证明。由定理 4.5 (a)，我们有 $A_{\#\bigcirc^{m}} = (A^{\dagger\bigcirc})^{m+1}A^{m}P_{A^{m}}$。利用 (3.2)、(3.3) 和 (3.5) 中分别给出的 $A^{\textcircled{\dagger}}$、$A^{m}$ 和 $P_{A^{m}}$ 的典范形式，我们得到

$$\begin{aligned} A^{\textcircled{\#}_m} &= U\begin{bmatrix} T^{-(m+1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^{m} & \tilde{T}_m \\ 0 & N^{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & P_{N^m} \end{bmatrix} U^{*} \\ &= U\begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(m+1)}\tilde{T}_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & P_{N^m} \end{bmatrix} U^{*} \\ &= U\begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(m+1)}\tilde{T}_m P_{N^m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^{*}. \end{aligned}$$

□

由定理 4.6 可得 m-弱核逆的更多特征/性质，其中一些与核逆的相关性质相同。

定理 4.7. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $l \geq k = \mathrm{Ind}(A)$，且 $m \in \mathbb{N}$。则

(a) $A\#\bigcirc_m AA\#\bigcirc_m = A\#\bigcirc_m$，即 $A\#\bigcirc_m$ 是 A 的外逆。(b) $A_1A\#\bigcirc_m A_1 = A_1$ 且 $A\#\bigcirc_m A_1A\#\bigcirc_m = A\#\bigcirc_m$，其中 $A_1 = AA^{\dagger}\bigcirc A$。(c) $A(A\#\bigcirc_m)^2 = A\#\bigcirc_m$。(d) $A\#\bigcirc_m A^{l+1} = A^l$。(e) $A^{\circledcirc_m} = (A^d)^{m+1}P_{A^l}A^mP_{A^m}$。(f) $A^{\circledcirc_m} = A^l(A^{l+m+1})^{\dagger}A^mP_{A^m}$。(g) $\mathrm{rk}(A\#\bigcirc_m) = \mathrm{rk}(A^k)$。(h) $\mathcal{R}(A\#\bigcirc_m) = \mathcal{R}(A^k)$。(i) $\mathcal{N}(A\#\bigcirc_m) = \mathcal{N}((A^k)^*A^mP_{A^m})$。(j) $A\#\bigcirc_m A^{m+1} = (A^{\dagger}\bigcirc)^{m+1}A^{2m+1}$。

证明。(a)–(c) 可由 (3.1) 和 (4.2) 容易验证。
(d) 由 (3.3) 可得

$$A^l = U\begin{bmatrix} T^l & \tilde{T}_l \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^*, \quad \ell \geq k.$$

因此，(4.2) 意味着

$$A^{\circledcirc_m}A^{\ell+1} = (A^{\circledcirc_m}A)A^{\ell} = U\begin{bmatrix} I_t & T^{-1}S + T^{-(m+1)}\tilde{T}_mP_{N^m}N \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T^l & \tilde{T}_l \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^* = A^l.$$

(e) 由 [12, 定理 2.2] 可知

$$A^d = U\begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)}\tilde{T}_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此，(3.6) 意味着

$$(A^d)^{m+1}P_{A^l} = U\begin{bmatrix} T^{-(m+1)} & T^{-(m+k+1)}\tilde{T}_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^* = \begin{bmatrix} T^{-(m+1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1}, \quad (4.3)$$

其中，最后一个等式由 (3.2) 得出。
因此，该结论由定理 4.5 (a) 得出。

(f) 由于 $m+l+1 \geq k$，由 (e) 可得 $A^{\#\bigcirc^m} = (A^d)^{m+1} P_{A^{m+l+1}} A^m P_{A^m}$。因此，由于 $l \geq k$，我们有

$$\begin{aligned} A^{\circledcirc_m} &= (A^d)^{m+1} A^{m+l+1} (A^{m+l+1})^\dagger A^m P_{A^m} \\ &= (A^d A)^{m+1} A^l (A^{m+l+1})^\dagger A^m P_{A^m} \\ &= A^d A^{l+1} (A^{m+l+1})^\dagger A^m P_{A^m} \\ &= A^l (A^{m+l+1})^\dagger A^m P_{A^m}. \end{aligned}$$

(g) 由 (3.3)，对于 $\ell = k$，我们有

$$A^k = U \begin{bmatrix} T^k & \tilde{T}_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

现在，由 (4.2) 和 (4.4) 容易看出，$\mathbf{rk}(A^{\circledcirc_m}) = \mathbf{rk}(T) = \mathbf{rk}(A^k)$。
(h) 根据定理 4.5 (a)，我们有 $\mathcal{R}(A_{\#\bigcirc^m}) \subseteq \mathcal{R}(A^{\dagger\bigcirc}) = \mathcal{R}(A^k)$，其中最后一个等式由 (2.3) 得出。现在，(g) 完成了证明。
(i) 根据定理 4.5 (a)，我们得到

$$\mathcal{N}(A^{\textcircled{\dagger}} A^m P_{A^m}) \subseteq \mathcal{N}((A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1} A^m P_{A^m}) = \mathcal{N}(A^{\circledcirc_m}). \tag{4.5}$$

