arXiv:2301.08873v1 [cs.GT] 21 Jan 2023

收敛 不确定条件下多议题迭代投票的 ty

Joshua Kavner[1], Reshef Meir[2],Francesca Rossi[3],和 Lirong Xia[1]

[2]伦斯勒理工学院， {kavnej@rpi.edu,xial@cs.rpi.edu}[3]以色列理工学院，reshefm@ie.technion.ac.il[4]IBM T.J. Watson 研究中心，Francesca.Rossi2@ibm.com

2023年1月24日

摘要

我们研究不确定性下多个议题的迭代投票中策略行为的影响。我们提出一个模型，将多议题同时投票与 Meir 等人 [2014]的局部支配理论相结合，并确定其收敛性质。在证明局部支配改进动态可能无法收敛后，我们提出了两种充分的模型细化方法，可确保二元议题从任意初始投票配置出发均能收敛：将代理人的偏好限制为具有 $\mathcal{O}$-合法偏好，并使代理人对自己正在修改的议题所具有的不确定性低于对其他议题的不确定性。实证研究表明，尽管代理人没有不确定性时循环很常见，但引入不确定性后，实际中几乎总能保证收敛。

1 引言

设想一位婚礼策划师正在安排婚礼宴席，并希望满足宴会宾客的偏好。假设有三个议题：主菜（鸡肉、牛肉或三文鱼）、搭配葡萄酒（红葡萄酒或白葡萄酒），以及甜点蛋糕的口味（巧克力或香草）。策划师该如何着手？一方面，策划师可以要求每位出席者（代理人）提交其对 d^p种可能性（备选项）的完整偏好排序，其中有 p 个议题，每个议题有 d 个候选项。然而，这在计算上难以处理，也会给代理人带来很高的认知成本。

另一方面，规划者也可以只询问代理人最偏好的备选项，并同时决定每个议题。尽管这种做法更简单，却会导致多重选举悖论，使代理人可能集体选出各自最不喜欢的结果。例如，假设三名代理人分别将$(1，1，0)$、$(1，0，1)$和$(0，1，1)$ 分别列为三个二元议题上的首选，并且都将$(1，1，1)$ 列为最后一位（Lacy 和 Niou[2000]）。那么，代理人会在每个议题上分别按照多数规则选出$(1，1，1)$。

第三种方法是依次决定各个议题，并让代理人根据此前已确定的结果，对当前议题上自己偏好的备选项进行投票（Lang 和 Xia [2009], Xia 等人 [2011]）。然而，最终的联合结果可能取决于投票议程；如果代理人的偏好取决于后续议题的结果，他们在当前议题上投票时可能会感到不安。Conitzer 等人 [2009]。

在本文中，我们研究迭代投票（区间投票，IV）这一种不同但自然的多个议题决策方法 Meir 等人 [2010]。我们征集代理人最偏好的备选项，并在获得他人投票信息的情况下，允许代理人在最终确定群体决策之前更新其投票报告。这种方法结合了同时投票的效率与顺序投票的动态，从而在不直接征集代理人较低排序偏好的情况下，纳入了相关信息。与前一种方法一样，代理人

只报告其最偏好的备选项。与后一种方法一样，代理人每次只更新一个议题，但不受改进次序的限制。

区间投票是一种有效的框架，因为它能够适应各种信息和行为模式。例如，代理人可能完全了解彼此的投票，例如在在线 Doodle 投票中 Zou 等人 [2015],并根据其他所有人的短视 最佳回应 进行更新。或者，代理人可能只有部分信息，例如来自不精确民意调查的信息 Reijngoud 和 Endriss [2012]，也可能受到延迟影响，例如他们只能定期从网络系统中获取投票数。接下来，我们采用严格不确定性方法：代理人假定某个集合中的任何投票配置都有可能发生，但不为这些配置赋予概率。代理人会将自己的投票更新为 局部支配其先前报告的投票 Meir 等人 [2014]。

我们提出两个主要问题：（1）多议题迭代投票在什么条件下会收敛？（2）引入不确定性并提高不确定性会如何影响收敛速度？

先前关于单议题迭代投票收敛性的研究结论并不一致：多数投票规则和否决投票规则具有强有力的保证，但许多其他规则会出现循环 Meir 等人 [2017]。因此，我们对多议题迭代投票能否收敛，以及若能收敛，是否能够解决多重选举悖论等其他问题，仍抱有复杂的期望 Xia 等人 [2011]。此外，与单议题情形不同 Meir[2015], 多个议题中的不确定性具有双重作用。首先，与单议题情形一样，对于任何接近平局的议题，代理人都认为自己可能是关键一票。其次——这是新的方面——代理人可能不确定自己对某个特定议题的偏好，因为这种偏好可能取决于其他不确定议题的结果。

1.1 我们的贡献

在概念层面，我们提出了一个模型，综合了局部支配策略行为、迭代投票以及多个议题上的同时投票方面的既有研究。这个广义模型自然涵盖了上述两类不确定性。

在技术层面，我们首先证明，在没有不确定性的情况下，无论采用最佳回应还是采用具有不确定性的局部支配改进动态，区间投票都可能无法收敛。随后，我们提出了两种足以保证二元议题收敛的模型细化：将代理人的偏好限制为 $\mathcal{O}$-合法，由于代理人对各议题的偏好彼此独立，因此能够保证收敛；交替不确定性，即代理人对当前议题比对其他议题更确定，由于这种情况下能够产生改进步骤的偏好排序更少，因此也能保证收敛。这些收敛结果无法推广至多候选人议题的情形，因为当代理人拥有偏序偏好信息时，LDI 复数制动态可能出现循环。

我们的二元议题收敛结果也适用于区间投票的非原子变体。在该变体中，代理人属于一个规模极大的群体，任意代理人子集都可以同时改变其投票，从而得出更一般的收敛结果（见附录 C）。

最后，我们通过实证证据印证了研究发现：在多个二元议题的区间投票中引入不确定性，几乎可以消除所有循环。我们的实验进一步表明，与各自的真实投票组合相比，区间投票改善了均衡投票组合的质量，从而减少了多重选举悖论。提高不确定性会加快收敛，但会削弱这种福利改善。

1.2 相关工作

我们的模型借鉴了多议题投票、区间投票以及局部支配下策略行为方面的研究成果。多议题投票是经济学和计算机科学中经过广泛研究的问题，其应用包括直接民主公投、群体规划和委员会选举（例如，参见 Lang 和 Xia [2016]的综述）。我们的工作延续了关于代理人策略行为的研究，相关研究包括 Lang [2007], Lang 和 Xia [2009],Conitzer 等人 [2009], Xia 等人 [2011]。

单议题迭代投票最初由 Meir 等人 [2010] 针对最佳响应动态和相对多数制社会选择规则进行了研究，并对其保证收敛速率给出了界。后续研究表明，迭代否决能够收敛Reyhani 和 Wilson [2012],Lev 和 Rosenschein [2012], 然而，许多其他投票规则并不会收敛 Koolyk 等人 [2017] 除非对代理人的行为施加额外限制 Reijngoud 和 Endriss [2012], Grandi 等人 [2013], Obraztsova 等人 [2015], Endriss 等人 [2016]。

这篇综述已经缩小了多议题情境下收敛可能性的范围。因此，我们将研究范围限定在相对多数制，并扩展Meir 等人 [2014], Meir [2015]提出的模型。他们的研究发现了投票均衡存在的广泛条件，并证明迭代多数制能够保证收敛。具体而言，Meir [2015] 研究了一种非原子模型变体，其中代理人对结果的影响微乎其微，但多个代理人会同时更新投票，从而大大简化了动态过程。

Bowman 等人 [2014] 和 Grandi 等人 [2020] 分别通过计算机模拟和人类实验实证表明，对于多个二元议题，区间投票可提高投票结果的社会福利。我们的工作拓展了这项研究，刻画了代理人不具备完整信息时的收敛性。

另一条相关研究脉络探讨认知投票博弈中的策略行为，即代理人对他人的偏好或投票存在不确定性时的情形（例如，参见 Meir [2018] 的综述）。值得注意的是，Chopra 等人[2004], Conitzer 等人 [2011], Reijngoud 和 Endriss [2012], Van Ditmarsch 等人 [2013] 分别研究了投票规则对局部支配改进步骤的易受影响程度及其计算复杂性。关于 Gibbard-Satterthwaite 博弈中策略行为的博弈论性质，Myerson 和 Weber [1993], Grandi 等人 [2019], Elkind 等人 [2020]进行了研究。区间投票的其他形式还包括 Airiau 和 Endriss [2009], Desmedt 和 Elkind [2010],Xia 和 Conitzer [2010]的相关工作。

2 预备知识

基本模型。设 $\mathcal{P} = \{1, 2, \ldots, p\}$ 为联合域 $\mathcal{D} = \times_{i=1}^{p} D_i$上的 p 议题集合，其中D_i 是议题 i的候选项有限值域。若对每个$i \in \mathcal{P}$ 都有 $D_i = \{0, 1\}$ ，则称这些议题为二元议题；否则称为多候选项议题。每位 n 代理人都具有一个偏好排序 $R_j \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$，即 $\times_{i=1}^{p}|D_i|$ 备选项上的严格线性序集合。我们将代理人的偏好集合$P = (R_1, \ldots, R_n)$称为偏好剖面，并将每位代理人最偏好的备选项称为其诚实投票。投票配置 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{D}^n$是投票的集合，其中 $a_j = (a_j^1, \ldots, a_j^p) \in \mathcal{D}$汇集了代理人 j 在每个议题上的单候选项投票。确定性投票规则 $f\colon \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$ 将投票配置映射为唯一结果。对于 $i \in \mathcal{P}$，我们将 $a \in \mathcal{D}$ 和 $a^i \in D_i$ 视为备选项或结果的同义词。

同时多数投票。 对每个议题分别应用的局部投票规则，若议题的结果同时向代理人揭示，则称为 同时投票。若按照次序 序贯 进行投票，则称为 $\mathcal{O} = \{o_1, \ldots, o_p\}$ 若每个议题的结果 o_i 在下一个议题开始投票之前向代理人揭示 o_{i+1} Lacy 和 Niou [2000]。我们聚焦于同时多数投票，并对 Xia 等人 [2011]的框架进行调整。

应用于议题 i 上的投票配置 a 时，相对多数规则 $f^i(a)$ 仅取决于每个候选项获得的总票数。因此，我们将候选项 $c \in D_i$ 的得分定义为 $s^i(c; a) = |\{j \le n\colon\ a_j^i = c\}|$ ，并将得分元组 $s(a) = (s^i(a))_{i\in\mathcal{P}}$ 定义为得分向量 $s^i(a) = (s^i(c; a))_{c\in D_i}$的集合。我们使用相对多数规则 $f(a) = (f^i(a))_{i\in\mathcal{P}} \in \mathcal{D}$，其中 $f^i(a) = \arg\max_{c\in D_i} s^i(c;\ a)$，并在每个议题上按字典序打破平局。为简化记号，我们常交替使用 s、 $s(a)$ 和 a 。

