arXiv:2301.08882v2 [math.GT] 2 Jun 2023

Heegaard Floer 同调中的复合映射

JESSE COHEN

Abstract. 我们利用 Auroux [Aur10] 和 Zemke [Zem21a] 的结果证明，在 [LOT11], 给出的 Heegaard Floer 同调的态射空间表述中，相反复合映射与由裤子曲面协边在 Heegaard Floer 复形上诱导的映射在同伦意义下相同。作为应用，我们给出一种计算帽版本 Heegaard Floer 同调上任意协边映射的算法。

1. Introduction

Heegaard Floer 同调是由 Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o 在 [OS04] 中引入的一系列闭定向三维流形及其间协边的不变量（另见 [OS06]）。我们将关注的 Heegaard Floer 同调的具体变体是所谓的“帽”版本。该不变量为一个$\widehat{\ }$闭定向三维流形 Y 赋予一个分次的 $\mathbb{F}_2$-向量空间 $\widehat{\mathrm{HF}}(Y)$，并为每个光滑、$\widehat{\ }$连通的四维协边 W 赋予一个映射 $F_W : \widehat{\mathrm{HF}}(Y_0) \to \widehat{\mathrm{HF}}(Y_1)$；相对于协边的复合，这一赋值具有函子性。

$\widehat{\ }$向量空间 $\widehat{\mathrm{HF}}(Y)$ 是复形 $\widehat{\mathrm{CF}}(Y)$ 的同调，而该复形是 K¨ahler 流形中一对拉格朗日环面的拉格朗日交叉 Floer 复形的一种变体。Lipshitz–Ozsv´ath–Thurston 在 [LOT18], 中定义的带边 Heegaard Floer 同调，是与带参数化边界的 3-流形相关联的一系列不变量，其形式为代数 $\mathcal{A}(\mathcal{Z})$ 上 A_∞-模的同伦类型；这些代数由边界参数化的组合化 $\mathcal{Z}$ 所关联。在特 Y 别地，如果 Y 具有一个边界分支，带边 Floer 理论便赋予我们一个左类型-D 结构 $\widehat{\mathrm{CFD}}(Y)$，可以将其视为一个投射左 dg-模；其同伦类型是 Y的光滑不变量。我们将在第 2 节简要回顾这一对象的构造。这些模满足如下配对定理：如果 Y_1 和 Y_2 是具有相同连通边界曲面的 3-流形，并且 $Y_{12} = -Y_1 \cup_\partial Y_2$ 是沿着各自的边界参数化粘合 Y_1 和 Y_2 所得的闭 3-流形，那么存在一个同伦等价$\widehat{\ }\widehat{\mathrm{CF}}(Y_{12}) \simeq \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(\widehat{\ }\widehat{\mathrm{CFD}}(Y_1), \widehat{\ }\widehat{\mathrm{CFD}}(Y_2))$；右侧是 $\widehat{\ }\widehat{\ }\mathcal{A} = \mathcal{A}(-\mathcal{Z})$-模同态 $\widehat{\mathrm{CFD}}(Y_1) \to \widehat{\mathrm{CFD}}(Y_2)$ 的空间。

1.1. 结果。

我们的主要结果是 Lipshitz–Oszv´ath–Thurston 在 [LOT11 第 1.5] 节中所述断言的链级版本。

定理 1.1. 设 Y_1、 Y_2 和 Y_3 是带边三维流形，其边界均由同一个曲面 F 参数化，并设 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(-F)$ 为与 相关联的代数

本材料基于作者于 2022 年秋季学期驻留伯克利的 Simons Laufer 数学科学研究所（原名 MSRI）期间，获得美国国家科学基金会 DMS-2204214 号和 DMS-1928930 号资助所开展的工作。

。令 $Y_{ij} = -Y_i \cup_\partial Y_j$，并考虑由 W： $Y_{12} \sqcup Y_{23} \to Y_{13}$ 给出的裤带配边

$$W = (\triangle \times F) \cup_{e_1 \times F} (e_1 \times Y_1) \cup_{e_2 \times F} (e_2 \times Y_2) \cup_{e_3 \times F} (e_3 \times Y_3), \tag{1}$$

其中 $\triangle$ 是一个三角形，其边按循环顺序为 e_1、e_2和 e_3 。若定义$\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_i, Y_j) := \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(\widehat{CFD}(Y_i) \widehat{CFD}(Y_j))$ 为左 $\mathcal{A}$-模同态空间 $CFD(Y_i) \to CFD(Y_j)$，则复合映射 $f \otimes g \mapsto g \circ f$ 构成如下形式的同伦交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1, Y_2) \otimes \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_2, Y_3) & \xrightarrow{f \otimes g \mapsto g \circ f} & \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1, Y_3) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \widehat{CF}(Y_{12}) \otimes \widehat{CF}(Y_{23}) & \xrightarrow{\hat{f}_W} & \widehat{CF}(Y_{13}) \end{array} \tag{2}$$

其中 f_W 是由 W 诱导的映射，竖直映射来自配对定理 *[LOT11，定理 1]*。

备注。 复形 $\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_i, Y_j)$ 只有在选定 Y_i 和 Y_j的带边 Heegaard 图后才有明确定义。

为证明这一点，我们使用一个带边 Heegaard 三元组 AT，它最初由 Auroux 在 [Aur10]中定义。具体而言，我们证明以下结论。

定理 1.2。 设 $\mathcal{H}_i$ 是带边三维流形 Y_i对应的带边 *Heegaard* 图，其中 $i = 1$、2、3，并设 $\mathcal{H}_i^+$ 是通过对 $\mathcal{H}_i$ 中的β-圆施加一个小的哈密顿同伦得到的带边 *Heegaard* 三元组。那么该映射

$$\widehat{G}_{\mathsf{AT}} : \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1, Y_2) \otimes \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_2, Y_3) \to \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1, Y_3) \tag{3}$$

由在 $\mathsf{AT} \cup \mathcal{H}_1^+ \cup \mathcal{H}_2^+ \cup \mathcal{H}_3^+$ 中计数伪全纯三角形得到，并将 $\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_i, Y_j)$ 与 $\widehat{CFD}(Y_i) \boxtimes \mathcal{A} \boxtimes \widehat{CFD}(Y_j)$对应，和复合映射 $f \otimes g \mapsto g \circ f$ 在同伦意义下相同。

随后，我们详细阐述如何由带边 Heegaard 三元组构造带边界和角的四维流形，并证明（推论 5.2）三元组 $\mathsf{AT}^{1,2,3}$表示上述裤带配边的一种变体；利用这一点以及 Zemke [Zem21a、Zem21b]的结果，我们证明定理 1.1。最后，作为定理 1.1 的推论$\widehat{\qquad\qquad}$，我们给出一种通过复合态射在链层面计算与协边 $X : Y_0 \to Y_1$相关的映射 $HF(Y_0) \to HF(Y_1)$ 的新算法。该算法是对[LMW08]和 [MOT20]的组合方法的一种替代。

致谢。 作者谨此感谢 Gary Guth、Robert Lipshitz、MaggieMiller 和 Dylan Thurston 提供的宝贵意见与建议。

2. Background

定义 2.1。 固定一个环 $\Bbbk$ 上的微分分次代数 $\mathcal{A}$ 。一个关于 $\mathcal{A}$ 的左型-D 结构是一个对 (N, δ_N^1)，由一个分次 $\Bbbk$-模 N 和一个映射组成

$$\delta_N^1 : N \to (\mathcal{A} \otimes N)[1] \tag{4}$$

满足相容条件

$$(\mu_2 \otimes \mathbb{I}_N) \circ (\mathbb{I}_{\mathcal{A}} \otimes \delta_N^1) \circ \delta_N^1 + (\mu_1 \otimes \mathbb{I}_N) \circ \delta_N^1 = 0. \tag{5}$$

类型-D 结构同态是一个 $\mathbb{k}$-模映射 $f\colon N_1 \to \mathcal{A}\otimes N_2$，满足以下方程

$$(\mu_2 \otimes \mathbb{I}_{N_2}) \circ (\mathbb{I}_{\mathcal{A}} \otimes f) \circ \delta^1_{N_1} + (\mu_2 \otimes \mathbb{I}_{N_2}) \circ (\mathbb{I}_{\mathcal{A}} \otimes \delta^1_{N_2}) \circ f + (\mu_1 \otimes \mathbb{I}_{N_2}) \circ f = 0 \tag{6}$$

以及类型-D 结构同态 f，$g\colon N_1 \to \mathcal{A} \otimes N_2$ 之间的同伦，是一个 $\mathbb{k}$-模同态 $h\colon N_1 \to (\mathcal{A} \otimes N_2)[-1]$，满足

$$(\mu_2 \otimes \mathbb{I}_{N_2}) \circ (\mathbb{I}_{\mathcal{A}} \otimes h) \circ \delta^1_{N_1} + (\mu_2 \otimes \mathbb{I}_{N_2}) \circ (\mathbb{I}_{\mathcal{A}} \otimes \delta^1_{N_2}) \circ h + (\mu_1 \otimes \mathbb{I}_{N_2}) \circ h = f - g.$$

例 1. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{k} = \mathbb{F}_2^k$ 上的一个微分分次代数，M 是 $\mathcal{A}$上的一个微分分次模，且作为 $\mathcal{A}$-模是自由的。固定 M 的一个 $\mathcal{A}$-基 B，并令 $N = \mathbb{k}B$。那么，微分 ∂_M 在 N 上的限制确定了一个映射 $\delta^1\colon N \to (\mathcal{A} \otimes N)[1]$，满足类型 -$D$ 结构关系。任何微分分次模同态 $M_1 \to M_2$都会诱导相应的类型-D 结构映射；对于以这种方式得到的类型-D 结构，反过来结论也成立。类似地，这类映射的同伦等价于类型-D 结构的同伦。

另一方面，若 $(N,\ \delta^1)$ 是 $\mathcal{A}$上的左型-D 结构，则 $\mathcal{A} \otimes N$ 是一个左微分 $\mathcal{A}$-模，其微分为

$$m_1 = (\mu_2 \otimes \mathbb{I}_N) \circ (\mathbb{I}_{\mathcal{A}} \otimes \delta^1) + \mu_1 \otimes \mathbb{I}_N \tag{7}$$

以及模结构映射 $m_2 = \mu_2 \otimes \mathbb{I}_N$。如上例所示，type-$D$ 同伦态射和同伦分别诱导链同态和链同伦。

定义 2.2。给定一个 type-D 结构 (N, δ^1)，递归地定义映射

$$\delta^i : N \to (\mathcal{A}^{\otimes i} \otimes N)[i] \tag{8}$$

通过取 $\delta^0 = \mathbb{I}_N$ 和 $\delta^i = (\mathbb{I}_{\mathcal{A}^{\otimes i-1}} \otimes \delta^1) \circ \delta^{i-1}$。我们称 (N, δ^1) 是有界的，如果对所有 $x \in N$，都存在一个整数 n，使得对所有 $i \geq n$都有 $\delta^i(x) = 0$。

定义 2.3。带基点匹配圆 $\mathcal{Z}$是一个四元组 $(Z, \boldsymbol{a}, M, z)$，由一个定向圆 Z、一个由 $4k$ 个点 $a_1, \ldots, a_{4k}$ 组成的子集 $\boldsymbol{a} \subset Z$、一个称为匹配的二对一函数 $M\colon \boldsymbol{a} \to [2k]$，以及一个基点 $z \in Z \setminus \boldsymbol{a}$构成。我们要求沿匹配 M 对 Z 做手术后得到一个单圆；这保证了下面的构造是良定义的。给定一个带基点匹配圆 $\mathcal{Z}$，可以通过按照匹配 M 在点 $\boldsymbol{a} \subset \partial D^2 \subset D^2$ 处附加定向的二维 1-柄，得到一个定向曲面 $F(\mathcal{Z})$，该曲面只有一个边界分支；再沿此边界粘接另一个圆盘。

我们将每个带基点匹配圆 $\mathcal{Z} = (Z,\ \boldsymbol{a},\ M,\ z)$ 视为一个接触 1-流形，并将端点位于 $\boldsymbol{a}$ 上且不与 z 相交的区间 $\rho \subset Z$ 称为*Reeb* 弦。

定义 2.4。带边 3-流形 Y 是一个带边界的定向 3-流形，并附有一个保定向微分同胚 $\phi\colon F(\mathcal{Z}) \to \partial Y$。这类数据可以用一个带边 ***Heegaard*** 图 $(\Sigma,\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ z)$ 指定，其中：

- Σ是一个亏格为 g 的紧致定向曲面，
- $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^a \cup \boldsymbol{\alpha}^c = \{\alpha_1^a, \ldots, \alpha_{2k}^a, \alpha_1^c, \ldots, \alpha_{g-k}^c\}$ 是 Σ 中由 $g-k$ 个嵌入圆 α_i^c（位于 Σ 的内部）和 $2k$ 条弧 α_j^a（其边界位于 $\partial\Sigma$ 上并与之横截）组成的两两不相交曲线集合，
- $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_g\}$ 是 Σ内部的一组 g 两两不相交的嵌入圆 β_i，

- 且 z 是 $\partial\Sigma \setminus (\boldsymbol{\alpha} \cap \partial\Sigma)$ 中的一个点

使得 $\Sigma \setminus \overline{\boldsymbol{\alpha}}$ 和 $\Sigma \setminus \boldsymbol{\beta}$ 是连通的，并且 α-曲线与 β 曲线的任何交点都是横截的。此外，两个带边 Heegaard 图指定相同的带边三维流形 Y，当且仅当它们可以通过有限次保持 α-弧端点不变的 Heegaard 变换相互关联（参见 [LOT18，第 4]章）。

在 [LOT18], Lipshitz–Ozsv´ath–Thurston 中，对于一个带边 Heegaard 图 $\mathcal{H} = (\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$，他们关联一个左型-$D$ 结构 $CFD(Y) := CFD(\mathcal{H})$，其定义在与带基点匹配圆 $\mathcal{Z}$（取相反定向）相关联的代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(-\mathcal{Z})$ 上；其同伦类型是带边三维流形 Y 的一个不变量。这里我们简要回顾这一构造。

定义 2.5. 设 $\mathcal{H} = (\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$ 是一个 3-流形 Y 的亏格为 g 的带边 Heegaard 图。$\mathcal{H}$ 的一个生成元 是一个含 g 个元素的集合 $\boldsymbol{x} = \{x_1, \dots, x_g\}$，由 $\boldsymbol{\alpha}$-曲线与 $\boldsymbol{\beta}$-曲线的交点组成，并满足

- 恰有一个 x_i 位于每个 α-圆上，并且位于每个 β-圆上，且
- 至多有一个 x_i 位于每条 α-弧上。

将 $\mathcal{H}$ 的生成元集合记为 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$。

由 $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$张成的 $\mathbb{F}_2$-向量空间 $\mathbb{F}_2\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ 带有幂等元 $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ 所成的子代数的左作用。作为左 $\mathcal{A}$-模，$CFD(\mathcal{H})$ 定义为 $CFD(\mathcal{H}) := \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{I}} \mathbb{F}_2\mathfrak{S}(\mathcal{H})$，并通过取下式赋予其左微分模结构

$$\partial(\mathbb{I} \otimes \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{y} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})} \sum_{B \in \pi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} a^B_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \otimes \boldsymbol{y}, \tag{9}$$

其中

$$a^B_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = \sum_{\vec{\rho} \,|\, \mathrm{ind}(B,\vec{\rho})=1} \#\mathcal{M}^B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \vec{\rho}) a(-\vec{\rho}). \tag{10}$$

这里，$\pi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是连接 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$的 Whitney圆盘同调类空间，$\vec{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ 是 $\partial\Sigma$中的一列 Reeb 弦，$\mathcal{M}^B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \vec{\rho})$ 是 B 在 $\mathrm{int}(\Sigma) \times [0,1] \times \mathbb{R}$ 中的伪全纯代表元模空间，其在东向无穷远处满足渐近条件 $\vec{\rho}$，并且模去平移；$a(-\vec{\rho}) = a(-\rho_1) \cdots a(-\rho_n)$ 是与 Reeb 弦元组 $-\vec{\rho} = (-\rho_1, \dots, -\rho_n)$ 相关联的代数元素之积，其中 Reeb 弦的方向已反转。量 $\mathrm{ind}(B, \vec{\rho})$ 是一个 Maslov 型指标，它保证当 $\mathrm{ind}(B, \vec{\rho}) = 1$时，模空间 $\mathcal{M}^B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \vec{\rho})$ 是 0 维的。更一般地，对于 $n > 2$，在 $\mathrm{int}(\Sigma) \times \mathbb{D}^2_n$ 中的伪全纯 n边形模空间 $\mathcal{M}^B(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n; \vec{\rho})$ 在 $\mathrm{ind}(B, \vec{\rho}) = 0$时是 0 维的，其中 $\mathbb{D}^2_n$ 是一个 n次边界穿孔圆盘。

在 [LOT11], Lipshitz–Ozsv´ath–Thurston 中，他们证明，对于边界相同的带边三维流形Y_1 和 Y_2，其链复形 $\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(\widehat{\mathrm{CFD}}(Y_1), \widehat{\mathrm{CFD}}(Y_2))$（由 $\mathcal{A}$- 模映射 $\widehat{\mathrm{CFD}}(Y_1) \to \widehat{\mathrm{CFD}}(Y_2)$ 构成）与 Heegaard Floer 链复形 $\widehat{\mathrm{CF}}(-Y_1 \cup_\partial Y_2)$ 同伦等价。在该文中，他们考察了一个 (α, β)-带边 Heegaard 图 $\mathrm{AZ}(\mathcal{Z})$。该图最初由 Auroux 在 [Aur10], 中引入，并与 $\mathcal{Z}$ 相关联。他们证明，带边界 Floer 双模 $\mathrm{CFAA}(\mathrm{AZ}(\mathcal{Z}))$ 作为左-右 $(\mathcal{A}(-\mathcal{Z}), \mathcal{A}(-\mathcal{Z}))$-双模，同构于正则双模 ${}_{\mathcal{A}(-\mathcal{Z})}\mathcal{A}(-\mathcal{Z})^{\mathcal{A}(-\mathcal{Z})}$。

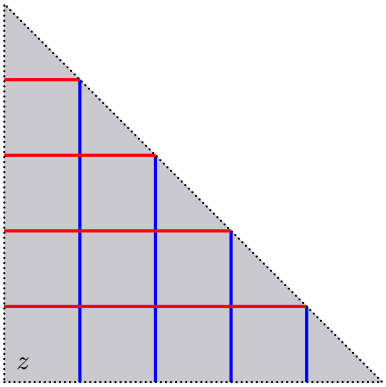


FIGURE 1. 与唯一的 1 阶亏格带基点匹配圆相关联的插值部分 AZ($\mathcal{Z}$) 中，三角形 $\triangle_1$ 以及向下延伸至 α-弧和 β-弧的弧。

作为推论，他们进而得出

$$\begin{aligned}\widehat{CF}(-Y_1 \cup_\partial Y_2) &\simeq \overline{\widehat{CFD}(Y_1)} \boxtimes \widehat{CFAA}(\mathsf{AZ}(\mathcal{Z})) \boxtimes \widehat{CFD}(Y_2) \\ &\cong \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}(-\mathcal{Z})}(\widehat{CFD}(Y_1), \widehat{CFD}(Y_2)).\end{aligned} \tag{11}$$

