企业文化与组织脆弱性

MATTHEW ELLIOTT、BENJAMIN GOLUB 和 MATHIEU V. LEDUC

Abstract. 复杂组织通过工人之间多步骤的协作来完成任务。企业文化通过确立规范、减少误解来支持协作。由于强大的企业文化依赖众多工人付出高成本的自愿投资，我们将其建模为一种组织公共品，容易出现标准的搭便车问题，而这类问题在大型组织中会变得尤为严重。我们的主要发现是，尽管如此，自愿对文化作出的贡献仍可持续，因为组织的均衡生产力会内生地对个人贡献高度敏感。然而，复杂任务的完成必然会因损害组织文化的轻微冲击而变得脆弱。

arXiv:2301.08907v1 [econ.TH] 21 Jan 2023

关键词：企业文化、网络、脆弱性

Date Printed。2023年1月24日。Elliott：mle30@cam.ac.uk，剑桥大学。Golub：ben.golub@gmail.com，西北大学。Leduc（通讯作者）：mattvleduc@gmail.com，巴黎经济学院与巴黎第一大学。本项目获得欧洲研究委员会（ERC）在欧盟地平线2020研究与创新计划框架下的资助（资助协议编号 #757229），以及 JM凯恩斯奖学金基金（Elliott）；历史与经济联合中心；潘兴广场人类行为基础研究基金；美国国家科学基金会资助（项目编号 SES-1629446）（Golub）；法国国家研究署（ANR）资助项目 ANR-17-EURE-0001（Leduc）。我们感谢（按随机顺序）Willemien Kets、Tristan Tomala、Rapha¨el Levy、Nicholas Vielle、Fr´ed´eric Koessler、Yann Bramoull´e、Agnieszka Rusinowska、Spencer Pantoja、Frederic Dero¨ıan、Gabrielle Demange、Robert Gibbons、Isabelle M´ejean 和 Fran- cis Bloch 提供的意见。

1. Introduction

大型组织（例如公司）要成功完成复杂项目（例如设计一款新产品并将其推向市场），必须成功完成许多组成任务。通常，只有先完成若干其他经过定制的投入任务，才能完成这类任务。因此，复杂项目要想成功，就需要工人在业务部门内部及不同业务部门之间开展大量协作。

协作可能因许多原因而失败：误解、努力不足或分配不当、缺乏信任、代理问题等（Kreps，1990）。企业文化可以缓解这些问题，例如建立并推行规范，以及支持关系契约。[1] 因此，企业文化是组织内部协作能否成功的重要决定因素。[2] 我们认为，在企业文化较好的环境中，协作更有可能成功——这里的企业文化是一个宽泛的概念，涵盖工作环境的诸多方面。

组织文化是内生的：其质量取决于个人为维护组织文化而付出的成本高昂的努力，例如阐明并践行组织价值观、传达相关期望和实践，以及推行规范。[3] 这些努力可视为对公共品付出的高成本贡献，因此会面临搭便车问题；每位工人的贡献相对越小，这一问题就越严重。事实上，标准分析会指出，随着组织规模扩大，工人自愿为真正意义上的企业文化（而非更局部的文化）作出贡献的激励机制会消失，因为他们的边际影响变得微不足道，而边际成本却没有降低。这引出了一个重要问题：为什么工人会自愿付出努力，来改善大型组织的企业文化?

我们基于大型组织中复杂生产的网络模型，对这些问题提出一种视角，并对 Elliott、Golub 和 Leduc（2022）的模型加以改编。组织的生产活动通过完成任务来实现。工人完成一项任务时，通常需要依赖若干类型的关键子任务；这些子任务通过与其他工人的协作 融入任务，而协作能否成功取决于周围的企业文化质量（以及其他因素）。由于任何协作都可能失败，因此每种类型的子任务都有若干可相互替代的方案。每项子任务本身也可能需要进一步的子任务（依赖其他协作），如此延续下去。

例如，一位营销分析师需要执行调查，以对某项潜在功能进行市场测试。为此，他需要工程师提供技术规格，也需要数据分析师提供待测试的价格信息——这属于两种子任务。对于每种子任务，营销分析师都可以联系多位能够提供相应类型子任务的工人。反过来，这些工人也依赖其他组织部门。例如，数据分析师需要会计人员提供相关记录，还需要一位开发人员编写代码。因此，营销分析师的任务直接或间接依赖于许多上游环节中成功开展的

[1]例如，关于定性讨论和广泛实证分析，参见 Nguyen（2018）和 Graham 等人（2022）。[2]例如，参见 Kotter（2008）。同样，Groysberg 等人（2018）发现，企业文化的强度（以员工对文化特征的认同程度衡量）与工人的努力呈正相关。[3]关于企业文化的一种观点，参见 Rahmandad 和 Repenning（2016）：他们基于大量证据，将企业文化视为一种存量变量，它会逐渐消退，并且需要在变化的环境中得到补充。B´enabou、Falk 和 Tirole（2018）对支持规范和叙事的个人贡献进行了建模。

