反半群中的粗糙性

Faraj. A. Abdunabi，Ahmed shletiet，*Najah. A. Bosaif

利比亚艾季达比亚大学理学院数学系

关键词：
上近似 下近似 反半群
同胚 反群

摘　要

本文介绍了近似空间中反粗糙子群、反粗糙子半群以及粗糙反半群同胚的上近似和下近似概念，并阐述了有限反群中类型（4）的粗糙概念。此外，本文还介绍了近似及这些代数结构的一些性质，并给出了反群同态的定义。

反半群中的粗糙性

* سيفوسب رادقدابع حاجن، فرج أرخص عبد النبي، أحمد إبراهيم المر
بوك أشليتبيت و

، 利比亚，贾巴尔大学，理学院，数学系

关键词：粗糙度在反半群中

上近似
下近似
反对称半群
半群

摘要

本文提出反半群及反偏序半群的上、下逼近概念，并研究逼近空间中反半群与反偏序半群的同态性，

同时特别研究反半群中的模糊概念及其逼近性质。

此外，我们给出若干有限反半群（4）的类型。）这些代数结构与逼近的性质。

我们给出反群的定义。

1-引言

Pawlak [1] 1982 提出了粗糙集理论这一概念，将其作为一种用于信息系统建模的新型有效工具。该理论引起了许多研究者的广泛关注，并在纯数学领域取得了令人瞩目的发展。一些作者研究了粗糙集的代数结构，例如 Bonikowaski[2], I winski [3], 以及 Pomykala 和 Pomykala [4]。Miao等人[5]改进了粗群和粗子群的概念，并探讨了它们的一些性质。1994年，Biswas 和 Nanda [6] 基于上近似而非下近似，提出了粗群的定义。B. Davvaz 在[7], 中研究了相对于某个理想的粗糙子环概念。Yao 在[8] 中探讨了格上的下近似和上近似概念。此外，文献[9]研究了相对于正规子群的下近似和上近似的一些性质。粗糙集理论的概念建立在下近似和上近似之上。给定集合的上近似是所有属于该集合的等价类的并集；而其上近似则是所有与非空集合相交的等价类的并集。本文的主要目的是介绍类型（4）的有限反群的粗糙反半群。此外，本文还介绍了这些代数结构的近似的一些性质，并提出了反粗糙半群的概念。

不过，我们对粗糙反半群的定义与粗群的定义相似。

2-预备知识

本节将介绍本研究所需的粗糙集理论中的重要概念。

设 ~ 是论域 U （ϕ， $finite$）上的一个等价关系。称有序对（U， ~）为近似空间。所有等价类的集合 $[x_{\sim}]$ 记作 $U/\sim$。对于任意 $\backslash M \subseteq U$，用 M^c 表示 M 在 U 中的补集。

定义 2.1：设（U， ~）为一个近似空间。定义 M 的上近似为 $\overline{\sim M} = \{x \in U: [x]_{\sim} \cap M \neq \emptyset\}$，M 的下近似为

$\underline{\sim M} = \{x \in U: [x]_{\sim} \subseteq M\}$。差集 $BM_{\sim} = \overline{\sim M} - \underline{\sim M}$ 称为边界。若 $BM_{\sim} = \emptyset$，则称 M 为精确（清晰）集；否则，M 为粗糙集（不精确集）。

命题 2-1：设 $(U, \sim)$ 是一个近似空间，且 $X, Y \subseteq U$，则有：

1) $\underline{\sim X} \subseteq X \subseteq \overline{\sim X}$； 2) $\underline{\sim \emptyset} = \overline{\sim \emptyset}, \underline{\sim U} = \overline{\sim U}$， 3) $\sim(X \cup Y) \supseteq \sim(X) \cup \sim(Y)$,

通讯作者：电子邮箱：Najahboseaf@hotmail.com, (F. A. Abdunabi) faraj.a.abdunabi@uoa.edu.ly, (A. shletiet) Ahmed.Shlitite@uoa.edu.ly文章
历程：收到日期：2022年1月24日 - 修订稿收到日期：2022年7月25日 - 接受日期：2022年10月3日

4) $\underline{\sim(X \cap Y)} = \underline{\sim(X)} \cap \underline{\sim(Y)}$,
5) $\overline{\sim(X \cup Y)} = \overline{\sim(X)} \cup \overline{\sim(Y)}$.
6) $\overline{\sim(X \cap Y)} \subseteq \overline{\sim(X)} \cap \overline{\sim(Y)}$.
7) $\overline{\sim X^C} = \left(\underline{\sim X}\right)^c . \underline{\sim X^C} = (\overline{\sim X})^c$.
8) $\underline{\sim(\underline{\sim X})} = \overline{\sim(\underline{\sim X})} = \underline{\sim X}$. –
9) $\overline{(\sim(\overline{\sim X})} = \underline{\sim(\overline{\sim X})} = \overline{\sim X}$.