令 a_{-j} 表示不包含代理人 j 的投票配置，并令 $(a_{-j}, \hat{}a_j)$ 表示将 j的投票替换为备选投票 $\hat{}a_j$后得到的配置 a 。那么，s_{-j} 和 $s_{-j} + \hat{}a_j$ 分别表示相应的调整后的得分元组。

偏好依赖。 如果对于每个议题 $i \in \mathcal{P}$，候选项在 D_i中的相对排序在其他议题的所有结果下都保持一致，则称该偏好排序为可分离。这样做的好处是

代理人可以在不了解其他议题结果的情况下表达自己对任一议题的偏好，并避免多次选举悖论（例如，参见 Xia等人 [2011]），但这是一项要求很高的假设 Hodge[2002]。将代理人的偏好放宽为 $\mathcal{O}$-合法，既能保持表示紧凑性，又不允许任意的偏好依赖 Lang 和 Xia [2009]。

形式化地，对于议题的某种次序 $\mathcal{O} = \{o_1, \ldots, o_p\}$，如果给定先前议题的结果 $\{f^{o_1}, f^{o_2}, \ldots, f^{o_{i-1}}\}$ 后，候选项在 D_{o_i}中的相对次序对于后续议题 $\{f^{o_{i+1}}, \ldots, f^{o_p}\}$的任何结果组合都保持不变，则称偏好排序 R是-合法的。因此， R 中候选项 D_{o_i} 的排序至多取决于其在 $\mathcal{O}$中之前的议题结果。

如果偏好剖面 P 中的每个排序对于同一次序 $\mathcal{O}$都是 $\mathcal{O}$-合法的，则称该偏好剖面为 $\mathcal{O}$-合法的。因此，如果排序 R 对于任意次序 $\mathcal{O}$都是 $\mathcal{O}$-合法的，则该排序可分离。

示例 1。 设有 $p = 2$ 个二元议题和 $n = 3$ 个代理人，其偏好为 $P = (R_1、 R_2、 R_3)$，满足：

R_1：(1，0) $\succ_1$(0，0) $\succ_1$(0，1) $\succ_1$(1，1)，R_2：
(1，1) $\succ_2$(0，0) $\succ_2$(0，1) $\succ_2$(1，0)，以及R_3：
(0，0) $\succ_3$(0，1) $\succ_3$(1，0) $\succ_3$(1，1)。

真实投票配置 $a = ((1，0)、(1，1)、(0，0))$ 由每位代理人的最偏好的备选项组成。因此，得分元组为 $s(a) = \{(1，2)、(2，1)\}$，因此在相对多数制下为 $f(a) = (1，0)$。

请注意， R_1 对 $\mathcal{O} = \{2, 1\}$而言是 $\mathcal{O}$-合法的：该代理人在第二个议题上始终偏好 $0 \succ 1$，但其对第一议题的偏好取决于 f^2。 R_3 是可分离的，因为该代理人在每个议题上的偏好都独立于另一个议题的结果。 R_2 既不可分离，也不对任何 $\mathcal{O}$而言是 $\mathcal{O}$-合法的。

最后，代理人2 可以通过投票支持$\hat{}a_2 = (0，1)$ 而不是 $a_2 = (1，1)$来改善自己的结果。调整后的得分元组为 $s_{-2} = \{(1，1)、(2，0)\}$，因此 $s_{-2} + \hat{}a_2 = \{(2，1)、(2，1)\}$ 以及 $f(s_{-2} + \hat{}a_2) = (0，0) \succ_2 (1，0) = f(a)$。

改进动态。我们采用 Meir 等人提出的迭代投票（IV）模型 [2010]，并采用 Meir 等人 [2014], Meir [2015]针对不确定性对其进行的改进。给定代理人的真实偏好 P 和初始投票配置 $a(0)$，我们考虑由投票配置组成的迭代过程 $a(t) = (a_1(t) \ldots, a_n(t)$，这些配置描述了代理人随时间 $t \geq 0$报告的投票。对于每一轮 t，调度器 ϕ 选择一名代理人 j，使其通过应用指定的响应函数g_j： $\mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$，对先前的投票$a_j(t)$执行改进步骤。每名代理人的响应都隐含地取决于其偏好以及对当前真实投票配置的信念，但他们并不了解其他人的私人偏好。除 j的投票外，其他所有投票均保持不变。

调度器通常被定义为一种映射，它将投票配置序列映射到最新投票配置中存在改进步骤的代理人 Apt 和 Simon [2015]。如果存在改进步骤，就必须选择一个；不存在改进步骤的投票配置（即 $g_j(a) = a_j \ \forall j \leq n$）称为均衡。博弈动态领域的文献研究了不同类型的响应函数、调度器、初始配置以及其他假设（例如，参见 Fudenberg 和 Levine [2009], Marden 等人 [2007], Bowling[2005], Young [1993]）。这意味着，投票规则可以在多个层面上保证收敛到均衡 Meir 等人 [2017]。本文研究两种响应函数：不考虑不确定性的最佳响应（BR），以及考虑不确定性的局部支配改进（LDI）。对于这两种动态，我们都限制代理人每轮只能改变其在一个当前议题 $i \in \mathcal{P}$ 上的投票，具体由调度器 ϕ决定。因此，我们得到如下收敛形式，其描述见 Kukushkin [2011], Monderer 和 Shapley [1996], Milchtaich [1996]:

定义 1. 如果对于给定的响应函数，从任意初始投票剖面出发的每个改进序列都是有限的，那么区间投票动态就具有受限有限改进性质 。

在最佳响应动态下，代理人知道真实得分元组 $s(a)$。

定义 2 (最佳回应)。 给定投票配置 a, $g_j(a) := \hat{a}_j$ ，它能使代理人 j 从集合 $\{f(a_{-j}, \tilde{a}_j)$ 中获得最偏好的结果： $\tilde{a}_j^i \in D_i, \tilde{a}_j^k = a_j^k \, \forall k \neq i\}$；如果最佳结果相同，则默认选择 a_j 。

LDI 动态基于以下概念： 严格不确定性 和 局部支配 Conitzer 等人 [2011],Reijngoud 和 Endriss [2012]。设 $S \subseteq \times_{i=1}^{p} \mathbb{N}^{|D_i|}$ 为一个得分元组集合，非正式地描述代理人j对真实得分元组 $s(a)$的不确定性。若向备选投票 $\hat{a}_j$ 对于每个 a_j 都不比原投票差， $v \in S$并且对于 $v \in S$中的某个元组严格更好，且对于任意 $v \in S$都不更差，则构成一个 LDI 步。其形式化定义如下。

定义 3。 若存在至少一个得分元组 $v \in S$ ，使得 $f(v + \hat{a}_j) \succ_j f(v + a_j)$，则投票 $\hat{a}_j$ S战胜 a_j 。若同时满足 *(I)* $\hat{a}_j$ S战胜 a_j；且 *(II)* a_j 不战胜 $\hat{a}_j$，则投票 $\hat{a}_j$ S支配 a_j 。

定义 4 （局部支配改进）。 给定投票配置 a 和代理人 j，令 LD_j^i 为一组投票，这些投票以 S支配 a_j，仅在议题 i^{th} 上与 a_j 不同，并且自身不被仅在议题 i^{th} 上与 a_j 不同的投票以 S支配。那么 $g_j(a) = a_j$ 当 $LD_j^i = \emptyset$ 时成立，否则为$\hat{a}_j \in LD_j^i$ 。

该定义与 Meir [2015], 中的（弱）LDI 不同之处在于，代理人可以连续更改投票，但只能针对不同议题。注意， S-支配具有传递性和反对称性，但不具有完备性，因此代理人 j 可能没有改进步骤。要完整定义该模型，我们需要为每个 S 指定 a。例如，如果 $S = \{s(a_{-j})\}$，且每个 j 对真实得分元组都不存在不确定性，那么 LDI 与最佳响应动态（BR）一致，均衡也与 纳什均衡一致。因此，LDI 拓展了最佳响应动态。

基于距离的不确定性。 单议题模型中的代理人使用基于距离的不确定性来构建不确定性集，即认为所有与当前配置足够接近的得分向量都可能出现 Meir 等人 [2014], Meir [2015]。我们将其调整到多议题情境，假设代理人对每个议题分别采用逐候选人基于距离的不确定性来处理得分向量。

对于任意议题 $i \in \mathcal{P}$，设 $\delta(s^i(a), \tilde{s}^i(a))$ 是针对任意投票配置 a 的得分向量的距离度量。若该度量可写为 $\delta(s^i(a), \tilde{s}^i(a)) = \max_{c \in D_i} \hat{} \delta(s^i(c; a), \tilde{s}^i(c; a))$，其中$\hat{}$ 是某个单调函数 δ，则称其为按候选项分别计算 。例如，乘法距离（其中 $\delta(s, \tilde{s}) = \max\{\tilde{s}/s, s/\tilde{s}\} - 1$）$\hat{}$ 和 ℓ_∞ 度量（其中 $\delta(s, \tilde{s}) = |s - \tilde{s}|$）都属于按候选项分别计算的距离度量。

给定投票配置 a 和议题 $i \in \mathcal{P}$，我们用不确定性得分集合 $\tilde{S}_{-j}^i(s; r_j^i) := \left\{v^i : \delta(v^i, s_{-j}^i) \leq r_j^i\right\}$ 来表示代理人 j对调整后的得分向量s_{-j}^i的不确定性，其不确定性参数为不确定性参数 r_j^i。也就是说，在给定其他所有代理人的投票 a_{-j}^i时，代理人 j 并不确定真实的得分向量是什么 $v^i \in \tilde{S}_{-j}^i(s; r_j^i)$。我们令 $\tilde{S}_{-j}(s, r_j) := \times_{i=1}^{p} \tilde{S}_{-j}^i(s; r_j^i)$ for $r_j = (r_j^i)_{i \in \mathcal{P}}$，并在上下文明确时省略这些参数。

示例 2. 设有 $p = 2$ 个二元议题和 $n = 13$ 个代理人。定义投票配置 a 使得$s(a) = \{(8, 5), (9, 4)\}$ 且 $a_j = (0, 1)$ 适用于某个代理人 j。假设 j 使用$(r_j^1, r_j^2) = (1, 1)$这一不确定性度量。那么，不包含 j投票的不确定性得分集合为：

$$S_{-j} = \{(6, 7, 8) \times (4, 5, 6)\} \times \{(8, 9, 10) \times (2, 3, 4)\}$$

考虑备选投票$\hat{}$ $a_j = 1, 1$ $\{f\ v + a_j \quad v \in ()$。
那么，可能结果集合为$(\hat{}) : S_{-j}\} = \{0, 1\} \times \{0\}$.