此外，由 (3.2) 和 (3.3) 可得 $A^{\dagger\bigcirc} = A^m (A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1}$。因此，定理 4.5 (a) 给出

$$\mathrm{rk}(A^{\circledcirc_m}) \leq \mathrm{rk}(A^{\textcircled{\dagger}} A^m P_{A^m}) \leq \mathrm{rk}((A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1} A^m P_{A^m}) = \mathrm{rk}(A^{\circledcirc_m}). \tag{4.6}$$

由 (4.5) 和 (4.6) 可得 $\mathcal{N}(A_{\#\bigcirc^m}) = \mathcal{N}(A^{\dagger\bigcirc} A^m P_{A^m})$。现在，根据 [11, 定理 3.2]，我们知道 $\mathcal{N}(A^{\dagger\bigcirc}) = \mathcal{N}((A^k)^*)$。因此，

$$x \in \mathcal{N}(A^{\circledcirc_m}) \Leftrightarrow A^m P_{A^m} x \in \mathcal{N}(A^{\textcircled{\dagger}}) = \mathcal{N}((A^k)^*).$$

因此，当且仅当 $x \in \mathcal{N}((A^k)^* A^m P_{A^m})$ 时，$x \in \mathcal{N}(A_{\#\bigcirc^m})$。
(j) 这直接由定理 4.5 (a) 得出。 □

定理 4.5 和定理 4.7 的两个重要推论是以下关于 m-弱核逆的刻画。

定理 4.8。设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $m \in \mathbb{N}$。则方程组

$$XAX = X, \quad AX = (A^{\textcircled{\dagger}})^m A^m P_{A^m}, \quad XA = (A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1} A^m P_{A^m} A, \tag{4.7}$$

相容，且其唯一解是矩阵 $X = A_{\#\bigcirc^m}$。

证明。存在性。设 $X := A_{\#\bigcirc^m}$。由定理 4.5 和定理 4.7 易知，X 满足 (4.7) 中的所有方程。

唯一性。我们假设 X_1 和 X_2 是方程组 (4.7) 的两个解。那么
$X_2 = X_2 A X_2 = X_1 A X_2 = X_1 A X_1 = X_1$。 □

注 4.9. 请注意，方程组 (4.7) 中的第二个和第三个条件分别可以替换为 $AX = A_{\mathrm{w}\bigcirc^{m-1}} A P_{A^m}$ 和 $XA = A_{\mathrm{w}\bigcirc^m} P_{A^m} A$。

定理 4　　.10. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 Ind$(A) = k$，且 $m \in \mathbb{N}$。则方程组

$$AX = (A^{\textcircled{\dagger}})^m A^m P_{A^m}, \quad \mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k), \tag{4.8}$$

相容，其唯一解为矩阵 $X = A_{\#\bigcirc^m}$。

证明。存在性。令 $X := A_{\#\bigcirc^m}$。由定理 4.5 和定理 4.7，易见 X满足 (4.8) 中的所有方程。

唯一性。设 X_1 和 X_2 是方程组 (4.8) 的两个解，即

$$AX_1 = AX_2 = (A^{\textcircled{\dagger}})^m A^m P_{A^m}, \quad \mathcal{R}(X_1) \subseteq \mathcal{R}(A^k), \quad \mathcal{R}(X_2) \subseteq \mathcal{R}(A^k).$$

因此，$\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^k)$ 且 $\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$。所以，$\mathcal{R}(X_1 - X_2) \subseteq \mathcal{R}(A^k) \cap \mathcal{N}(A^k) = \{0\}$，因为 A 的指标为 $k.$。因此，$X_1 = X_2$. □

注 4.11。注意，方程组 (4.8) 中的第一个条件可以替换为 $AX = A_{\mathrm{w}\bigcirc^{m-1}} AP_{A^m}$。

注 4.12. 注意，当 $k = 1$ 时，系统 (4.8) 化为 (2.1)，即得到刻画核逆的条件。事实上，由于 $m \geq k = 1$，根据 (3.2)、(3.3) 和 (3.5)，经过简单计算可得 $AX = (A^{\textcircled{\dagger}})^m A^m P_{A^m} = P_A$。显然，$\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A)$。当 $m = 1$ 时，(4.8) 中的方程化为 *[12,* 定理 3.*11]* 中得到的条件。

而如果 $m \geq k$，系统 (4.8) 化为 $AX = P_{A^k}$，且 $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$，这是 *[9,* 定理 2.*7]* 中得到的核-EP逆的一个众所周知的刻画。

由上述定理，我们可以推导出方阵为 m-弱核逆的更多充要条件。

推论 4.13. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，且 Ind$(A) = k$。则以下命题等价:

(a) X 是 A 的 m-弱核逆 $A^{\textcircled{\#}_m}$；

(b) $AX = (A^{\textcircled{\dagger}})^m A^m P_{A^m}$ 和 $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(A^k)$;

(c) $AX = (A^{\textcircled{\dagger}})^m A^m P_{A^m}$ 且 $AX^2 = X$。

证明. (a) $\Rightarrow$ (b)。由定理 4.5 (c) 和定理 4.7 (h) 可得。(b) $\Rightarrow$ (c)。首先注意到 $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(A^k)$ 蕴含 $P_{A^k} X = X$。此外，由 (3.3)、(3.5) 和 (3.6) 可得

$$[(A^{\textcircled{\dagger}})^m A^m] P_{A^m} P_{A^k} = U \begin{bmatrix} I_t & T^{-m}\tilde{T}_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & P_{N^m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^* = P_{A^k}.$$