图示 AZ($\mathcal{Z}$) 定义如下：若 k 是由 $\mathcal{Z}$ 确定的曲面 $F(\mathcal{Z})$ 的亏格，则考虑由坐标轴和直线 $x+y=4k+1$ 界定的平面三角形 $\triangle_k$，我们将其称为 $\triangle_k$ 的对角线。令 Σ' 为 $\triangle_k$ 的商空间：当 i 和 j 在 $\mathcal{Z}$ 中匹配时，将对角线上点 $(i, 4k+1-i)$ 与 $(j, 4k+1-j)$ 的小邻域按如下方式识别，使所得结果成为具有单一边界分支的可定向亏格 k 曲面。若 i 和 j 在 $\mathcal{Z}$ 中匹配，则不连通子空间 $\triangle_k \cap (\{x=i\} \cup \{x=j\})$ 下降为 Σ' 中的单条弧 β_i；同样，子空间 $\triangle_k \cap (\{y=4k+1-i\} \cup \{y=4k+1-j\})$ 下降为单条弧 α_i。令 Σ 为沿 0-球面 $\{(0,0), (4k+1, 0)\}$ 将 1-柄附加到 $\partial\Sigma'$ 上所得的结果，并令 $\boldsymbol{z}$ 为该 1-柄的核的邻域。于是 AZ($\mathcal{Z}$) 是图示 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{z})$，其中 $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}$ 和 $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_i\}$。

3. AN INTERPOLATING TRIPLE

我们将考虑一个与 $\mathcal{Z}$ 相关、以类似方式定义的带边界 Heegaard 三元组，它同样归功于 Auroux，我们称之为 AT($\mathcal{Z}$)。我们按如下方式构造 AT($\mathcal{Z}$)：若与前文一样，k 是 $F(\mathcal{Z})$ 的亏格，则考虑平面中由坐标轴以及直线 $x=4k+1$ 和 $y=4k+1$ 围成的正方形 $\square_k$，并令 Σ' 为 $\square_k$ 的商空间：当 i 和 j 在 $\mathcal{Z}$ 中配对时，将线段 $\square_k \cap \{y=4k+1\}$ 上点 $(i,\ 4k+1)$ 和 $(j,\ 4k+1)$ 的小邻域识别起来，使所得曲面成为一个带有一个边界分支的可定向亏格 k 曲面。现在，若 i 和 j 在 $\mathcal{Z}$ 中配对，则不连通子空间

$$\begin{aligned} g_i &= \square_k \cap (\{-x+y=4k+1-i\} \cup \{-x+y=4k+1-j\}) \\ d_i &= \square_k \cap (\{x=i\} \cup \{x=j\}) \\ e_i &= \square_k \cap (\{x+y=4k+1-i\} \cup \{x+y=4k+1-j\}) \end{aligned} \tag{12}$$

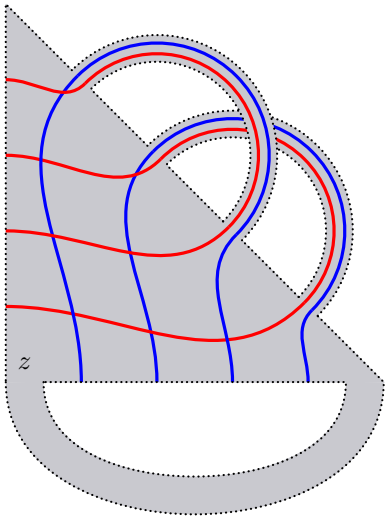


FIGURE 2. 与亏格1带基点匹配圆相关的图示 AZ($\mathcal{Z}$)。

分别下降为 Σ' 中的单弧 γ_i'、δ_i' 和 ε_i'。现在令 Σ_{AT} 为沿着 0-球面 $\overline{\{(0,0)、(4k+1,0)\}}$ 和 $\{(4k+1,0)、(4k+1)\}$ 将 1-柄附加到 $\partial\Sigma'$ 后所得的空间，并令 z 为任一柄核的邻域；取 AT($\mathcal{Z}$) 为三元组 $(\Sigma_{\mathsf{AT}}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}, z)$。与前文一样，$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_i\}$、$\boldsymbol{\delta} = \{\delta_i\}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\}$ 由弧 γ_i'、δ_i' 和 ε_i' 的适当一般哈密顿扰动给出。请注意，未扰动的弧存在非一般的三重交，因此要使结果成为 [LOT18] 意义下的可容许图，扰动是绝对必要的。我们将按照 Auroux 在 [Aur10], 中所示的相同方式扰动这些三重交，如图3所示。我们还将图4所示的嵌入的三价树数据纳入 AT；在商空间 AT 中，这棵树在每个边界分支上各有一个叶子。

由于稍后这样处理会方便一些，我们将稍微修改 AT，假设空间 g_i 和 e_i 分别由斜率为 $\tan(\frac{\pi}{6})$ 和 $\tan(\frac{5\pi}{6})$ 的直线给出，而不是 1 和 -1。我们再次假设这些直线与 $\square_k$ 的顶部边界线段相交于点 $(i, 4k+1)$。如果将这些直线视为 $\mathbb{R}^2$ 中的直线与 $\square_k$的交线，那么，如图5所示，通过在平面中平移 g-线和 e-线，即可实现对 AT 中曲线的扰动，从而消除非一般三重点。此选择的动机来自引理 4.5 的证明。

现在令 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{\gamma}$、$\boldsymbol{\delta}$或 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 中的任意一个，并令 ∂_ηAT($\mathcal{Z}$) 为 ∂AT($\mathcal{Z}$) 中与 $\boldsymbol{\eta}$ 有非平凡交集的分支。注意，按构造，忘掉 $\boldsymbol{\eta}$并沿着 ∂_ηAT($\mathcal{Z}$) 将一个圆盘粘合到 Σ 上后，所得结果是 AZ($\mathcal{Z}$) 的一个副本。对于 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta} \in \{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}\}$，令 AZ$^{\eta\theta}$ 为删去弧集合 $\boldsymbol{\zeta} \in \{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}\} \setminus \{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}\}$ 后得到的图示，并令 $\mathcal{A}_{\eta\theta} = \widehat{CFAA}(\mathsf{AZ}^{\eta\theta})$。我们回顾一下，Aur10 的命题 4.8] 指出，在将 $\mathcal{A}_{\eta\theta}$ 与 $\mathcal{A}(\mathcal{Z})$ 认同后，通过计算 AT($\mathcal{Z}$) 中的省内全纯三角形得到的映射 $\mathcal{A}_{\delta\varepsilon} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_{\gamma\delta} \to \mathcal{A}_{\gamma\varepsilon}$ 与乘法一致。

命题 3.1 ([LOT11], 命题 4.1)。 左右$(\mathcal{A}(\mathcal{Z}), \mathcal{A}(\mathcal{Z}))$-双模 $\widehat{CFAA}(\mathsf{AZ}^{\eta\theta})$ 与 $\mathcal{A}(\mathcal{Z})$ 同构。

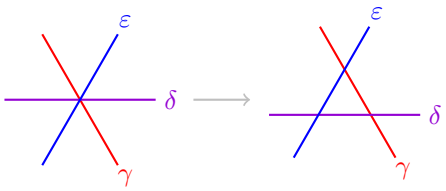


FIGURE 3. Auroux 对 AT($\mathcal{Z}$) 中三重交的扰动约定。

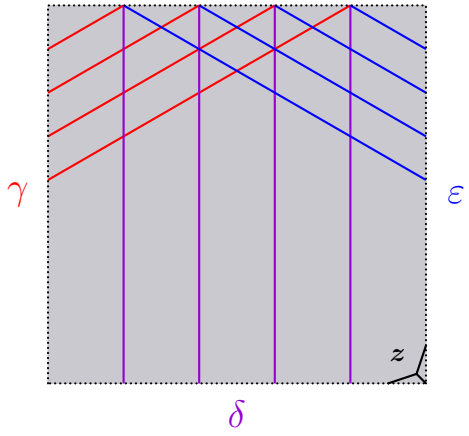


FIGURE 4. 正方形 $\square_1$ 以及在与唯一的亏格1带基点匹配圆相关联的插值三元组 AT($\mathcal{Z}$) 中分别降至 γ-弧、δ-弧和 ε-弧的那些弧。

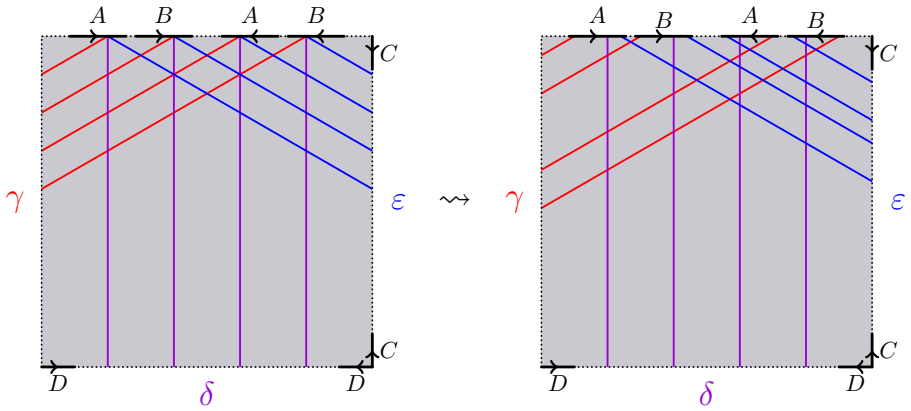


FIGURE 5. 使用平面平移扰动图示，以得到与亏格1带基点匹配圆相关联的三元组 AT($\mathcal{Z}$)（右图）。这里，我们将 AT 中相互识别的 $\partial\square_k$ 的线段画成有向黑线，并用相同的字母标记粘合线段对。

略述。我们将生成集 $\mathfrak{G}(\mathrm{AZ}_{\eta\theta})$ 与 $\mathcal{A}(\mathcal{Z})$ 的通常基通过弦图对应起来。生成元 $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{G}(\mathrm{AZ}_{\eta\theta})$ 是 $\boldsymbol{\eta} \cap \boldsymbol{\theta}$ 中点的集合。对于单个交点 $x \in \boldsymbol{\eta} \cap \boldsymbol{\theta}$，我们按如下方式将其与 $\mathcal{Z} = (Z, \boldsymbol{a}, M)$ 中的 Reeb 弦或涂抹水平弦对应起来。首先，在正方形上方画出 $\mathcal{Z}$，使其方向从左向右，并将点集 $\boldsymbol{a}$ 识别为 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的边界交点。接着注意，在正方形中，存在唯一经过 x 的线段 e 和 g，并且存在唯一的三角形区域（或空区域） T_x，它包含于 $\square_k$，其边界由线段 e、g 以及直线 $y = 4k+1$ 构成。若 T_x 为空，则 x 是一个边界交点，我们将其与匹配 M 所给出的涂抹水平弦对应。否则，我们将 x 与 $\mathcal{Z}$ 中由线段 $T_x \cap \{y = 4k+1\}$ 确定的 Reeb 弦 ρ_x 对应。因此，生成元 $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{G}(\mathrm{AZ}_{\eta\theta})$ 可识别为一组 Reeb 弦和涂抹水平弦，从而可识别为一个弦图。不难看出，这一对应在 $\mathfrak{G}(\mathrm{AZ}_{\eta\theta})$ 与 $\mathcal{A}(\mathcal{Z})$ 的通常基之间给出了一个双射。另请注意，我们可以分别将生成元 $\boldsymbol{x}$ 的左、右幂等元识别为线段 $T_x \cap \{y = 4k+1\}$ 的左、右端点集合。我们在此给出的对应等价于 [LOT11] 中给出的对应。要从我们的对应还原他们的对应，只需注意，若 T_x 非空，则 $\mathrm{AZ}_{\eta\theta}$ 中存在唯一的矩形区域 R_x，其边界由 $\partial\square_k$ 最左侧的线段、$\boldsymbol{\eta}$ 和 $T_x \cap \boldsymbol{\theta}$ 构成，顶点位于 x 和 $T_x \cap \boldsymbol{\theta}$ 最上方的端点处。将 $\mathcal{Z}$ 画在 $\mathrm{AZ}_{\eta\theta}$ 的左侧并使其朝左下方，令 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{\eta} \cap \partial\mathrm{AZ}_{\eta\theta}$ 对应，可以直接验证，$\mathcal{Z}$ 中由 $R_x \cap \partial\mathrm{AZ}_{\eta\theta}$ 确定的 Reeb 弦恰好是 ρ_x。最后，图示 $\mathrm{AZ}_{\eta\theta}$ 在 [SW10] 的意义下是良好的，因此 $\widehat{\mathrm{CFAA}}(\mathrm{AZ}_{\eta\theta})$ 上的微分只计数嵌入矩形，唯一非平凡的 A_∞-运算是 m_2 映射，而这些运算计数半条带——即在边界处渐近于 Reeb 弦的双边形。因此，不难将 $\widehat{\mathrm{CFAA}}(\mathrm{AZ}_{\eta\theta})$ 上的微分和双模结构与 $\mathcal{A}(\mathcal{Z})$ 上的对应结构识别起来。□

备注。</style>理解作用在 $\widehat{CFAA}(\mathrm{AZ}_{\eta\theta})$ 上的模作用，一种方式如下。假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是生成元，且对于 $x_i \in \boldsymbol{x} = \{x_1, \dots, x_k\}$，线段 $T_{x_i} \cap \{y = 4k+1\}$ 的右端点集合与对于 $y_j \in \boldsymbol{y} = \{y_1, \dots, y_k\}$，线段 $T_{y_j} \cap \{y = 4k+1\}$ 的左端点集合相同。在这种情况下，存在一个双射 $f\colon [k] \to [k]$，满足当 $i = j$ 时，$T_{x_i} \cap T_{y_{f(j)}}$ 恰好是三角形 T_{x_i} 和 $T_{y_{f(i)}}$ 的公共顶点；否则为空。注意，存在唯一一个（可能为空的）矩形区域 R_i，使得 $T_{z_i} := T_{x_i} \cup T_{y_{f(i)}} \cup R_i$ 仍是一个三角形。于是，乘积 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$恰好是交点 $\boldsymbol{z} = \{z_1, \dots, z_k\}$的集合。可以验证，在上述对应下，这与 $\mathcal{A}(\mathcal{Z})$ 上通常的代数结构一致；在来自 [LOT11] 的对应下，也与左右模结构一致。

现在我们定义映射 $m\colon \mathcal{A}_{\delta\varepsilon} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_{\gamma\delta} \to \mathcal{A}_{\gamma\varepsilon}$。设 $\triangle$ 是一个三角形，其边为 e_γ、e_δ 和 e_ε，按顺时针方向排列；设 $e_{\eta\theta}$ 是 $e_\eta \cap e_\theta$ 中的唯一一点。现在令 $W = \in \mathrm{int}(\mathrm{AT}) \times \triangle$，并固定生成元 $\rho \in \mathfrak{G}(\mathrm{AZ}_{\delta\varepsilon})$、$\sigma \in \mathfrak{G}(\mathrm{AZ}_{\gamma\delta})$ 和 $\tau \in \mathfrak{G}(\mathrm{AZ}_{\gamma\varepsilon})$。用 $\pi_2(\rho, \sigma, \tau)$ 表示所有映射 $(S, \partial S)$ 的同调类的集合，其中 $\to \in (W, \boldsymbol{\gamma} \times e_\gamma \cup \boldsymbol{\delta} \times e_\delta \cup \boldsymbol{\varepsilon} \times e_\varepsilon)$，$S$ 是一个带边界的黎曼曲面，具有边界标记点 $s_{\gamma\delta}$、$s_{\delta\varepsilon}$，且 $s_{\varepsilon\gamma}$ 满足 $s_{\gamma\delta} \mapsto \rho$、$s_{\delta\varepsilon} \mapsto \sigma$ 和 $s_{\varepsilon\gamma} \mapsto \tau$。如 [Lip06], 的第10节所述，我们可以选取一个足够好的几乎复结构 J，定义在 W 上，使得对于每个 $A \in \pi_2(\rho, \sigma, \tau)$，模空间 $\mathcal{M}^A(\rho, \sigma, \tau)$

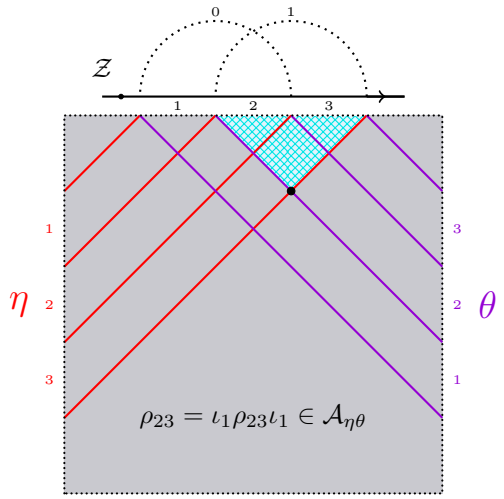


FIGURE 6. 将生成元 $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{S}(\mathsf{AZ}^{\eta\theta})$ 认作代数元素 $\rho_{23} \in \mathcal{A}(\mathcal{Z})$。在 $\mathcal{A}(-\mathcal{Z})$ 中，同一个生成元被认作 ρ_{12}。

同调类为 A 且满足 $u(s_{\gamma\delta}) = \rho$、$u(s_{\delta\varepsilon}) = \sigma$ 和 $u(s_{\varepsilon\gamma}) = \tau$ 的嵌入式 J-全纯曲线 $(S,\ \partial S) \xrightarrow{u} (W,\ \boldsymbol{\gamma} \times e_\gamma \cup \boldsymbol{\delta} \times e_\delta \cup \boldsymbol{\varepsilon} \times e_\varepsilon)$ 的模空间是一个光滑流形，其维数由 A 的 Maslov 指数 $\mathrm{ind}(A)$ 给出。然后我们在生成元上定义 m：

$$m(\rho \otimes \sigma) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(\mathsf{AZ}_{\gamma\varepsilon})} \sum_{\mathrm{ind}(A)=0} \#\mathcal{M}^A(\rho,\sigma,\tau)\tau. \tag{13}$$

命题 3.2 ([Aur10，命题 4。8])。映射 m： $\mathcal{A}_{\delta\varepsilon} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_{\gamma\delta} \to \mathcal{A}_{\gamma\varepsilon}$在将每个 $\mathcal{A}_{\eta\theta}$ 认作$\mathcal{A}(\mathcal{Z})$后，与乘法映射一致。

正如引言中所述，我们将在代数 $\mathcal{A}(-\mathcal{Z})$ 上进行讨论。然而，这是一个标准结论：该代数与 $\mathcal{A}(\mathcal{Z})^{\mathrm{op}}$同构。事实上，可以将生成元 $\mathfrak{S}(\mathsf{AZ}^{\eta\theta})$ 按照我们处理 $\mathcal{A}(\mathcal{Z})$ 的完全相同方式，认作 $\mathcal{A}(-\mathcal{Z})$ 的通常生成元；唯一的例外是，我们将 $\mathcal{Z}$画在 $\mathsf{AZ}^{\eta\theta}$ 上方，并使其方向从右向左，而不是从左向右。

推论 3.3。 m 在将 $\mathcal{A}_{\eta\theta}$ 与 $\mathcal{A}(-\mathcal{Z})$认同后，与乘法映射 $\mathcal{A}_{\gamma\delta} \otimes_{\mathbb{F}} \mathcal{A}_{\delta\varepsilon} \to \mathcal{A}_{\gamma\varepsilon}$ 重合。

备注。根据构造，映射 m 仅统计不与 AT 的边界相交的伪全纯三角形。也可以改为统计 AT 中所有刚性三角形，这样一来，m中预期会出现额外项。然而，下面的引理 4.5 告诉我们，这些映射是相同的。关于带边 Floer 同调中的伪全纯多边形映射，更多详情请参见 [LOT16]。

