sjst.scst.edu.ly

Surman Journal of Science and Technology 国际标准连续出版物号：在线版 (2790-5721) - 印刷版 (2790-5713)

مجلة صرمان للعلوم والتقنية第（4）卷，第（1）期，2022年5月
页码：015 ~ 021

BO/BH/Z-代数中的粗糙性

Faraj.A.Abdunabi[1], Ahmed shletiet[2]

[1]（利比亚阿杰达比亚大学理学院数学系。）电子邮箱：faraj.a.abdunabi@uoa.edu.ly[2]（利比亚阿杰达比亚大学理学院数学系。）电子邮箱：Ahmed.shletiet@uoa.edu.ly

摘要

本文的主要目标是介绍 BO / BH / Z-代数中的粗糙概念。作为 BO / BH / Z-代数概念的扩展，我们依次研究这些代数结构中强理想的特定值。另一项研究目标是在 BO / BH / Z-代数中探讨强特定值概念。我们利用 BO / BH / Z-代数的理想与广义理想的逼近空间概念，研究其若干性质。此外，我们还基于理想模型研究广义理想的上、下逼近，并对作为一种概念的若干性质进行了研究。

摘要

本文的主要目标是分别提出粗糙 BO/BH/Z-代数的概念，将 BO/BH/Z-代数的概念加以扩展。另一个目标是考察这些代数结构中的（强）集值映射。本文研究了 BO/BH/Z-代数中的（强）集值 BO/BH/Z-态射概念及其若干性质。利用广义近似空间和 BO/BH/Z-代数理想的概念，我们考察了另一类基于理想的广义下近似与上近似。此外，还研究了若干性质。

关键词： 上近似，粗糙集，*BO*- 代数，*BH*- 代数

1. 引言

粗糙集理论由 Pawlak 于 1982 年提出。[1] 它是用于在信息系统中建模和处理不完备信息的有效工具。粗糙集理论的概念建立在下近似与上近似之上。J. Neggers 和 H. S. Kim [2] 引入了 B-代数的概念。Young. B J. 等人[3], 研究了 B-代数中（正规）B-子代数的模糊化。Chang Bum Kim 和 Hee Sik Kim [4] 引入了 BO-代数的概念。Y. B. Jun 等人 [5] 引入了 BH-代数的概念。M. Chandramouleeswaran 等人[6]提出了 Z-代数。本文的主要目的是分别将 BO-代数（BH-代数）的概念扩展为粗糙 BO/BH/Z-代数。此外，我们还介绍了近似及这些代数结构的一些性质。

2. 预备知识

我们首先给出粗糙集的一些定义和结果。

设 R 是论域集（非空有限集）U 上的一个等价关系。将二元组 (U,R) 记作近似空间。记号 U/R 表示所有等价类的族 [a]R。空集为 ∅，U/R 中的元素称为初等集，Ac 是 A 的补集。对于任意 A ⊆ U。

定义 2.1：设 (U, R) 为一个近似空间。A 的上近似定义为 $\mathrm{R}\overline{A} = \{a \in U: [a]_{\mathrm{R}} \cap A \neq \emptyset\}$，A 的下近似定义为 $\mathrm{R}A = \{a \in U: [a]_{\mathrm{R}} \subseteq A\}$，边界为 $BA_{\mathrm{R}} = \mathrm{R}\overline{A} - \mathrm{R}A$。若 $BA_R = \emptyset$，则 A 是精确集（清晰集）；若 $BA_R \neq \emptyset$，则 X 是粗糙集（非精确集）。