因此，$AX^2 = (A^{\dagger}_{\bigcirc})^m A^m P_{A^m} P_{A^k} X = P_{A^k} X = X$。

(c) $\Rightarrow$ (a) 容易看出，$AX^2 = X$ 蕴含 $X = A^k X^{k+1}$。因此，$\mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$。现在，由定理 4.10 可得这一蕴含关系。 □

众所周知， $A^{\oplus}$ 属于 $A\{1\}$。值得探究的是， m-弱核逆是否也属于 $A\{1\}$。

定理4.14. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$。那么 $A^{\oplus_m} \in A\{1\}$ 当且仅当 $\mathrm{Ind}(A) \leq 1$。

证明. 由 (3.1) 和 (4.2) 可得

$$AA^{\oplus_m}A = A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} T & S + T^{-m}\tilde{T}_m P_{N^m} N \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & N \end{bmatrix} \Leftrightarrow N = 0.$$

因此，注记3.1完成了证明。 □

5 m-弱核逆的更多性质与表示

本节将推导 m-弱核逆的一些更多性质。此外，我们还将研究这种新逆的最一般表示。

定理 5.1. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $k = \mathrm{Ind}(A)$，且 $m \in \mathbb{N}$。那么

(a) $AA\#\bigcirc_m A = A\mathsf{w}\bigcirc_{m-1} A^{m+1}(A^m)^{\dagger}A$.
(b) $AA\#\bigcirc_m A^{m+1} = A\mathsf{w}\bigcirc_{m-1} A^{m+1}$.
(c) $A\#\bigcirc_m A^m = A\mathsf{w}\bigcirc_m A^m$. (d) 若 $k < 2m$，则 $A\#\bigcirc_m A^m = A^d A^m$。(e) $A^m A\#\bigcirc_m = A^{\dagger}\bigcirc A^m P_{A^m}$。(f) 若 A^m 是 EP矩阵，则 $A^m A^{\oplus_m} = A^{\dagger}\bigcirc A^m$。
(g) $A^m A^{\oplus_m} A^m = A^{\dagger}\bigcirc_{A^{2m}}$(h) $A^{m+1}A\#\bigcirc_m A^m = P_{A^l} A^{2m}$，对于 $l \geq k$。(i) 若 $k < 2m$，则 $A^{m+1}A\#\bigcirc_m A^m = A^{2m}$。

证明。(a) 由定理 4.5 (b) 以及 $P_{A^m} = A^m(A^m)^{\dagger}$ 这一事实可立即得出。
(b) 由 (a) 易得。(c) 根据 m-弱核逆的定义。

(d) 根据定理 4.7 (e)，我们知道 $A_{\#\bigcirc^m} = (A^d)^{m+1} P_{A^k} A^m P_{A^m}$。因此，由于 $k < 2m$，我们有

$$\begin{aligned} A^{\oplus_m} A^m &= (A^d)^{m+1} P_{A^k} A^{2m} \\ &= (A^d)^{m+1} A^{2m} \\ &= A^d A^m. \end{aligned}$$

(e) 根据定理 4.5 (a)，我们知道 $A_{\#\bigcirc^m} = (A^{\dagger\bigcirc})^{m+1}A^m P_{A^m}$。此外，由于 $A^{\dagger\bigcirc} = A(A^{\dagger\bigcirc})^2$，对 m 应用归纳法，很容易看出

$$A^m(A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1} = A^{m-1}(A^{\textcircled{\dagger}})^m = \cdots = A^{\textcircled{\dagger}}. \tag{5.1}$$

因此，结论由（5.1）得出。

（f）由注 释 4.2（iii）可知，若 A^m 是 EP矩阵，则 $A_{\#\bigcirc^m} = A_{\mathrm{w}\bigcirc^m}$。因此，（2.9）蕴 es

$$A^m A^{\textcircled{\#}_m} = A^m(A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1}A^m. \tag{5.2}$$

因此，（5.1）和（5.2）推出 $A^m A^{\textcircled{\#}_m} = A^{\dagger\bigcirc}A^m$。

（g）直接由（e）得出。（h）应用（g）可得 $A^{m+1}A_{\#\bigcirc_m}A^m = AA^{\dagger\bigcirc}A^m$。现在，由于 $AA^{\textcircled{\dagger}} = P_{A^l}$ 对于 $l \geq k$，结论随之得出。（i）由引理 3.6，$P_{A^k} = P_{A^l}$ 对于 $l \geq k$。因此，由于 $k < 2m$，我们有 $P_{A^k}A^{2m} = A^{2m}$。现在，（h）显然成立。

□

现在考虑那些使 m-弱核逆的一般表达式成立的矩阵的极大类。

定理 5.2. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是指标为 k 的矩阵，写成 (3.1) 中的形式。设 $t = \mathrm{rk}(A^k), G \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$H \in A^m\{1\}$ 和 $m \in \mathbb{N}$。则以下条件等价：

(a) $A^{\textcircled{\#}_m} = GA^mH$;

(b) $GA^m = A_{\mathrm{w}\bigcirc^m}A^m$ 且 $A_{\mathrm{w}\bigcirc^m}A^mH = A_{\mathrm{w}\bigcirc^m}P_{A^m}$;

(c) $G = A^{\textcircled{w}_m} + Z(I_n - P_{A^m}),\quad H = (A^m)^\dagger + (I_n - Q_{A^m})W$ *for arbitrary* $Z, W \in \mathbb{C}^{n\times n}$;