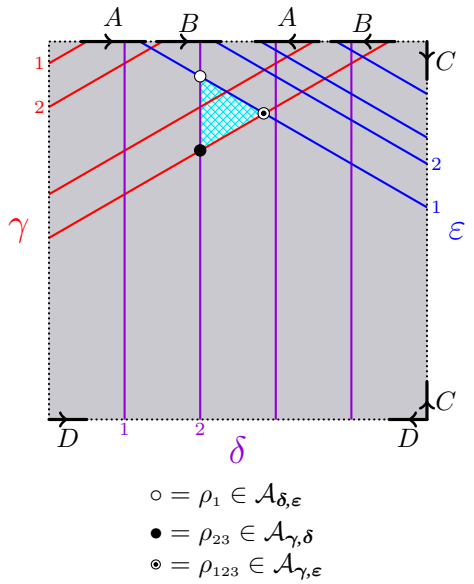


FIGURE 7. 一个嵌入在 AT($\mathcal{Z}$) 中的全纯三角形，表示代数 $\mathcal{A}(\mathcal{Z})^{\mathrm{op}}$ 中的乘法 $m^{\mathrm{op}}(\rho_{23}\otimes\rho_1) = \rho_{123}$ ；等价地，也表示 $\mathcal{A}(-\mathcal{Z})$ 中的乘法 $m(\rho_{12}\otimes\rho_3) = \rho_{123}$，其中 $\mathcal{Z}$ 是亏格1带基点匹配圆。

4. COMPOSITION AND TRIANGLE COUNTS

定义 4.1。如果存在左模生成元 $\boldsymbol{u} \in \mathit{CFD}(Y_1)$ 和 $\boldsymbol{v} \in \mathit{CFD}(Y_2)$，以及代数元素$\rho \in \mathcal{A}(-\mathcal{Z})$，使得 $f(\boldsymbol{u}) = \rho\boldsymbol{v}$ 且在所有其他生成元上 f 均为零，则称 $f \in \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1, Y_2)$ 是一个基本态射 。

引理 4.1. 基本态射的集合构成 $\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1, Y_2)$ 的一个 $\mathbb{F}$-基。

证明。设 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m \in \mathit{CFD}(Y_1)$ 和 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in \mathit{CFD}(Y_2)$ 是由给定的带边 Heegaard 图选择所确定的 Y_i 的生成元。对于 $j = 1, \dots, m$，令 $f_1^j, \dots, f_{s_j}^j$为满足 $f_i^j(\boldsymbol{u}_j) = \rho_{ij}\boldsymbol{v}_{k(i,j)}$ 非零的不同基本态射。假设它们之间存在线性依赖关系

$$\sum_{i,j} c_{ij} f_i^j = 0 \tag{14}$$

对于它们。给定 j，我们于是得到一个线性依赖关系

$$\sum_i c_{ij} f_i^j(\boldsymbol{u}_j) = \sum_i c_{ij}\rho_{ij}\boldsymbol{v}_{k(i,j)} = 0 \tag{15}$$

但这些 $\rho_{ij}\boldsymbol{v}_{k(i,j)}$ 彼此不同，因此是 $\mathbb{F}$-线性无关的，因为这些 f_i^j 是基本且互不相同的，所以对所有 i 和 j，都有 $c_{ij} = 0$ 。现在，给定 $g \in \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1, Y_2)$，记作

$$g(\boldsymbol{u}_j) = \sum_i \sigma_{ij}\boldsymbol{v}_i. \tag{16}$$

对于每个满足 $\sigma_{ij}\boldsymbol{v}_i \neq 0$ 的 i 和 j，都可以通过取 $g_{i,\ j}(\boldsymbol{u}_j) = \sigma_{ij}\boldsymbol{v}_i$ 和 $g_{i,\ j}(\boldsymbol{u}_k) = 0$（其中 $k \neq j$），来定义一个基本态射 $g_{i,\ j}$。于是我们有

$$g = \sum_{i,j} g_{i,j} \tag{17}$$

由构造可知，基本态射张成 $\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1,\ Y_2)$。 □

这个识别

$$\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1, Y_2) \cong \overline{\widehat{CFD}(Y_1)} \boxtimes \mathcal{A}(-\mathcal{Z}) \boxtimes \widehat{CFD}(Y_2) \tag{18}$$

于是可以用基本态射如下表示：假设有一个基本$\widehat{\ }$态射 $f\colon CFD(Y_1) \to CFD(Y_2)$，由 $f(\boldsymbol{u}) = \rho\boldsymbol{v}$ 定义，那么在此同构下，f 被映到张量积 $\boldsymbol{u} \boxtimes \rho \boxtimes \boldsymbol{v}$。若另有第二个基本态射$\frown$ $\overline{\ \frown\ }g\colon CFD(Y_2) \to CFD(Y_3)$，由 $g(\boldsymbol{v}) = \sigma\boldsymbol{w}$ 确定，那么复合 $g \circ f$ 在盒张量积层面上由下式给出

$$(\overline{\boldsymbol{v}} \boxtimes \sigma \boxtimes \boldsymbol{w}) \circ (\overline{\boldsymbol{u}} \boxtimes \rho \boxtimes \boldsymbol{v}) = \overline{\boldsymbol{u}} \boxtimes \rho\sigma \boxtimes \boldsymbol{w}, \tag{19}$$

因此，我们可以用 $\mathcal{A}(\mathcal{Z})$ 上的乘法运算显式地表示复合映射 $f \otimes g \mapsto g \circ f$：

$$\begin{aligned}&(\overline{\boldsymbol{u}} \boxtimes \rho \boxtimes \boldsymbol{v}) \otimes (\overline{\boldsymbol{v}} \boxtimes \sigma \boxtimes \boldsymbol{w}) \overset{ev}{\mapsto} \overline{\boldsymbol{u}} \boxtimes \rho \boxtimes \overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}) \boxtimes \sigma \boxtimes \boldsymbol{w} \\ &= \overline{\boldsymbol{u}} \boxtimes \rho \boxtimes \iota_{\boldsymbol{v}} \boxtimes \sigma \boxtimes \boldsymbol{w} \overset{\cong}{\mapsto} \overline{\boldsymbol{u}} \boxtimes \rho \boxtimes \sigma \boxtimes \boldsymbol{w} \overset{m}{\mapsto} \overline{\boldsymbol{u}} \boxtimes \rho\sigma \boxtimes \boldsymbol{w},\end{aligned} \tag{20}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其中 $\overline{\text{求值映射}}: CFD(Y_2) \otimes_{\mathbb{F}} CFD(Y_2) \to \mathcal{A}$ 是求值映射 $\boldsymbol{x} \otimes h \mapsto h(\boldsymbol{x})$，而 $m^{\mathcal{A}}$ 前面的映射由同构 $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{I} \boxtimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A}$ 给出。注意，倒数第二步之所以可行，是因为 $\boldsymbol{v}$ 是一个生成元，并且求值映射在 $\mathbb{F}$-向量子空间 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$上的限制——该子空间是 $CFD(Y_2) \otimes_{\mathbb{F}} CFD(Y_2)$ 中由形如 $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}$ 的元素张成的，其中 $\boldsymbol{v}$ 如上所述是一个生成元——取值于 $\mathcal{A}(\mathcal{Z})$ 的幂等元子环 $\mathcal{I}$。

4.1. 小扰动。在本小节中，我们证明，对带边 Heegaard 图 $\mathcal{H} = (\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$ 的 β 圆进行小扰动，会诱导出一个型-D 模的同构。设 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, z)$ 是一个只有一个边界分支的省级可容许带边 Heegaard 三元组，其中 $\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 完全由圆组成。于是，$(\Sigma, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, z)$ 是缝合三维流形 $Y_{\beta\gamma} \smallsetminus B^3$ 的一个可容许平衡带缝赫加德图，其只有一个边界缝合。相应的缝合 Floer 复形 SFC $(\Sigma, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, z)$ 同构于通常的 Heegaard Floer$\widehat{\ }$复形 CF $(Y_{\beta\gamma})$（参见 [Juh06，命题 9.1]）。于是我们可以定义一个型-D 态射

$$\widehat{f}_{\alpha\beta\gamma}\colon \widehat{CFD}(Y_{\alpha\beta}) \otimes \widehat{CF}(Y_{\beta\gamma}) \to \mathcal{A} \otimes \widehat{CFD}(Y_{\alpha\gamma})$$

by

$$\widehat{f}_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{w} \in \mathfrak{S}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma})} \sum_{B \in \pi_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w})} a^B_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}} \otimes \boldsymbol{w}, \tag{21}$$

其中

$$a^B_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}} = \sum_{\vec{\rho}\,|\,\mathrm{ind}(B, \rho) = 0} \#\mathcal{M}^B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}; \vec{\rho}) a(-\vec{\rho}). \tag{22}$$

这里， $\pi_2(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{w})$是连接 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$与 $\boldsymbol{w}$的惠特尼三角形同调类空间； $\mathcal{M}^B(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z};\vec{\rho})$是满足东向无穷远处渐近条件 $\vec{\rho}$ 的 B 伪全纯代表元的模空间； $a(-\vec{\rho})$的定义同前。 $\widehat{f}_{\alpha\beta\gamma}$ 是一个类型为D 的结构态射这一事实，可由通常证明 $\partial^2=0$ 适用于 $\widehat{CFD}(Y)$的方法稍作变化直接得到。或者，它是 [LOT16，命题 4.29]的一个特例。

对于 $\boldsymbol{\beta}^1$ 的一个小哈密顿扰动 $\boldsymbol{\beta}^0$，我们将证明映射 $\widehat{f}_{\alpha\beta^0\beta^1}$ 诱导出一个同构 $CFD(Y_{\alpha\beta^0}) \to CFD(Y_{\alpha\beta^1})$。我们回顾以下标准引理 [OS04, 引理 9.10]。

引理 4.2. 设 $F\colon A\to B$ 是一个 $\mathbb{R}$滤过群之间的映射，且存在分解$F=F_0+\ell$，其中 F_0 是一个保滤过同构，并且对所有生成元 $\boldsymbol{x}$， $\ell(\boldsymbol{x})<F_0(\boldsymbol{x})$ 。那么，如果 B 上的滤过有下界，F 就是一个同构。

我们在此回顾[LOT18, 第 6], 章中 $\widehat{\mathrm{CFD}}(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},z)$ 上能量滤过的定义，并假设 $(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},z)$ 是容许的。选取 Σ上的一个面积形式。给定 Y上的一个 Spin^c-结构 $\mathfrak{s}$，定义 $\mathcal{F}\colon \mathfrak{S}(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathfrak{s})\to\mathbb{R}$ 如下：任取一个生成元 $\boldsymbol{x}_0\in\mathfrak{S}(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathfrak{s})$，并令 $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}_0)=0$。对于任意其他生成元$\boldsymbol{x}\in\mathfrak{S}(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\mathfrak{s})$，选取$A_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}\in\pi_2(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x})$，并令

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{x})=-Area(A_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}). \tag{23}$$

该定义与$A_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}$的选择无关，因为（$\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},z$）是容许的。对于满足条件 $a\boldsymbol{x}\neq 0$的代数元素 $a\in\mathcal{A}$ ，定义 $\mathcal{F}(a\boldsymbol{x})=\mathcal{F}(\boldsymbol{x})$。于是， $\mathcal{F}$在$CFD(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},z)$上诱导出一个滤过。

设 $\mathcal{H}_{\alpha\beta}=(\Sigma_g,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^0,z)$是一个亏格为 g的容许带边界亥姆霍兹图。若 $\boldsymbol{\beta}^1$ 是对 $\boldsymbol{\beta}^0$的充分小扰动，我们可以将$\boldsymbol{x}\in\mathfrak{S}(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^0,\mathfrak{s})$与其“最近邻” $\boldsymbol{x}^1\in\mathfrak{S}(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^1,\mathfrak{s})$对应起来。这一对应扩展为向量空间同构 $\widehat{\mathrm{CFD}}(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^0,z)\to\widehat{\mathrm{CFD}}(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^1,z)$，并自动进一步扩展为一个型别为$D$ 的结构同构 $\Psi_{0\to1}$。

注意，若 $\boldsymbol{\beta}^1$ 是如上所述对 $\boldsymbol{\beta}^0$ 的小扰动，则与图示 $\mathcal{H}_{\beta^0\beta^1}=(\Sigma_g,\boldsymbol{\beta}^0,\boldsymbol{\beta}^1,z)$ 相关的复形 $\widehat{CF}(\mathcal{H}_{\beta^0\beta^1})$ 的同调由 $\widehat{HF}(\#^gS^2\times S^1)$ 给出，因为 $\mathcal{H}_{\beta^0\beta^1}$ 是 $\#^gS^2\times S^1\smallsetminus B^3$ 的一个容许的平衡带缝赫加德图。

引理 4.3. 令 $\Theta^{\mathrm{top}}_{\beta^0\beta^1}$ 表示$\widehat{HF}(\#^gS^2\times S^1)$ 中的典范顶维同调类。那么，映射 $\widehat{F}_{\mathrm{top}\,\alpha\beta^0\beta^1}\colon\widehat{CFD}(\mathcal{H}_{\alpha\beta^0})\to\mathcal{A}\otimes\widehat{CFD}(\mathcal{H}_{\alpha\beta^1})$ 定义为

$$\boldsymbol{x}\mapsto\widehat{f}_{\alpha\beta^0\beta^1}(\boldsymbol{x}\otimes\Theta^{\mathrm{top}}_{\beta^0\beta^1}) \tag{24}$$

是一个类型为 D 结构的同构。此外，这个映射与最近点映射同伦。

证明。令 $T_{\boldsymbol{x}}\in\pi_2(\boldsymbol{x},\Theta^{\mathrm{top}}_{\beta^0\beta^1},\boldsymbol{x}^1)$ 为典范最小三角形，根据黎曼映射定理，它有唯一的全纯代表元。只要我们的扰动足够小，就可以假设 $T_{\boldsymbol{x}}$ 的面积小于任意生成元 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 在 $\pi_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 中所有类别的面积，其中这两个生成元分别取自 $\mathfrak{S}(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^0,\mathfrak{s})$ 或 $\mathfrak{S}(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^1,\mathfrak{s})$。此外，我们可以选择面积形式，使得在所有 $\boldsymbol{y}\in\mathfrak{S}(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^1)$ 中，$T_{\boldsymbol{x}}$ 是连接 $\boldsymbol{x}$、 $\boldsymbol{y}$ 和 $\Theta^{\mathrm{top}}_{\beta^0\beta^1}$ 的唯一最小面积三角形。令 $\mathcal{F}^1_0$ 为上述定义在 $\widehat{\mathrm{CFD}}(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}^1,z)$ 上的滤过。定义一个新的

滤过 $\mathcal{F}^1$，定义在 $\widehat{\text{CFD}}(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^1, z)$ 上，方法是取 $\mathcal{F}^1(\boldsymbol{x}^1) = \mathcal{F}_0^1(\boldsymbol{x}^1) - \text{Area}(T_{\boldsymbol{x}_0})$。与 LOT18 命题 6.41]，中一样，映射 $\widehat{F}^{\text{top}}_{\alpha\beta^0\beta^1}$ 关于 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^1$ 是滤过保持的，而 $\widehat{F}^{\text{top}}_{\alpha\beta^0\beta^1}$ 中保持滤过的部分由 $\Psi_{0\to 1}$ 给出。注意，通过取 $\widehat{F}\text{top}_{\,\alpha\beta^0\beta^1}(a\otimes \boldsymbol{x}) = a\widehat{F}^{\text{top}}_{\alpha\beta^0\beta^1}(\boldsymbol{x})$，我们可以将 $\widehat{F}^{\text{top}}_{\alpha\beta^0\beta^1}$ 和 $\Psi_{0\to 1}$ 提升为微分左 $\mathcal{A}$-模之间的映射 $\mathcal{A}\otimes \widehat{\text{CFD}}(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^0, z) \to \mathcal{A}\otimes \widehat{\text{CFD}}(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^1, z)$，$\Psi_{0\to 1}$ 也可类似处理。由于 $\Psi_{0\to 1}$ 是向量空间同构，根据引理 4.2，$\widehat{F}^{\text{top}}_{\alpha\beta^0\beta^1}$ 是微分左 $\mathcal{A}$-模的同构，因此也是 type-D 结构的同构。可以很容易地调整 Gut22 引理 5.4] 中的论证，证明 $\widehat{F}^{\text{top}}_{\alpha\beta^0\beta^1}$ 与最近点映射同伦（另见 [Lip06，命题 11.4]）。□

现在我们回顾一些关于具有 Reeb 弦渐近的全纯多边形的定义和结果。将 D_n 边形记作 n，即边界上有 n 个带标签 punctures 的圆盘。将边界上的弧按顺时针方向标记为 e_0、.....、e_{n-1}，并令 $p_{i,\ i+1}$ 为 e_i 与 e_{i+1} 之间的 puncture。定义 Conf(D_n) 为正向定向复结构在保标签双全纯映射下的模空间。回忆一下，该空间有一个 Deligne-Mumford 紧化 Conf(D_n)，它与结合子微分同胚，其边界 ∂ Conf(D_n)由多边形上复结构等价类构成的树组成，每条边表示沿一个顶点粘合两个多边形。

定义 4.2 ([LOT16，定义 3.5])。对于黎曼曲面 Σ上的固定辛形式 ω_Σ，一个容许的**几乎复结构族** 是指在 $\Sigma\times[0,1]\times\mathbb{R}$ 上选取一个 $\mathbb{R}$-不变的几乎复结构 J，并为每个 $n\geq 3$ 选取 $\Sigma\times D_n$ 上的一个光滑族$\{J_j\}_{j\in \text{Conf}(D_n)}$ 的几乎复结构，且满足以下条件：

- 对于每个 $j\in$ Conf(D_n)，投影 $\pi_{\mathbb{D}}\colon \Sigma\times D_n\to D_n$ 是（J_j, j）-全纯的。
- 对于每个 $j\in$Conf(D_n)，$\pi_{\mathbb{D}}$ 的纤维都是 J_j-全纯的。
- 每个 J_j 都调整为 $\Sigma\times D_n$ 上的分裂辛形式 $\omega_\Sigma\oplus\omega_j$。
- 每个 J_j 在 D_n 的 punctures 附近都与 J 一致，具体来说，每个 puncture 都有一个条带状邻域 U，位于 D_n 中，使得（$\Sigma\times U, J_j|_{\Sigma\times U}$）与（$\Sigma\times[0,1]\times(0,\infty)$ J）双全纯等价。
- 若（j_k）是 Conf(D_n) 中的一个序列，收敛到位于余维一边界层中的某个点 $j_\infty\in\partial$Conf(D_n)，即对于某个 m，点（$j_{\infty,1}$,$j_{\infty,2}$）$\in$Conf(D_{m+1})$\times$Conf(D_{n-m+1})，则复结构 J_{j_k} 收敛到（$\Sigma\times D_{m+1}$）$\sqcup$ ($\Sigma\times D_{n-m+1}$) 上的 $J_{j_{\infty,1}}\sqcup J_{j_{\infty,2}}$。这里的收敛是指，当 $k\to\infty$ 时，D_{m+1} 中的一些弧会收缩，而在这些弧的邻域上，复结构 J_{j_k} 通过插入越来越长的颈部得到；在这些邻域之外，它们按 C^∞ 拓扑收敛。对于位于更高余维边界层中的点，也要求满足类似的相容条件。