命题 2-1：设 (U, R) 是一个近似空间。令 A,B⊆U，则：

1) $\underline{\mathrm{R}A} \subseteq A \subseteq \overline{\mathrm{R}A}$,
2) $\underline{\mathrm{R}\emptyset} = \overline{\mathrm{R}\emptyset}, \underline{\mathrm{R}U} = \overline{\mathrm{R}U}$,
3) $\underline{\mathrm{R}(A \cup B)} \supseteq \underline{\mathrm{R}(A)} \cup \underline{\mathrm{R}(B)}$,
4) $\underline{\mathrm{R}(A \cap B)} = \underline{\mathrm{R}(A)} \cap \underline{\mathrm{R}(B)}$,
5) $\overline{\mathrm{R}(A \cup B)} = \overline{\mathrm{R}(A)} \cup \overline{\mathrm{R}(B)}$.
6) $\overline{\mathrm{R}(A \cap B)} \subseteq \overline{\mathrm{R}(A)} \cap \overline{\mathrm{R}(B)}$.
7) $\overline{\mathrm{R}A^C} = \left(\underline{\mathrm{R}A}\right)^c$.
8) $\underline{\mathrm{R}A^C} = (\overline{\mathrm{R}A})^c$.
9) $\underline{\mathrm{R}(\underline{\mathrm{R}A})} = \overline{\mathrm{R}(\underline{\mathrm{R}A})} = \underline{\mathrm{R}A}$.
10) $\overline{\mathrm{R}(\overline{\mathrm{R}A})} = \underline{\mathrm{R}(\overline{\mathrm{R}A})} = \overline{\mathrm{R}A}$.
11) $\overline{\mathrm{R}A}\ \overline{\mathrm{R}B} = \overline{\mathrm{R}AB}$.
12) $\underline{\mathrm{R}A}\ \underline{\mathrm{R}B} \subseteq \underline{\mathrm{R}AB}$.

本节讨论 BO/BH/Z-代数的概念及其示例。

定义 2.2：设 X 是一个非空集合，带有二元运算 ∗, 0∈X。若 ∀ x, y, z∈ X 满足以下条件，则 X 是 B-代数：

C1: $x*x = 0$。C2: $x * 0 = x$。
C3 : $(x*y)* z = x*(z* (0* y))$。

其中，0称为零元。

注 2.1。若对于每个 x∈X 和 x≠e，x*e =x，则称元素 $e \in X$ 为右单位元；若 e*x=x，则称其为左单位元。若对于每个 x∈X，x*e =x 且 e*x=x，则称 e 为单位元。于是，(X,∗) 称为含单位元的 B-代数。

例 2.1. 设 X = {0,1,2 e}。按下表1定义 X 上的二元运算

*	0	1	2	e
0	0	1	2	e
1	1	0	e	2
2	2	e	0	1
e	e	2	1	0

表1

表1表明，(X, *) 是带有单位元的 B-代数。

定义 2.3. 设 X 为一个非空集合，配备二元运算 ∗, 0∈若 ∀ x, y, z∈X 满足：则 X 是 BH-代数。

(C1)、(C2) 以及

(C4) $For\ any\ x,y \in X, x * y = y * x = 0 \Rightarrow x = y$.

定义 2.4 设 X 为一个非空集合，配备二元运算 ∗, 0∈若 ∀ x, y, z∈X 满足：则 X 是 BO-代数。

(C1)、(C2) 以及

C5: $x * (y * z) = (x * y) * (0 * z)\ for\ any\ x,y,z \in X.$

例 2.2：设 X={ 0,1,2,3,4}，且 ∗ 的运算表如下表 2 所示:

*	0	1	2	3	4
0	0	2	1	4	3
1	1	0	3	2	4
2	2	4	0	3	1
3	3	1	4	0	2
4	4	3	2	1	0

表 2

表 2 显示，(X,∗,0) 是 BO-代数。

例 2.3. 假设 X={ 0,1,2 ,3}，且有如下 ∗ 表 3

*	0	1	2	3
0	0	1	0	0
1	1	0	0	0
2	2	2	0	3
3	3	3	3	0

表 3

表 3 表明，(X,∗,0) 是一个 BH-代数。

定义 2.4. 假设 (I≠ϕ) ⊆ BH/Z）代数。如果 I 满足以下条件，则称 I 为 X 的 BH/Z-理想：

(1) 0 ∈ I，(2) $(x * y) \in I, y \in I \Rightarrow x \in I, \forall x, y, z \in X$。(3) $(x * y) * z \in I$, $y \in I \Rightarrow x * z \in I, \forall x, y, z \in X$，则称 I 为 X 的强理想。

定义 2.5**[6]**。设 X 是一个非空集合，带有二元运算 ∗, 0∈X 是 Z-代数，当且仅当 ∀ x, y, z∈X 满足 (C1-C2)，并且

C6:$x * x = x$

C7: $x * y = y * x, when\ x \neq 0\ and\ y \neq 0, \forall x, y \in X.$

例 2.4。假设 X={ 0,1,2,3 }，且下表4给出∗

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

表4

表4　　这表明 (X,∗,0) 是一个 Z-代数。若 I = {0, 1, 2}，则它是 X 的一个 Z-理想 .