(d) G 和 H 可表示为

$$G = U\begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(m+1)}\tilde{T}_m P_{N^m} + Z_{12}(I_{n-t} - P_{N^m}) \\ 0 & Z_{22}(I_{n-t} - P_{N^m}) \end{bmatrix} U^*,$$

$$H = U\begin{bmatrix} T^{-m}(I_t - MH_{21}) & T^{-m}[T^{-m}\tilde{T}_m P_{N^m} - MH_{22}] \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} U^*,$$

其中 $\tilde{T}_m$ 如 (3.3) 所示，$M := \tilde{T}_m + T^{-m}\tilde{T}_m N^m$, $Z_{12} \in \mathbb{C}^{t\times(n-t)}$, $H_{21} \in \mathbb{C}^{(n-t)\times t}$，以及$Z_{22}$, $H_{22} \in \mathbb{C}^{(n-t)\times(n-t)}$。

(e) $\mathcal{R}(GA^m) \subseteq \mathcal{R}(A^k)$, $\mathcal{N}((A^m)^*) \subseteq \mathcal{N}(A_{\mathrm{w}\bigcirc^m}A^mH)$ 和 $A^mGA^m = A^{\dagger\bigcirc}A^{2m}$;

证明。(a) $\Rightarrow$ (b) 由于 $A^{\textcircled{\#}_m} = GA^mH$，根据 (4.1) 及 $A^mHA^m = A^m$ 这一事实，我们有

$$GA^m = (GA^mH)A^m = A^{\textcircled{\#}_m}A^m = A^{\textcircled{w}_m}P_{A^m}A^m = A^{\textcircled{w}_m}A^m,$$

由此得出

$$A^{\textcircled{w}_m}A^mH = GA^mH = A^{\textcircled{\#}_m} = A^{\textcircled{w}_m}P_{A^m}.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) 根据 [2, 第 52], 页，很容易看出，方程 $GA^m = A \,\mathrm{w}\bigcirc^m A^m$ 的所有解为

$$G = A^{\textcircled{w}_m} + Z(I_n - P_{A^m}), \quad \text{for arbitrary} \quad Z \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

类似地，方程 $A \,\mathrm{w}\bigcirc^m A^m H = A \,\mathrm{w}\bigcirc^m P_{A^m}$ 的通解为

$$H = (A^m)^\dagger + (I_n - Q_{A^m})W, \quad \text{for arbitrary} \quad W \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

(c) $\Rightarrow$(a) 注意到 $A^m = P_{A^m}A^m = A^m Q_{A^m}$。因此，

$$\begin{aligned} GA^mH &= [A^{\textcircled{w}_m} + Z(I_n - P_{A^m})]A^m\left[(A^m)^\dagger + (I_n - Q_{A^m})W\right] \\ &= A^{\textcircled{w}_m}A^m\left[(A^m)^\dagger + (I_n - Q_{A^m})W\right] \\ &= A^{\textcircled{w}_m}P_{A^m} \\ &= A^{\textcircled{\#}_m}, \end{aligned}$$

最后一个等式由 (4.1) 得出。
(a) $\Rightarrow$ (d) 由于 A 按照 (3.1) 的形式书写，我们将其分块

$$G = U\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}U^* \quad \text{and} \quad H = U\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}U^*,$$

依据 A 的分块大小进行。
由于 (a) $\Rightarrow$ (c) 有效，我们有

$$G = A^{\textcircled{w}_m} + Z(I_n - P_{A^m}), \quad \text{for arbitrary } Z \in \mathbb{C}^n. \tag{5.3}$$

由 $\ell = m$ 的 (3.5)，可得

$$P_{A^m} = U\begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & P_{N^m} \end{bmatrix}U^*.$$

现在，通过作如下具有适当大小的分块

$$Z = U\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}U^*.$$

由 (4.2) 和 (5.3)，可得

$$\begin{aligned} U^*GU &= \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(m+1)}\tilde{T}_m P_{N^m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-t} - P_{N^m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(m+1)}\tilde{T}_m P_{N^m} + Z_{12}(I_{n-t} - P_{N^m}) \\ 0 & Z_{22}(I_{n-t} - P_{N^m}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

另一方面，由于 (a) $\Rightarrow$ (b) 已经得到证明，我们可以推导出 $A^{\textcircled{w}_m}A^mH = A \,\mathrm{w}\bigcirc^m P_{A^m}$ 成立。
因此，通过比较它们的块，我们得到

$$T^{m-1}H_{11} + (T^{-1}\tilde{T}_m + T^{-(m+1)}\tilde{T}_m N^m)H_{21} = T^{-1}$$

and

$$T^{m-1}H_{12}+(T^{-1}\tilde{T}_m+T^{-(m+1)}\tilde{T}_mN^m)H_{22}=T^{-(m+1)}\tilde{T}_mP_{N^m}.$$