定义 4.3 ([LOT16，定义 4.5])。设 (Σ，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}^1$，...，$\boldsymbol{\beta}^n$，z) 是 LOT16 定义 4.2], 意义下的容许带边界希加德多重图，其中$\boldsymbol{\alpha}$ 是与 $\mathcal{Z}$相容的一组完备带边界附着曲线。设 S 为一个带穿孔的黎曼曲面，且 $\{J_j\}_{j\in\text{Conf}(D_{n+1})}$ 为一组容许的几乎复结构。固定生成元 $\boldsymbol{x}^k\in\mathfrak{S}(\boldsymbol{\beta}^k,\ \boldsymbol{\beta}^{k+1})$，对应于 $k=1,\ \ldots,\ n-1$

以及 $\boldsymbol{x}^0 \in \mathfrak{S}(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}^1)$、$\boldsymbol{x}^n \in \mathfrak{S}(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}^n)$，并令 $q_i \in \partial D_{n+1}$ 为对应于 $i = 1,\ \ldots,\ k$ 的点。考虑如下形式的映射

$$u : (S, \partial S) \to (\Sigma \times D_{n+1}, (\boldsymbol{\alpha} \times e_0) \cup (\boldsymbol{\beta}^1 \times e_1) \cup \cdots \cup (\boldsymbol{\beta}^n \times e_n)) \tag{25}$$

使得以下条件成立：

- 投影映射 $\pi_\Sigma \circ u :\ S \to \Sigma$ 在与基点 z 相邻的区域上的次数为 0。
- S 的 punctures 被映射到 $D_{n+1} \setminus \{q_i\}$ 的 punctures $\{p_{i,i+1}\} \cup \{q_i\}$。
- 映射 u 在 p_i 的原像处渐近于 $\boldsymbol{x}^i \times \{p_{i,i+1}\}$，$i+1$。
- u 在 q_i 上方的 punctures 处渐近于 $\boldsymbol{\rho}_i \times \{q_i\}$，其中 $\mathcal{Z}$ 中存在某个 Reeb 弦集合 $\boldsymbol{\rho}_i$。
- 在每个 $q \in e_0 \setminus \{q_i\}$ 处，g 点（$\pi_\Sigma \circ u$）（$\pi_{\mathbb{D}} \circ u^{-1} q$）位于 g 条互不相同的 α-曲线上。等价地，$\boldsymbol{x} \otimes a$（$\boldsymbol{\rho}_1$）$\otimes \cdots \otimes a$（$\boldsymbol{\rho}_m$）非零，其中张量积取在 $\mathcal{A}$（$\mathcal{Z}$）中的幂等元环上。

此类映射的集合按同调类分解；记为 $\pi_2(\boldsymbol{x}^n,\ \boldsymbol{x}^{n-1},\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{x}^0;\ \boldsymbol{\rho}_1,\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{\rho}_m)$。对于固定的同调类 $B \in \pi_2(\boldsymbol{x}^n,\ \boldsymbol{x}^{n-1},\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{x}^0;\ \boldsymbol{\rho}_1,\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{\rho}_m)$，令

$$\mathcal{M}^B(\boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{x}^{n-1}, \ldots, \boldsymbol{x}^0; \boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_m; S) \tag{26}$$

表示由形如（$j,\ u$）且满足 $j \in \mathrm{Conf}(D_{n+1})$、并且 u 是 B 的 J_j-全纯代表元的配对所构成的模空间。

引理 4.4 ([LOT16, 引理 4.7])。模空间 $\mathcal{M}^B(\boldsymbol{x}^n, \boldsymbol{x}^{n-1}, \ldots, \boldsymbol{x}^0; \boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_m; S)$ 的预期维数由 $\mathrm{ind}(B, S; \boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_m) + n - 2$ 给出，其中

$$\mathrm{ind}(B, S; \boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_m) = \left(\frac{3-n}{2}\right) g - \chi(S) + 2e(B) + m, \tag{27}$$

其中，g 是 Σ 的亏格，而 $e(B)$ 是 B 的欧拉测度。

备注。如果多重图有多个边界分支，且每个边界分支都恰与一组带边界附着曲线相交，则同样的结论仍然成立。

欧拉测度 $e(B)$ 可如下刻画：若 D 是一个带边界和角的曲面，并配备度量 h，使得 ∂D 为测地线且具有直角，那么 $e(D)$ 等于 $\frac{1}{2\pi}$ 乘以 D 上 h 的曲率积分。由此定义可知，$e(D)$ 关于不交并以及沿边界线段的粘合是线性的，因此，若 B 是初等区域 D_i 的形式和 $B = \sum_i n_i D_i$，则 $e(B) = \sum_i n_i e(D_i)$。由高斯–博内定理可知，若 D 是上述曲面，具有 k 个角点，角度为 $\frac{\pi}{2}$，以及 ℓ 个角点，角度为 $\frac{3\pi}{2}$，那么

$$e(D) = \chi(D) - \frac{k}{4} + \frac{\ell}{4}. \tag{28}$$

特别地，对于一个具有凸角的 k 边形 D，我们有 $e(D) = 1 - \frac{k}{4}$。现在，假设 h 是 D 上的一个任意度量，而 ∂D 分解为 $\partial D = c_1 \cup \cdots \cup c_k$。用 $[0,1]$ 参数化每个边界线段 c_i。对于每个 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ k$，令 θ_i 表示 ∂D 的切向量在 i^{th} 角点 $c_i(0)$ 处转过的角度，即 π 减去 D 在 $c_i(0)$ 处的内角，并定义 $t_i = \frac{\theta_i}{2\pi} - \frac{1}{4}$。A

再次应用高斯–博内定理，可以将 $e(D)$ 改写为

$$e(D) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_D K dA + \sum_{i=1}^{k}\int_{c_i}\kappa_h ds\right) + \sum_{i=1}^{k} t_i, \tag{29}$$

其中， K 和 κ_h 分别是 h的曲率和测地曲率。因此，如果 h 是平坦的，且 D 具有测地边界，那么我们可以通过求和各个角点的贡献 t_i 来计算 $e(D)$。特别地，对于具有测地边界的平坦多边形，内角为 60 度、90 度和 120 度的角分别对其欧拉测度贡献 $+\frac{1}{12}$、0 和 $-\frac{1}{12}$。我们马上就会用到这一事实。

对于三角形的情形，我们有 $n = 2$ ，因此模空间$\mathcal{M}^B(\boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^0;\ \boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_m;\ S)$的维数恰好由 $\operatorname{ind}(B, S;\ \boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_m)$给出，我们可以将其更简洁地写成

$$\operatorname{ind}(B, S; \boldsymbol{\rho}_1, \ldots, \boldsymbol{\rho}_m) = \frac{g}{2} - \chi(S) + 2e(B) + m. \tag{30}$$

引理 4.5。 不存在这样的正域：其对应于AT 中的指标为零的全纯三角形，交于 ∂AT，且角点按照 $(\gamma\cap\delta, \delta\cap\varepsilon, \gamma\cap\varepsilon)$循环排列。

证明。 我们在 AT 上选取一个度量，使其除 AT $\setminus$ $(\boldsymbol{\gamma}\cup\boldsymbol{\delta}\cup\boldsymbol{\varepsilon})$ 中包含 $\boldsymbol{z}$ 的分支外处处平坦。此外，我们选取该度量，使每条 γ-、 δ 和 ε-曲线都是测地线，任意两条此类曲线的交点处交角均为 60 度或 120 度，AT 的边界分支都是测地线；并且对于每个 $\eta \in \{\gamma, \delta, \varepsilon\}$，每条 η-曲线与 ∂AT 相交时的角度都相同：γ-曲线为 120 度， δ-曲线为 90 度， ε-曲线为 30 度。为了说明我们可以选取这样的度量，注意到正方形 $\square_k$ 从平面嵌入中继承了一个度量，该度量下降为 AT 上的一个度量，且除包含 $\boldsymbol{z}$ 的区域外处处平坦。由于 $\square_k$ 的边界是测地线，因此 ∂AT 是测地线。为了说明每条 γ-、 δ-和 ε-曲线都是测地线，且具有指定的交角，回想一下，我们对 AT 作了特定的修改，使得这些曲线分别由成对的直线构成，它们与正水平方向的夹角分别为 150 度、90 度和 30 度。由于为得到 AT 中的曲线所需的扰动，可以通过对平面中对应于 g_i 和 e_i 的线段对进行平移来实现，因此 γ-、 δ-和 ε-曲线是由夹角相同的直线段对取商得到的，故而是测地线。这些线段的角度选择保证了 AT 中的每个交点都具有指定的交角之一。

假设 B 是 AT 中一个指标为零的全纯三角形的正域，其角点具有上述循环次序，且不与包含 $\boldsymbol{z}$ 的 AT $\setminus$ $(\boldsymbol{\gamma}\cup\boldsymbol{\delta}\cup\boldsymbol{\varepsilon})$ 分支相交。与 [Aur10 命题 3.5]，的证明类似，由于 ∂B 是测地线， B 的欧拉测度可以通过对其各角点的贡献求和来计算：每个具有 60 度角的角点贡献 $+\frac{1}{12}$，每个具有 90 度角的角点贡献 0，每个具有 120 度角的角点贡献 $-\frac{1}{12}$。如果 p 是 AT 中两个曲线族的内部交点，且 B 在内点与 p 相交，那么与 p 相邻的四个初等区域中， B 的局部重数都相等，因此 p 对欧拉测度的局部贡献为零。如果 B 在边界上一个非角点处与 p 相交，那么 B 会与在 p 处相邻的四个区域中的两个相交。其中一个区域以 60 度角与 p 相邻，另一个则以 120 度角与其相邻，因此局部

对欧拉测度的贡献相互抵消。如果 p 是 B 的一个真正角点，那么角点的循环次序会导致以下两种情形之一：要么 B 在 p 处局部与一个具有 60 度角的区域相交，要么 B 在 p 处局部与两个具有 60 度角的区域以及一个具有 120 度角的区域相交。在这两种情形中，这样一个角点的局部贡献均为 $+\frac{1}{12}$。

现在，如果对于某个 $\eta \in \{\gamma, \delta, \varepsilon\}$， $p \in \boldsymbol{\eta} \cap \partial \mathsf{AT}$，那么我们需要考虑两种情况。暂且假设， B 在 AT 的 η-边界上恰好遇到一条 Reeb 弦 ρ 。如果 p 包含在 ρ的内部，那么与 p 相邻的两个区域中， B 的局部重数相等，因此对欧拉测度的局部贡献为零。否则， p 是 ρ的一个端点，此时存在一个边界交点 q ，它与 $\partial\rho = \{p, q\}$ 相交；这两个角点对欧拉测度的局部贡献相互抵消，因为 B 以互补角度与 p 和 q 相交。一般来说， B 可能会遇到多条边界 Reeb 弦，此时所有 Reeb 弦端点的局部贡献之和为零，因为我们可以将其分解为单条 Reeb 弦项之和。

对 $3g$ 内部角点以及 B 的所有边界 Reeb 弦求和，我们看到 $e(B) = \frac{g}{4}$ 因此，我们有

$$\mathrm{ind}(B, S; \boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_m) = g - \chi(S) + m. \tag{31}$$

对于刚性三角形，这意味着 $\chi(S) = g + m$ 但 S 至多有 g 个连通分支，因此 $\chi(S) \leq g$。因此，若 B 是由刚性全纯三角形表示的一个类，则必有 $m = 0$，也就是说， B 不与 AT 的边界相交。□

设 $\mathcal{H}_i = (\Sigma_i, \boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\beta}_i, z)$ 是 Y_i, $i = 1, 2, 3$ 的可容许带边界Heegaard图，其中 $\eta_i = \gamma, \delta, \varepsilon$ 按照顺序 $\gamma < \delta < \varepsilon$。设 $\mathcal{H}_i^+ = (\Sigma_i, \boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\beta}_i^0, \boldsymbol{\beta}_i^1, z)$ 是对每个 $\boldsymbol{\beta}$-圆创建一个平行副本，并进行一次手指移动，从而在得到的平行副本对之间产生两个交点后所得的结果。最后，设 $\mathsf{AT}_{1,2,3} = \mathsf{AT}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ 是沿着 $\mathsf{AT}(\mathcal{Z})$ 的 $\boldsymbol{\gamma}$-、 $\boldsymbol{\delta}$-和 $\boldsymbol{\varepsilon}$-边界粘合 $\mathcal{H}_1^+, \mathcal{H}_2^+$ 和 $\mathcal{H}_3^+$ 后所得的结果。

命题 4.6。 若 $\mathcal{H}_2$ 是容许的，则微分分次双模同态

$$F_{\delta,\delta} : \mathcal{A}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}} \boxtimes \widehat{CFD}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}_2^0) \otimes \overline{\widehat{CFD}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}_2^1)} \boxtimes \mathcal{A}_{\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon}} \to \mathcal{A}_{\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{32}$$

通过计数 $\mathsf{AT} \cup_\delta \mathcal{H}_2^+$ 中的三角形来定义，其中一个角点位于 $\widehat{CF}(\boldsymbol{\beta}_2^0, \boldsymbol{\beta}_2^1)$ 的最低分次生成元处。该同态在同伦意义下由映射

$$\rho \boxtimes \boldsymbol{u}^0 \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^1 \boxtimes \sigma \mapsto \rho \overline{\boldsymbol{v}}^1(\boldsymbol{u}^1)\sigma, \tag{33}$$

给出，其中我们将 $\boldsymbol{v}^1$ 视为从 $\widehat{CFD}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}_2^1)$ 到 $\mathcal{A}$ 中幂等元环 $\mathcal{I}$ 的映射。

证明。 根据定义，我们有

$$F_{\delta,\delta}(\rho \boxtimes \boldsymbol{u}^0 \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^1 \boxtimes \sigma) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(\mathsf{AZ}_{\gamma,\varepsilon})} \sum_{\mathrm{ind}(C)=0} \#\mathcal{M}^C(\rho \boxtimes \boldsymbol{u}^0, \overline{\boldsymbol{v}}^1 \boxtimes \sigma, \tau \otimes \Theta^{\mathrm{bot}}_{\boldsymbol{\beta}_2^0 \boldsymbol{\beta}_2^1})\tau, \tag{34}$$

其中 C取遍 $\pi_2(\rho \boxtimes \boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{v}^1 \boxtimes \sigma, \tau \otimes \Theta^{\mathrm{bot}}_{\boldsymbol{\beta}_2^0 \boldsymbol{\beta}_2^1})$，而 $\mathcal{M}^C(\rho \boxtimes \boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{v}^1 \boxtimes \sigma, \tau \otimes \Theta^{\mathrm{bot}}_{\boldsymbol{\beta}_2^0 \boldsymbol{\beta}_2^1})$ 是类 C 的伪全纯代表元的模空间。根据三角形配对定理 [LOT16，命题 5.35]，，此映射同伦于通过对与一系列双边形配对的刚性三角形计数所得到的映射。由于在 AT 中不存在与边界相交的刚性全纯三角形正域

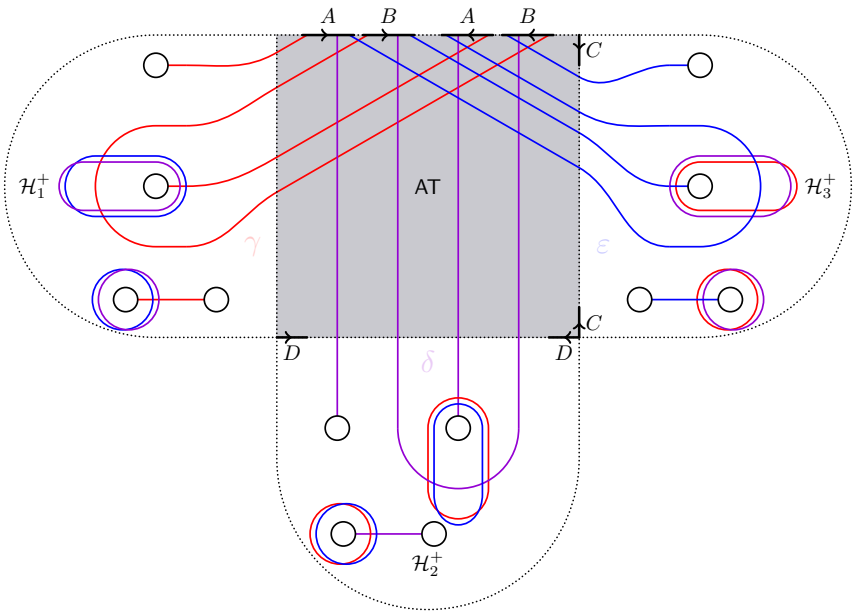


FIGURE 8. 通过将三元组粘合到 AT($\mathcal{Z}$) 得到的一个 $\mathrm{AT}^{1,2,3}$ 示例。

根据引理 4.5，且由于 $\mathcal{H}_2^+$ 是通过小幅哈密顿平移得到的，这说明 $F_{\delta,\delta}$ 同伦于映射

$$\rho \boxtimes \boldsymbol{u}^0 \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^1 \boxtimes \sigma \mapsto \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(\mathsf{AZ}_{\gamma,\varepsilon})} \sum_{\mathrm{ind}(C)=0} \#\mathcal{M}_{\times}^{C}(\rho,\sigma,\tau,\boldsymbol{u}^0,\overline{\boldsymbol{v}}^1,\Theta^{\mathrm{bot}}_{\beta_2^0\beta_2^1})\tau, \tag{35}$$

其中，模空间 $\mathcal{M}_{\times}^{C}(\rho,\ \sigma,\ \tau,\ \boldsymbol{u}^0,\ \boldsymbol{v}^1,-\Theta^{\mathrm{bot}}_{\beta_2^0\beta_2^1})$ 定义为

$$\mathcal{M}_{\times}^{C}(\rho,\sigma,\tau,\boldsymbol{u}^0,\overline{\boldsymbol{v}}^1,\Theta^{\mathrm{bot}}_{\beta_2^0\beta_2^1}) = \bigsqcup_{A+B=C} \mathcal{M}^{A}(\rho,\sigma,\tau) \times \mathcal{M}^{B}(\boldsymbol{u}^0,\overline{\boldsymbol{v}}^1,\Theta^{\mathrm{bot}}_{\beta_2^0\beta_2^1}), \tag{36}$$

其中，A 和 B 分别是 AT 和 $\mathcal{H}_2^+$中的省域。这里，$\mathcal{M}^{A}(\rho,\ \sigma,\ \tau)$ 是从 $\rho\otimes\sigma$ 到 τ、属于类 A 的刚性伪全纯三角形的模空间；而 $\mathcal{M}^{B}(\boldsymbol{u}^0,\ \boldsymbol{v}^1,\ \Theta^{\mathrm{bot}}_{\beta_2^0\beta_2^1})$ 是从 $\boldsymbol{u}^0\otimes\boldsymbol{v}^1$到 $\Theta^{\mathrm{bot}}_{\beta_2^0\beta_2^1}$、代表类 B的刚性省三角形的模空间。注意，除非 $\boldsymbol{u}^0$ 和 $\boldsymbol{v}^1$ 具有相同的左幂等元 ι^{01}，否则后一模空间为空；为了使 $\rho\boxtimes\boldsymbol{u}^0\otimes\boldsymbol{v}^1\boxtimes\sigma$非零，该左幂等元也必然是 ρ的右幂等元以及 σ的左幂等元。再结合不交并的嵌入指标的可加性，以及具有伪全纯代表元的类的指标非负这一事实，可得

$$\begin{aligned} &F_{\delta,\delta}(\rho\boxtimes\boldsymbol{u}^0\otimes\overline{\boldsymbol{v}}^1\boxtimes\sigma)\\ &\simeq \sum_{\tau\in\mathfrak{S}(\mathsf{AZ}_{\gamma,\varepsilon})} \sum_{\mathrm{ind}(A)=\mathrm{ind}(B)=0} \#\mathcal{M}^{A}(\rho,\sigma,\tau)\#\mathcal{M}^{B}(\boldsymbol{u}^0,\overline{\boldsymbol{v}}^1,\Theta^{\mathrm{bot}}_{\beta_2^0\beta_2^1})\tau. \end{aligned} \tag{37}$$