Proposition 2.2[8] Let (U, R) be an approximation space and X, Y be subsets of U. Then

1) $\overline{\sim X}\ \overline{\sim Y} = \overline{\sim XY}$。
2) $\underline{\sim X}\ \underline{\sim Y} \subseteq \underline{\sim XY}$。

定义 2.2[10]。设 G 是一个非空集合。

设 * : R× R → R 是定义在 G 上的二元运算。如果 (G,*.) 满足以下条件，则称其为一个群:

C1：对于所有 x、y ∈ G，x*y ∈ G；C2：对于所有 x、y、z ∈ G , $x*(y*z) = (x*y)*z$；

C3：对于所有 x ∈ G，存在 e ∈ G，使得 $x*e = e*x = x$；

C4：对于所有 x ∈ G，存在 −x ∈ G，使得 $x*(-x) = (-x)*x = e$；如果满足，C5：对于所有 x、y ∈ G，$x*y = y*x$，那么（ G，*）称为一个交换群。

定义 2.3**[10]**。半群 S 是定义在非空集合上的代数结构，并配备一种结合二元运算。这意味着，半群是一个集合，配备一种满足 C1、C2 的二元运算“*”。

定义 2.4。若半群 S 的非空子集 H 满足 $a*b \in H\ for\ all\ a, b \in S$，则称 H 为 S 的子半群。

定义 2.5。反群 $\mathfrak{C}$ 是群 G 的一种替代结构，它至少满足一条反律或至少满足以下条件之一：对于所有的二元组 $(x,y) \in C$ ，$x*y \notin C$ ；

C7：对于所有三元组 $(x,y,z) \in C$，$x*(y*z) \neq (x*y)*z$；。

C8：不存在元素 e ∈ $\mathfrak{C}$ 使得 $x*e = e*x = x \forall x \in C$。

C9：不存在 u ∈$\mathfrak{C}$ 使得 $*\ u = u*x = e \forall x \in C$ 。

定义 2.6。反阿贝尔群 $\mathfrak{C}$ 是经典阿贝尔群 G 的一种替代，它至少满足一条反律，或至少满足 {C6, C7,C8, C9} 中的一条，并且

C10：对于所有二元组 $(x,y) \in C$，$x*y \neq y*x$。

一类特殊的反群 $(\mathfrak{C}, *)$，其中对于 $\mathfrak{C}$ 的所有元素，G4 均完全为假；而 C1、C2、C3 和 C5 对 $\mathfrak{C}$ 的某些元素而言，则或部分为真、或部分不确定、或部分为假。

命题 2.3。设 $(\mathfrak{C}, *)$ 是一个 AG(4) 型反群，且令$g,x,y \in C$。则

1） $g*x = g*y \nRightarrow x = y$。

2） $x*g = y*g \nRightarrow x = y$。

定义 2.9. 设 $(\mathfrak{C}, *)$ 是一个 AG(4) 型反群，且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathfrak{C}$ 的反子群。集合 A∗B 定义为 $A*B = \{x \in : x = h*k\ for\ some\ h \in A, k \in B\}$。

反半群中的 3-粗糙性 本节介绍粗糙

并研究近似空间上的反半群和粗糙子半群的若干性质。

定义3-1.[8]设 $(U,\sim)$ 是一个近似空间，(*) 是定义在 U 上的二元运算。若 U 的子集 $\boldsymbol{A}$ 满足以下性质，则称其为近似空间上的粗糙反半群:

1) 对所有 $x,y \in A, x*y \in \overline{\sim A}$，

2) 对所有 $l\ x,y,z \in A, (x*y)*z = x*(y*z)$ 性质在 $\underline{\sim A}$ 中成立。

例3.1. 令 U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} 为论域，$\mathfrak{C}$ = {1, 2,3,5} 为 U 的子集。

令 ∗ 为定义在 $\mathfrak{C}$ 上的二元运算，如下方凯莱表所示

*	1	2	3	5		
1	4	1	3	5		
2	1	4	5	3		
3	2	1	6	5		
5	1	2	3	6		

从上表显然可见，对于 ∗，C1、C2、C3、C5 或部分为真，或部分为假；但对于 $\mathfrak{C}$ 中的所有元素，C4 均为假。因此，$(\mathfrak{C}, *)$ 是 $\mathfrak{C}$ 的有限反群。U 的分类为 $U/\sim = \{E1, E2, E3\}$， $where\ E1 = \{1, 2, 3\}$， $E2 = \{4, \}$， $E3 = \{5\}$。