协作。如果一项任务依赖多个层级的协作，且每个层级都要组合多种类型的子任务，我们就称这项任务复杂。

我们研究了在这种重叠协作网络中，企业文化水平如何影响复杂项目完成的概率。[4] 我们表明，当企业文化强度超过某个阈值时，完成给定复杂任务的概率会从零跃升至一个较大的正值。组织表现对阈值附近的文化水平非常敏感。这意味着，即使组织规模扩大、搭便车问题日益严重，仍会产生一种新的机制，激励人们自愿进行去中心化的文化投资：贡献所带来的边际影响会变得足够大，从而形成补偿。

这项分析还揭示了一种独特的脆弱性：在由这一机制支撑、存在正向贡献的均衡中，组织表现必然会对企业文化遭受的外生负面冲击非常敏感。例如，这种冲击可能来自合并，或公司高层管理者变动（如新任首席执行官上任）。[5] 因此，该理论提出了一种新颖的解释，说明组织的复杂性如何既维持投资激励，又使组织在均衡状态下容易受到文化扰动的影响。第 4 节讨论其他启示及其与证据的关系。

我们的方法与网络理论和公共品供给方面的文献（Bramoull´e和Kranton，2007年）相关，但建立在大型网络所具有的独特脆弱性特征之上（Brummitt、Huremovi´c、Pin、Bonds和Vega-Redondo，2017年；Elliott、Golub和Leduc，2022 年；K¨onig、Levchenko、Rogers和Zilibotti，2022 年；Blume、Easley、Kleinberg、Kleinberg和Tardos，2013年）。在概念层面上，我们工作的一个主要观点是，复杂生产过程的这些特征与相关主体的激励机制之间存在有趣的相互作用；这一主题也在近期的一些研究中得到探讨，例如Levine（2012年）、Erol和Vohra（2022年）以及Dasaratha（2023年）的研究。在第4.1节中，我们将讨论我们的工作与现有企业文化文献之间的关系。

2. A TASK-BASED MODEL OF A LARGE ORGANIZATION

2.1. **模型**。

2.1.1. 任务网络。 存在一个有向无环网络 $G = (V, E)$，其中每个节点$v \in V$都是一项任务，边则表示任务之间的投入关系，具体取决于我们现在要描述的一种技术。每项任务 v都有一组输入 $S_v \subseteq V$。如果 S_v 非空，则会将其划分为若干种类型的输入 m 类型 ，

$$S_v = S_{v,1} \cup S_{v,2} \cup \cdots \cup S_{v,m}.$$

每个 $S_{v,\ t}$ 的基数为 n，且这些集合互不相交。其含义是，每种类型t 对应一种所需的投入（例如工程规格、定价数据分析），而对于每种投入，都有 n 个不同但可替代的任务能够提供该投入。对于这里的建模，我们无需正式地将工人与任务关联起来，但一种自然的解释是，不同的可替代子任务分别与不同的

[4]回想一下，企业文化有助于提升每项协作的表现。[5]事实上，不同企业文化之间的不兼容常被认为是合并失败的原因（Cartwright and Cooper（1993）；Kotter（2008））。

工人相关联。不过，同一批工人可能在一个网络中执行多项任务。我们将在第 3 节讨论工人收益。[6]

有向链接（$v,\ v'$）$\in E$ 若连接任务 v 与某些 $v' \in S_v$，则称为协作（注意，链接的方向是从任务指向其投入）。其含义是，执行任务 v 的工人可以将另一名工人所执行的任务 v' 的结果作为投入。每项此类协作可以有效（记为 $\phi_{vv'} = 1$），也可以无效（$\phi_{vv'} = 0$）。

每项任务都可能成功，也可能不成功；令 s_v 为指示变量，表示任务 v 是否成功。主要的技术假设是：当且仅当对于每个 $t \in \{1, \ldots, m\}$，至少存在一个成功的子任务$v' \in S_{v,\ t}$，且满足$\phi_{vv'} = 1$，使得存在一项有效协作，让 v 获取该任务的结果时，该任务才算成功。给定哪些链接有效的一个实现 ϕ，我们将 $s^*(\phi)$定义为与上述生产技术相一致的最大向量 s；根据塔斯基不动点定理，这样的向量存在。这给出了在外生约束条件下能够完成的所有任务的集合。

我们假设存在一个“根”节点 M，它不是任何其他任务的投入。这可以解释为主要任务。不需要任何输入的节点称为叶节点。若从 M到每个叶节点[7]的距离均为 $L-1$，则称网络具有 $L < \infty$ 层。在该模型中，所有叶任务总是成功的。若网络没有叶节点，则称该网络具有 $L = \infty$ ——这是高度复杂运作的一种理想化模型，其中相互依赖关系没有明确的“截断”点。