然而，这给出

$$\begin{aligned} &F_{\delta,\delta}(\rho \boxtimes \boldsymbol{u}^0 \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^1 \boxtimes \sigma) \\ &\simeq \left(\sum_{\mathrm{ind}(B)=0} \#\mathcal{M}^B(\boldsymbol{u}^0, \overline{\boldsymbol{v}}^1, \Theta^{\mathrm{bot}}_{\beta_2^0\beta_2^1}) \right) \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(\mathsf{AZ}_{\gamma,\varepsilon})} \sum_{\mathrm{ind}(A)=0} \#\mathcal{M}^A(\rho,\sigma,\tau)\tau, \end{aligned} \tag{38}$$

以及映射

$$\rho \otimes \sigma \mapsto \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(\mathsf{AZ}_{\gamma,\varepsilon})} \sum_{\mathrm{ind}(A)=0} \#\mathcal{M}^A(\rho,\sigma,\tau)\tau \tag{39}$$

恰好是乘法映射 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ by [Aur10，命题 4.8]。于是我们有

$$F_{\delta,\delta}(\rho \boxtimes \boldsymbol{u}^0 \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^1 \boxtimes \sigma) \simeq \rho \left(\sum_B \#\mathcal{M}^B(\boldsymbol{u}^0, \overline{\boldsymbol{v}}^1, \Theta^{\mathrm{bot}}_{\beta_2^0\beta_2^1}) \iota^0 \iota^1 \right) \sigma, \tag{40}$$

其中 ι^0 是 $\boldsymbol{u}^0$ 的左幂等元，而 ι^1 是 $\boldsymbol{v}^1$的右幂等元。我们可以不付出任何代价地将它们插入，因为除非 $\iota^0 = \iota^1 = \iota^{01}$，省三角形空间 $\mathcal{M}^B(\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{v}^1, \Theta^{\mathrm{bot}}_{\beta_2^0\beta_2^1})$ 为空；在这种情况下，我们有 $\underline{\rho\sigma = \rho\iota^{01}\sigma}$。我们声称映射 $L\colon \widehat{\ } CFD(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}_2^0) \otimes \widehat{\ } CFD(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}^1) \to \mathcal{A}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{u}^0 \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^1 \mapsto \sum_{\mathrm{ind}(B)=0} \#\mathcal{M}^B(\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{v}^1, \Theta^{\mathrm{bot}}_{\beta_2^0\beta_2^1}) \iota^0 \iota^1 \tag{41}$$

同伦于扰动求值映射 $ev \circ (\Psi_{0\to 1} \otimes \mathbb{I})$，其在生成元上的定义如下

$$\boldsymbol{u}^0 \otimes \overline{\boldsymbol{v}}^1 \mapsto \overline{\boldsymbol{v}}^1(\boldsymbol{u}^1). \tag{42}$$

然而， L 与下述类型-D 态射 $R\colon \widehat{\ } CFD(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}_2^0) \to \mathcal{A} \otimes \widehat{\ } CFD(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}^1)$ 对偶，该态射定义如下

$$\boldsymbol{u}^0 \mapsto \sum_{\boldsymbol{v}^1 \in \mathfrak{S}(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\beta}_2^1)} \sum_{\mathrm{ind}(B)=0} \#\mathcal{M}^B(\boldsymbol{u}^0, \Theta^{\mathrm{top}}_{\beta_2^0\beta_2^1}, \boldsymbol{v}^1) \iota^0 \iota^1 \otimes \boldsymbol{v}^1 \tag{43}$$

它相对于引理 4.3 中定义的滤过 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^1$ 是保滤过的。作为一个保滤过映射，其保滤过部分由 $\Psi_{0\to 1}$ 给出，因为 $\Psi_{0\to 1}$ 是 R 的一个直和项，而 R 是 $\widehat{F}_{\text{顶}\,\delta\beta_2^0\beta_2^1}$ 的一个直和项。这说明 R 是一个同构；并且可以使用 Gut22 引理 5.4] 中用来证明 $\widehat{F}^{\mathrm{top}}_{\delta\beta_2^0\beta_2^1}$ 与 $\Psi_{0\to 1}$ 同伦的同一颈拉伸论证，证明 R 与 $\Psi_{0\to 1}$ 同伦。这样的同伦进而在相应的对偶映射之间诱导出一个同伦。由于 $\Psi_{0\to 1}$ 的对偶是 $ev \circ (\Psi_{0\to 1} \otimes \mathbb{I})$，这就证明了所需结果。□

定理 4.7。设

$$\widehat{G}_{\mathsf{AT}} : \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1, Y_2) \otimes_{\mathbb{F}} \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_2, Y_3) \to \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1, Y_3) \tag{44}$$

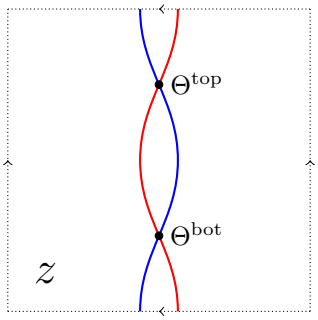


FIGURE 9. 带有顶级与底级生成元标记的 $S^2 \times S^1$ 的标准 1 阶亏格希加德图。

为复合映射

(45)

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1,Y_2) \otimes_{\mathbb{F}} \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_2,Y_3) & \xrightarrow{\quad\widehat{G}_{\mathsf{AT}}\quad} & \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1,Y_3) \\
\cong\downarrow & & \uparrow\cong \\
\widehat{CF}(\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2) \otimes_{\mathbb{F}} \widehat{CF}(\mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3) & & \widehat{CF}(\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_3) \\
\text{1-handle}\downarrow & & \uparrow\text{3-handle} \\
(\widehat{CF}(\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2) \otimes V^{\otimes g_3}) \otimes_{\mathbb{F}} (\widehat{CF}(\mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3) \otimes V^{\otimes g_1}) & \xrightarrow[\widehat{F}_{\mathsf{AT}_{1,2,3}}]{} & \widehat{CF}(\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_3) \otimes V^{\otimes g_2}
\end{array}$$

其中我们取 $CF(\mathcal{H}_i) \boxtimes \mathcal{A} \boxtimes CFD(\mathcal{H}_j)$ 的模型 $CFD(\mathcal{H}_i \cup \mathcal{H}_j)$，垂直同构如上所述， V 是由 $S^2 \times S^1$ 的标准 1 阶亏格希加德图给出的 $\widehat{CF}(S^2 \times S^1)$ 的二维模型， $\widehat{F}_{\mathsf{AT}_{1,2,3}}$是由希加德三元组 $\mathsf{AT}^{1,2,3}$，确定的映射，并且

$$\widehat{CF}(Y) \overset{\text{1-handle}}{\hookrightarrow} \widehat{CF}(Y) \otimes V^{\otimes m} \cong \widehat{CF}(Y \# (S^2 \times S^1)^{\# m})$$

and

$$\widehat{CF}(Y) \otimes V^{\otimes n} \cong \widehat{CF}(Y \# (S^2 \times S^1)^{\# n}) \overset{\text{3-handle}}{\twoheadrightarrow} \widehat{CF}(Y)$$

分别是通常的 *1*-柄映射和 *3*-柄映射，它们在生成元上的定义为

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} \otimes \Theta^{\mathrm{top}}$$

and

$$\boldsymbol{y} \otimes \theta \mapsto \begin{cases} \boldsymbol{y} & \text{if } \theta = \Theta^{\mathrm{bot}} \\ 0 & \text{else,} \end{cases} \tag{46}$$

分别，其中 Θ^{bot} 是最低分次生成元。于是 $\widehat{G}_{\mathsf{AT}}$ 与复合映射 $f \otimes g \mapsto g \circ f$ 在同伦意义下相同。

证明。 我们假设每个带边界 Heegaard 三元组 $\mathcal{H}_i^+ = (\Sigma_i, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\beta}_i^0, \boldsymbol{\beta}_i^1)$ 都是通过适当的小哈密顿微扰得到的，因此引理 4.3 适用。根据构造和三角形配对定理 [LOT16，命题 3.35]，我们有如下分解 $\widehat{G}_{\mathsf{AT}} \simeq \widehat{F}^{\mathrm{top}}_{\gamma\beta_1^1\beta_1^0} \boxtimes F_{\delta,\delta} \boxtimes \widehat{F}^{\mathrm{top}}_{\varepsilon\beta_3^0\beta_3^1}$，其中按以下方式进行识别

$\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_i, Y_j) \cong \widehat{\overline{CFD}}(Y_i) \boxtimes \mathcal{A} \boxtimes \widehat{CFD}(Y_j)$. 由于映射 $\widehat{F}^{\mathrm{top}}_{\gamma\beta_1^1\beta_1^0}$ 和 $\widehat{F}^{\mathrm{top}}_{\varepsilon\beta_3^0\beta_3^1}$ 同伦于相应的最近点映射，命题 4.6 告诉我们 $\widehat{\ }$， G_{AT} 同伦于由基本态射上如下定义的映射

$$(\overline{\boldsymbol{t}}^1 \boxtimes \rho \boxtimes \boldsymbol{u}^0) \otimes (\overline{\boldsymbol{v}}^1 \boxtimes \sigma \boxtimes \boldsymbol{w}^0) \mapsto \overline{\boldsymbol{t}}^0 \boxtimes \rho\overline{\boldsymbol{v}}^1(\boldsymbol{u}^1)\sigma \boxtimes \boldsymbol{w}^1, \tag{47}$$

这正是复合映射。 □

推论 4.8. 设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_1'$ 是带边三维流形 Y_1 的带边 *Heegaard* 图，且二者仅相差一次带边 *Heegaard* 变换，则下方正方形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \otimes \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3) & \xrightarrow{f\otimes g \mapsto g\circ f} & \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3) \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_1', \mathcal{H}_2) \otimes \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3) & \xrightarrow{f\otimes g \mapsto g\circ f} & \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_1', \mathcal{H}_3) \end{array} \tag{48}$$

在同伦意义下交换，其中竖直映射是由 *Heegaard* 变换诱导的同伦等价 $\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_i) \to \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(\mathcal{H}_1', \mathcal{H}_i)$。对于 $\mathcal{H}_2$ 和 $\mathcal{H}_3$，类似结论也成立。

证明。 对于手指移动和柄滑动，这由定理 4.7 以及三角形计数的结合律得出。对于稳定化，经过若干次手指移动和柄滑动后，可以假设稳定化是在基点的邻域内进行的；此时竖直映射是同构。□

5. 4-manifolds with corners from bordered Heegaard triples

正如可以用闭希加德三元组表示带边界的四维流形，并且可以用（带弧的）带边 Heegaard 图表示带边三维流形 [LOT18], 一样，我们可以通过将这两种概念适当地合并，来描述带边界和角的四维流形。

定义 5.1。 亏格为 g 带弧边界 *Heegaard* 三元组 且具有 B 个边界分支，是一个五元组 $\mathcal{H} = (\Sigma, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{z})$，其中：

- Σ 是一个亏格为 g 、具有 $\partial_1\Sigma$、.....、 $\partial_B\Sigma$个边界分支的紧致连通曲面
- 每个 $\boldsymbol{\eta} \in \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$ 都是一个两两不交的集合

$$\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1^c, \dots, \eta_{g-T_\eta}\} \cup \bigcup_{i=1}^{B} \{\eta_1^i, \dots, \eta^i_{2t_i^\eta}\},$$

  其中 $T_\eta = \sum_{i=1}^{B} t_i^\eta$ 由嵌入弧 η_j^i（位于 Σ 中，端点在$\partial_i\Sigma$ 上）以及圆 η_k^c（位于 Σ的内部）组成。我们还要求满足以下条件：若 $t_i^\eta \neq 0$，则对 $\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\eta}$，均有 $t_i^\theta = 0$。换言之，该条件表示任意两个曲线族都不会与同一个边界分支相交于非平凡部分。为方便起见，我们将集合 $\{\eta_1^c, \dots, \eta^c_{g-T_\eta}\}$ 记作 $\boldsymbol{\eta}^c$，将各集合 $\{\eta_1^i, \dots, \eta^i_{2t_i^\eta}\}$ 记作 $\boldsymbol{\eta}^i$。

- $\boldsymbol{z} = (z;\ s_1,\ \dots\dots,\ s_b)$由一个内点 $z \in \Sigma$（与 $\boldsymbol{\gamma} \cup \boldsymbol{\delta} \cup \boldsymbol{\varepsilon}$不相交）以及 $\Sigma \setminus (\boldsymbol{\gamma} \cup \boldsymbol{\delta} \cup \boldsymbol{\varepsilon})$ 中连接 z 和 $\partial_i\Sigma$的嵌入弧 s_i 组成。

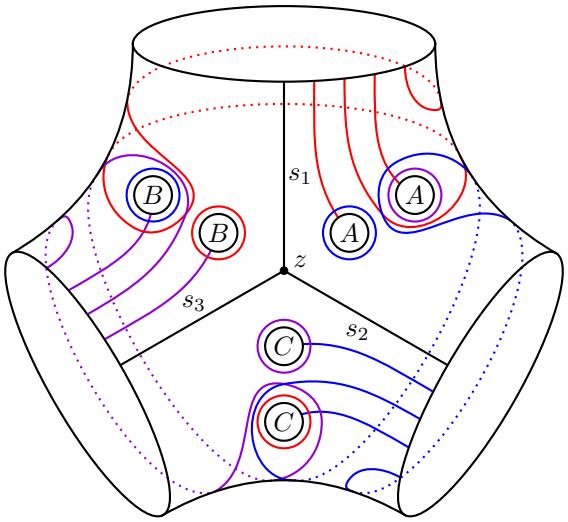


FIGURE 10. 一个具有三个边界分支的 3 阶带边界 Heegaard 三元组 $\mathcal{H}$ 。

我们还要求 $\Sigma \setminus \boldsymbol{\gamma}$、 $\Sigma \setminus \boldsymbol{\delta}$和$\overline{\Sigma \setminus \boldsymbol{\varepsilon}}$各自连通，并且集合 $\boldsymbol{\gamma}$、 $\boldsymbol{\delta}$、和 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 两两横截相交。最后，我们要求 $\partial\Sigma$ 的每个分支都与某个 $\boldsymbol{\eta}$相交。若 $\boldsymbol{\eta}^i$ 是与 $\partial_i\Sigma$有非平凡交集的弧的集合，我们将由此诱导的带基点匹配圆（如俄勒冈州 LOT 的引理 4.4 中所述）记为 $\mathcal{Z}_i(\mathcal{H})$；若不致混淆，也简记为 $\mathcal{Z}_i$ 。

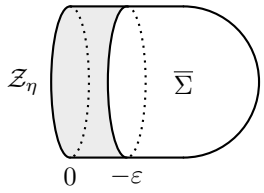
注意，对于任意两个不同的集合 $\boldsymbol{\eta}$， $\boldsymbol{\theta} \in \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$，忘掉第三个集合，用圆盘填充现为空的边界分支，并忘掉与填充后的边界分支相交的弧s_{i_1}、……、s_{i_f}，即可得到一个带弧带边界 Heegaard 图 $\mathcal{H}^{\eta,\,\theta} = (\Sigma_{\eta,\,\theta},\ \boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\theta},\ \boldsymbol{z}_{\eta,\,\theta})$ 。这样的图示通过向$\Sigma_{\eta,\,\theta} \times [0,1]$附加 2-把手，确定一个带有 $B - f$ 个边界分支的（强带边界）3-流形 $Y_{\eta\theta} = Y(\mathcal{H}^{\eta,\,\theta})$，这与 [LOT15，构造 5.3 和 5.6]类似。由带弧边界 Heegaard 三元组 $\mathcal{H}$，我们将定义一个边界连通且带角点的 4-流形 $X(\mathcal{H})$ 。

备注。 更一般地，可以允许带边界 Heegaard 三元组 $\mathcal{H}$ 中的弧连接多个边界分支，此时 $\partial X(\mathcal{H})$是一个带角点的带边界缝合 3-流形，其构造类似于 Zarev 在 [Zar11]中给出的方法。不过，我们在此不探讨这种构造，而只考虑 $B \leq 3$的情形。

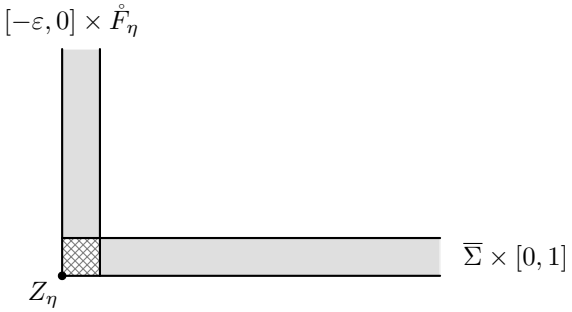
除了 $Y_{\eta\theta}$ 之外，带弧带边界 Heegaard 图 $\mathcal{H}^{\eta,\theta}$ 还指定了优选圆盘 $\Delta_j \subset \partial_j Y_{\eta\theta}$，它们是 $Y_{\eta\theta}$ 中的像，对应于上述构造最后一步中附加的 2-把手的“面”；来自 $\boldsymbol{z}_{\eta,\theta}$ 端点的点 $z_j \in \partial\Delta_j$ ；以及对每个 $j \neq i_1$、……、i_f，都有三元组同胚 $\phi_i : (F(\mathcal{Z}_j)\ D_j, z_j) \to (\partial_j Y_{\eta\theta}, \Delta_j, z_j)$，并有一个同伦类 $\nu_{\eta,\theta}$，其代表是处处不消失的法向量场，指向 z_j 处的 Δ_j 内部，法向于 $\boldsymbol{z}_{\eta,\theta}$。数据 $(Y_{\eta\theta}, \boldsymbol{\phi}_{\eta,\theta}, \nu_{\eta,\theta})$，其中 $\boldsymbol{\phi}_{\eta,\theta} = \{\phi_j\}$ （注意，这组数据包含优选圆盘和

基点），称为与 $\mathcal{H}^\eta$、$^\theta$ 相关联的强边界 3-流形。我们将此数据简记为 $Y_{\eta\theta}$。

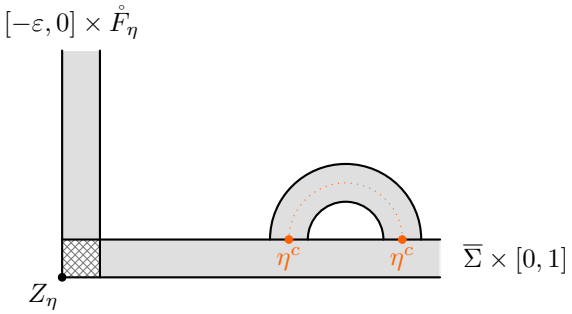
构造 5.1. 令 $\mathcal{H} = (\Sigma, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{z})$ 为一个（带弧的）带边界 Heegaard 三元组。对于 $\boldsymbol{\eta} \in \{\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}\}$ 与边界相交的情形，按如下方式构造一个带角把体 U_η。令 $U_0 = \Sigma \times [0,1]$，并令 $\mathring{F}_\eta = F(\mathcal{Z}_\eta) \smallsetminus \mathrm{int}(D^2_\eta)$，其中 D^2_η 是由 $\partial D^2_\eta = Z_\eta$ 构成 $F(\mathcal{Z}_\eta)$ 时所用的圆盘，该圆盘来自带基点匹配圆 $\mathcal{Z}_\eta = (Z_\eta, \boldsymbol{\alpha}_\eta, M_\eta)$。选择 $Z_\eta \subset \Sigma$ 的一个闭领圈邻域 $[-\varepsilon, 0] \times Z_\eta$，使得 $\{0\} \times Z_\eta$ 与下图示意所示的 Z_η 相识别。