由此可得 (d)。

(d) $\Rightarrow$(a) 取 $Z_{12}=0$、 $H_{21}=0$ 和 $Z_{22}=H_{22}=0$，经简单计算可得

$$\begin{aligned}GA^mH &= U\begin{bmatrix}T^{-1} & T^{-(m+1)}\tilde{T}_mP_{N^m}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T^m & \tilde{T}_m\\ 0 & N^m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T^{-m} & T^{-(2m+1)}\tilde{T}_mP_{N^m}\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*\\ &= U\begin{bmatrix}T^{-1} & T^{-(m+1)}\tilde{T}_mP_{N^m}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ &= A^{\textcircled{\#}_m}.\end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$(e) 显然， $GA^m=A\,{}_{\mathrm{w}}\bigcirc^m A^m$推出 $\mathcal{R}(GA^m)\subseteq\mathcal{R}(A\,{}_{\mathrm{w}}\bigcirc^m)=\mathcal{R}(A^k)$。此外，由于$A^m(A\,{}^{\dagger}\bigcirc)^{m+1}=A\,{}^{\dagger}\bigcirc$，条件 $GA^m=A\,{}_{\mathrm{w}}\bigcirc^m A^m$也推出

$$A^mGA^m=A^mA^{\textcircled{w}_m}A^mA^m=A^m(A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1}A^{2m}=A^{\textcircled{\dagger}}A^{2m}.$$

另一方面，由于 $A\,{}_{\mathrm{w}}\bigcirc^m A^mH=A\,{}_{\mathrm{w}}\bigcirc^m P_{A^m}$，我们得到

$$\mathcal{N}((A^m)^*)=\mathcal{N}((A^m)^\dagger)\subseteq\mathcal{N}(P_{A^m})\subseteq\mathcal{N}(A^{\textcircled{w}_m}P_{A^m})=\mathcal{N}(A^{\textcircled{w}_m}A^mH).$$

(e) $\Rightarrow$ (b) 根据 $\mathcal{R}(GA^m)\subseteq\mathcal{R}(A^k)$，我们有 $GA^m=A^kQ$ ，其中某个矩阵为 Q。我们知道 $A\,{}_{\mathrm{w}}\bigcirc^m A^{k+1}=A^k$且 $A\,{}_{\mathrm{w}}\bigcirc^m=(A\,{}^{\dagger}\bigcirc)^{m+1}A^m$。因此，假设 $A^mGA^m=A^{\textcircled{\dagger}}A^{2m}$ 推出

$$\begin{aligned}GA^m &= A^{\textcircled{w}_m}A^{k+1}Q\\ &= (A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1}AA^mGA^m\\ &= (A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1}AA^{\textcircled{\dagger}}A^{2m}.\end{aligned}$$

现在，由定理 5.1 (g) 可知 $A^mA\,{}_{\#}\bigcirc_m A^m=A\,{}^{\dagger}\bigcirc A^{2m}$。此外，由定理 4.7 (a) 可得 $A\,{}_{\#}\bigcirc^m AA\,{}_{\#}\bigcirc^m=A\,{}_{\#}\bigcirc^m$。因此，

$$\begin{aligned}GA^m &= (A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1}A[A^{\textcircled{\dagger}}A^{2m}]\\ &= (A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1}AA^mA^{\textcircled{\#}_m}A^m\\ &= [(A^{\textcircled{\dagger}})^{m+1}A^m]AA^{\textcircled{\#}_m}A^m\\ &= A^{\textcircled{\#}_m}AA^{\textcircled{\#}_m}A^m\\ &= A^{\textcircled{\#}_m}A^m.\end{aligned}$$

显然， $\mathcal{N}((A^m)^*)=\mathcal{R}(I_n-P_{A^m})$。因此， $\mathcal{N}((A^m)^*)\subseteq\mathcal{N}(A\,{}_{\mathrm{w}}\bigcirc^m A^mH)$ 等价于$\mathcal{R}(I_n-P_{A^m})\subseteq\mathcal{N}(A\,{}_{\mathrm{w}}\bigcirc^m A^mH)$，而后者又等价于

$$A^{\textcircled{w}_m}A^mH(I_n-P_{A^m})=0.$$

因此，由于 $A^mHA^m=A^m$ ，我们得到

$$A^{\textcircled{w}_m}A^mH=A^{\textcircled{w}_m}A^mHA^m(A^m)^\dagger=A^{\textcircled{w}_m}P_{A^m}.$$

至此，蕴含关系得证。 □

6 m-弱核逆与 Hartwig-Spindelb¨ock 分解

本节将介绍计算 m-弱核逆的一种替代方法。对于任意秩为 $r > 0$ 的矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，Hartwig-Spindelb¨ock 分解为

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma K & \Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*, \tag{6.1}$$

其中 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是酉矩阵，$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1 I_{r_1}, \sigma_2 I_{r_2}, \ldots, \sigma_t I_{r_t})$ 是对角矩阵，其对角元素 σ_i 为 A、$\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_t > 0$、$r_1 + r_2 + \cdots + r_t = r$ 的奇异值，并且 $K \in \mathbb{C}^{r\times r}$、$L \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ 满足

$$KK^* + LL^* = I_r. \tag{6.2}$$

若 A 具有形式 (6.1)，由 [9, 公式 (10)] 可知，其核-EP逆如下

$$A^{\textcircled{\dagger}} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{\textcircled{\dagger}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{6.3}$$

接下来，我们利用 Hartwig-Spindelb¨ock 分解给出 m-弱核逆的另一种表示。

定理6.1. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是如 (6.1) 所示的矩阵。则

$$A^{\circledcirc_m} = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^{\textcircled{w}_m} P_{(\Sigma K)^{m-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{6.4}$$

证明。由定理 4.5 (a) 可知 $A^{\circledcirc_m} = (A^{\dagger\bigcirc})^{m+1} A^m P_{A^m}$。由 (6.1) 可得

$$A^m = U \begin{bmatrix} (\Sigma K)^m & (\Sigma K)^{m-1}\Sigma L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{6.5}$$