2.1.2. 示例说明。 图1(A)展示了任务网络的一部分。每项任务都需要完成两种类型的子任务。每个 $S_{v,\ t}$ 都包含两个可替代任务。任务 M需要一个类型为 a 的任务和一个类型为 b 的任务作为输入。任务 $a1$ 或 $a2$ 均可满足此要求；任务类型 b也同样如此，依此类推。

图1(B)展示了一种可能的实现：在需要时哪些协作能够投入运作；相对于图1(A)，这些协作以保留的连接表示。请注意，尽管协作（$M,\ a2$）能够投入运作，任务 M 却无法完成。这是因为任务$a2$ 本身无法完成。

2.1.3. 有效协作的分布。 现在，我们在有效协作的实现过程中引入随机性。令 $\pi \in (0,1)$ 表示给定协作有效的概率，并假设所有这些实现彼此独立。我们将 π称为企业文化的强度或水平。在图1的语境中，这表示面板（A）中存在的连接在面板（B）中保留下来的概率。我们将其视为企业文化强度的一维概括。在一名工人执行任务、另一名工人提供所需子任务的协作情境中，运作失败意味着非正式契约失效，从而阻止该子任务成功纳入寻求使用它的任务。最简单的解释是，处理任务 v 的工人向处理 v'的工人寻求帮助时出现了这种结果；但也可能是 v' 在过去某个时候完成的一项任务（例如，将记录上传到

[6]在在线附录中，我们将这个简单模型纳入一个更一般的模型中——在该模型中，每项任务所需的子任务数量和潜在任务提供者数量各不相同——并证明，本文所呈现的结果在经过此类扩展后依然成立。[7]请注意，这一定义要求每条路径的长度相同——这是为了简化模型，但这一要求也可以放宽。

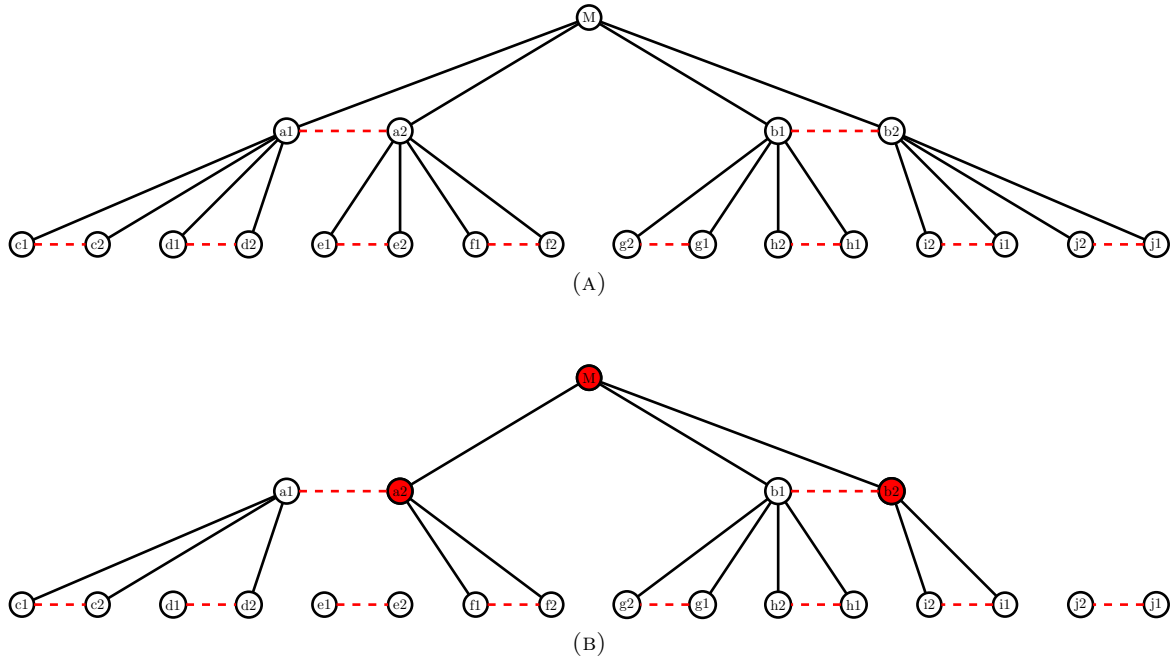

FIGURE 1. **(A)** 组织内部潜在协作的结构及所需子任务。**(B)** 确定协作成功后，任务成功完成的情况。未成功的协作已被移除。红色阴影标示的顶点代表无法完成的任务，因为这些任务无法获得关键子任务。

数据库），而不确定性在于这项工作是否以有助于任务 v的方式完成。更强的企业文化有助于通过减少误解、强化合作规范、激励工人遵循最佳实践（例如记录工作内容）等方式避免失败。