接下来，选择 Z_η 在 F_η 中的一个闭管状邻域 $Z_\eta \times [0,1]$，并通过将子集 $([-\varepsilon, 0] \times Z_\eta) \times [0,1] \subset \Sigma \times [0,1]$ 与 $[-\varepsilon, 0] \times (Z_\eta \times [0,1]) \subset [-\varepsilon, 0] \times F_\eta$ 按照



并且，以类似方式，在每个未与 $\boldsymbol{\eta}$ 相交的边界分支处附加一个 $[-\varepsilon, 0] \times D^2$ 的副本，从而得到一个新的带角三维流形 U_1，它有两个带角边界分支，二者均具有如下形式：$\Sigma_\eta := \mathring{F}_\eta \cup_\eta \Sigma \cup_\partial D^2 \cup_\partial \overset{B-1}{\cdots} \cup_\partial D^2$，其中 $B = \#\pi_0(\partial\Sigma)$，且并集中每个曲面都以 90 度角粘合到 Σ。对于不与任何边界分支相交的 $\boldsymbol{\eta}$，则改为在每个边界分支处以这种方式附加一个 $[-\varepsilon, 0] \times D^2$ 的副本——此时，所得带角三维流形的边界分支具有如下形式：$\Sigma_\varnothing := \Sigma \cup_\partial D^2 \cup_\partial \overset{B}{\cdots} \cup_\partial D^2$。现在，如图所示，沿着 η-圆 $\eta_i^c \times \{0\} \subset \Sigma \times [0,1]$ 附加三维 2-把手



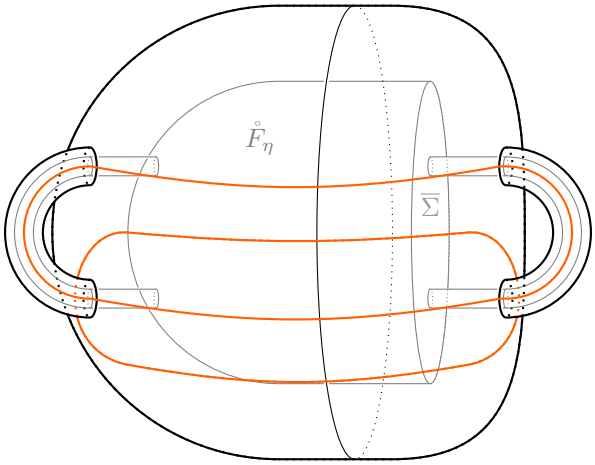


FIGURE 11. $\boldsymbol{\eta}$ 与边界相交时的一个 1阶亏格例子： U_2

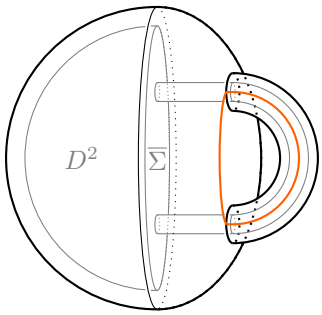
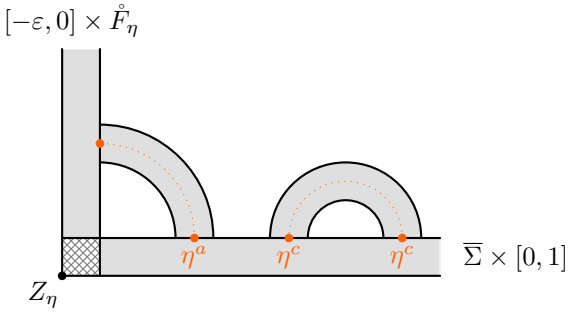
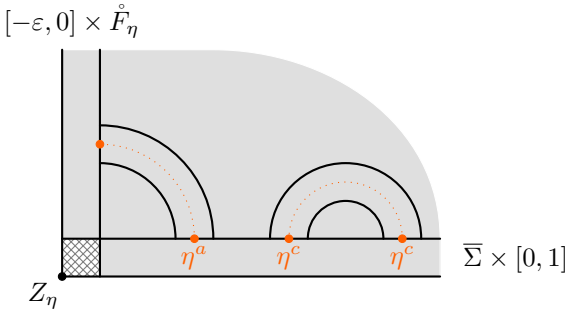


FIGURE 12. $\boldsymbol{\eta}$ 不与边界相交时的一个 $\overline{1}$ 阶亏格例子： U_2

从而得到一个新的 3-流形 $\overline{U_2}$，它有两个边界分支：一个与 $\Sigma \times \{1\}$ 相交的 Σ_η 或 $\Sigma_\varnothing$ 的副本，以及一个亏格为 $2k_\eta$ 的曲面 S_η，其中 $4k_\eta$ 是与 $\boldsymbol{\eta}$ 对应的带基点边界匹配圆上的点数（若 $\boldsymbol{\eta}$ 不与边界相交，则该值为零），且该曲面与 $\Sigma \times \{0\}$ 相交。接下来，如果 $\boldsymbol{\eta}$ 与边界相交，$^\circ$则将每条 η-弧 $\eta_i^a \times \{0\} \subset S_\eta$ 与 $\{-\varepsilon\} \times F_\eta$ 中对应把手的核相连，从而得到一组闭曲线，并如下面的图所示，沿每条曲线附加一个三维 2-把手。如果 $\boldsymbol{\eta}$ 不与边界相交，则直接进行下一步。



这相当于将边界分支 S_η 替换为一个 S^2 边界分支。然后，我们将 U_η 定义为如



——所得空间是一个带边界和角点的 3-流形，其边界分层为 $\partial_1 U_\eta = \Sigma_\eta$ 或 $\partial_1 U_\eta = \Sigma_\varnothing$，具体取决于 $\boldsymbol{\eta}$ 是否与边界相交；其角分层的形式为 $\partial_2 U_\eta = S^1 \sqcup \overset{B}{\cdots} \sqcup S^1$。然后，我们定义带角四维流形 $X(\mathcal{H})$ 如下：

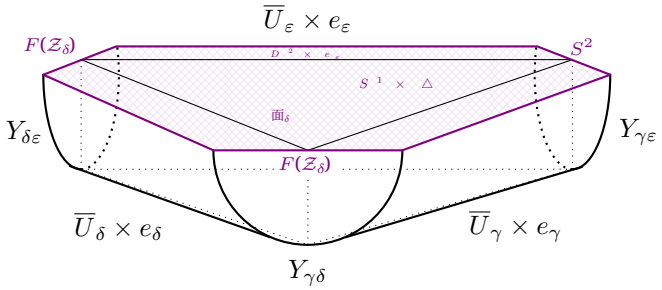
$$X(\mathcal{H}) = (\overline{\Sigma} \times \triangle) \cup_{\overline{\Sigma} \times e_\gamma} (\overline{U}_\gamma \times e_\gamma) \cup_{\overline{\Sigma} \times e_\delta} (\overline{U}_\delta \times e_\delta) \cup_{\overline{\Sigma} \times e_\varepsilon} (\overline{U}_\varepsilon \times e_\varepsilon), \tag{49}$$

其中 $\triangle$ 是一个三角形，其边按顺时针方向标记为 e_γ、e_δ和 e_ε；并在顶点 $\Sigma \times (e_\eta \cap e_\theta)$处对各 U_η之间的角点进行平滑处理。注意，边界分层 $\partial_1 X(\mathcal{H})$是连通的，由以下两部分组成。首先，它包含每个带边三维流形 $Y_{\eta\theta} = Y(\mathcal{H}_{\eta\theta})$，其中图示 $\mathcal{H}_{\eta\theta} = (\Sigma, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}, z)$是从 $\mathcal{H}$ 删除一个曲线族，并用圆盘填充相应边界分支后得到的带边 Heegaard 图。其次，如果 $\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\boldsymbol{\theta}_2$ 是与η-边界不相交的曲线族，那么它包含一份

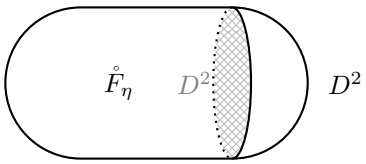
$$\mathrm{Facet}_\eta := S^1 \times \triangle \cup_{S^1 \times e_\eta} (\mathring{F}_\eta \times e_\eta) \cup_{S^1 \times e_{\theta_1}} (D^2 \times e_{\theta_1}) \cup_{S^1 \times e_{\theta_2}} (D^2 \times e_{\theta_2}), \tag{50}$$

并且，对于每个 $\boldsymbol{\eta}$ 与 $\partial\Sigma$相交的情形，都有一个这样的“面”。边界分层的这两个特殊部分相交于两份 $F(\mathcal{Z}_\eta)$和一份 S^2。所有 $\boldsymbol{\eta}$ 与 $\partial\Sigma$相交的情形所对应的这些曲面的并，构成角分层 $\partial_2 X(\mathcal{H})$。

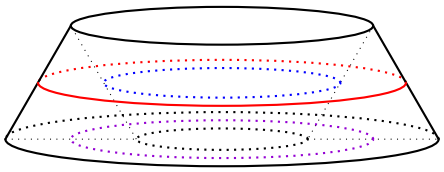
在单边界分支情形中，可以将 $X(\mathcal{H})$ 示意性地理解为下图所示的形式，该图表示 δ-边界情形。



然而，这种对 $X(\mathcal{H})$ 的表示可能会产生一定误导：从拓扑学角度看，空间 Facet$_\eta$ 是奇异曲面 $\mathring{F}_\eta \cup_\partial D^2 \cup_\partial D^2$ 的一个闭三维正则邻域



——也就是说，面η 是一个三维裤子配边 $-F(\mathcal{Z}_\eta) \sqcup F(\mathcal{Z}_\eta) \to S^2$。°为此，注意到面$\eta$ 是将 $F_\eta \times [0,1]$ 和两个$D^2 \times [0,1]$ 的副本粘合到 $S^1 \times \triangle$ 上得到的：分别将 $\partial\mathring{F}_\eta \times [0,1]$ 以及两个$\partial D^2 \times [0,1]$ 的副本与 $S^1 \times e_\gamma$、 $S^1 \times e_\delta$和 $S^1 \times e_\varepsilon$之一识别，使得 $\partial\mathring{F}_\eta \times \{\frac{1}{2}\}$以及两个 $\partial D^2 \times \{\frac{1}{2}\}$的副本与下图所示的圆 $S^1 \times \{$中点$\}$相识别，并将角点抹平。



备注。 更一般地，一个带弧的带边界 Heegaard n元组

$$\mathcal{H} = (\overline{\Sigma}_g, \boldsymbol{\eta}_0, \dots, \boldsymbol{\eta}_{n-1}, \boldsymbol{z}) \tag{51}$$

具有 B 个边界分支，并确定一个带角四维流形 $X(\mathcal{H})$，其边界分层由带边三维流形 $Y_{\eta_i\eta_{i+1}}$组成，指标按模 n计算；此外，对于每个 i，若 $\boldsymbol{\eta}_i$ 与 $\partial\Sigma_g$ 有非平凡交集，则还包含面 Facet$_{\eta_i}$。构造 $X(\mathcal{H})$ 和面 Facet$_{\eta_i}$ 的方法与 $n=3$ 情形相同，只需将三角形 $\triangle$ 替换为平面 n边形。

5.1. 粘合。设 $\mathcal{H} = (\Sigma_g, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{z})$ 是一个具有三个边界分支的带弧边界 Heegaard 三元组， $\mathcal{H}_1 = (\Sigma_{g_1}, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\delta}_1, z_1)$、 $\mathcal{H}_2 = (\Sigma_{g_2}, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, z_2)$ 和 $\mathcal{H}_3 = (\Sigma_{g_3}, \boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\gamma}_3, z_3)$ 分别是 γ-、 δ-和 ε-带边界 Heegaard 图。令 $\mathcal{H}_{1,2,3} = \mathcal{H} \cup_\gamma \mathcal{H}_1^+ \cup_\delta \mathcal{H}_2^+ \cup_\varepsilon \mathcal{H}_3^+$ 为通过加倍 $\mathcal{H}_i$ 中不与边界相交的曲线族，并按新圆在 $\mathcal{H}_i$ 中缺失的标签进行标记，再将它们粘合到 $\mathcal{H}$ 的对应边界分支而得到的普通 Heegaard 三元组，正如我们在构造 AT^{1,2,3} 时所做的那样。

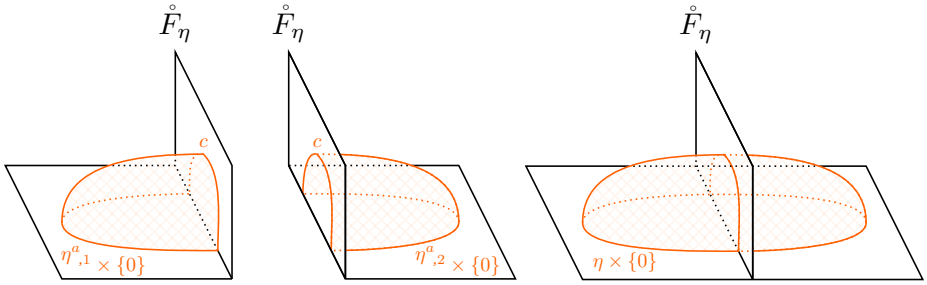


FIGURE 13. 将带边 Heegaard 三元组粘合到形如 $\eta^a \cup_\partial c$, $^\circ$ 的匹配曲线对上所附加的 2-把手产生的影响，其中 c 是 F_η 中一个 1-柄的核。

命题5.1。若 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是共享共同边界匹配的带边界 *Heegaard* 三元组，且 $\mathcal{H}_2$ 只有一个边界分支，则存在一个微分同胚 $X(\mathcal{H}_1 \cup_\partial \mathcal{H}_2) \cong X(\mathcal{H}_1) \cup_{\text{Facet}} X(\mathcal{H}_2)$，其中 面 是对应的边界面。特别地，*4*-流形 $X(\mathcal{H}_{1,2,3})$ 微分同胚于

$$X(\mathcal{H}) \cup_{\text{Facet}_\gamma} X(\mathcal{H}_1^+) \cup_{\text{Facet}_\delta} X(\mathcal{H}_2^+) \cup_{\text{Facet}_\varepsilon} X(\mathcal{H}_3^+). \tag{52}$$

证明。假设 $\mathcal{H}_2$ 是一个 η-带边 Heegaard 图。将 $\mathcal{H}_2$ 粘合到 $\mathcal{H}_1$ 的 η-边界上，产生的影响如下。首先，底层曲面 Σ_g 被替换为 $\Sigma_g \cup_\eta \Sigma_{g_2}$，其效果是以显而易见的方式将 $\Sigma_g \times \triangle$ 粘合到 $\Sigma_{g_2} \times \triangle$。其次，将沿共同端点与边界相交的 η-弧粘合起来，相当于沿着与这些弧所确定的 F_η 中 1-柄的核相对应的 $^\circ$ 粘合三维 2-把手。这相当于将相应的 η-把手体沿其 F_η-边界粘合起来。最后，对于 $\theta \neq \eta$，相应的 θ-把手体沿其圆盘边界粘合起来。显然，这些粘合后的把手体恰好是通过上述构造、使用粘合后的图示所得到的把手体，因此结论得证。□

推论 *5.2*。*4*-流形 $X(AT^{1,2,3})$ 与裤带配边 $W^{13}{}_{,2}{}^{g_2} \circ W \circ (W^{12}{}_{,}{}^{g_3} \sqcup W^{23}{}_{,-2}{}^{g_1})$ 和余 *bordism* W：$Y_{12} \sqcup Y_{23} \to Y_{13}$ 的复合，以及通过对 Y_{ij} 中带 0-系数的g_k分量无结进行手术而得到的余 *bordism* $W^{ij}{}_{,2}{}^{g_k}$：$Y_{ij} \to Y_{ij}\#(S^2 \times S^1)^{g_k}$ 及其反向 $W^{ij}{}_{,-2}{}^{g_k}$：$Y_{ij}\#(S^2 \times S^1)^{g_k} \to Y_{ij}$，微分同胚。因此，如果 $W^{ij}{}_{,1}{}^{g}$：$Y_{ij} \to Y_{ij}\#(S^2 \times S^1)^{\#g}$ 和 $W^{ij}{}_{,3}{}^{g}$：$Y_{ij}\#(S^2 \times S^1)^{\#g} \to Y_{ij}$ 是通常的 *1*-柄和 *3*-把手余 *bordism*，那么 $W^{13}{}_{,3}{}^{g_2} \circ X(AT^{1,2,3}) \circ (W^{12}{}_{,1}{}^{g_3} \sqcup W^{23}{}_{,1}{}^{g_1})$ 与 W 微分同胚。

证明。设 $\mathcal{H} = (\Sigma_g, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$ 是一个 α 带边界 Heegaard 三元组，并令$Y = Y(\mathcal{H})$ 为相应的带边三维流形。我们断言，由通过加倍 $\boldsymbol{\beta}$ 得到的三元组 $\mathcal{H}^+ = (\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^0, \boldsymbol{\beta}^1, z)$ 所确定的带角四维流形 $X = X(\mathcal{H}^+)$，与配对的协边界微分同胚

$$(-Y \sqcup Y, -\partial Y \sqcup \partial Y) \to ((S^2 \times S^1)^{\#g} \setminus B^3, S^2) \tag{53}$$

由带角把体$U_\beta \times \{0\}$ 在 $Y \times [-1,1]$中的正则邻域之补集给出。为此，回顾 [OS06，命题 4.3]：

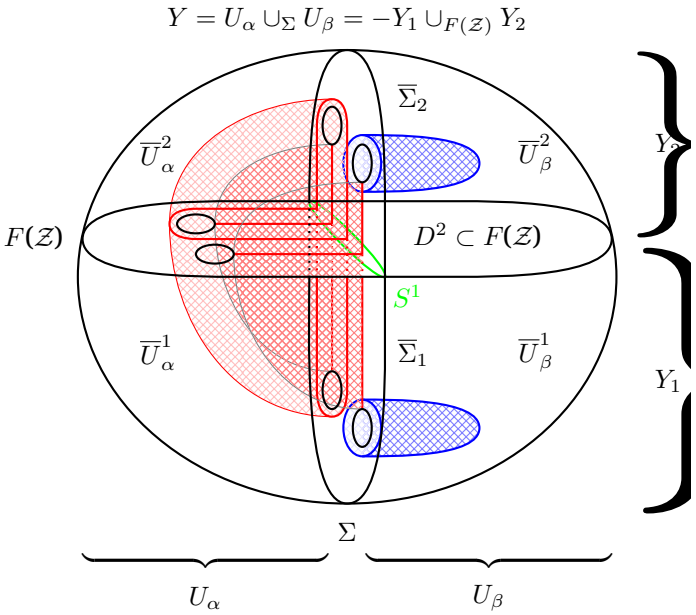


FIGURE 14. 沿 Heegaard 曲面 Σ 将闭3-流形分成两个把手体，并沿与原曲面横截的曲面 $F(\mathcal{Z})$ 分成两个带边三维流形。在每个半边中，两个小黑圆被视为同一个，因此这样的一对代表一个把手。