因此，我们得到

$$(A^m)^\dagger = U \begin{bmatrix} P^* R^\dagger & 0 \\ Q^* R^\dagger & 0 \end{bmatrix} U^*,$$

其中 $R = PP^* + QQ^*$, $P = (\Sigma K)^m$ 和 $Q = (\Sigma K)^{m-1}\Sigma L$. 这意味着

$$P_{A^m} = A^m (A^m)^\dagger = U \begin{bmatrix} P_R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{6.6}$$

与定理 3.2],的证明中一样，P_R 的另一种表达式为

$$P_R = P_{(\Sigma K)^{m-1}}. \tag{6.7}$$

现在，由 (6.6) 和 (6.7) 可得

$$P_{A^m} = U \begin{bmatrix} P_{(\Sigma K)^{m-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^*. \tag{6.8}$$

因此，由 (6.3)、(6.5) 以及 $A_{\#\bigcirc^m}=(A^{\dagger\bigcirc})^{m+1}A^mP_{A^m}$ 这一事实可得

$$A^{\textcircled{\#}_m}=U\begin{bmatrix}[(\Sigma K)^{\textcircled{\dagger}}]^{m+1}(\Sigma K)^mP_{(\Sigma K)^{m-1}} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*.$$

因此，由（2.9）可推出（6.4）。 □

前述结果使我们能够恢复在 [9, 定理3.2] 和 [12, 定理3.18],中分别得到的 core-EP 逆和 WC逆的表示。

推论6.2. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为如（6.1）所示的矩阵。

(a) 若 $m=1$，则

$$A^{\textcircled{\#}_m}=A^{\textcircled{w},\dagger}=U\begin{bmatrix}(\Sigma K)^{\textcircled{w}} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*.$$

(b) 若 $m\geq k$，则

$$A^{\textcircled{\#}_m}=A^{\textcircled{\dagger}}=U\begin{bmatrix}(\Sigma K)^{\textcircled{\dagger}} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^*.$$

证明. (a) 由注 2.1 得出。
(b) 由于 $m\geq k$，由注 2.1 可得 $(\Sigma K)^{\textcircled{w}_m}=(\Sigma K)^d$。此外，由于 A 的指标为k，我们知道 ΣK 的指标为 $k-1$ [16, 引理 2.8]。因此，由引理 3.6 可得，在我们的情形下有$P_{(\Sigma K)^{m-1}}=P_{(\Sigma K)^{k-1}}$。于是，由 (2.4) 得到 $(\Sigma K)^{\dagger\bigcirc}=(\Sigma K)^dP_{(\Sigma K)^{k-1}}$。现在，由 (6.4) 即可得证。 □

7 m-弱核逆与其他广义逆的关系

本节利用核-EP分解，给出 m-弱核逆与某些已知广义逆相等的充要条件。

定理7.1. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为一个矩阵，其 Ind(A) $=k$ 按 (3.1) 中的形式写出。那么

(a) $A^{\textcircled{\#}_m}=A^{\dagger}$ 当且仅当 $S=0$ 且 $N=0$；(b) $A^{\textcircled{\#}_m}=A^d$ 当且仅当 $\tilde{T}_mP_{N^m}=T^{m-k}\tilde{T}_k$；(c) $A^{\textcircled{\#}_m}=A^{\dagger\bigcirc}$ 当且仅当 $\tilde{T}_mN^m=0$；(d) $A^{\textcircled{\#}_m}=A^{d,\dagger}$ 当且仅当 $\tilde{T}_mP_{N^m}=T^{m-k}\tilde{T}_kP_N$；(e) $A^{\textcircled{\#}_m}=A^{\mathrm{w}\bigcirc^{\dagger}}$ 当且仅当 $\tilde{T}_mP_{N^m}=T^{m-1}SP_N$；(f) $A^{\textcircled{\#}_m}=A^{\mathrm{w}\bigcirc^m}$ 当且仅当 $\mathcal{N}((N^m)^*)\subseteq\mathcal{N}(\tilde{T}_m)$。

证明。 (a) 由 $m=1$ 的 (3.4) 可得， A 的 Moore-Penrose逆为

$$A^{\dagger}=U\begin{bmatrix} T^{*}\Delta_{1} & -T^{*}\Delta_{1}SN^{\dagger} \\ \Omega_{1}^{*}\Delta_{1} & N^{\dagger}-\Omega_{1}^{*}\Delta_{1}SN^{\dagger} \end{bmatrix}U^{*}. \tag{7.1}$$

由 (4.2) 和 (7.1) 可知， $A^{\oplus_m}=A^{\dagger}$ 当且仅当以下条件同时成立：

(i) $T^{-1}=T^{*}\Delta_{1}$,

(ii) $T^{-(m+1)}\tilde{T}_{m}P_{N^{m}}=-T^{*}\Delta_{1}SN^{\dagger}$,

(iii) $0=\Omega_{1}^{*}\Delta_{1}$,

(iv) $0=N^{\dagger}-\Omega_{1}S^{*}\Delta_{1}SN^{\dagger}$.