2.2. **组织对企业文化的敏感性**。 首先假设企业文化的强度是外生给定的。我们将研究任务 M 成功完成的概率如何取决于这一强度。我们将此概率记为 r：形式上，它是 $s^*_M(\phi) = 1$的概率。暂且假设任务树网络的层数是无限的（$L = \infty$）。

现在我们声称， r 满足以下方程：

$$r = (\,1 - \underbrace{(\,1 - \pi\, r\,)^n}_{\text{Probability a given subtask cannot be completed}}\,)^m. \tag{1}$$

这个方程的推导相对直接。考虑第一个子任务——假设其类型为 t。假设类型为 t_1 的子任务能够成功提供的概率为 πr。这就是该子任务成功完成的概率；根据对称性，这也等于 r，再乘以能够使用该子任务的协作正常运作的概率 π。因此，这种情况不会发生的概率为 $(1 - \pi r)$，而无法提供任何类型为t 的子任务的概率为 $(1 - \pi r)^n$。由此，能够获得某种该类型子任务的概率为 $1 - (1 - \pi r)^n$。能够获得所有 m 类型子任务的概率为 $(1 - (1 - \pi r)^n)^m$。因此，这就是复杂任务 M 能够成功完成的概率。

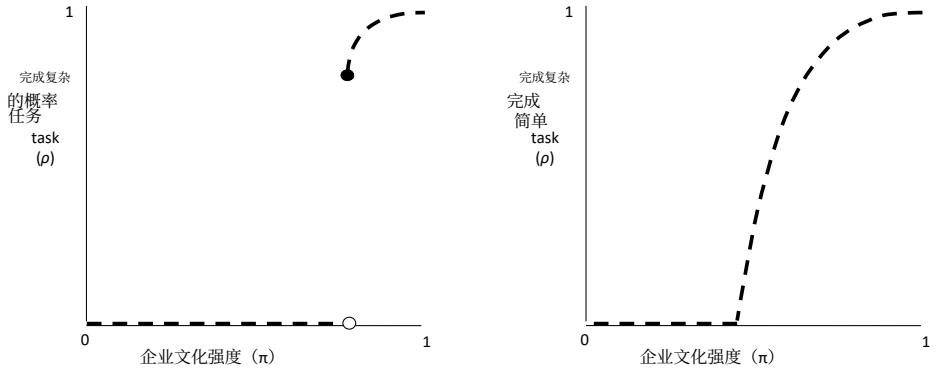

FIGURE 2. (A) 所有任务提供者都需要两个子任务（$m = 2$），且每个子任务都有两个潜在供应者（$n = 2$）时，复杂 任务成功完成的概率。(B) 所有任务提供者都只需要一个子任务（$m = 1$），且该子任务有两个潜在供应者（$n = 2$）时，简单 任务成功完成的概率。

方程（1）可能有多个不动点，且 $r = 0$ 始终是其中之一。然而，与 $s^*(\phi)$ 相对应的是最大不动点，即技术上能够完成的任务集合。[8] 在图2(A)中，我们绘制了 $\rho(\pi)$。该图的关键事实是，复杂任务成功完成的概率会随着企业文化强度 π 的变化而不连续地改变。在企业文化强度低于阈值 π_{crit} 时，成功完成的概率为 0；但随后，在此处考察的示例中，该概率会不连续地跃升至 70% 以上。

我们在以下引理中对这一性质进行形式化表述。

引理1. 设 $m \geq 2$ 和 $n \geq 1$。那么，存在一个值 $\pi_{\text{crit}} \in (0, 1]$ 使得：(i) 对所有 $\pi < \pi_{\text{crit}}$，$\rho(\pi) = 0$；(ii) $\rho(\pi)$ 在 π_{crit} 处有唯一的间断点；(iii) 对所有 $\pi \geq \pi_{\text{crit}}$，$\rho(\pi)$ 严格递增；(iv) $\lim_{\pi \downarrow \pi_{\text{crit}}} \frac{\partial \rho(\pi)}{\partial \pi} = \infty$、$\lim_{\pi \uparrow 1} \frac{\partial \rho(\pi)}{\partial \pi} = 0$，以及 $\frac{\partial \rho(\pi)}{\partial \pi}$ 在其他情况下均为有限值。

这种关系已经带来了一些显著的影响。随着企业文化改善，完成任何任务首先会在企业文化强度达到某个阈值时成为可能。此外，组织的可靠性 ——定义为任务完成的概率——会随着企业文化越过阈值 π_{crit}，瞬间从 0 增至一个较大的正数。这意味着，企业文化稍有下降，就可能对复杂组织的生产和利润产生巨大负面影响。

如果 $m \geq 2$，我们就称任务为复杂的，也就是说，在每个生产阶段至少需要两种类型的投入（且 L 很大）。复杂性是不连续点的关键。如果待完成的任务简单，每个阶段只需要一种类型的子任务（$m = 1$），那么任务成功完成的概率 ρ 关于 π是连续的。图2(B)对此作了说明。