若 $\mathcal{H}' = (\Sigma_0, \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}', z)$是某个闭3-流形的 Heegaard 图，且$(\Sigma_0, \boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\gamma}, z)$满足：$\boldsymbol{\gamma}$由$\boldsymbol{\beta}'$经过一次小幅哈密顿平移得到，那么由此图示确定的4-流形与 $Y' \times [-1,1]$ 微分同胚，其中删去了把手体 $U_{\beta'} \times \{0\}$ 的一个正则邻域；也就是说，它是通过在 Y'中的欧几里得球内的一个0-框架平凡链环上附加2-把手所得到的协边。特别地，若对于另一个 α-带边 Heegaard 图 $\mathcal{H}_0$，有 $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_0 \cup_\partial \mathcal{H}$，则此结论也成立。由此即可从前一个命题推出该断言。

第一条结论现在可由命题5.1推出，结合以下观察：三元组 AT 所对应的曲面自然地等同于去掉三个圆盘后的 $F(\mathcal{Z})$；此外，从 AT 中删去任意一对曲线，都会确定一个带边 Heegaard 图，用于表示 $F(\mathcal{Z}) \times I$，而此时可用一个圆盘填充空出的边界分支。第二条结论则源于以下事实：$W^{13,\,3}{}_{g_2} \circ W^{13,\,2}{}^{g_2}$ 中的 2-把手和 3-把手，与 $(W^{12,}{}_{-2}{}^{g_3} \sqcup W^{23,\,-2}{}^{g_1}) \circ (W^{12,}{}_{1}{}^{g_3} \sqcup W^{23,\,1}{}^{g_1})$ 中的 1-把手和 2-把手相互抵消。□

另一种理解这些结果的方式如下。给定一个闭 3-流形 Y，我们有两种不同的方式将 Y 分解为带边界的 3-流形：我们可以将 Y 分解为 $Y = U_\alpha \cup_\Sigma U_\beta$，其中 U_α 和 U_β是沿 Heegaard 曲面 Σ粘合的把手体；也可以将其分解为$Y = -Y_1 \cup_{F(\mathcal{Z})} Y_2$，其中 Y_1 和 Y_2 是带边3-流形，且它们的边界都由同一个曲面 $F(\mathcal{Z})$ 参数化。这里，我们选择了第二种分解方式，即通过切开一个闭 Heegaard 图 $(\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, z)$ 得到的分解

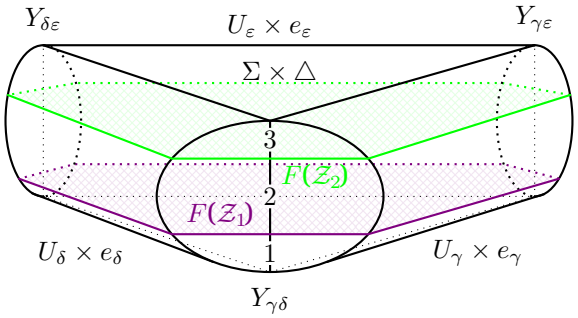


FIGURE 15. 沿两个面切割由闭希加德三元组 $\mathcal{H} = (\Sigma,\ \boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{z})$ 得到的带边界四维流形。在这个示意例中，希加德曲面 Σ分解为$\Sigma = \Sigma_1 \uplus \Sigma_2 \uplus \Sigma_3$，因此每个3维流形 $Y_{\eta\theta}$ 都分解为带边三维流形，如 $Y_{\eta\theta} = Y^1_{\eta\theta} \cup_{F_1} Y^2_{\eta\theta} \cup_{F_2} Y^3_{\eta\theta}$；而每个把手体 U_η 都分解为带角把手体，如 $U_\eta = U^1_\eta \cup_{F_1\cap U_\eta} U^2_\eta \cup_{F_2\cap U_\eta} U^3_\eta$。

沿着与其中一对曲线相交的某个圆周分解 $Y = U_\alpha \cup_\Sigma U_\beta$，从而得到两个具有相同带基点匹配圆 $\mathcal{Z}$ 的带边 Heegaard 图。在这种情况下，位于 Y 内部的曲面 $F(\mathcal{Z})$ 的副本与Σ 横截相交于一个分隔性的 S^1 副本。因此，每个 Y_i 都分解为两个带角把手体 $Y_i = U^i_\alpha \cup_{\Sigma\cap Y_i} U^i_\beta$ 的并，而每个把手体U_η也类似地分解为 $U_\eta = U^1_\eta \cup_{F(\mathcal{Z})\cap U_\eta} U^2_\eta$。这使我们能够将 Y 分解为四个“象限”，它们与两种 Y 分解中的粘合（的限制）相兼容（参见图14）。这些象限正是构造 5.1 中的带角把手体。如果我们改为从一个闭希加德三元组 $\mathcal{H} = (\Sigma,\ \boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{z})$ 出发，沿着与其中恰好一组曲线相交的圆周分割 Σ，得到分解 $\Sigma = \Sigma_1 \cup_\partial \Sigma_2$，再将与 Σ_i 相交的带角把手体粘合到 $\Sigma_i \times \triangle$ 上，得到 $X(\mathcal{H}_i)$，那么 $\partial_1 X(\mathcal{H}_i)$中带边三维流形 $Y_{\eta\theta}$ 的补集恰好是一个面的内部，因此沿各自的边界面粘合 $X(\mathcal{H}_1)$ 和 $X(\mathcal{H}_2)$，便得到原来的 4-流形 $X(\mathcal{H})$。

6. THE MAIN THEOREM

在 [Zem21a、Zem21b], 中，Zemke 将 Heegaard Floer 同调的 minus 和 hat 版本扩展为幺半函子，这些函子从由（多）带基点3维流形及其之间配备有连接各基点的嵌入带状图的协边构成的幺半范畴出发。给定一个闭希加德三元组 $(\Sigma,\ \boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{z})$，令$X_{\gamma\delta\varepsilon}$ 为边界为 $\partial X_{\gamma\delta\varepsilon} = -Y_{\gamma\delta} \sqcup -Y_{\delta\varepsilon} \sqcup Y_{\gamma\varepsilon}$ 的光滑4维流形，其定义如下：

$$X_{\gamma\delta\varepsilon} = (\Sigma \times \triangle) \cup_{\Sigma\times e_\gamma} (U_\gamma \times e_\gamma) \cup_{\Sigma\times e_\delta} (U_\delta \times e_\delta) \cup_{\Sigma\times e_\varepsilon} (U_\varepsilon \times e_\varepsilon), \tag{54}$$

即裤带配边，如 [OS04 第 8] 节所述。在 [Zem21a 第 9], 节中，Zemke 为 $X_{\gamma\delta\varepsilon}$ 赋予一个嵌入三价图 $\Gamma_{\gamma\delta\varepsilon}$，方法如下：取一个内点 $v_0 \in \triangle$，并通过附加一条向外径向延伸的直线段来定义 $\Gamma_0 \subset \triangle$

，使其分别连接 v_0 与三角形的三个顶点。然后定义$\Gamma_{\gamma\delta\varepsilon}$ ：$=\boldsymbol{z}\times\Gamma_0$，并通过为 $X_{\gamma\delta\varepsilon}$的端点赋予循环次序 $(-Y_{\gamma\delta},\ -Y_{\delta\varepsilon},\ Y_{\gamma\varepsilon})$，为该图赋予带状结构。

定理 6.1 ([Zem21a, 定理 9.1])。 假设$(\Sigma,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{z})$ 是一个闭有基点 *Heegaard* 三元组。令

$$(X_{\gamma\delta\varepsilon},\Gamma_{\gamma\delta\varepsilon}):(Y_{\gamma\delta}\sqcup Y_{\delta\varepsilon},\boldsymbol{z}\sqcup\boldsymbol{z})\to(Y_{\gamma\varepsilon},\boldsymbol{z}) \tag{55}$$

为上文描述的带状图协边。那么，若 $\mathfrak{s}\in Spin^c(X_{\gamma\delta\varepsilon})$，图协边映射

$$F^B_{X_{\gamma\delta\varepsilon},\Gamma_{\gamma\delta\varepsilon},\mathfrak{s}}:CF^-(\Sigma,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta};\mathfrak{s}|_{Y_{\gamma\delta}})\otimes_{\mathbb{F}[U]}CF^-(\Sigma,\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\varepsilon};\mathfrak{s}|_{Y_{\delta\varepsilon}})\to CF^-(\Sigma,\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varepsilon};\mathfrak{s}|_{Y_{\gamma\varepsilon}})$$

与全纯三角形映射 $F^-_{\alpha,\beta,\gamma,\mathfrak{s}}$ 链同伦。

推论 6.2。 *[Zem21a,* 定理 *9.1]* 的帽型 *Heegaard Floer* 类比成立。

定理 *6.3*（[*Zem21b,* 定理 *1.*2]）。若 $(W,\Gamma):(Y_0,\boldsymbol{p}_0)\to(Y_1,\boldsymbol{p}_1)$ 是一个图协边，则图协边映射 $F_{W,\Gamma}:CF(Y_0,\boldsymbol{p}_0)\to CF(Y_1,\boldsymbol{p}_1)$ 关于协边的复合具有函子性；并且若 Γ 存在一条从 $\boldsymbol{p}_0$ 到 $\boldsymbol{p}_1$ 的路径，则 $F_{W,\Gamma}$ 与 *Ozsv´ath–Szab´o* 在 [*OS*06] 中定义的协边映射同伦。

注意，带有其嵌入的带状图的裤带配边可分解为 $(X_{\gamma\delta\varepsilon},\Gamma_{\gamma\delta\varepsilon})=(W_1\cup_{Y_{12}}\#_{Y_{23}}W_2,\Gamma_1\cup\Gamma_2)$，其中 $(W_1,\Gamma_1):Y_{12}\sqcup Y_{23}\to Y_{12}\#Y_{23}$是带有嵌入三价图 Γ_1的连通和协边，而 $(W_2,\Gamma_2):Y_{12}\#Y_{23}\to Y_{13}$ 是配备了连接基点的嵌入路径 Γ_2 的 2-把手消去协边。根据 [Zem21a，命题 8.1]，，图协边$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$映射 F_{W_1,Γ_1}: CF (Y_{12}) $\otimes$CF (Y_{23}) $\to$CF $(Y_{12}\#Y_{23})$ 与 Ozsv´ath–Szab´o 的$\widehat{\ }$连通和同构同伦。根据前一个定理，映射F_{W_2,Γ_2} 同伦于$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$映射 F_{W_2}: CF $(Y_{12}\#Y_{23})$ $\to$CF (Y_{13})，该映射由 Ozsv´ath–Szab´o 在 [OS06] 中定义。掌握了这些事实后，我们现在可以证明定理 1.1。

定理 6.4（定理 1.1）。 设 Y_1、Y_2 和 Y_3 是带边三维流形，它们的边界都由同一曲面 F 参数化；设 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(-F)$ 是与 $-F$ 相关联的代数。取 $Y_{ij}=-Y_i\cup_\partial Y_j$，并考虑裤带配边 W： $Y_{12}\sqcup Y_{23}\to Y_{13}$。则复合映射

$$\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1,Y_2)\otimes\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_2,Y_3)\to\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1,Y_3) \tag{56}$$

由 $f\otimes g\mapsto g\circ f$ 给出的映射构成如下的同伦交换方块

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1,Y_2)\otimes\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_2,Y_3) & \xrightarrow{f\otimes g\mapsto g\circ f} & \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_1,Y_3)\\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq\\ \widehat{CF}(Y_{12})\otimes\widehat{CF}(Y_{23}) & \xrightarrow{\widehat{F}_W} & \widehat{CF}(Y_{13})\end{array} \tag{57}$$

$\widehat{\ }$其中 F_W 是由 W 诱导的映射，而竖直映射来自 [LOT11] 的配对定理。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$证明。 由推论 6.2 和定理 6.3，映射 G_{AT} 和 F_W 同伦。因此，结论由定理 4.7 得出。□

这立即推出了 Lipshitz–Ozsv´ath–Thurston 在 [LOT11 第 1.5] 节中的以下断言。

推论 6.5. *Yoneda* 复合映射

$$\mathrm{Ext}(Y_1,Y_2)\otimes_{\mathbb{F}}\mathrm{Ext}(Y_2,Y_3)\to\mathrm{Ext}(Y_1,Y_3), \tag{58}$$

其中 $\mathrm{Ext}(Y_i,Y_j):=\mathrm{Ext}(\mathit{CFD}(Y_i),\mathit{CFD}(Y_j))$，与该映射一致

$$\widehat{HF}(-Y_1\cup_\partial Y_2)\otimes_{\mathbb{F}}\widehat{HF}(-Y_2\cup_\partial Y_3)\to\widehat{HF}(-Y_1\cup_\partial Y_3) \tag{59}$$

由 W 诱导。

7. Application: an algorithm for computing F_X

作为定理 1.1 的推论，我们描述一种算法，用于计算与任意协边 $X\colon Y_0\to Y_1$ 相关联的态射 $\mathit{HF}(Y_0)\to\mathit{HF}(Y_1)$，其中协边连接闭3-流形。与前几节一样，我们将通过省略 CFD 和 CFDA 符号来简化态射空间的记法：若 Y_0 和 Y_1 是边界由 $F(\mathcal{Z})$ 参数化的3-流形，则

$$\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_0,Y_1):=\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}(-\mathcal{Z})}(\widehat{\mathit{CFD}}(Y_0),\widehat{\mathit{CFD}}(Y_1)) \tag{60}$$

并且若 $\varphi\colon F(\mathcal{Z})\to F(\mathcal{Z})$ 是一个微分同胚，则我们定义

$$\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}}(Y_0,\varphi\boxtimes Y_1):=\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}(-\mathcal{Z})}(\widehat{\mathit{CFD}}(Y_0),\widehat{\mathit{CFDA}}(\varphi)\boxtimes\widehat{\mathit{CFD}}(Y_1)), \tag{61}$$

其中，CFDA(φ) 是 φ 的映射柱所对应的 DA 型双模。在 [OS06], Ozsváth–Szabó 中，映射 F_X 定义如下：首先将 X 分解为 $X=X_3\circ X_2\circ X_1$，其中 $X_1\colon Y_0\to Y_0'$ 是完全由 1-柄构成的协边，$X_2\colon Y_0'\to Y_1'$ 是由 2-柄构成的协边，而 $X_3\colon Y_1'\to Y_1$ 是由 3-把手构成的协边。随后，他们定义了映射 F_{X_i}、$i=1$、2、3，作用于分别关联到各类把手的 3-流形的 Floer 复形之间，并取 $F_X=F_{X_3}\circ F_{X_2}\circ F_{X_1}$，证明所得的同调映射定义良好，且在 Kirby 变换下不变，因此是一个四维流形不变量（另见 [JTZ21] 和 [Zem19]）。映射 F_{X_1} 和 F_{X_3} 正是定理 4.7 中描述的 1-柄映射和 3-柄映射。现在我们来描述 2-柄映射 F_{X_2}。为简化记号，假设 X 完全由 2-柄构成，因此 $F_X=F_{X_2}$。那么，X 可由某个带框链环 $\mathbb{L}\subset Y_0$ 上的手术得到。我们回顾 [OS06] 中的以下定义。

定义 7.1。$\mathbb{L}$ 的花束 是一个嵌入的一维复形 $B(\mathbb{L})\subset Y_0$，由 $\mathbb{L}=K_1\cup\cdots\cup K_k$ 与一组弧的并组成，这些弧将链环分支 K_i 连接到 Y_0 中的一个固定基点。

固定 $\mathbb{L}$ 的一个花束 $B(\mathbb{L})$。令 $B(\mathbb{L})$ 的正则邻域为 H_0，$F=\partial H_0$，并令 H_0 的内部 $H_1=Y_0\setminus$ 为互补把手体。现在定义 $\mathbb{L}\subset H_0$ 上的手术结果为 $H_0(\mathbb{L})$。于是 $H_0(\mathbb{L})\cup_\partial H_1=Y_1$ 和 $H_0(\mathbb{L})\cup_\partial H_0\cong\#^{g(F)-k}S^2\times S^1$。

定义 7.2。从属于花束 $B(\mathbb{L})$ 的 Heegaard 三元组是一个 Heegaard 三元组 $(\Sigma,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$，满足

(1) $(\Sigma,\ \alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_g,\ \beta_{k+1},\ \ldots\ldots,\ \beta_g)$ 是花束补空间 H_1 的图示；(2) $\gamma_{k+1},\ \ldots\ldots,\ \gamma_g$ 是 $\beta_{k+1},\ \ldots\ldots,\ \beta_g$ 的小哈密顿平移；(3) 对曲线 $\beta_{k+1},\ \ldots\ldots,\ \beta_g$ 做手术后，诱导出的曲线 β_i 和 γ_i（其中 $i=1,\ \ldots\ldots,\ k$）位于穿孔环面 $F_i\subset\partial H_1$ 中，而这些环面由分支 K_i 的正则邻域的边界给出，

(4) 曲线 β_i、 $i=1,\ \ldots\ldots,\ k$ 表示 K_i 的子午线，并且

$$\#(\beta_i \cap \gamma_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

在后一种情况下具有横截交点，

(5) 曲线 $\gamma_i, i=1,\ \ldots\ldots,\ k$ 表示 K_i 下各分支的框架，这是在 $H_1(\partial \mathrm{nbd}(K_1 \cup \cdots \cup K_k))$ 与 $H_1(\partial H_1)$ 的自然同一之下得到的。

由三元组 $\mathcal{H} = (\Sigma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 指定的 4-流形 W，其边界分支为 $-Y_0$、$\#^{g(F)-k} S^2 \times S^1$ 和 Y_1（参见 [OS06，命题 4.3]）——事实上，W 是裤带配边 $Y_0 \sqcup \#^{g(F)-k} S^2 \times S^1 \to Y_1$ ——而映射 $\widehat{F}_X\colon \widehat{\mathrm{CF}}(Y_0) \to \widehat{\mathrm{CF}}(Y_1)$ 的定义是取 $\widehat{F}_X(\boldsymbol{x}) = \widehat{F}_W(\boldsymbol{x} \otimes \Theta^{\mathrm{top}})$，其中右侧是由 $\mathcal{H}$ 确定的全纯三角形计数映射，也就是把手体 H_0、 $H_0(\mathbb{L})$ 和 H_1 的裤带映射。我们可以在 Heegaard Floer 同调的态射空间表述中实现这一构造：设 $\theta^{\mathrm{top}} \in \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}(-F)}(-H_0(\mathbb{L}),\ H_0)$ 是 $\widehat{\mathrm{HF}}(\#^{g(F)-k} S^2 \times S^1)$ 中最高分次类的一个代表元。那么，定理 1.1 告诉我们，存在一个同伦交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}(-F)}(-H_0, H_1) & \xrightarrow{-\circ\theta^{\mathrm{top}}} & \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}(-F)}(-H_0(\mathbb{L}), H_1) \\ \simeq\uparrow & & \downarrow\simeq \\ \widehat{CF}(Y_0) & \xrightarrow{\widehat{F}_X} & \widehat{CF}(Y_1) \end{array} \tag{62}$$

其中竖直箭头来自 [LOT11] 的配对定理。Lipshitz–Ozsv´ath– Thurston 在 [LOT14] 中给出了计算把手体 H 的 $CFD(H)$ 的算法（另见 [Zha16]）。