备注。 请注意，对于任何从真实投票配置经由最佳响应动态或 LDI 动态可达的投票配置，偏好完全可分的代理人都不会有改进步骤。这可由最佳响应动态和 LDI 动态的定义得出。

3 最佳响应动态

给定投票配置 a，考虑代理人 j 在议题 i 上将其投票 a_j 改为备选投票 $\hat{a}_j$。在没有不确定性的情况下，根据最佳响应动态，只有当 j 能够将结果 $f(a)$改进为一个相对于 R_j更有利的结果时，才会改变其投票。这需要满足两个条件。首先，j 必须在该 i^{th} 议题上具有关键性，也就是说，其改变投票必然会改变结果。其次，鉴于其他议题的结果 $\mathcal{P}\backslash\{i\}$，$j$ 必须更倾向于通过投票支持 $\hat{a}_j^i$ 而非a_j^i 来改变 i。由于代理人 j知道每个议题的实际结果，其偏好始终是明确的。因此，最佳响应动态的表现与单议题情形相似；我们回顾一下，Meir 等人 [2010]证明该情形会收敛。然而，在多议题情境中，代理人在每个议题上的偏好可能会随着其他议题结果的变化而改变。这意味着可能出现循环，正如下述命题所述，并由随后的例子加以证明。

命题 1。 多个议题的最佳响应动态可能不会收敛，即使议题是二元的。

示例 3。 设有 $p = 2$ 个二元议题和 $n = 3$ 位代理人，他们不存在不确定性，且具有以下偏好：

R_1: (0，1) $\succ_1$ (1，1) $\succ_1$ (1，0) $\succ_1$ (0，0)，R_2:
(0，0) $\succ_2$ (0，1) $\succ_2$ (1，1) $\succ_2$ (1，0)，以及R_3:
(1，0) $\succ_3$ (1，1) $\succ_3$ (0，0) $\succ_3$ (0，1)。

代理人 j	$a_j(0)$	$a_j(1)$	$a_j(2)$	$a_j(3)$
1	(0，1)	(1，1)	(1，1)	(0，1)
2	(0，0)	(0，0)	(0，1)	(0，1)
3	(1，0)	(1，0)	(1，0)	(1,0)
$f(a)$	(0,0)	(1，0)	(1，1)	(0，1)

表1：代理人对 $a(0)$（诚实投票）、 $a(1)$、 $a(2)$和 $a(3)$的投票。

表*1* 展示了从真实投票配置 $a(0)$通过最佳响应动态产生的一个循环。改进步骤的次序为 $j = (1，2，1，2)$。循环中的任何配置都不存在其他最佳响应步骤，这表明无论采用何种代理调度器，都无法实现收敛。请注意，由于代理人3 的排序完全可分离，其投票始终不变。

4 局部支配改进动态

4.1 非收敛

LDI 动态拓宽了最佳响应的范围，但起初并不清楚，提高代理人的不确定性参数会如何影响其改进步骤，以及这是否会消除循环的可能性。在 LDI 动态下，存在不确定性时，代理人 j 会将议题 i 上的投票 a_j 从投票配置 a 改为备选投票 $\hat{a}_j$，但须满足与最佳响应动态类似的两个条件：他们 (I) 认为自己可能是关键代理人，且 (II) 能够改善相对于 R_j 的结果（对应于 S-支配）。首先，直观而言，代理人对 j当前议题 i 的不确定性似乎会影响他们是否认为自己能够改变 i的结果。请注意，如果议题 i 只有一个获胜候选人且没有次优候选人，那么 j 就没有最佳响应，但只有在其不确定性参数足够大时，才可能有 LDI 步。其次，不同于最佳响应动态以及 Meir 等人 [2014], Meir [2015]研究的单议题情形，j对议题 i 候选项的偏好可能取决于其他议题的结果，而 j 可能对此并不确定。因此，j对其他议题的不确定性越大，代理人对自己在议题 i候选项上的偏好就越不明确。

尽管存在这两种明显的相似之处，我们发现，对于多候选项议题，不确定性参数与 LDI 步存在性之间的关系并非单调。附录 5 中的例子 B 表明，对于同一投票配置 LD_j^i 中的同一代理人，具有不同不确定性参数时，其潜在投票集合 a 彼此不可比较。另一方面，正如我们在定理 1中所证明的，对于二元议题，LDI 动态具有上述结构。不过，这种关系受到相互对抗的力量影响：提高议题 i 上的不确定性，可能只会增加议题 i 上的 LDI 步，却只会消除所有其他议题上的步骤。

定理 1. 给定二元议题，考虑代理人 j 在投票配置 a 中针对议题 i 改变其投票，且不确定性参数为以下三者之一：r_j、q_j或 $\hat{}q_j$。参数 r_j 和 q_j 仅在议题 $k \neq i$ 上有所不同，且满足 $r_j^k < q_j^k$；r_j 和 $\hat{}q_j$ 仅在议题 i 上有所不同，且满足 $r_j^i < \hat{}q_j^i$。令 LD_j^i、LQ_j^i和 $\hat{}LQ_j^i$ 分别表示根据各参数，代理人 j可能采取的 *LDI* 步骤。那么 $LQ_j^i \subseteq LD_j^i \subseteq \hat{}LQ_j^i$。

我们通过两部分证明该定理：首先证明，若投票 $\hat{}a_j$ $S_{-j}(a;q_j)$支配 a_j，则 $\tilde{}$它必定也 $\hat{}a_j$ $S_{-j}(a;r_j)$支配 a_j；同理，这意味着 $\hat{}a_j$ $S_{-j}(a;\hat{}q_j)$支配 a_j。这些$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$关系都源于 $S_{-j}(a;r_j) \subseteq S_{-j}(a;q_j)$以及 $S_{-j}(a;r_j) \subseteq S_{-j}(a;\hat{}q_j)$。对于二元议题，$\tilde{}$这已经足够，无需证明 $\hat{}a_j$ 不受 $S_{-j}(a;r_j)$或 $S_{-j}(a;\hat{}q_j)$支配。正如例5所述，多候选项议题则未必如此。完整证明见附录 A。

总之，我们发现，允许代理人对议题存在不确定性，并不像单议题情形那样消除循环的可能性；以下命题对此作出陈述，并通过附录 6中的例子 B予以证明。

命题2。 即使代理人具有相同的恒定不确定性参数，且议题均为二元议题，具有多个议题的 *LDI* 动态也可能不收敛。

4.2 策略性响应与 $\mathcal{O}$-合法偏好

接下来，我们将介绍两种模型细化，它们足以保证二元议题情形下的收敛：$\mathcal{O}$-合法偏好和一种特定形式的动态不确定性。

例子3 和 6 表明，循环的出现源于代理人对各议题的相互依赖的偏好。为简单起见，考虑两个议题 i 和 k，其中没有代理人在议题 i上执行 LDI 步骤。议题 k 上的 LDI 步骤可能会改变可能获胜候选项的集合（见定义5），从而改变代理人对 i中候选项的偏好。这使代理人能够在议题 i 上执行 LDI 步骤，即使他们可能不再能在 k上执行改进步骤。显而易见，通过要求代理人具有 $\mathcal{O}$-合法偏好排序来消除相互依赖的偏好，应能保证收敛。

我们将在定理 2 中证明这一点。首先，我们将介绍关于代理人的策略性响应的一种刻画，它将 Meir [2015] 的一个引理推广到了多议题情境。

定义 5. 代理人 j 认为，议题 i 上的候选项 c 是可能获胜者，当且仅当存在某个得分向量，使得 c获胜。形式化地，

$W_j^i(a) = \{c \in D_i : \exists v \in \tilde{S}_{-j}(a;r_j) \text{ s.t. } f^i(v + a_j) = c\}$.

相比之下，j 将潜在获胜者 定义为：存在某个得分向量，在该向量下他们可以通过投票使 c获胜：

$H_j^i(a) = \{c \in D_i : \exists v \in \tilde{S}_{-j}(a;r_j) \text{ and } \hat{a}_j \text{ s.t. } \hat{a}_j^i = c, \hat{a}_j^k = a_j^k \, \forall k \neq i, \text{ s.t. } f^i(v + \hat{a}_j) = c\}$.

真实潜在获胜者的集合记为：$H_0(a) = \{c^i \in D_i : f(s_{-j} + \hat{}a_j) = c$ 其中 $\hat{}a_j = c, \hat{}a_j^k = a_j^k \, \forall k \neq i\}$。

根据此定义，$W_j^i(a) \subseteq H_j^i(a)$。 [1] 将 $\mathcal{W}^{-i}(a;\ r_j) = \times_{k\in\mathcal{P}\setminus\{i\}} W_j^k(a)$ 记为在除 i 以外所有议题上可能获胜的候选项集合，从代理人 j的角度来看，其不确定性参数为r_j。

引理 1。考虑代理人 j 在不确定性参数 r_j 下，从投票配置 a 出发，对议题 i 进行的一步 *LDI* $a_j \xrightarrow{j} \hat{}a_j$ 。那么，要么 *(1)* $a_j^i \notin H_j^i(a)$；要么对于 $\mathcal{W}^{-i}(a;r_j)$ 中可能获胜者的每一种组合，要么 *(2)* 对所有 $b \in H_j^i(a)$，$a_j^i \prec_j b$；要么 *(3)* $r_j^i = 0$, $\{a_j^i, \hat{}a_j^i\} \subseteq H_0(a)$ 且 $\hat{}a_j^i \succ_j a_j^i$。

本引理的证明直接沿用 Meir [2015] 中引理 3 的证明；参见附录 A。

定理 2。假设所有代理人对二元议题均具有针对共同顺序 $\mathcal{O}$ 的 $\mathcal{O}$-合法偏好。那么，*LDI* 动态收敛。

证明。固定一个初始投票配置 $a(0)$。反设投票配置 $\mathcal{C} = \{a(t_1)\ldots, a(t_T)\}$ 之间存在一个循环，其中 $a(t_T+1) = a(t_1)$，并且 $a(t_1)$ 可从 $a(0)$ 经由 LDI 动态到达。令 i 为 $\mathcal{O}$ 中次序最高、且有代理人会在 $\mathcal{C}$ 中改变其投票的议题。

设 $t^* \in [t_1, t_T)$ 是某个代理人 j 在议题 i 上采取 LDI 步的第一轮，其中 $a_j \xrightarrow{j} \hat{}a_j$ 来自投票配置 $a(t^*)$；设 $t^{**} \in (t^*, t_T]$ 是 j 将其在议题 i 上的投票切换回 a_j^i 的最后一轮。必然有 $a_j^i \in H_j^i(a(t^*))$，因为议题是二元的，否则，$|H_j^i(a(t^*))| = 1$ 和 j 就不会有改进步骤。因此，根据引理 1，对于 $\mathcal{W}^{-i}(a(t^*);r_j)$ 中可能获胜者的每种组合，$\hat{}a_j^i \succ_j a_j^i$ 都成立。同样，在第 t^{**} 轮，对于 $\mathcal{W}^{-i}(a(t^{**});r_j)$ 中可能获胜者的每种组合，$a_j^i \succ_j \hat{}a_j^i$ 都成立。因此，对于某个议题 k 以及结果 x、$y \in \{0,1\}$、$x \neq y$，我们有 $W_j^k(a(t^*)) = \{x\}$，并且 $W_j^k(a(t^{**})) = \{y\}$。