我们将证明，(i)-(iv) 成立当且仅当 $S=0$ 和 $N=0$。事实上，由于 Δ_1 非奇异，由 (iii) 可得 $\Omega_1=0$。因此，(iv) 推出 $N^{\dagger}=0$，从而 $N=0$。因此，由于 $\Omega_1=($ $I_{n-t}-Q_{n})S=0$，我们有 $S=0$。反过来，若 $S=0$ 且 $N=0$，则显然 (i)-(iv) 均成立。

(b) 根据 [10, 定理 3.9]， A 的 Drazin逆为

$$A^{d}=U\begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)}\tilde{T}_{k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^{*}. \tag{7.2}$$

由 (4.2) 和 (7.2) 可知， $A^{\oplus_m}=A^{d}$ 等价于 $T^{-(m+1)}\tilde{T}_{m}P_{N^{m}}=T^{-(k+1)}\tilde{T}_{k}$，从而 $\tilde{T}_{m}P_{N^{m}}=T^{m-k}\tilde{T}_{k}$。

(c) 由 (4.2) 和 (3.2) 可知， $A^{\oplus_m}=A^{\dagger\bigcirc}$ 当且仅当 $T^{-(m+1)}\tilde{T}_{m}P_{N^{m}}=0$，这显然~等价于 $T_{m}N^{m}=0$。

(d) 根据 [10, 定理 3.11]，我们知道

$$A^{d,\dagger}=U\begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(k+1)}\tilde{T}_{k}P_{N} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^{*}. \tag{7.3}$$

现在，由 (4.2) 和 (7.3) 可直接得出该断言。

(e) 根据 [12, 定理 3.12]，我们知道

$$A^{\textcircled{w}}=U\begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-2}SP_{N} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^{*}. \tag{7.4}$$

因此，通过比较 (4.2) 和 (7.4) 中的块，我们得到 (e)。

(f) 由 (2.9 ），（3.2）和（3.3）， A 的 m-弱群逆可表示为

$$A^{\textcircled{w}_m}=U\begin{bmatrix} T^{-1} & T^{-(m+1)}\tilde{T}_{m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^{*}. \tag{7.5}$$

因此，由 (4.2) 和 (7.5) 可知， $A^{\oplus_m}=A^{\mathrm{w}\bigcirc^{m}}$ 等价于 $T^{-(m+1)}\tilde{T}_{m}P_{N^{m}}=T^{-(m+1)}\tilde{T}_{m}$，而后者等价于 $\tilde{T}_{m}(I_{n-t}-P_{N^{m}})=0$，因为 T是非奇异的。显然，

~$T_{m}(I_{n-t}-P_{N^{m}})=0$ 当且仅当 $\mathcal{R}(I_{n-t}-P_{N^{m}})\subseteq\mathcal{N}(T_{m})$，而这又等价于~$\mathcal{N}((N^{m})^{*})\subseteq\mathcal{N}(T_{m})$。 □

我们以一些必要且充分条件结束本节，在这些条件下，m-弱核逆与 A 的不同变换相重合。首先，回顾一下：若 $A^3 = A$，则 A 是三幂等矩阵；而若 $AA^*A = A$（或 $A^\dagger = A^*$），则 A 是偏等距算子。

定理 7.2。设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $k =$Ind(A)。则

(a) 当且仅当 $A^k = 0$ 时，$A^{\circledcirc_m} = 0$。(b) 当且仅当 A 是 EP 三幂等矩阵时，$A^{\circledcirc_m} = A$。(c) 当且仅当 A 是 EP 偏等距算子时，$A^{\circledcirc_m} = A^*$。(d) 当且仅当 A 是幂等矩阵时，$A^{\circledcirc_m} = P_A$。

证明。(a) 根据定理 4.7 (g)，我们有 rk($A^{\circledcirc_m}$) = rk(A^k) = 0，因此 $A^k = 0$。为了证明命题 (b)-(d)，令 A 如(3.1)中所示。
(b) 根据(4.2)，我们有

$$\begin{aligned} A^{\circledcirc_m} = A \;&\Leftrightarrow\; T^{-1} = T,\;\; T^{-(m+1)}\tilde{T}_m P_{N^m} = S \;\text{ and }\; N = 0;\\ &\Leftrightarrow\; T^2 = I_t,\;\; S = 0 \;\text{ and }\; N = 0;\\ &\Leftrightarrow\; A \;\text{ is an EP tripotent matrix.}\end{aligned}$$

(c) 根据(4.2)，我们得到

$$\begin{aligned} A^{\circledcirc_m} = A^* \;&\Leftrightarrow\; T^{-1} = T^*,\;\; T^{-(m+1)}\tilde{T}_m P_{N^m} = 0,\;\; 0 = S^* \;\text{ and }\; 0 = N^*;\\ &\Leftrightarrow\; TT^* = I_t,\;\; S = 0 \;\text{ and }\; N = 0;\\ &\Leftrightarrow\; A \;\text{ is an EP partial isometry.}\end{aligned}$$

(d) 根据(4.2)和关于 $m = 1$ 的(3.5)，我们得到

$$\begin{aligned} A^{\circledcirc_m} = P_A \;&\Leftrightarrow\; T^{-1} = I_t,\;\; T^{-(m+1)}\tilde{T}_m P_{N^m} = 0,\;\; \text{and }\; 0 = P_N;\\ &\Leftrightarrow\; T^{-1} = I_t,\;\; T^{-(m+1)}\tilde{T}_m P_{N^m} = 0,\;\; \text{and }\; 0 = N;\\ &\Leftrightarrow\; T = I_t \;\text{ and }\; N = 0;\\ &\Leftrightarrow\; A \;\text{ is an idempotent matrix.}\end{aligned}$$