对于有限深度 $L < \infty$，也可以进行类似的分析，我们将根任务 M 的完成概率记为 $\rho_L(\pi)$。函数 ρ_L 一致收敛到本文研究的函数 ρ （Elliott、Golub和Leduc，2022 年，引理 SA2）；在线附录中还有进一步讨论。

[8]这也可以通过取有限层模型的大-L 极限得到；参见 Elliott 等人（2022 年，II.C）。

3. Endogenizing corporate culture

迄今为止，企业文化 π 一直被建模为外生变量。本节将根据工人对企业文化的投资，对 π 的内生决定进行建模。

3.1. 内生投资模型。

3.1.1. 工人努力与文化决定。共有 k 名工人。工人 i 可以付出努力 $x_i \in [0,1]$ 来维持企业文化。投资成本 x_i 为 $c(x_i)$，由工人 i承担。令 $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k)$ 表示这 k名工人的投资选择组合。企业文化强度为 $\pi_k(x, \pi)$，是一个随投资 x_i 和企业文化基准水平 π增加而增加的函数，满足 $\pi_k(x, \pi) = \pi$，其中对所有 i,均有$x_i = 0$。如果不同工人在组织中承担不同角色，那么他们对企业文化的影响也可能有所不同（例如,管理者可能拥有更大的权重）。因此，企业文化强度由平均投资和基准水平 π 通过以下公式决定：

$$\pi_k(x, \underline{\pi}) = \underline{\pi} + \sum w_{k,i} h(x_i) \tag{2}$$

其中，$w_{k,i} > 0$是个体 i 在该平均值中的权重[9]，且$\sum_i w_{k,i} = 1$。这里，$h: [0,1] \to [0,h]$,其中 $h = 1 - \pi$，是一个递增且弱凹的函数，满足 $h(0) = 0$ 且 $h(1) = h$，用于刻画投资回报可能递减的情况。[10]

我们的主要结果聚焦于大型组织极限，即工人数量 k 不断增加的情形。我们假设，在这一极限下，每位工人对企业文化的边际影响都可以忽略不计：

假设1。 $\max_i w_{k,i} \to 0$ 当 $k \to \infty$时。

我们假设$\underline{\pi} < \pi_{\text{crit}}$，因此，根据引理1，当个人不努力维护企业文化时，每项给定协作能够正常运作的概率过低，无法成功完成复杂任务。我们还作出以下假设：

假设2。 $c(x_i)$是光滑且凸的，满足 $c(0) = 0$；对于任意 $x_i > 0$，$c'(x_i) > 0$；$c'(0) = 0$；并且$\lim_{x_i \uparrow 1} c'(x_i) = \infty$。

3.1.2. 投资博弈。 博弈的时序如下。在时间0，工人同时选择各自的投资 x。在时间1，协作网络中的每条连接以 $\pi_k(x, \pi)$的概率正常运作。网络实现决定根任务 M 能否成功完成。

工人的收益取决于网络的可靠性 ρ，即完成根任务 M 的概率。假设每位工人 i 在复杂任务完成后都能获得一项收益 $a_i > a > 0$（工人之间的收益可能不同）。因此，工人 i 的期望收益可表示为

$$U_i(x_i, x_{-i}) = \underbrace{a_i \rho(\pi_k(x, \underline{\pi}))}_{a_i \times \text{ Probability of successful task completion}} - \underbrace{c(x_i)}_{\text{Cost of investment}}. \tag{3}$$

尽管组织中的个人职位各不相同，但他们的利益在某种程度上是一致的：所有工人都能从成功完成

[9]例如，如果 e 是树形网络中的节点总数，而 $e_{k,i}$ 是由工人 i 占据的此类节点数，那么我们可以令 $w_{k,i} = e_{k,i}/e$.

[10]在在线附录中，我们证明，对于 $\pi_k(x, \pi)$ 采用更一般的函数形式时，我们的结果仍然成立。

复杂任务中获得一些额外收益（例如通过奖金、股票期权、未来的职业发展成功等）。为简化起见，我们假设所有收益都取决于单一的根任务。更贴近现实的情况是，不同工人可能因不同任务而获得奖励。只要每个人都能因完成某项或某些高-L 任务而获得奖励，我们的分析便可轻松推广。

3.2. **均衡分析**。随着 k 不断增大，每个工人的努力对企业文化的边际影响变得微不足道。然而，个人的贡献边际成本并不会消失。这就引出了一个问题：鉴于搭便车问题如此严重，工人是否会自愿贡献，从而将企业文化强度提升到外生基准水平 π 以上?