由于 j 具有 $\mathcal{O}$-合法偏好，k 必须在次序 $\mathcal{O}$中排在议题 i 之前。然而，在第 t^* 轮和第 t^{**} 轮之间，没有代理人在议题 k 上改变投票，因此必然有 $x \in W_j^k(a(t^{**}))$，即使 j 的不确定性参数发生了变化。这就构成了矛盾，因此不可能存在这样的循环。

□

定理 2 背后的直觉是，随着 LDI 序列的推进，会有某个“最靠前”的议题 i，在该议题上，任何排在 i 之前的议题都不会发生 LDI 步，按次序 $\mathcal{O}$排列。代理人对 i 中的候选项的相对偏好是固定的，因为他们的偏好具有 $\mathcal{O}$-合法性：在 i 中，排在 $\mathcal{O}$ 之前的议题的得分向量不会改变之后议题的得分，也不会影响代理人对 i的偏好。因此，代理人在议题 i 上的改进步骤会收敛，而任何循环都必须包含一个投票配置子序列，其中对议题i 的投票构成循环。

注意，$\mathcal{O}$-合法性并非收敛的必要条件，因为示例 1 中由真实投票配置引出的最佳响应动态会收敛。尽管 $\mathcal{O}$-合法性是一项严格的假设，但即使稍微放宽这一假设，也可能导致循环。示例3展示了一个循环，其中每个代理人都有一个 $\mathcal{O}$-合法排名，但代理人之间的次序各不相同。

此外，该定理指出，在议题 i 上的 LDI 步骤最终会终止，从而使 $\mathcal{O}$ 中的每个后续议题都能收敛。这似乎表明，在 $\mathcal{O}$-合法偏好下，区间投票与真实顺序投票相同，即代理人在每个议题上都投给自己偏好的选项 o_i，并且已知 $\{o_1, \ldots, o_{i-1}\}$ Lang 和 Xia [2009]之前各项议题的结果。尽管这两种程序可能产生相同的结果，但它们有两个显著差异。第一，初始投票配置中的某个议题可能只有一个获胜候选人，且该候选人与真实顺序投票的结果不同；此时，没有代理人能在该议题上进行改进步骤。第二，根据调度器的安排，某一轮中某个议题可能有多个可能的获胜候选人，但之后不再发生改进步骤。这可能导致区间投票以不同于真实顺序投票的结果终止。

[1] 在没有不确定性的情况下，$H_j^i(a)$（或者说，$H_j^i(a) \cup \{a_j^i\}$ 如果给 a_j^i 增加一票就能使其获胜）也称为追逐集合（不包括$f(a)$），见 Rabinovich 等人 [2015]；或者称为潜在获胜者集合（包括 $f(a)$），见 Kavner 和 Xia [2021] 关于议题 i的研究。$H_j^i(a)$与 Meir 等人 [2014] 以及 Meir [2015]对可能获胜者“$W_j(s)$”的定义一致。

这一收敛结果并不适用于多候选项情形，正如以下命题所述，并由后续示例证明。

命题 3。 即使代理人具有相同的恒定不确定性参数，并且其偏好对于共同顺序 $\mathcal{O}$而言是 $\mathcal{O}$-合法的，多个议题的 *LDI* 动态也可能无法收敛。

例 4。 设有 $p = 2$ 个议题和 $n = 15$ 个代理人，每位代理人都采用 ℓ_∞ 不确定性度量，且具有共同的固定不确定性参数$(r_j^1, r_j^2) = (2, 1)\ \forall j \leq n$。分别将候选项标记为 $\{0, 1\}$ 和 $\{a, b, c, d\}$。代理人 j 的偏好如下：如果 $f^1 = 0$，那么在第二个议题上偏好 $b \succ_j c \succ_j a \succ_j d$；否则$c \succ_j b \succ_j a \succ_j d$。代理人 k 在第二个议题上始终偏好 $a \succ_k d \succ_k b \succ_k c$。这些偏好对于 $\mathcal{O} = \{1, 2\}$而言是$\mathcal{O}$-合法的。

定义 $a(0)$，使得 $s(a(0)) = \{(7, 8), (3, 5, 5, 2)\}$ 并且 $a_j(0) = a_k(0) = (0, a)$。此循环涉及四个 *LDI* 步骤：*(i)* $(0, a) \xrightarrow{j} (0, d)$，*(ii)* $(0, a) \xrightarrow{k} (0, d)$，*(iii)* $(0, d) \xrightarrow{j} (0, a)$，以及 *(iv)* $(0, d) \xrightarrow{k} (0, a)$。我们在附录 *B* 中证明这些步骤是有效的。

注意，$H_j^2(a(0)) = \{a, b, c\}$ 并且 $H_j^2(a(2)) = \{b, c, d\}$。与单议题情形（参见 Meir [2015] 的引理 4）相比，代理人 j 会采取 LDI 步骤，转向不属于潜在获胜集合的候选项。这是因为 j不确定 b 还是 c 最受偏好，尽管二者都比 a 和 d更受偏好。因此，我们得到以下推论：

推论 1. 对于具有偏序偏好的代理人，在单个议题上采用相对多数制时，*LDI* 动态可能无法收敛。

4.3 交替不确定性

在定理 1中，我们发现，对于二元议题，如果某个议题的不确定性较低，而其他议题的不确定性较高，代理人在该议题上的 LDI 步骤可能会更少 i。这表明，与其他议题相比，当前议题的得分向量信息相对不足时，会发生 LDI 步骤。如果代理人在改变投票之前能够收集更多关于当前议题的信息，从而降低该议题相对于其他议题的不确定性，那么他们可能不会采取 LDI 步骤。

因此，我们考虑一种关于代理人不确定性参数的特定动态形式：代理人可以收集这些信息，并且仅在较低的不确定性下认为自己是关键的。我们假设代理人随后会忘记这种相对信息，因为等到他们再次改变投票时，这些信息可能已经过时。我们在下述定理中证明，这会消除循环。

定义 6.（交替不确定性。）为每个代理人 j固定两个参数 r_j^c, r_j^o，使得 $r_j^c < r_j^o$。定义每个代理人 j 的不确定性参数如下：每当他们被安排改变对议题 i 的投票时，j 对 i 的不确定性为 r_j^c，对每个其他议题 $k \neq i$ 的不确定性为 r_j^o。

定理 3。 对于二元议题，具有交替不确定性的代理人所经历的 *LDI* 动态会收敛。

证明。 固定一个初始投票配置 $a(0)$ 以及每个代理人 $j \leq n$ 的不确定性参数 r_j^c，r_j^o。反设投票配置 $\mathcal{C} = \{a(t_1) \ldots, a(t_T)\}$ 中存在一个循环，其中 $a(t_T + 1) = a(t_1)$，且 $a(t_1)$ 可由 LDI 动态从 $a(0)$ 到达。不失一般性，假设所有议题和代理人都参与了该循环。

考虑具有最大 $r_j^o = \max_{u \leq n} r_u^o$ 的代理人 j。令 $t^* \in [t_1, t_T)$ 为 j在议题 i 上采取 LDI 步的第一轮，其中 $a_j \xrightarrow{j} \hat{a}_j$来自投票配置 $a(t^*)$；令 $t^{**} \in (t^*, t_T]$ 为 j将其在 i 上的投票切换回 a_j^i的最后一轮。必定有 $a_j^i \in H_j^i(a(t^*))$，因为议题是二元的，否则 $|H_j^i(a(t^*))| = 1$将不会有改进步骤。因此，根据引理 1，对于 $\mathcal{W}^{-i}(a(t^*); r_j)$ 中可能获胜者的每种组合，$\hat{a}_j^i \succ_j a_j^i$。同样，在第 t^{**} 轮，对于

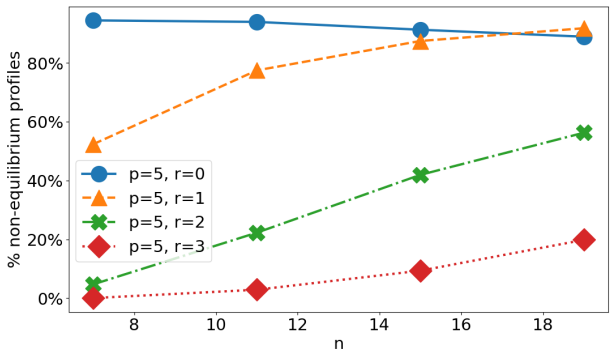

图 1：随着 n增加，非均衡档案所占的百分比。

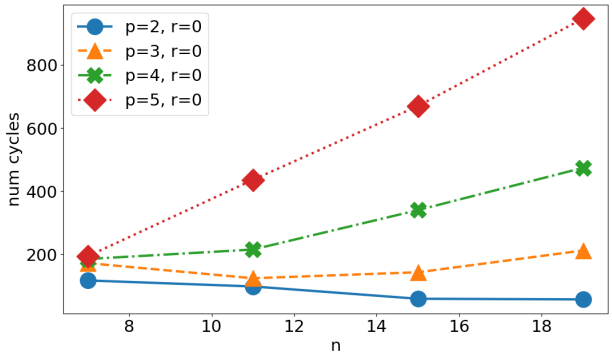

图 2：随着 n增加，序列出现循环的档案数量。

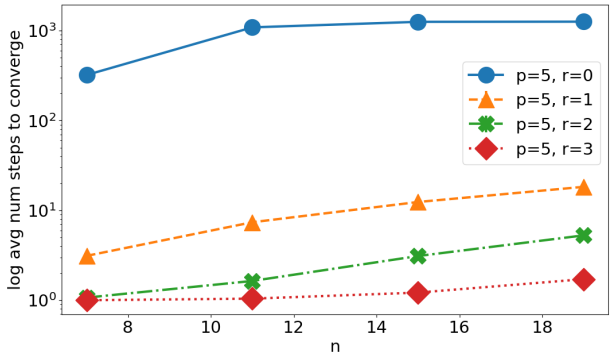

图 3：随着 n增加，收敛所需平均步数的对数；95%置信区间（过小，未显示）。

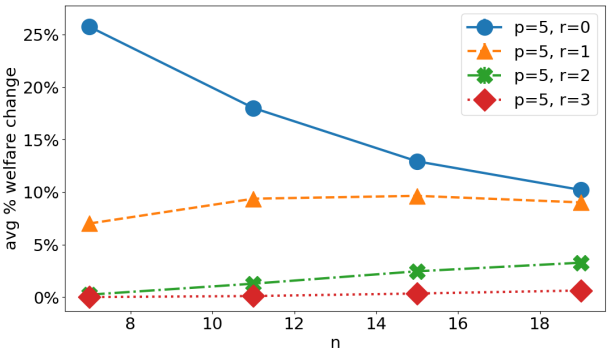

图 4：随着 n增加，福利平均百分比变化；95%置信区间（过小，未显示）。

$\mathcal{W}^{-i}(a(t^{**}); r_j)$ 中可能获胜者的每种组合，$a(a(t^{**}); r_j)$。因此，对于某个议题 k 和结果 x，$y \in \{0,1\}$，$x \neq y$，我们有 $W_j^k(a(t^*)) = \{x\}$ 且 $W_j^k(a(t^{**})) = \{y\}$。