□

声明

资助
本研究获得 Universidad Nacional de R´ıo Cuarto 的资助项目 PPI 18/C559、CONICET 的资助项目 PIP 112-202001-00694CO、CONICET 的资助项目 PIBAA 28720210100658CO，以及 Universidad Nacional de La Pampa 工程学院的资助项目 135/19。

利益披露声明
作者声明不存在需要披露的利益冲突。

参考文献

[1] N. Aldhafferi, D. Pappas, I.P. Stanimirovi´c, M. Tasi´c, 基于满秩QDR分解的广义逆表示, Numer. Algorithms, 86 (2021) 1327-1337.[2]A. Ben-Israel, T.N.E Greville, 广义逆：理论与应用, Springer-Verlag, 纽约, 2003.[3] O.M. Baksalary, G. Trenkler, 矩阵的核逆, Linear Multilinear Algebra, 58(6) (2010) 681-697.[4] O.M. Baksalary, G. Trenkler, 关于一种广义核逆, Appl. Math. Comput., 236 (1) (2014) 450-457.[5] D.E. Ferreyra, S.B. Malik, 关于核偏序的一些新结果, Linear Multilin- ear Algebra, 70(18) (2022) 3449-3465.[6] D.E. Ferreyra, S.B. Malik, 核正交矩阵与强核正交矩阵, Linear Multi- linear Algebra 70(20) (2022) 5052-5067.[7] D.E. Ferreyra, S.B. Malik, 相对EP矩阵, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ís. Nat. Ser. A Mat. 116, 69 (2022).[8] D.E. Ferreyra, S.B. Malik, 群逆的推广, Quaest. Math. (2022), (即将出版).[9] D.E. Ferreyra, F.E. Levis, N. Thome, 重新审视核-EP逆及其向矩形矩阵的推广, Quaest. Math., 41(2) (2018) 265-281.[10] D.E. Ferreyra, F.E. Levis, N. Thome, 确定广义逆的矩阵极大类, Appl. Math. Comput., 333 (2018) 42-52.[11] D.E. Ferreyra, F.E. Levis, N. Thome, 某些外广义逆的 k-交换等式的刻画, Linear Multilinear Algebra, 68(1) (2020) 177-192.[12] D.E. Ferreyra, D.E. Levis, A.N. Priori. N. Thome, 弱核逆, Aequat. Math., 95 (2021) 351-373.[13] D.E. Ferreyra, V. Orquera, N. Thome, 矩形矩阵的弱群逆, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat., 113 (2019) 3727-3740.[14] R.E. Hartwig, K. Spindelb¨ock, 使得 A^* 与 $A^\dagger$ 可交换的矩阵, Linear Mul-tilinear Algebra, 14(3) (1984) 241-256.[15] W. Jiang, K. Zuo, 复矩阵的 m-弱群逆的进一步刻画, AIMS Mathematics 7(9) (2022) 17369-17392.[16] S. Malik, N. Thome, 关于任意指标矩阵的一种新的广义逆, Appl. Math. Comput., 226(1) (2014) 575-580.

[17] K. Manjunatha Prasad, K.S. Mohana，核-EP逆，Linear Multilinear Algebra, 62(6) (2014年) 792-802。[18] S.K. Mitra, P. Bhimasankaram，《矩阵偏序、短化算子及其应用》，《代数丛书》第10卷，世界科学出版社，新加坡，2010年。[19] D. Mosi´c, P.S. Stanimirovi´c, D. Zhang，广义核-EP逆的扩展，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. 116, 132 (2022)。[20] D. Mosi´c, P.S. Stanimirovi´c, 弱群逆的表示，《应用数学与计算》397, 125957 (2021)。[21] F. Soleimani, P.S. Stanimirovi´c, F. Soleymani，用于计算广义逆和配平化学方程式的若干矩阵迭代，《算法》8(4) (2015) 982-998。[22] I.P. Stanimirovi´c, M.B. Tasi´c，利用 LDL^*分解计算广义逆，《应用数学快报》25(3) (2012) 526-531。[23] P.S. Stanimirovi´c, D. Pappas, V. Katsikis, I.P. Stanimirovi´c，基于 QR 分解的外逆满秩表示，《应用数学与计算》218(20) (2012) 10321-10333。[24] P.S. Stanimirovi´c, J.R. Sendra, R. Behera, J.K. Sahoo, D. Mosi´c, D., J. Sendra, A. Lastra，通过特化与有理化计算张量广义逆，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. 115, 116 (2021)。[25] H. Wang，核-EP分解及其应用，《线性代数及其应用》508(1) (2016) 289-300。[26] H. Wang, J. Chen，弱群逆，《开放数学》16(1) (2018) 1218-1232。[27] M. Zhou, J. Chen, P.S. Stanimirovi´c, V. Katsikis, H. Ma，用于计算核逆和核-EP逆的复变参数张氏神经网络。《神经处理通讯》51 (2020) 1299-1329。[28] Y. Zhou, J. Chen, M. Zhou， m-带对合环中的弱群逆，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. 115, 2 (2021)。[29] M. Zhou, J. Chen，与伪核逆相关元素的特征及最大类，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. 114, 104 (2020)。[30] H. Zhu, P. Patr´ıcio，环中的若干种单侧偏序。Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat., 113 (2019) 3177-3184。