令 $\boldsymbol{A}$ = {1, 2, 5}，令 ∗ 定义在 $\boldsymbol{A}$ 上，如下方凯莱表所示:

*	1	2	5
1	4	1	5
2	1	4	3
5	1	2	6

(e-6) 它可以

从表中很容易看出， $\boldsymbol{A}$ 是一个 AG(4) 型反子群。$\overline{\sim A}$ = {1, 2, 3, 4}。根据定义3-1， $\boldsymbol{A} \subseteq$ U 是一个粗糙反半群。

定义3-2。设 (U, ~) 是一个近似空间，(*) 是定义在 U 上的二元运算。设 $\boldsymbol{A}$ 是一个粗糙反半群，且 H 是 $\boldsymbol{A}$的非空子集。若对于所有 a, b ∈ H，都有 a ∗b ∈ $\overline{\sim H}$，即 HH ⊆ $\overline{\sim H}$，则粗糙反半群 $\boldsymbol{A}$ 的非空子集 H 称为 $\boldsymbol{A}$的粗糙反子半群。

例3.2。考虑例3-1。设$\boldsymbol{B}$= $(\mathfrak{C}, *)$为$\boldsymbol{B}$= {2,3, 5}，它是$\mathfrak{C}$ 的一个子集，并且∗ 定义在$\boldsymbol{B}$ 上，如下方凯莱表所示:

*	2	3	5
2	4	5	3
3	1	6	5
5	2	3	6

.

从表中很容易看出， $\mathfrak{C}.\overline{\sim B}$ = {1, 2, 3, 5}是一个反子群。根据定义3-1， $\boldsymbol{B} \subseteq$ U.是一个粗糙反半群。

命题3-1。设$(U,\sim)$是一个近似空间，(*)是定义在U上的二元运算。设A和B是粗糙反半群 $\boldsymbol{A}$的两个粗糙反子半群。那么 $\overline{\sim A} \cap \sim(\ )\ (\overline{B} \subseteq \sim)\ \overline{(A \cap B)}$。

粗糙反半群的两个粗糙反子半群的交集是粗糙反子半群的一个充分条件是 $\overline{\sim A} \cap \sim(\ )\ \overline{(B)} = \sim\overline{(A \cap B)}$。

例3.3。考虑例3.1和例3. 2。$\boldsymbol{A}$ = {1, 2, 5} 和 ={2,3, 5}，则 $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ = {2,5}

则 $\overline{\sim A}$ = {1, 2, 3, 4}∩ $\overline{\sim B}$ = {1, 2, 3, 5}= {{1, 2, 3}, $\overline{\sim A \cap B}$ =( ) {1, 2, 3, 5}。

粗反群的4-同态。假设（ $\mathfrak{B}, \circ$) 是任意两个 AG(4) 型反群。若映射 $\varphi : C \to \mathfrak{B}$ 满足 φ 保持二元运算 ∗ 和 ∘，则称其为反群同态

也就是说，对于所有二元组 $(x, y) \in C$，都有 $\varphi(x * y) \neq \varphi(x) \circ \varphi(y)$。
φ 的核记为 Kerφ，定义为
Kerφ = {x : φ(x) = e$\mathfrak{B}$ 至少对一个 e$\mathfrak{B}$ ∈ $\mathfrak{B}$} 成立，其中 e$\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{B}$中的一个中性中立元。φ 的像记为 Imφ，定义为 Imφ = {y ∈ : y = φ(x)，其中某个 x ∈ $\mathfrak{C}$}。
此外，如果 φ 是一个反双射，那么 φ 称为反群同构。

设 $(U1, \sim)$、$(U2, \rho)$ 是两个近似空间，且 (·) 是全集 U1 上的二元运算，(∘) 是全集 U2 上的二元运算。
定义 4.1. 设 $\boldsymbol{A} \subset$U1 和 $\boldsymbol{B} \subset$U2 是粗糙反半群。若存在满射 ϕ : $\overline{\sim A} \rightarrow \sim(\ ) (\overline{\ B\ })$，使得对所有 x, y ∈ $\overline{\sim A}$，$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \circ \phi(y)$，则称 ϕ 为粗同态，称 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为粗糙同态半群。