令 $t' \in (t^*, t^{**})$为自 t^* 以来某个代理人 h 首次改变其对议题 k的投票时所在的轮次。则$H_h^k(a(t'))$ $= \{0,1\}$。由于 $W_j^k(a(t')) = W_j^k(a(t^*)) = \{x\} \subsetneq \{0,1\}$，且距离函数是针对候选项定义的，故 $r_h^c \geq r_j^o$。根据交替不确定性的定义，这意味着 $r_h^o > r_j^o$，这与断言 j 是具有最大 r_u^o的代理人 u 相矛盾。

□

这一收敛结果无法推广到多候选情形，因为示例 4也涵盖了这种情形。

5 实验

我们的计算实验探究不确定性、议题数量和代理人数量对 LDI 动态的影响。具体而言，我们考察真实投票档案本身处于均衡的频率、LDI 动态不收敛的频率，以及在收敛时到达均衡的路径长度。我们的研究关注的是：即便无法保证收敛，循环在实践中是否仍然很常见。

我们针对输入的广泛样本回答这些问题，其中有 $n \in \{7, 11, 15, 19\}$ 个代理人、 $p \in \{2, 3, 4, 5\}$ 个二元议题，以及对所有代理人、议题和轮次都恒定的 $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ 不确定性。对于每种组合，我们通过对代理人的偏好进行均匀且独立的随机抽样，生成 10，000 个偏好档案

。我们从真实投票剖面出发，使用调度器模拟 LDI 动态；该调度器会从所有代理人和议题的有效 LDI 步骤中均匀随机地选择配置。如果不存在这样的步骤，我们就称该序列已收敛。否则，我们将 50，000 轮次作为足够大的停止条件，并据此判定该序列已进入循环。

我们的结果展示于图 1 – 3 中，分别对应 n 和 r 以及 $p = 5$。我们发现，随着不确定性的引入以及 r 的增加，可用的 LDI 步骤显著减少（图 1），几乎所有循环都因此消失，且收敛路径长度缩短（图3）。图 2展示了在没有不确定性的情况下，其 LDI 序列出现循环的配置数量；而在我们抽取的5 个 $r \geq 1$配置中，只有序列出现循环。因此，存在不确定性时出现循环是例外，而非常态。

这些发现印证了我们的理论分析。随着不确定性增加，代理人认为有多个可能获胜者的议题越来越多。由于许多偏好排序中的议题彼此相互依赖，拥有 LDI 步骤的代理人会减少。另一方面，随着 n 增加，拥有不存在这些相互依赖关系的排序的代理人会增多，从而增加 LDI 步骤的可用性。

作为一项补充研究，我们通过比较均衡与真实投票档案的社会福利，考察了区间投票对结果质量的影响。[2] 我们在图 4 中发现，区间投票提高了平均福利，但提升幅度随 r增加而递减。这一发现与 Bowman 等人 [2014], 和 Grandi 等人 [2020],的实验结果一致；这些研究表明，区间投票或许能帮助代理人选择更好的结果，从而减少多次选举悖论。不过，要将这一结论推广开来，还需要进一步研究，因为它与Meir 等人 [2020], 和 Koolyk 等人 [2017]针对单议题区间投票所做的实验结果相悖。

6 讨论与开放问题

我们提出了一种新颖的模型，用于研究不确定性下多个议题的区间投票策略行为。我们发现，对于二元议题，循环是否存在取决于代理人偏好排序中各议题之间的相互依赖关系。具体而言，代理人 j 在某个议题上采取 LDI 步骤 i后，只有当其对 i 的偏好发生变化时，才会随后改变投票。这种情况会在其他议题的可能获胜候选项集合发生变化时出现，而这些候选项会影响 j对 i的偏好。

如果没有这种相互依赖关系，代理人对各议题的偏好只会改变有限次，因此 LDI 动态会收敛（定理 2）。随着代理人正在改变的议题以外其他议题的不确定性增加，能够进行 LDI 步骤的偏好排序会减少，从而消除循环（定理 3）。对于多候选项议题，收敛性并不成立：如果代理人只有偏序偏好信息，LDI 复数制动态可能出现循环（推论 1）。我们的实验表明，尽管不确定性下仍有可能不收敛，但实际上几乎总能保证收敛；同时也表明，与真实投票结果相比，区间投票能够提升代理人的社会福利。

未来研究有几个值得探索的方向。首先，我们的实证研究受到以下假设的限制：代理人的偏好是从无偏文化偏好分布中抽样得到的，且具有加性社会福利（例如参见 Tsetlin 等人 [2003], Sen [1999]）。证明区间投票在更现实的偏好分布和福利函数下的福利性质，或许可以借鉴Brˆanzei 等人 [2013], Kavner 和 Xia [2021]关于动态无政府价格的研究，以及Xia [2020]的平滑分析技术。

其次，区间投票在一定程度上有助于保护代理人的隐私，因为他们不会明确透露自己的真实偏好。然而，采取改进步骤的代理人会隐含地透露部分偏好信息。研究代理人如何根据当前信息考量他人偏好的区间投票，是一个有趣的开放研究方向。第三个方向是详细探究多议题迭代投票规则的性质（例如匿名性和孔多塞一致性），这些性质可能会由各议题上局部采用的决策规则继承；Xia 等人 [2011]对序贯投票规则进行了相关研究。

[2]以博尔达福利的百分比变化衡量。对于排序 R，结果 a 的博尔达效用为 2^p 减去 a在 R中的位置索引；博尔达福利则是所有代理人效用的总和。

参考文献

St´ephane Airiau 和 Ulle Endriss。迭代多数投票。载于算法决策理论国际会议，第 38–49 页。施普林格，2009。Krzysztof R Apt 和 Sunil Simon。弱无环博弈的分类。《理论与决策》，78(4)：501–524，2015。Michael Bowling。多智能体学习中的收敛与无悔。载于神经信息处理系统年会论文集 *(NIPS)*，第 209–216 页，加拿大温哥华，2005。Clark Bowman、Jonathan K Hodge 和 Ada Yu。迭代投票解决公投选举中可分性问题的潜力。《理论与决策》，77(1)：111–124，2014。Simina Brˆanzei、Ioannis Caragiannis、Jamie Morgenstern 和 Ariel D. Procaccia。自私投票有多糟糕？载于第 *27* 届 *AAAI*人工智能大会论文集，第 138–144 页，2013。Samir Chopra、Eric Pacuit 和 Rohit Parikh。策略性投票的知识论性质。载于欧洲人工智能逻辑研讨会，第 18–30 页。施普林格，2004。Vincent Conitzer、J´erˆome Lang 和 Lirong Xia。通过议程控制序贯选举有多难？载于第二十一届国际人工智能联合会议论文集 *(IJCAI)*，第 103–108 页，美国加利福尼亚州帕萨迪纳，2009。Vincent Conitzer、Toby Walsh 和 Lirong Xia。部分信息下投票中的支配性操纵。载于全国人工智能大会论文集 *(AAAI)*，第 638–643 页，美国加利福尼亚州旧金山，2011。Yvo Desmedt 和 Edith Elkind。含弃权的相对多数投票均衡。载于第 *11* 届 *ACM*电子商务会议论文集，第 347–356 页，2010。Edith Elkind、Umberto Grandi、Francesca Rossi 和 Arkadii Slinko。k-认可投票中的认知层级与投票操纵。《数学社会科学》，108：193–205，2020。Ulle Endriss、Svetlana Obraztsova、Maria Polukarov 和 Jeffrey S. Rosenschein。不完全信息下的策略性投票。载于第二十五届国际人工智能联合会议论文集，IJCAI’16，第 236–242 页。AAAI出版社，2016。Drew Fudenberg 和 David K Levine。学习与均衡。《经济学年度评论》，1(1)：385–420，2009。Umberto Grandi、Andrea Loreggia、Francesca Rossi、Kristen Brent Venable 和 Toby Walsh。迭代投票中的受限操纵：孔多塞效率与博尔达计分。载于算法决策理论国际会议，第 181–192 页。施普林格，2013。Umberto Grandi、Daniel Hughes、Francesca Rossi 和 Arkadii Slinko。k-认可投票规则的吉巴德–萨特思韦特博弈。《数学社会科学》，99：24–35，2019。Umberto Grandi、J´erˆome Lang、Ali Ozkes 和 St´ephane Airiau。一轮式与迭代式多项公投中的投票行为。可见于 *SSRN*，2020。Jonathan K Hodge。可分偏好序。西密歇根大学，2002。Joshua Kavner 和 Lirong Xia。策略行为即幸福：迭代投票提升社会福利。载于 *NeurIPS*论文集，2021。

Aaron Koolyk、Tyrone Strangway、Omer Lev 和 Jeffrey S. Rosenschein。《非计分规则下迭代投票的收敛性与质量》。载于《第二十六届国际人工智能联合会议》论文集（IJCAI-17），第273–279页，2017年。Nikolai S Kukushkin。有限博弈形式中改进的无环性。《国际博弈论杂志》，40(1)：147–177，2011年。D. Lacy 和 E. Niou。公民投票中的一个问题。《理论政治学杂志》，12(1)：5–31，2000年。J´erˆome Lang。结构化偏好组合领域中的投票与聚合。载于《第二十届国际人工智能联合会议》（IJCAI）论文集，第1366–1371页，印度海得拉巴，2007。J´erˆome Lang 和 Lirong Xia。多议题领域中投票规则的序贯组合。《数学社会科学》，57(3)：304–324，2009年。J´erˆome Lang 和 Lirong Xia。组合领域中的投票。载于 Felix Brandt、Vincent Conitzer、Ulle Endriss、J´erˆome Lang 和 Ariel Procaccia 编，《计算社会选择手册》，第9章。剑桥大学出版社，2016。Omer Lev 和 Jeffrey S Rosenschein。迭代投票的收敛性。载于第11届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集（第2卷），第611–618页，2012年。Jason R. Marden、G¨urdal Arslan 和 Jeff S. Shamma。基于遗憾的动态：弱无环博弈中的收敛性。载于第六届自主智能体与多智能体系统国际联合会议论文集（AAMAS ’07），美国纽约州纽约市，2007年。计算机协会。ISBN 9788190426275。doi：10.1145/1329125.1329175。URL https://doi.org/10.1145/1329125.1329175。Reshef Meir。不确定性下的相对多数投票。载于第29届AAAI人工智能大会论文集，2015年。Reshef Meir。策略性投票。《人工智能与机器学习综合讲座》。Morgan&Claypool，2018年。Reshef Meir、Maria Polukarov、Jeffrey S. Rosenschein 和 Nicholas R. Jennings。相对多数投票收敛至均衡。载于全国人工智能大会（AAAI）论文集，第823–828页，美国佐治亚州亚特兰大，2010年。Reshef Meir、Omer Lev 和 Jeffrey S. Rosenschein。投票均衡的局部支配理论。载于第十五届ACM电子商务会议论文集，第313–330页，美国加利福尼亚州帕洛阿尔托，2014年。Reshef Meir、Maria Polukarov、Jeffrey S Rosenschein 和 Nicholas R Jennings。迭代投票与无环博弈。《人工智能》，252：100–122，2017年。Reshef Meir、Kobi Gal 和 Maor Tal。实验室中的策略性投票：妥协与领导者偏差行为。《自主智能体与多智能体系统》，34(1)：1–37，2020年。Igal Milchtaich。具有玩家特定收益函数的拥塞博弈。《博弈与经济行为》，13(1)：111–124，1996年。Dov Monderer 和 Lloyd S. Shapley。势博弈。《博弈与经济行为》，14(1)：124–143，1996年。