图2(A)显示，尽管存在这一问题，对企业文化的均衡贡献仍可能相当可观。我们在理想化情形下阐释其中的关键逻辑： $L=\infty$，其中任务无限分支；正如我们在在线附录中所讨论的，对于一个规模较大的有限 L，也可以表述与我们的结果相类似的结论。在没有投资的情况下，任务成功完成的概率为 0。现在假设每个工人 i 都进行投资 x_i，使得 $h(x_i) = \pi_{\text{crit}} - \pi$。那么，企业文化将处于间断点 π_{crit}，在该点，根据引理1(iv)， $\rho(\pi)$ 的导数为无穷大。在这样一个点，对于数量较多但有限的工人而言，投资的边际收益高于投资的边际成本。因此，存在一个略高于 π_{crit} 的企业文化水平 π，在该水平上，所有工人的边际收益都等于边际成本。这就形成了一个存在正向自愿贡献的均衡。

在这样的均衡中，投资的边际收益必须等于边际成本 s:

$$a_i \frac{\partial \rho}{\partial \pi_k} \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} = a_i \frac{\partial \rho}{\partial \pi_k} w_{k,i} h'(x_i) = c'(x_i), \ \forall i.$$

要使这一点成立，我们需要在 π 的均衡值处评估的 $\partial\rho/\partial\pi_k$ 随着 k 增大而足够大（回想一下，当 $k \to \infty$ 时，$\max_i w_{k,\,i} \to 0$，因此每位工人的投资对 π 的边际影响也会逐渐减小至 0）。因此，均衡将从上方趋近间断点（此时 $\partial\rho/\partial\pi_k$ 会变得任意大），从而处于临界点边缘。

现在，考虑一种外生[11] 冲击，它会在主体选择投资之后，哪怕只是略微降低企业文化强度的基准水平π （这里的解释是，我们考虑的时间尺度内，主体没有时间调整投资以补偿这种变化）。例如，这种冲击可能是宣布合并或管理层变动，也可能是工作环境中的任何其他变化，从而降低协作效率。由于均衡配置处于临界点边缘，这种冲击将导致组织完成复杂任务的概率骤降，甚至彻底崩溃。

为了使上述讨论形式化，我们现在定义一种强意义上的脆弱性：在企业文化强度受到微小外生冲击后，组织完成复杂任务的能力将彻底崩溃。

[11]在在线附录的第**??** 节中，我们进一步表明，即使基准企业文化强度受到 *anticipated* 冲击 π，我们的结果仍然稳健；也就是说，工人会考虑到此类外生冲击可能发生。

定义 1（脆弱性）**：** 均衡策略组合 x^* 是 ϵ-脆弱的，如果 $\rho(\pi_k(x^*,\ \pi - \underline{s})) = 0$，对于任意 $s > \epsilon > 0$均成立。也就是说，在基准企业文化强度 π受到大于 ϵ 的负向冲击后，完成复杂项目的概率降至 0。

现在我们可以陈述主要结果。

命题1。

(a) 存在一个 k，使得对于 $k > k$: (i) 存在一个无贡献均衡，其中$x_i^* = 0$ 对所有 i均成立。(ii) 如果 a 足够大[12]，且 $\underline{w}_{k,\ i}/w_{k,\ j}$ 一致有界，则存在一个正投资均衡——在该均衡中，$x_i^* > 0$ 对所有 i均成立。(b) 对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $k(\epsilon)$，使得对于 $k > k(\epsilon)$，任意正投资均衡 x^* 都满足 $\pi_k(x^*,\ \pi) \leq \pi_{\text{crit}} + \epsilon$，并且具有 ϵ脆弱性。

支撑正投资均衡的关键力量在于，ρ对文化水平 π 的敏感性，使得每位工人对任务完成的边际影响足以激励其进行正投资。这种敏感性也使结果容易受到全局冲击的影响。在实践中，组织可能拥有“备用”流程，以便在无法支持复杂生产时，生产价值较低的替代品（见第4.2节）。我们还注意到，脆弱性与对特质冲击的稳健性并存，而特质冲击会导致许多协作无法运行。事实上，网络中内置的冗余（即每个子任务最多可由 n 名工人完成）使系统对局部冲击具有相当强的稳健性。

4. Discussion and Extensions

4.1. 与其他企业文化理论的联系与对比。文献中提出了若干关于企业文化的经济学理论（例如，Camerer 和 Vepsalainen（1988）、Kreps（1990）、Akerlof 和 Kranton（2005）、Akerlof 等（2020）、Kets（2021）以及 Gibbons 等（2021））。我们并不将这些理论视为对我们方法的替代，而是将其视为这一复杂概念的其他侧面。总体而言，这些理论与我们对企业文化的看法一致：企业文化能够支撑共同的共识和规范，从而帮助解决代理问题及其他摩擦。我们方法的新颖之处在于，将复杂且层级嵌套的任务网络，与把文化视为一种公共品的模型结合起来。