3. 主要结果

定义3.1：假设 ~ 是集合 X=(X,*,0) 上的一个等价关系。如果 x ∈ X，则定义[x]~ 为 x 的~等价类，如下：[x]~ = {y ∈ X | (x, y) ∈ ~}。如果 X 上的等价关系~ 满足

$$(\forall x, y, z \in X)\ ((x, y) \in \sim \Rightarrow (x * y, y * z) \in \sim, (z * x, z * y) \in \sim).$$

定义 3.2。假设 A 和 B 是 X 的两个非空子集，记作 $AB = A * B = \{a * b \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$。设 ~ 是 X 上的一个等价关系。那么 $(\forall x, y \in X)([x]\sim[y]\sim \subseteq [x * y]\sim)$。

若 Y ∈ P(X)，则定义 Y 的上近似为 $+[Y]\sim = \{x \in X \mid [x]\sim \subseteq Y\}$，Y 的下近似为 $-[Y]\sim = \{x \in X \mid [x]\sim \cap Y \neq \emptyset\}$。对 (X, ~) 的称谓是近似空间。

注意，+[Y] ~ 和 −[Y]~ 是 X 的子集。

若 Y ⊆X，则称 Y 为可定义的，当且仅当 +[Y] ~ = −[Y]~；否则称为粗糙的。

设 I 是 X 的一个 BO/BH-理想。在 X 上定义关系 ~：当且仅当 x*y ∈I 且 y*x ∈ I 时，x ∈ ~ y。

定义 3.3. 设 (X, ~) 是一个近似空间，若存在 X ∈ P(X)，使得 (I1, I2) = Apr(X)，则称一对 (I1, I2) ∈ P(X) × P(X) 是 (X,~) 中的一个粗糙集。

例 3.1：考虑例 2.2。设 Y = {0, 1} 是 X 的一个 BO-理想。假设 ~ 是 X 上与 Y 相关的一个等价关系。

因此，Y0 = Y1 = Y，Y2 = {2}，Y3 = {3}，且 Y4 = {4}。于是，-[Y，{0,1}] = {0, 1}，-[Y，{0,2}] ={2}，-[Y，{0,3}]= {3}，以及 -[Y，{0,1,2,3}] = {0, 1, 2,3}。然而，+ [Y，{0,1}] = {0, 1}。+ [Y，{0}] = {0, 1}，+ [Y，{2}] = {0, 2}，+ [Y，{1,2,3}] = {0,1, 2, 3}，+ [Y，{0,2,3}] = {0, 1, 2, 3}，+ [Y，{1,2,3,4}] = {0, 1, 2,3, 4}。

这里存在 X 的一个非 BO-理想 Y，使得它们的下近似和上近似都是 X 的 BO-理想。

命题 3.1. 设 X 是一个 Bo(BH)-代数，A、B 是 X 的两个子集。设 ~ 是 X 上的一个等价关系。则以下结论成立：

1) $-[A]\sim \subseteq A \subseteq +[A]\sim$,
2) $+[A \cup B]\sim = +[A]\sim \cup +[B]\sim$,
3) $-[A \cap B]\sim = -[A]\sim \cap -[B]\sim$,
4) $If\ A \subseteq B, then -[A]\sim \subseteq -[B]\sim and +[A]\sim \subseteq +[B]\sim$,
5) $-[A]\sim \cup -[B]\sim \subseteq -[A \cup B]\sim$,
6) $+[A \cap B]\sim \subseteq +[A]\sim \cap +[B]\sim$.

证明. 显然。

设 X 是一个 BH-代数，并设 $\emptyset \neq A、B \subseteq X$。定义 $A * B := \{a * b \mid a \in A, b \in B\}$.

命题3.2.**[7]**。设 X 是 BH-代数。令 ~ 为 X 上的一个同余关系。设 A、B 是 X 的两个非子集。那么

1) $+[A]\sim * +[B]\sim \subseteq +[A * B]\sim$.
2) $If -[A * B] \neq \phi, then -[A]\sim * -[B]\sim \subseteq -[A * B]\sim$.