定义 4.2 设 $\mathfrak{C} \subset$ U1、$\mathfrak{B} \subset$ U2 是粗糙反群。若存在满射 ϕ : $\overline{\sim} \rightarrow \sim(C) (\overline{\mathfrak{B}})$，使得对所有 x, y ∈ $\sim C \overline{\ }$，ϕ(x · y) = ϕ(y) ∘ ϕ(x)，则称 ϕ 为粗糙反同态。
命题4.1. 设 $\mathfrak{C}$ 是一个粗反群，φ1 是一个粗反同态，φ2 是 $\mathfrak{C}$ 上的粗同态。那么复合 φ1oφ2 是 $\mathfrak{C}$ 上的粗反同态。

证明. 设 $\mathfrak{C}$ 是一个粗反群，φ1 是 $\mathfrak{C}$ 上的粗反同态，且 φ2 是 $\mathfrak{C}$ 上的粗同态。那么 φ1, φ2 : : $\overline{\sim} \rightarrow \sim(C) (\overline{\mathfrak{B}})$，使得对于任意 ∀x, y ∈ : ∼(C)$\overline{\ }$, φ1(x ∗ y) = φ1(y) ∗ φ1(x) 且 φ(x ∗ y) = φ2(x) ∗ φ2(y)。现在对于任意 ∀ x, y ∈: $\overline{\sim}$ (C) (φ1oφ2)(x ∗ y) = φ1(φ2(x ∗ y)) = φ1(φ2(x) ∗ φ2(y)) = (φ1oφ2)(y) ∗ (φ1oφ2)(x) 因此，φ1oφ2 是$\mathfrak{C}$上的粗反同态。
命题4.2.. 设$\mathfrak{C}$ 为一个粗反群，且φ1 和φ2 是$\mathfrak{C}$上的两个粗反同态。那么，复合φ1oφ2 是$\mathfrak{C}$上的粗同态。

证明。设$\mathfrak{C}$ 是一个粗反群，且$\mathfrak{C}$上有两个粗反群同态φ1和 φ2 。那么φ1, φ2 : $\overline{\sim} \rightarrow \sim(C) (C)\overline{\ }$，使得∀x, y∈ ∼(C)$\overline{\ }$ φ1(x ∗ y) = φ1(y) ∗ φ1(x)，且φ2(x ∗ y) = φ2(y) ∗ φ2(x)。现在∀x, y ∈∼(C)$\overline{\ }$ (φ1oφ2)(x ∗ y) = φ1(φ2(x ∗ y)) = φ1(φ2(y) ∗ φ2(x))= (φ1oφ2)(x) ∗ (φ1oφ2)(y)。因此，φ1oφ2 是$\mathfrak{C}$ 上的粗同态。

结论 概念

本文介绍了有限反群中类型为（4）的粗结构。此外，还研究并考察了这些代数结构的近似性质。然而，本文给出了反群同态的定义。

致谢：感谢艾季达比亚大学数学系工作人员就本文提供的帮助和建议，并进行私下讨论。

同时感谢所有匿名审稿人提出的宝贵意见和建议。

参考文献[1]- Z. Pawl ak, 《粗糙集》, 《国际信息与计算机科学杂志》11（1982年）341–356。[2]- Z. Bonikowaski, 《粗糙集的代数结构》, 载于：W.P. Ziarko（编）, 《粗糙集、模糊集与知识发现》, 施普林格出版社，柏林，1995年，第242–247页。[3]- T. Iwinski, 《粗糙集的代数方法》, 《波兰科学院数学通报》35（1987年）673–683。[4]- J. Pomykala、J. A. Pomykala, 《粗糙集的斯通代数》, 《波兰科学院数学通报》36（1998年）, 495–508。[5]- D. Miao、S. Han、D. Li 和 L. Sun, 《粗群、粗子群及其性质》, 载于 D. Slkezak 等（编）：《粗糙集、模糊集、 ´ 数据挖掘与粒计算》, 《计算机科学讲义》系列，3641（2015年）, 104–113, 施普林格出版社，柏林海德堡。http://dx.doi.org/10.1007/11548669 11[6]- R. Biswas、S. Nanda, 《粗群与粗子群》, 《波兰科学院数学通报》42（1994年）251–254。[7]- B. Davvaz, 《环中的粗糙性》, 《信息科学》164（2004年）147–163。[8]- Y.Y. Yao，计算机科学系，里贾纳大学，里贾纳，萨斯喀彻温省，加拿大 S4S 0A2。[9]- Gilbert, L. 和 Gilbert, J., 《现代代数基础》, 第八版，圣智学习，美国，2015年。[10]- A.A.A. Agboola, 《反群导论》, 《国际中智科学杂志》（IJNS）第12卷第2期，第71–80页，2020年。