我们模型的一个重要特点是，主体所投资建设的文化具有全局性，即存在于组织层面。当然，有些投资更具局部性，例如与特定合作者建立更深层次的共识。Elliott、Golub 和 Leduc（2022）在一个密切相关的生产模型中，仅对个体自身的关系进行投资建模；ρ 对全局文化的敏感性在该模型中并不直接影响主体的投资激励。这一重要的理论差异意味着，在另一个模型中，正的均衡投资可以使结果远高于临界点——而这在本文模型中不可能发生。

这一比较的启示是，如果纯粹的地方投资激励足够强，那么协作就能够在无需投资于更广泛的企业文化的情况下实现复杂生产。本文提出的理论适用于这种情况并未

[12] a 所需的下界不取决于 k。

发生的情形，即对全组织文化的自愿投资发挥着重要作用。在大型组织中，这一点尤其明显，因为新的协作经常在既有紧密关系之外产生——例如，由于任务的复杂性和不断变化，以及人员流动。[13] 因此，广泛的企业文化对于促进生产力变得至关重要。

结果对个人投资的内生敏感性，可能会与组织理论中的其他议题产生有趣的相互作用。例如，多边执行理论依赖于广泛合作破裂的威胁，以阻止对规范或承诺的违反（Levin，2002）。许多工人通过撤回投资来采取这种“冷酷触发策略”协调，未必总是可信。相比之下，如果均衡表现内生地高度依赖个人或小群体的投资（如我们的模型所示），这种威慑就可能更具可信度。

4.2. 选择组织的复杂程度。我们现在对基准复杂组织模型作最小限度的扩展，以说明在项目复杂程度内生化时会出现的一些现象。

假设在我们所研究的博弈开始之前，企业管理层可以在简单项目和复杂项目之间作出选择。对于简单项目，每项任务（包括完成最终项目）都只需要完成一种类型的子任务。对于复杂项目，每项任务都需要两种类型的子任务。两种情况下，每种类型的子任务都有两种潜在协作，因此 $n = 2$。我们假设复杂项目一旦完成，其价值远高于简单项目，并再次考虑 $L = \infty$情形，其中工人数量 k 很大。最后，我们假设组织会开展预期价值最高的项目；对于某个项目，如果存在多个均衡，则选择生产性最高的均衡。

如图3(A)所示，企业文化强度存在一个关键阈值，低于该阈值时，任何任务，无论简单还是复杂，都必然无法完成。我们将该阈值记为 $\pi_1 > 0$。此外，由于执行简单任务时成功完成的概率不存在不连续点，因此，只要选择简单任务，就不会对企业文化强度作出任何贡献，其均衡水平将为基准水平 π。

现在我们来考察复杂任务下正贡献均衡是否存在。根据命题1，我们知道，当高效完成复杂任务时，复杂任务可能存在正贡献均衡。因此，在这种情况下，存在某个阈值[14] $\pi_2 \geq 0$，使得停工是高效的，并且当 $\pi \leq \pi_2$ 时，不存在正贡献均衡。

第三个经过深入讨论的关键阈值，是实际（而非基准）企业文化强度的阈值；达到该阈值时，复杂任务成功完成的概率首次变为正值。此前我们用 π_{crit} 表示这一阈值。在本节中，我们用 π_3 表示该阈值，并注意到 $\pi_3 > \pi_2$。这一阈值对均衡很重要，因为当基准强度为 $\pi > \pi_3$ 时，

[13] Rahmandad 和 Repenning（2016）的调查证据表明，这类力量需要不断补充企业文化存量。[14] 我们假设 $\pi_2 > \pi_1$，尽管这确实取决于问题的参数化设定。