证明。

假设 x ∈+[A]~∗+[B] ~。则存在某些 a ∈ +[A]~ 和 b ∈+[B]，使得 x = a∗b。

那么，存在 y、z ∈ X，使得 y∈[a]~∩A 且 z∈[b]~∩B。因此 y∈[a]~，z∈ [z] ~，y∈A 且 z∈B。由于 ~ 是 X 上的同余关系，y∗z ∈ [a]~∗[b]~= [a ∗ b]ρ。由于 y∗z ∈ A ∗ B，我们有 x = a ∗ b ∈+[A∗B]。

假设 x∈−[A]~∗−[B]~。那么对某些 a ∈ −[A]~ 和 b∈−[B]~，有 x = a∗b。因此我们有[a]~⊆ A 且 [b]~⊆ B。[a∗ b]~ = [a]~∗[b]~ ⊆ A ∗ B，因为 ~ 是 X 上的同余关系。于是，x =a∗b ∈ −[A ∗ B] ~。

命题3.3. 设 X 是 BO/Z-代数。令 ~ 为 X 上的一个同余关系。设 A、B 是 X 的两个非子集。那么

1) $+[A]\sim * +[B]\sim \subseteq +[A * B]\sim$.
2) $If -[A * B] \neq \phi, then -[A]\sim * -[B]\sim \subseteq -[A * B]\sim$.

证明与命题3.2采用相同的策略。

定义3.4. 设 X 和 Y 是非空论域，并考虑映射 F : X → P(Y)。我们称 F 为集值映射，并称 (X, Y, F) 为广义近似空间。定义 $F: X \to P(Y)\ as\ {\sim}F := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)$，对于 Y 的任意子集 A，广义下近似与上近似 F-(A) 和 F+(A) 定义为

$$F_{-} A \qquad x \subseteq ( ) = \{$$

$$A \qquad F_{+} A = x \in X \mid F\ x \cap A \neq \emptyset \qquad {}^{+}$$

$x \in X \mid F( ) \}$ 和 ( ) { ( ) }。我们称这一对 F-(A)、F (A) 为广义粗糙集。

定义 3.5. 设 F : X →P(Y) 是一个集值映射。若 F 满足：$(\forall x, y \in X)\ (F(x) * F(y) \subseteq F(x * y))$，则称 F 为集值 BO/ BH/Z-态射。若集值映射 t : X → P(Y) 满足：$(\forall x, y \in X)\ (F(x) * F(y) = F(x * y))$，则称其为强集值 BO/BH/Z-同态。

4. 结论

本文提出了粗糙 BO/BH/Z-代数的新概念，分别将 BO/BH/Z-代数的概念加以扩展。本文利用广义近似空间和 BO/BH/Z-代数的理想概念，研究了 BO/BH/Z-代数中的（强）集值 BO/BH/Z-态射及其若干性质。我们相信这些结果具有一定的应用价值，因此让我们为未来的工作打开探索新结果的大门。

致谢：感谢艾季达比耶大学数学系的工作人员在本文撰写过程中提供的讨论和建议。同时，也感谢所有匿名审稿人提出的意见和建议。

6. 参考文献

[1] Z. Pawlak，粗糙集，《国际信息与计算机科学杂志》11 (1982) 341–356。

[2] NEGGERS, J. — KIM, H. S.，关于 B-代数，《Mat. Vesnik》54 (2002), 21.

[3] Young Bae Jun 等，《模糊 B-代数》，《捷克斯洛伐克数学杂志》52 (127) (2002), 375–384。[4] Chang Bum Kim 和 Hee Sik Kim，关于 BO-代数，《Math. Slovaca》62 (2012), 第 5 期, 855–864, DOI: 10.2478/s12175-012-0050-9。[5] JUN, Y. B.—ROH, E. W.—KIM, H. S.：关于 BH-代数，《Sci. Math. Jpn.》1 (1998), 347–354。[6] M. Chandramouleeswaran 等，关于 Z-代数的注记，《意大利纯粹与应用数学杂志》– N. 38–2017 (707–714)。[7] Sun Shin Ahn 和 Jin Hwa Lee，BH- 代数中的粗糙强理想，《Honam Mathematical J.》32 (2010), 第 2 期, 第 203–215 页。