Roger B Myerson 和 Robert J Weber。投票均衡理论。《美国政治学评论》，87 (1)：102–114，1993年。

Svetlana Obraztsova、Evangelos Markakis、Maria Polukarov、Zinovi Rabinovich 和 Nicholas R. Jennings。论迭代投票的收敛：受限动态应当受到多大限制？载于第二十九届*AAAI*人工智能会议论文集，AAAI'15，第 993–999 页，2015年。Zinovi Rabinovich、Svetlana Obraztsova、Omer Lev、Evangelos Markakis 和 Jeffrey Rosenschein。迭代投票方案中的均衡分析。载于第二十九届*AAAI*人工智能会议论文集。AAAI出版社，2015年。Annemieke Reijngoud 和 Ulle Endriss。对迭代民调信息的选民响应。载于第十一届自主智能体与多智能体系统国际联合会议（*AAMAS*）论文集，第 1 卷，第 635–644 页，2012年 06 月。

Reyhaneh Reyhani 和 Mark C. Wilson。计分规则的最佳回应动态。载于第二十届欧洲人工智能会议论文集，ECAI'12，第 672–677 页，NLD，2012年。IOS出版社。

阿马蒂亚·森。社会选择的可能性。《美国经济评论》，89(3):349–378，1999年。

Ilia Tsetlin、Michel Regenwetter 和 Bernard Grofman。无偏文化使多数循环的概率最大化。《社会选择与福利》，21(3):387–398，2003年。

Hans Van Ditmarsch、J´erˆome Lang 和 Abdallah Saffidine。策略性投票与知识逻辑。*arXiv* 预印本 *arXiv:1310.6436*，2013年。

Lirong Xia。社会选择的平滑可能性。载于*NeurIPS* 论文集，2020年。

Lirong Xia 和 Vincent Conitzer。斯塔克尔伯格投票博弈：计算方面与悖论。载于全国人工智能大会（*AAAI*）论文集，第921–926页，美国佐治亚州亚特兰大，2010年。

Lirong Xia、Vincent Conitzer 和 J´erˆome Lang。多议题领域中的策略性序贯投票与多次选举悖论。载于*ACM*电子商务会议（*EC*）论文集，第179–188页，美国加利福尼亚州圣何塞，2011年。

H Peyton Young.《惯例演化》。《计量经济学》，61(1):57–84，1993年1月。

James Zou、Reshef Meir 和 David Parkes。《Doodle 投票中的策略性投票行为》。载于第 *18* 届 *ACM*计算机支持的协同工作与社会计算会议论文集，CSCW '15，第 464–472 页，美国纽约州纽约，2015年。

附录

A 延后证明

定理 1。 给定二元议题，考虑代理人 j 在投票配置 a 中更改其对议题 i 的投票，且采用以下三种不确定性参数之一：r_j、 q_j或$\hat{}q_j$。参数 r_j 和 q_j 仅在议题 $k \neq i$ 上不同，使得 $r_j^k < q_j^k$；r_j 和$\hat{}q_j$ 仅在议题 i 上不同，使得 $r_j^i < \hat{}q_j^i$。令 LD_j^i、 LQ_j^i和$\hat{}LQ_j^i$ 分别表示根据各参数，代理人 j可能采取的 *LDI* 步骤。那么 $LQ_j^i \subseteq LD_j^i \subseteq \hat{}LQ_j^i$。

证明。 我们通过证明一个更弱的结论来证明该定理；这个结论适用于更一般的多候选人议题情形。具体而言，令 D_j^i、 Q_j^i 和 $\hat{}Q_j^i$ 表示一组投票，它们 S-支配 a_j ，且仅在 i^{th} 议题上有所不同，分别对应于 $S = \tilde{S}_{-j}(a; r_j)$、 $S = \tilde{S}_{-j}(a; q_j)$ 或 $S = \tilde{S}_{-j}(a; \hat{}q_j)$。我们证明 $Q_j^i \subseteq D_j^i \subseteq \hat{}Q_j^i$。该定理随之成立，因为对于二元议题，$LD_j^i = D_j^i$（分别为 $LQ_j^i = Q_j^i$ 和 $\hat{}LQ_j^i = \hat{}Q_j^i$）。

（第 1 部分： $Q_j^i \subseteq D_j^i$。）不失一般性，令 $D_j^i \neq \emptyset$。假设 $\hat{}a_j \in Q_j^i$。那么 $\hat{}a_j$ $\tilde{S}_{-j}(a;q_j)$- 支配a_j，由此可得：

1. $\exists \tilde{s} \in S_{-j}(a; q_j)$ 使得 $f(\tilde{s} + \hat{}a_j) \succ_j f(\tilde{s} + a_j)$, 且
2. $\nexists \tilde{s}' \in \tilde{S}_{-j}(a; q_j)$ 使得 $f(\tilde{s}' + \hat{}a_j) \prec_j f(\tilde{s}' + a_j)$。

首先，根据不确定性集的构造，对所有$h \neq k$， $\tilde{S}_{-j}^k(a; r_j) \subseteq \tilde{S}_{-j}^k(a;q_j)$ 且 $\tilde{S}_{-j}^h(a;r_j) = \tilde{S}_{-j}^h(a; q_j)$；因此 $\tilde{S}_{-j}(a; r_j) \subseteq \tilde{S}_{-j}(a; q_j)$。由此可得，$\nexists \tilde{s}' \in \tilde{S}_{-j}(a; r_j)$ 使得 $f(\tilde{s}'+\hat{}a_j) \prec_j f(\tilde{s}'+a_j)$，这是由上文第 (2) 点得出的。因此，$a_j$ 不会以 $S_{-j}(a;r_j)$击败 $\hat{}a_j$。

其次，定义 $\tilde{v}$ 由元组 $(v^1, \ldots, v^{i-1}, v^{i+1}, \ldots, v^p)$ 构成，使得 $v^h = \tilde{s}^h$ 对每个 $h \neq i$ 和 $\tilde{v} \in \tilde{S}(a; r_j)$。又因为对所有 $h \neq i$， $f^i(\tilde{s} + \hat{}a_j) \neq f^i(\tilde{s} + a_j)$ 且 $f^h(\tilde{s} + \hat{}a_j) = f^h(\tilde{s} + a_j)$，所以 $f(\tilde{v} + \hat{}a_j) \neq f(\tilde{v} + a_j)$。由上述论证可知， $f(\tilde{v} + \hat{}a_j) \succ_j f(\tilde{v} + a_j)$。因此， a_j $\tilde{S}_{-j}(a; r_j)$-击败 $\hat{}a_j$ 和 $\hat{}a_j \in D_j^i$。

（第 2 部分： $D_j^i \subseteq \hat{}Q_j^i$。）不失一般性，设 $\hat{}$ $Q_j^i \neq \emptyset$。假设 $\hat{}a_j \in D_j^i$。则 $\hat{}a_j$ $\tilde{S}_{-j}(a;r_j)$- 支配 a_j，由此可得：

1. $\exists \tilde{s} \in S_{-j}(a; r_j)$，使得 $f(\tilde{s} + \hat{}a_j) \succ_j f(\tilde{s} + a_j)$，并且
2. $\nexists \tilde{s}' \in \tilde{S}_{-j}(a; r_j)$，使得 $f(\tilde{s}' + \hat{}a_j) \prec_j f(\tilde{s}' + a_j)$。

根据不确定性集的构造，对所有 $h \neq i$，$\tilde{S}_{-j}^i(a;r_j) \subseteq \tilde{S}_{-j}^i(a; \hat{}q_j)$ 且 $\tilde{S}_{-j}^h(a; r_j) = \tilde{S}_{-j}^h(a; \hat{}q_j)$；因此 $S_{-j}(a; r_j) \subseteq S_{-j}(a; \hat{}q_j)$。由此立即可得 $\tilde{s} \in S_{-j}(a; \hat{}q_j)$，所以 $\hat{}a_j$ $S_{-j}(a; r_j)$- 胜过 a_j。此外，根据上文第 (2) 点，存在 $\nexists \tilde{s}' \in \tilde{S}_{-j}(a; \hat{}q_j)$，使得 $f(\tilde{s}' + \hat{}a_j) \prec_j f(\tilde{s}' + a_j)$。因此，$a_j$ 不会 $\tilde{S}_{-j}(a; r_j)$- 胜过 $\hat{}a_j$。故 $\hat{}a_j \in \hat{}Q_j^i$，证明完毕。

□

引理 1. 考虑由代理人 j 针对投票配置 a 中的议题 i，在不确定性参数 r_j 下执行的 *LDI* 步 $a_j \xrightarrow{j} \hat{}a_j$。那么，要么 *(1)* $a_j^i \notin H_j^i(a)$；要么对于 $\mathcal{W}^{-i}(a;r_j)$ 中可能获胜者的每种组合，要么 *(2)* 对所有 $b \in H_j^i(a)$， $a_j^i \prec_j b$；要么 *(3)* $r_j^i = 0$, $\{a_j^i, \hat{}a_j^i\} \subseteq H_0(a)$ 且 $\hat{}a_j^i \succ_j a_j^i$。

证明。证明过程沿用 Meir [2015] 中引理 3 的证明。假设 $a_j^i, b \in H_j^i(a)$，并且只要某种可能获胜者的组合 $(c^1, c^2, \ldots, c^{i-1}, c^{i+1}, \ldots, c^p) \in \mathcal{W}^{-i}(a; r_j)$ 获胜（即违反了 (1) 和 (2)），就有 $a_j^i \succ_j b$。首先假设 $\hat{}a_j^i \notin H_0(a)$。根据 Meir [2015] 的引理 2，存在 $\exists \tilde{s} \in \tilde{S}_{-j}(a; r_j)$，使得：

- a^i_j，b 在 $\tilde{s}^i$ 中得分最高（可能与其他候选项并列），且严格高于 $\hat{a}^i_j$；
- 对于每个 $k \neq i$，$\tilde{s}^k$ 都满足 $f^k(\tilde{s} + a_j) = c^k$ 获胜。

不失一般性，假设在平局决胜中 b 优先于 a^i_j（否则调整 $\tilde{s}$，使得 $f^i(\tilde{s}) = b$）。因此，$f^i(\tilde{s} + a_j) = a^i_j$，而 $f^i(\tilde{s} + \hat{a}_j) = b$。由于给定 $\tilde{s}$ 时 $a^i_j \succ_j b$，这意味着 a_j $\tilde{S}_{-j}(a; r_j)$ 击败 $\hat{a}_j$。