现在假设 $X_1\colon Y_0 \to Y_0'$ 由一次 1-把手添加构成，并且令 $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(-F)$。那么映射 $F_{X_1}\colon CF(Y_0) \to CF(Y_0')$ 可通过将 Y_0' 分解为 $Y_0 \# (S^2 \times S^1)$ 来计算，在这种情况下 $\widehat{F}_{X_1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \otimes \Theta^{\mathrm{top}}$。现在我们在态射空间情形下重新诠释这一构造。若取一个 Heegaard 分解 $Y_0 = H_0 \cup_\varphi H_0$，其中 H_0 是亏格为 g 的零框架把手体，并且$\varphi\colon \partial H_0 \to \partial H_0$ 是一个微分同胚，那么我们便自动得到一个 Heegaard 分解$Y_0' = H_0' \cup_{\varphi'} H_0'$，其中 H_0' 是亏格为 $g+1$ 的把手体 $H_0' = H_0 \natural (D^2 \times S^1)$，并且$\varphi' = \varphi \# \mathrm{id}_{\mathbb{T}^2}$。这便给出

$$\widehat{CF}(Y_0') = \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H_0', \varphi' \boxtimes H_0'), \tag{63}$$

根据配对定理，其中 $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(F(-\mathcal{Z}) \# \mathbb{T}^2)$。如果 $\mathcal{H}_0$ 是 H_0 的带边 Heegaard 图，而 $\mathcal{H}_\varphi$ 是 φ 的（带弧）带边 Heegaard 图，我们可以分别通过将 $D^2 \times S^1$（带 0-框架）和 $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ 的标准图的副本附加到 $\mathcal{H}_0$ 和 $\mathcal{H}_\varphi$ 上，得到带边 Heegaard 图 $\mathcal{H}_0'$ 和 $\mathcal{H}_{\varphi'}$。由此可得同构

$$\widehat{CFD}(H_0') \cong \widehat{CFD}(H_0) \otimes_{\mathbb{F}} \widehat{CFD}(D^2 \times S^1) \tag{64}$$

and

$$\begin{aligned} &\widehat{CFDA}(\varphi') \boxtimes \widehat{CFD}(H_0') \\ &\cong (\widehat{CFDA}(\varphi) \boxtimes \widehat{CFD}(H_0)) \otimes_{\mathbb{F}} (\widehat{CFDA}(\mathbb{T}^2 \times [0,1]) \boxtimes \widehat{CFD}(D^2 \times S^1)). \end{aligned} \tag{65}$$

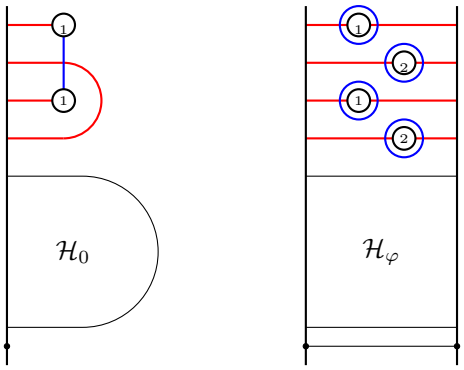
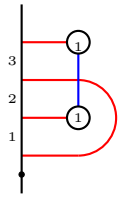


FIGURE 16. 附加标准图后得到的带边界 Heegaard 图 $\mathcal{H}_0'$（左）和 $\mathcal{H}_{\varphi'}$（右），分别对应 $\mathcal{H}_0$ 和 $\mathcal{H}_{\varphi\circ}$

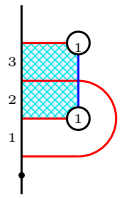
$\mathcal{A}_2$-模的。由于 $\mathbb{T}^2\times[0,1]\cup D^2\times S^1\cong D^2\times S^1$，根据 [HL19，引理 4.2],，存在唯一的齐次同伦等价

$$h_1:\widehat{CFD}(D^2\times S^1)\to\widehat{CFDA}(\mathbb{T}^2\times[0,1])\boxtimes\widehat{CFD}(D^2\times S^1). \tag{66}$$

现在，$D^2\times S^1$ 带有 0-框架的标准图为



它有一个生成元 $\boldsymbol{s}$，并支持一个圆盘



其渐近条件为 $\rho_{23}\in\mathcal{A}(\mathbb{T}^2)$，因此

$$\widehat{CFD}(D^2\times S^1)=\ \boldsymbol{s}\ \rho_{23} \tag{67}$$

因此，$\widehat{CF}(S^2\times S^1)\simeq$自同态环$_{\mathcal{A}(\mathbb{T}^2)}(\widehat{CFD}(D^2\times S^1))=\mathbb{F}\langle\theta_1,\ \theta_2\rangle$，其中 $\theta_1(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{s}$且 $\theta_2(\boldsymbol{s})=\rho_{23}\boldsymbol{s}$。容易验证 $\partial\theta_1=2\theta_2=0$ 且 $\partial\theta_2=0$，因此$\theta_1=\theta^{\mathrm{top}}$ 且 $\theta_2=\theta^{\mathrm{bot}}$。在上述同一化下，1-柄映射

$$\widehat{F}_{X_1}:\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_1}(-H_0,\varphi\boxtimes H_0)\to\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H_0',\varphi'\boxtimes H_0') \tag{68}$$

由 $f\mapsto f^{\mathrm{top}}$ 给出，其中 $f^{\mathrm{top}}=$（恒等态射 $\otimes h_1$）$\circ$（$f\otimes\theta^{\mathrm{top}}$）$=f\otimes h_{1\circ}$ 对于 ℓ 个 1-柄的情形，情况相同，但必须改为附加 k 个副本

$D^2 \times S^1$ 的标准图示，在这种情况下，$\theta^{\mathrm{top}} = \theta_1^{\otimes \ell}$ 且 $\widehat{F}_{X_1}$ 的余域是一个由 $\mathcal{A}(F(-\mathcal{Z}) \# (\mathbb{T}^2)^{\#\ell})$-模组成的态射空间。

对于 2-把手映射 $F_{X_2}\colon CF(Y_0') \to CF(Y_1')$，我们需要一个可能不同的 Heegaard 分解 $Y_0' = H \cup_\psi H$（我们再次假设 H 是 0-框架的）。然而，根据 Reidemeister–Singer 定理，经过足够多次稳定化后，我们可以使 $H_0' \cup_{\varphi'} H_0'$ 和 $H \cup_\psi H$ 成为同位的 Heegaard 分解，因此 $H = H_0$ 和 $\psi = \xi^{-1} \circ \varphi' \circ \eta$，其中 $\eta, \xi\colon \partial H \to \partial H_0'$ 是微分同胚，且可延拓到 $H = H_0$ 上（参见 [Pit08，定理 2.2]）。然后我们可以计算 $CF(Y_0')$，如下所示

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H, \psi \boxtimes H)\\
&\cong \overline{\widehat{CFD}(-H)} \boxtimes \mathcal{A}_2 \boxtimes \widehat{CFDA}(\psi) \boxtimes \widehat{CFD}(H)\\
&\simeq \overline{\widehat{CFD}(-H)} \boxtimes \mathcal{A}_2 \boxtimes \widehat{CFDA}(\xi^{-1}) \boxtimes \widehat{CFDA}(\varphi') \boxtimes \widehat{CFDA}(\eta) \boxtimes \widehat{CFD}(H)\\
&\simeq \overline{\widehat{CFD}(-H)} \boxtimes \overline{\widehat{CFDA}(-\xi^{-1})} \boxtimes \mathcal{A}_2 \boxtimes \widehat{CFDA}(\varphi') \boxtimes \widehat{CFDA}(\eta) \boxtimes \widehat{CFD}(H)\\
&\cong \overline{\widehat{CFDA}(-\xi^{-1}) \boxtimes \widehat{CFD}(-H)} \boxtimes \mathcal{A}_2 \boxtimes \widehat{CFDA}(\varphi') \boxtimes \widehat{CFDA}(\eta) \boxtimes \widehat{CFD}(H)\\
&\simeq \overline{\widehat{CFD}(-H_0')} \boxtimes \mathcal{A}_2 \boxtimes \widehat{CFDA}(\varphi') \boxtimes \widehat{CFD}(H_0')\\
&\cong \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H_0', \varphi' \boxtimes H_0').
\end{aligned}
\tag{69}
$$

这里，第三行中的同伦等价由 [HL19, 引理 4.5]，给出，它告诉我们存在唯一的齐次同伦等价

$$
\widehat{CFDA}(\psi) \simeq \widehat{CFDA}(\xi^{-1}) \boxtimes \widehat{CFDA}(\varphi') \boxtimes \widehat{CFDA}(\eta). \tag{70}
$$

根据 [HL19, 引理 4.2]，，存在唯一的齐次同伦等价 $CFD(H) \to CFD(H_0')$ 和 $CFD(-H) \to CFD(-H_0')$，因此我们得到了一个可通过算法计算的同伦等价

$$
h_2 : \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H_0', \varphi' \boxtimes H_0') \to \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H, \psi \boxtimes H) \tag{71}
$$

的态射复形。此外，这个映射与和一系列 Heegaard 变换相关联的同伦等价在同伦意义下相同（参见 [HL19, 定理 5.1] 的证明）。该映射

$$
\widehat{F}_{X_2} \circ \widehat{F}_{X_1} : \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H_0, \varphi \boxtimes H_0) \to \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H(\mathbb{L}), \psi \boxtimes H) \tag{72}
$$

随后由 $\widehat{F}_{X_2} \circ \widehat{F}_{X_1}(f) = h_2(f^{\mathrm{top}}) \circ \theta^{\mathrm{top}}$ 根据 (62) 给出。

3-柄的情形与1-柄的情形类似：如果协边 $X_3\colon Y_1' \to Y_1$ 由一次3-柄添加构成，那么 $F_{X_3}\colon CF(Y_1') \to CF(Y_1)$可通过将 Y_1' 分解为 $Y_1 \# (S^2 \times S^1)$来计算，此时

$$
\widehat{F}_X(\boldsymbol{y} \otimes \theta) = \begin{cases} \boldsymbol{y} & \text{if } \theta = \Theta^{\mathrm{bot}} \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \tag{73}
$$

在态射空间情形中，我们利用这样一个事实：我们有 Heegaard 分解$Y_1' = H(\mathbb{L}) \cup_\psi H = H_2' \cup_{\omega'} H_2'$，其中 $H_2' = H_2 \natural (D^2 \times S^1)$ 和 $\omega' = \omega \# \mathrm{id}_{\mathbb{T}^2}$ 对应某个 Heegaard 分解 $Y_1 = H_2 \cup_\omega H_2$。与之前一样，我们可以进行足够多次稳定化，使得 $H(\mathbb{L}) \cup_\psi H$ 和 $H_2' \cup_{\omega'} H_2'$ 是同伦的 Heegaard 分解，并且

我们得到同构

$$\widehat{CFD}(H_2') \cong \widehat{CFD}(H_2) \otimes_{\mathbb{F}} \widehat{CFD}(D^2 \times S^1) \tag{74}$$

and

$$\begin{aligned} &\widehat{CFDA}(\omega') \boxtimes \widehat{CFD}(H_2') \\ &\cong (\widehat{CFDA}(\omega) \boxtimes \widehat{CFD}(H_2)) \otimes_{\mathbb{F}} (\widehat{CFDA}(\mathbb{T}^2 \times [0,1]) \boxtimes \widehat{CFD}(D^2 \times S^1)) \end{aligned} \tag{75}$$

$\mathcal{A}(-\partial H_2 \# \mathbb{T}^2)$-模的。于是存在唯一的齐次同伦等价

$$\begin{aligned} h_3 :& \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}(-\partial H_2 \# \mathbb{T}^2)}(-H(\mathbb{L}), \psi \boxtimes H) \\ &\to \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}(-\partial H_2 \# \mathbb{T}^2)}(-H_2 \otimes_{\mathbb{F}} (D^2 \times S^1), (\omega \boxtimes H_2) \otimes_{\mathbb{F}} (D^2 \times S^1)) \end{aligned} \tag{76}$$

由 h_1^{-1}诱导，它经过 $\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}(-\partial H_2 \# \mathbb{T}^2)}(-H_2', \ \omega' \boxtimes H_2')$ 分解，因此 3-柄映射

$$\widehat{F}_{X_3} : \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H(\mathbb{L}), \psi \boxtimes H) \to \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_3}(-H_2, \omega \boxtimes H_2), \tag{77}$$

其中 $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}(-\partial H_2)$ 随后由 $((\mathrm{id} \otimes \theta^{\mathrm{bot}}) \circ h_3)(f)$ 给出，其中 θ^{bot} 是 θ^{bot} 的 $\mathcal{I}$-线性对偶。总之，若 $X = X_3 \circ X_2 \circ X_1$，我们可以在链层面通过 $\widehat{F}_X(f) = ((\mathrm{id} \otimes \theta^{\mathrm{bot}}) \circ h_3)(h_2(f_{\text{顶端}}) \circ \theta^{\mathrm{top}})$ 计算映射 $\widehat{F}_X$。

由于每一步的 1、2、3-把手映射以及态射复形的同伦等价都可以通过算法计算，定理 1.1 和 [LOT14] 为我们提供了一种计算 F_X 的算法，其步骤概述如下：

(1) 固定一个 Heegaard 分解 $Y_0 = H_0 \cup_\varphi H_0$，并对其进行足够多次稳定化，使得上述每一步中的所有 Heegaard 分解对都变为同位，然后选取粘合映射φ的一个由弧滑动组成的分解。(2) 计算 $H_*\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_1}(-H_0, \varphi \boxtimes H_0)$ 的一个基 $\{f_1, \ldots, f_n\}$，其中的元素均为 $\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_1}(-H_0, \varphi \boxtimes H_0)$ 中的显式圈。(3) 对每个 f_i，计算映射 $f_i^{\mathrm{top}} \in \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H_0', \varphi' \boxtimes H_0')$。(4) 固定一个由带框链环 $\mathbb{L} \subset Y_0'$ 的花束诱导的（经过充分稳定化的） Heegaard 分解 $Y_0' = H \cup_\psi H$，使得 $Y_0'(\mathbb{L}) = Y_1'$，并计算 $\widehat{\mathrm{CFD}}(H)$以及 $H_*\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(H_0', H)$ 的一个基，以找出诱导同伦等价h_2的唯一齐次同伦等价，并计算后者。(5) 计算 $\widehat{\mathrm{CFD}}(-H(\mathbb{L}))$以及由显式圈组成的 $H_*\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H(\mathbb{L}) \ H)$ 的一个基，利用此基确定 $\theta^{\mathrm{top}} \in \mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H(\mathbb{L}) \ H)$，并计算 $h_2(f^{\mathrm{top}}) \circ \theta^{\mathrm{top}}$。(6) 计算 $\widehat{\mathrm{CFDA}}(\psi) \boxtimes \widehat{\mathrm{CFD}}(H)$、$\mathrm{Mor}^{\mathcal{A}_2}(-H(\mathbb{L}) \ \psi \boxtimes H)$ 的一个基，以及同伦等价 h_3。(7) 对 $i = 1, \ldots, n$，计算 $\widehat{F}_X(f_i) = ((\mathbb{I} \otimes \theta^{\mathrm{bot}}) \circ h_3)(h_2(f\mathrm{top}_i) \circ \theta^{\mathrm{top}})$。

References

[Aur10] Denis Auroux. 对称积的 Fukaya 范畴与 Heegaard Floer 同调。 *J. G¨okova Geom. Topol.*，第 1–54 页，2010。 （引文见第 1、2、4、6、9、15 和 18 页）

[Gut22] Gary Guth. 对于带边界的奇异曲面，一次稳定化还不够。arXiv 预印本，arXiv:2207.11847，2022。（引文见第 13 和 18 页）[HL19] Kristen Hendricks 和 Robert Lipshitz。带边 Floer 同调的对合理论。美国数学会汇刊，372(1):389–424，2019 年 4 月。（引文见第 32 和 33 页）[JTZ21] Andr´as Juh´asz、Dylan Thurston 和 Ian Zemke。Heegaard Floer 同调中的自然性与映射类群。美国数学会回忆录，273(1338)，2021 年 9 月。（引文见第 30 页）[Juh06] Andr´as Juh´asz。全纯圆盘与缝合流形。《代数与几何拓扑》，6(3):1429–1457，2006 年 10 月。（引文见第 11 页）[Lip06] Robert Lipshitz。Heegaard Floer 同调的柱面重构。Geom. Topol.，10:955–1096，2006。 [分页此前标为 955–1097]。（引文见第 8 和 13 页）[LMW08] Robert Lipshitz、Ciprian Manolescu 和 Jiajun Wang。帽型 Heegaard Floer 理论中的组合余边映射。Duke Math. J.，145(2):207–247，2008。（引文见第 2 页）[LOT11] Robert Lipshitz、Peter Ozsv´ath 和 Dylan Thurston。作为态射空间的 Heegaard Floer 同调。《量子拓扑》，第 381–449 页，2011。（引文见第 1、2、4、6、8、29 和 31 页）[LOT14] Robert Lipshitz、Peter S Ozsv´ath 和 Dylan P Thurston。通过分解映射类计算 $\widehat{\mathrm{HF}}$。《几何与拓扑》，18(5):2547–2681，2014 年 12 月。（引文见第 31 和 34 页）[LOT15] Robert Lipshitz、Peter S. Ozsv´ath 和 Dylan P. Thurston。带边 Heegaard Floer 同调中的双模。Geom. Topol.，19(2):525–724，2015。（引文见第 21 页）[LOT16] Robert Lipshitz、Peter S. Ozsv´ath 和 Dylan P. Thurston。带边 Floer 同调与分支双覆盖的谱序列 II：谱序列彼此相同。J. Topol.，9(2):607–686，2016。（引文见第 9、12、13、14、16 和 19 页）[LOT18] Robert Lipshitz、Peter S. Ozsvath 和 Dylan P. Thurston。带边 Heegaard Floer 同调。美国数学会回忆录，254(1216):viii+279，2018。（引文见第 1、4、6、12、13、20 和 21 页）[MOT20] Ciprian Manolescu、Peter Ozsvath 和 Dylan Thurston。网格图与 Heegaard Floer 不变量。2020。（引文见第 2 页）[OS04] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。闭三维流形的全纯圆盘与拓扑不变量。Ann. of Math. (2)，159(3):1027–1158，2004。（引文见第 1、12 和 28 页）[OS06] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。光滑四维流形的全纯三角形与不变量。Adv. Math.，202(2):326–400，2006。（引文见第 1、26、29、30 和 31 页）[Pit08] Wolfgang Pitsch。整数同调三维球面与 Johnson 过滤。美国数学会汇刊，360(06):2825–2848，2008 年 1 月。（引文见第 33 页）[SW10] Sucharit Sarkar 和 Jiajun Wang。一种计算某些 Heegaard Floer 同调的算法。数学年刊，171(2):1213–1236，2010 年 3 月。（引文见第 8 页）[Zar11] Rumen Zarev。边界缝合 Floer 同调。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2011。博士论文——哥伦比亚大学。（引文见第 21 页）

[Zem19] Ian Zemke. 图协边与 Heegaard Floer 同调。2019 年。 （引自第 30 页）[Zem21a] Ian Zemke. Heegaard Floer 同调中的对偶性与映射环面。《拓扑学杂志》，14(3):1027–1112，2021 年 9 月。 （引自第 1、2、28 和 29 页）[Zem21b] Ian Zemke. 帽型 Heegaard Floer 同调的图拓扑量子场论。《量子拓扑》，12(3):439–460，2021 年 9 月。 （引自第 2、28 和 29 页）[Zha16] Bohua Zhan. 带边 Heegaard Floer 同调中的组合证明。《代数与几何拓扑》，16(5):2571–2636，2016 年 11 月。 （引自第 31 页）

Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR 97403-1222, USA
Email address: jcohen2@uoregon.edu