剩下的情形是：$\hat{a}^i_j \in H_0(a)$，并且每当某个 $(c^1, c^2, \ldots, c^{i-1}, c^{i+1}, \ldots, c^p) \in \mathcal{W}^{-i}(a; r_j)$ 获胜时，$a^i_j \succ_j \hat{a}^i_j$。那么，在 $\tilde{s}$ 中，a^i_j，$\hat{a}^i_j$ 打平且 $(c^k)_{k \in \mathcal{P} \setminus \{i\}}$ 获胜时，j 投票给 a_i 更好。

在这两种情况下，我们都会得到 $\hat{a}_j \notin LD^i_j$，这与事实矛盾。 □

B 补充示例

例 4.（续）回想一下具有以下偏好的代理人 j 和 k：

- 如果 $f^1 = 0$，那么 j 在第二个议题上更偏好 $b \succ c \succ a \succ d$；
- 如果 $f^1 = 1$，那么 j 在第二个议题上更偏好 $c \succ b \succ a \succ d$；
- 代理人 k 在第二个议题上更偏好 $a \succ d \succ b \succ c$，无论第一议题的结果如何。

初始化投票配置 $a(0)$，使得 $s(a(0)) = \{(7, 8), (3, 5, 5, 2)\}$ 且 $a_j(0) = a_k(0) = (0, a)$。这个循环涉及四个 *LDI* 步骤：*(i)* $(0, a) \xrightarrow{j} (0, d)$，*(ii)* $(0, a) \xrightarrow{k} (0, d)$，*(iii)* $(0, d) \xrightarrow{j} (0, a)$，以及 *(iv)* $(0, d) \xrightarrow{k} (0, a)$。我们将依次证明这些都是有效 *LDI* 步骤，具体说明：*(i)* 新投票以 S-击败旧投票；*(ii)* 旧投票不会以 S-击败新投票；*(iii)* 新投票并非被 S 支配。对于任意候选项 $e \in \{a, b, c, d\}$，将把第二个候选项换成 e 的投票记为 $\hat{e} = (0, e)$。请注意，平票时按字典序打破平局。

(步骤 1： $s^2(a(0)) = (3、5、5、2)$。*)* 由于 $r^2_j = 1$ 和 $a^2_j = a$，因此有 $H^2_j(a(0)) = \{a, b, c\}$.

(i) 令 $\tilde{s} = \{(6, 8), (3, 4, 4, 2)\} \in S_{-j}(a(0); r_j)$。那么 $f(\tilde{s} + d) = (1, b) \succ_j (1, a) = f(\tilde{s} + \hat{a})$，因此 $\tilde{d}$ S_{-j}-次优于 $\hat{a}$。

(ii) 对于任意 $\tilde{s} \in \tilde{S}_{-j}(a(0); r_j)$，如果 $f^2(\tilde{s} + \hat{d}) = a$，则 $f^2(\tilde{s} + \hat{a}) = a$；否则，如果 $f^2(\tilde{s} + \hat{a}) \in \{b, c\}$，则 $f^2(\tilde{s} + \hat{d}) = f^2(\tilde{s} + \hat{a})$。因此，对于 j 而言，投票给 $\hat{a}$ 始终不如投票给 $\hat{d}$。

(iii) 两者皆非 $\hat{b}$ 也不 $\hat{c}$ $\tilde{S}_{-j}$-支配

d 因为对于 $\tilde{s}' = \{(6,8), (2,4,5,2)\}$ 以及 $\tilde{s}'' = \{(7, 7),(2, 4, 4, 2)\}$ 而言，$\hat{}$ $\hat{}$ 对 j 来说，投票支持 d 分别比支持 b 和 $\hat{c}$ 更可取。

(步骤 2： $s^2(a(1)) = (2, 5, 5, 3)$*.)* 由于 $r^2_k = 1$ 和 $a^2_j = a$，我们有 $H^2_k(a(1)) = \{b, c, d\}$。

(i) 设 $\tilde{s} = \{(6, 8), (2, 4, 4, 4)\} \in S_{-k}(a(1); r_k)$。那么 $f(\tilde{s} + d) = (1, d) \succ_k (1, b) = f(\tilde{s} + \hat{a})$，所以 $\tilde{d}$ S_{-k}-击败 $\hat{a}$。

(ii) 对任意 $\tilde{s} \in \tilde{S}_{-k}(a(1); r_k)$，若 $f^2(\tilde{s} + \hat{d}) = d$，则 $f^2(\tilde{s} + \hat{a}) = b$；否则 $f^2(\tilde{s} + \hat{d}) = f^2(\tilde{s} + \hat{a})$。因此，$k$ 永远不会更愿意投票给 $\hat{a}$，而不是 $\hat{d}$。

(iii) 因为对于 $\hat{b}$ 也不 $\hat{c}$ 支配 $\tilde{s} = \{(6、8)、(2、4、4、4)\}$（与 *(i)* 中相同），$j$ 更愿意投票给 d，而不是 b 或 $\hat{c}$。

(步骤 3： $s^2(a(2)) = (1、5、5、4)$。*)* 由于 $r^2_j = 1$ 和 $a^2_j = d$，我们得到 $H^2_j(a(2)) = \{b, c, d\}$。

(i) 令 $\tilde{s} = \{(6, 8), (1, 4, 4, 4)\} \in S_{-j}(a(2); r_j)$。则 $f(\tilde{s} + \hat{a}) = (1, b) \succ_j (1, d) = f(\tilde{s} + d)$，因此 $\tilde{}$ $\hat{}$ $\hat{}a$ S_{-j} 击败 d。

(ii) 对任意 $\tilde{s} \in \tilde{S}_{-j}(a(2); r_j)$，如果 $f^2(\tilde{s} + \hat{a}) = d$，则 $f^2(\tilde{s} + \hat{d}) = d$；否则，如果 $f^2(\tilde{s} + \hat{d}) \in \{b, c\}$，则 $f^2(\tilde{s} + \hat{a}) = f^2(\tilde{s} + \hat{d})$。因此，$j$ 永远不会更愿意投票给 $\hat{d}$ 而不是 $\hat{a}$。

(iii) 既不 $\hat{b}$ 也不 $\hat{c}$ $\tilde{}$

S_{-j}-支配 $\hat{a}$ 因为对于 $\tilde{s}' = \{(6,8), (2,4,5,3)\}$ 和 $\tilde{s}'' = \{(7, 7), (2,4,4,3)\}$ 相比，$\hat{}$ 对 j 而言，分别投票给 $\hat{a}$ 比投票给 b 和 $\hat{c}$ 更可取。

（步骤 4：$s^2(a(3)) = (2,\ 5,\ 5,\ 3)$。）由于 $r_k^2 = 1$ 和 $a_j^2 = d$，我们有 $H_k^2(a(3)) = \{a, b, c\}$。

(i) 设 $\tilde{s} = \{(6,\ 8),\ (3,\ 4,\ 4,\ 2)\} \in S_{-k}(a(3);\ r_k)$。那么 $f(\tilde{s} + \hat{a}) = (1,\ a) \succ_k (1,\ b) = f(\tilde{s} + d)$，因此 $\hat{a}$ S_{-k}-击败 d。

(ii) 对于任意 $\tilde{s} \in \tilde{S}_{-k}(a(3); r_k)$，我们有：若 $f^2(\tilde{s} + \hat{a}) = a$，则 $f^2(\tilde{s} + \hat{d}) = b$；否则 $f^2(\tilde{s} + \hat{a}) = f^2(\tilde{s} + \hat{d})$。因此，对 k 而言，投票给 $\hat{d}$ 永远不如投票给 $\hat{a}$ 可取。

(iii) S_k-支配 $\hat{d}$，因为对于 $\tilde{s} = \{(6,\ 8),\ (3,\ 4,\ 4,\ 2)\}$（与 *(i)* 中相同），投票给 $\hat{j}$ 比投票给 $\hat{a}$ 或 $\hat{c}$更可取。

例5. 考虑 $p = 2$ 个议题，每个议题有三个候选项，分别标记为 $\{A^i, B^i, C^i, D^i\}$ 到 $i \leq 2$。设代理人 j 具有 ℓ_∞ 不确定性度量，以及满足以下条件的 $\mathcal{O} = (2,1)$合法偏好：

- 如果 $f^2 = C^2$，那么在议题 1 上：$A^1 \succ_j B^1 \succ_j D^1 \succ_j C^1$
- 如果 $f^2 = B^2$，那么在议题 1 上：$B^1 \succ_j A^1 \succ_j D^1 \succ_j C^1$
- 如果 $f^2 = A^2$，那么在议题 1 上：$C^1 \succ_j A^1 \succ_j B^1 \succ_j D^1$

假设投票配置 a 中有 $a_j = (D^1, C^2)$，其得分元组为 $s(a) = \{(6,6,3,5), (2,4,6,0)\}$。

（部分 *1*：递增 r_j^1。）本例的这一部分受 *Meir [2015]*的引理 *3b* 启发。

如果 $r_j = (0,\ 0)$，那么很容易看出 j没有最佳回应步骤：唯一的赢家是 $f(a) = (A^1, C^2)$；尽管 j 可以让 B^1 获胜，但当 $f^2(a) = C^2$时，他们更偏好 $A^1 \succ B^1$。因此 $LD_j^1 = \emptyset$。

如果$r_j = (1,0)$ *then*

$$\tilde{S}_{-j}^1 = \{(5,6,7) \times (5,6,7) \times (2,3,4) \times (3,4,5)\}$$

首先，当 $\tilde{s} = \{(5,5,4,5), (2,4,6,0)\} \in \tilde{S}_{-j}$ 时，j投票支持 $\hat{a}_j = (A^1, C^2)$ 或 $\hat{a}'_j = (B^1, C^2)$ 都比支持 a_j 更好。请注意，平票时按字典序打破平局。因此，$\hat{a}_j$ 和 $\hat{a}'_j$ S_{-j}都击败 a_j。其次，很容易看出，不存在这样的 $\tilde{s}' \in S_{-j}$，使得 j 投票支持a_j比投票支持 $\hat{a}_j$ 或 $\hat{a}'_j$更好。因此，a_j 既不击败 $\hat{a}_j$，也不击败 $\hat{a}'_j$。第三，我们注意到 $\hat{a}_j$ S支配 $\hat{a}'_j$；这由 $A^1 \succ_j B^1$ 在 $f^2(a) = C^2$时推出。很容易看出 $\hat{a}_j$ 不受 $\tilde{S}$支配。因此 $LD_j^1 = \{(A^1, C^2)\}$。

现在考虑 $r_j = (2,0)$。那么

$$\tilde{S}_{-j}^1 = \{(4,5,6,7,8) \times (4,5,6,7,8) \times (1,2,3,4,5) \times (2,3,4,5,6)\}$$

由于 $\tilde{s} = \{(5, 5, 3, 5), (2, 4, 6, 0)\} \in S_{-j}$，$\hat{a}_j$和 $\hat{a}'_j$仍然都能 S_{-j}-击败 a_j。然而，由于 $\tilde{s} = \{(4, 4, 5, 5), (2, 4, 6, 0)\} \in \tilde{S}_{-j}$，我们有 $f^1(\tilde{s} + a_j) = (D^1, C^2) \succ_j (C^1, C^2) = f^1(\tilde{s} + \hat{a}_j) = f^1(\tilde{s} + \hat{a}'_j)$，因此 a_j $\tilde{S}_{-j}$-击败 $\hat{a}_j$和 $\hat{a}'_j$。所以，$LD_j^1 = \emptyset$。

（第 *2* 部分：递增 r_j^2。）回想一下，当 $r_j = (1,\ 0)$ 时，我们发现 $\hat{a}_j = (A^1, C^2)$ $\tilde{S}_{-j}$-支配 $a_j = (D^1, C^2)$，而 $\hat{a}'_j = (B^1, C^2)$ $\tilde{S}_{-j}$-支配 a_j，且 $\hat{a}_j$ $\tilde{S}_{-j}$-支配 $\hat{a}'_j$；因此 $LD_j^1 = \{(A^1, C^2)\}$。若 $r_j = (1,1)$，则

$$\tilde{S}_{-j}^2 = \{(1,2,3) \times (3,4,5) \times (4,5,6) \times (0,1)\}$$

对于 $\tilde{s} = \{(5, 5, 4, 5), (2, 4, 5, 0)\} \in S_{-j}$，$j$投票给 $\hat{a}_j$而非 $\hat{a}'_j$更可取；而对于$\tilde{s} = \{(5, 5, 4, 5), (2, 5, 4, 0)\} \in S_{-j}$，$j$投票给 $\hat{a}'_j$而非 $\hat{a}_j$更可取。于是，$\hat{a}_j$和 $\hat{a}'_j$$\tilde{S}_{-j}$都支配 a_j，但二者都不被 $\tilde{S}_{-j}$支配。因此 $LD_j^1 = \{(A^1, C^2), (B^1, C^2)\}$。如果 $r_j = (1,2)$, *then*

$$\tilde{S}_{-j}^2 = \{(0,1,2,3,4) \times (2,3,4,5,6) \times (3,4,5,6,7) \times (0,1,2)\}$$

那么存在得分向量 $\tilde{s} \in \tilde{S}_{-j}$，其中 $f^2(\tilde{s}+a_j) = f^2(\tilde{s}+\hat{a}_j) = f^2(\tilde{s}+\hat{a}'_j) = C^2$，使得$\hat{a}_j$ 和 $\hat{a}'_j$ $\tilde{S}_{-j}$都不支配a_j。因此 $LD_j^1 = \emptyset$。

例6。 设有 $p=2$ 个二元议题和 $n=13$ 位代理人，每位代理人都采用具有共同固定不确定性参数 $(r_j^1, r_j^2) = (1, 2)\ \forall j \le n$的不确定性度量。假设代理人的偏好遵循以下四种类型：

- （类型*1*）三位代理人的排序为：$(0,1) \succ (1, 1) \succ (1,0) \succ (0,0)$；
- （类型*2*）五位代理人的排序为：$(0,0) \succ (0,1) \succ (1,1) \succ (1,0)$；
- （类型*3*）四位代理人的排序为：$(1,0) \succ (1,1) \succ (0, 0) \succ (0, 1)$；且
- （类型*4*）一名代理人的排序为：$(1,1) \succ (1, 0) \succ (0, 1) \succ (0,0)$。

存在一个循环，依次经过表 $a(0)$ 所列的四种投票配置（这是真实的）、 $a(3)$、 $a(8)$和 $a(11)$中的*2*。在这些配置中，同一类型的每位代理人都投相同的票。该循环在这些配置之间分为四段：

- 在 $a(0)$ 和 $a(3)$之间，所有类型*1*代理人都在第一议题上采取 *LDI* 步骤 $(0, 1) \xrightarrow{1} (1,1)$；
- 在 $a(3)$ 和 $a(8)$之间，所有类型*2*代理人都在第二个议题上采取 *LDI* 步骤 $(0,0) \xrightarrow{2} (0,1)$；
- 在 $a(8)$ 和 $a(11)$之间，所有类型*1*代理人都在第一议题上采取 *LDI* 步骤 $(1,1) \xrightarrow{1} (0, 1)$；
- 在 $a(11)$ 和 $a(16) = a(0)$之间，所有类型*2*代理人都在第二个议题上进行 *LDI* 步骤 $(0,1) \xrightarrow{2} (0, 0)$。

请注意，类型*3*和类型*4*的代理人都不会进行 *LDI* 步骤，因为他们诚实投票且具有可分偏好。

代理人类型 j	$a_j(0)$	$a_j(3)$	$a_j(8)$	$a_j(11)$
1	(0，1)	(1，1)	(1，1)	(0，1)
2	(0，0)	(0，0)	(0，1)	(0，1)
3	(1，0)	(1，0)	(1，0)	(1，0)
4	(1，1)	(1，1)	(1，1)	(1，1)

表 2：代理人对 $a(0)$（真实的）、 $a(3)$、 $a(8)$和 $a(11)$的投票。

我们声称这些是有效 *LDI* 步骤，理由如下。对于 $\{a(0)\ a(1)\ a(2)\}$中的任意投票配置，令 t 表示已执行 *LDI* 步的 *1* 型代理人的数量。那么 $s(a(t)) = \{(8-t, 5+t)、(9、4)\}$；对于尚未执行其第一个 *LDI* 步的任意 *1* 型代理人 j，~

$S_{-j}^1 = \{(6-t, 7-t, 8-t) \times (4+t, 5+t, 6+t)\}$

$\tilde{S}_{-j}^2 = \{(7, 8, 9, 10, 11) \times (2, 3, 4, 5, 6)\}$

~定义$\hat{a}_j = (1、1)$。那么 $\tilde{s} = \{6, 6\ ,\ 9, 4\ \in S_{-j}\ a\ t\ \ r_j\ \ \forall t \in \{0,1,2\}\ \ \ f\ \tilde{s}+a_j\ =\ 1, 0\ \succ_j ()() (();)$，因此 $(\hat{})\,()\,(0\ 、\ 0)\ = f(\tilde{s}+a_j)$ 且 $\hat{a}_j\ S_{-j}$ 击败 a_j。显然 a_j 不会击败 $\hat{a}$，并且 $\hat{a}$ 不会被 $\tilde{S}_{-j}$ 支配，因为议题是二元的。因此$LD_j^1 = \{\hat{a}_j\}$。

其他 *LDI* 步骤的推理过程类似，由此得出表中所示的循环。可以验证，这涵盖了从真实投票配置出发的所有可能 *LDI* 序列。

C 非原子模型

针对二元议题和原子代理的各项结果中，每个代理对群体 n 投票的影响力贡献一个单位；这些结果也适用于区间投票的非原子变体。在这一变体中，代理人属于一个规模极大的群体，对结果的影响微乎其微。我们的模型将Meir [2015]针对非原子代理人的迭代相对多数投票扩展到多议题情境。与这一情境一样，我们的收敛结果允许任意子集的代理人同时改变投票。这不同于有限情形：多个代理人同时改变投票时，投票可能不会收敛Meir 等人 [2010]。

本节将尽可能沿用现有记号，为非原子模型给出必要的定义。主要有两点不同：（i）代理人的身份；（ii）不确定性得分集合。首先，我们不再将每位代理人 $j \leq n$ 单独看待，而是将具有相同 ϵ 质量的代理人划分为组；“类型为 j的代理人”指该组中的一个代表性代理人。其次，由于代理人˜的影响可以忽略不计，类型为 j 的代理人认为 $S(a;{}^{r_j})$ 中的任意得分元组都有可能；同一类型的所有代理人都认同哪些真实得分元组是可能的。引理1 和定理1、2和3 在应用此模型重新定义后仍然成立。类似的非收敛结果也适用于区间投票的非原子变体。

基本记号。我们不再考虑有限代理人集合。相反，偏好剖面 $Q \in \Delta(\mathcal{L}(D))$是一个关于排序的分布，它指定了对于每个 $R \in \mathcal{L}(D)$，代理人中 $Q(R)$所占的比例。由于每位代理人的影响可以忽略不计，我们只考虑代理人子集的移动。为避免出现由规模依次缩小的代理人子集构成的无限改进序列路径，我们假设存在最小分辨率 ϵ，使得质量为 ϵ 的同类型代理人集合总是一起行动（尽管行动并不协调；参见 Meir 的附录IX [2015]）。我们用 J表示这些 $1/\epsilon$ 集合的全体。由于集合$j \in J$ 中的所有代理人都无法区分，我们将“代理人 j”称为集合 j中的任意一个代理人。那么， $R_j \in \mathcal{L}(D)$是偏好，^{r_j} 是不确定性参数，而^{a_j} 是投票配置a中集合内任意代理人的投票。

获胜者判定。 对于任意议题 $i \in \mathcal{P}$，我们定义由投票配置 a 导出的得分向量 $s^i(a) = (s^i(c;a))_{c \in D_i}$，使得 $s^i(c;\ a) = |\{f\colon\ a^i_j = c\}|\epsilon \in [0,1]$。获胜者判定与原子模型完全相同，并采用字典序打破平局。

不确定性与局部支配。 我们假设代理人使用与原子模型相同的按候选项分别计算的距离不确定性。与原子模型一样，每个被调度器选中来更改投票的类型为 $j \in J$ 的代理人，都具有不确定性参数 ${}^{r_j} = (r^i_j)_{i \in \mathcal{P}}$。不同于原子模型，代理人对得分向量的影响可以忽略不计。因此，他们相对于真实得分元组定义不确定性得分集合： $\tilde{S}^i(a;r^i_j) = \{v^i\colon\ \delta(v^i,\ \ s^i(a)) \leq r^i_j\}$。与之前一样， $\tilde{S}(a;{}^{r_j}) = \times_{i \in \mathcal{P}} \tilde{S}^i(a;\ r^i_j)$。

给定a，$\tilde{S}(a;{}^{r_j})$，我们将 f（$v + a_j$）定义为类型为 j 的代理人按照得分向量^{a_j} 投票给 s时所预期的结果。也就是说，对于每个议题 i，如果 s中有多个候选项得分并列最高，则额外投票 a^i_j 决定获胜者，并覆盖默认的平局决胜规则（见Meir[2015]的附录 X）。

对于类型为 $j \in J$的非原子代理人，在议题 i 上从投票^{a_j} 转为˜^{a_j} 的局部支配改进（LDI）步骤的定义，与定义3 和4中的原子模型相同，只需应用此˜ ˜重新定义，并使用 $S(a;{}^{r_j})$ 代替 $S_{-j}(a;{}^{r_j})$。响应函数g_j 也相同，只是其定义域（所有可能的配置）现在是 $\mathcal{D}^{|J|}$ 而不是 $\mathcal{D}^n$。均衡的定义没有变化。