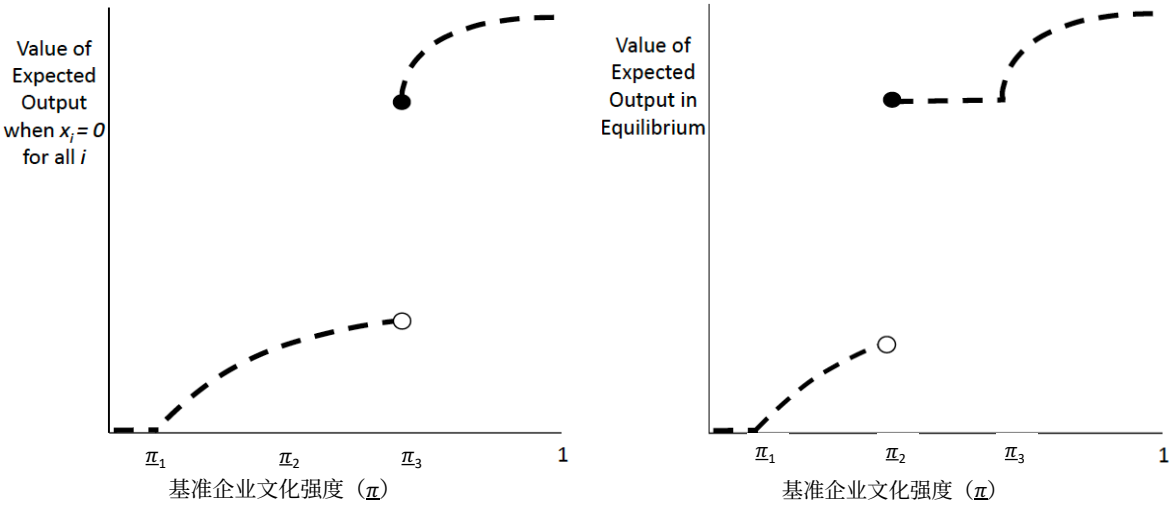

FIGURE 3. 在简单项目与复杂项目之间进行选择：面板（A）展示了在没有任何企业文化贡献（$x = 0$）时，预期产出的价值如何随基准企业文化强度变化。面板（B）展示了预期均衡产出的价值如何随基准企业文化强度变化，其中贡献 x^* 为均衡状态下的贡献。

成功完成任务的概率不连续点与激励个人贡献无关，并且存在一个唯一均衡，其中无人作出贡献。

现在，我们可以考察在以下假设下，随着基准企业文化强度 π 上升，均衡状态会如何变化：对于给定任务，选择产出最高的均衡；在此基础上，再选择产出最高的任务。这一情况见图3（B）。首先，当π足够低时，不会有任何产出。这对应于基准企业文化强度足够低，以至于连简单任务都无法成功完成的情形。随后，超过阈值 π_1 后，企业会通过简单任务获得正产出，但均衡中不会有任何个人对企业文化作出贡献。接着，超过阈值π_2 。此时，企业转而采用复杂任务，均衡也转变为正贡献均衡。此时，内生的企业文化强度 π（x^*，π）等于 π_3 （正如我们所说，它等于临界水平 π_{crit}），而产出在这一附近会出现不连续增长。然而，产出仍然脆弱，企业文化受到轻微冲击后就会崩溃。随着基准企业文化强度持续上升，均衡中的私人投资会减少，但整体均衡企业文化强度将保持在 π_3。在这一范围内，基准企业文化强度的提升会完全挤出私人努力。最后，超过阈值 π_3 后，均衡中将不再有对企业文化的贡献，但后者仍会变得更能抵御冲击——要造成企业完成任务的能力崩溃，需要更大的冲击。

对我们的模型进行这一简单扩展，与企业完成复杂任务的能力和企业文化强度之间存在正相关这一观点相一致。此外，这也表明，在均衡中，改善基准企业文化所带来的回报会以一种非单调且颇有意思的方式变化。跨越阈值 π_1 或 π_2所带来的回报

可能非常可观，而其他改进则影响甚微，甚至毫无影响。这对工人贡献公共品的激励机制也有有趣的影响。低于 π_2 或高于 π_3时，他们没有这样做的动机，但在这两个阈值之间，他们会进行严格为正的投资。_

4.3. 领导力。 本节中，我们在组织层面构建企业文化选择模型，并考察公司面临变化的环境时可能出现的问题。

为将工人被要求投入其中的文化是组织的一项战略选择这一观点形式化，假设每个组织选择一种企业文化 $\theta_j \in \Theta$，其中Θ 是一个有限集合。[15] 为体现企业文化必须与组织相适配这一公认观点（即一种文化并非适合所有组织），我们令每家企业 j 拥有一个映射

$$\underline{\pi}_j : \Theta \to [0, 1]$$

该映射根据企业的文化选择确定其基准企业文化强度。[16]

因此，在博弈的全新第零阶段，每家企业都会选择

$$\theta_j^* \in \operatorname*{argmax}_{\theta_j \in \Theta} \underline{\pi}_j(\theta_j),$$

并预期从我们主要分析所研究的博弈中最具生产性的均衡获得利润。（注意，企业的预期利润总是随 π_j 弱增。）现在我们运用这一框架来考察企业可能面临的一些挑战。首先，假设两个复杂组织 j 和 j' 合并。为简单起见，我们假设企业内的运营仍相互独立，但同时假设合并后的企业必须选择一种适合这两个组织的企业文化。在这种情况下，除非存在一种对两个组织而言都最优的 $\theta^* = \theta_j^* = \theta_{j'}^*$，否则至少有一个组织不得不采用与自身不太匹配的企业文化：π_j、$\pi_{j'}$ 或两者都会降低。于是有两种可能。如果工人的努力选择能够调整，可能会出现一种均衡，使他们增加努力，恰好抵消基准企业文化水平的下降。在这种情况下，组织执行复杂任务的能力不会发生变化。然而，这种均衡也可能不存在。如果 π_j 足够低，唯一均衡将是工人不付出努力，导致组织无法完成复杂任务。如果工人没有时间调整努力水平，生产也可能失败。因此，该理论预测，合并会给大型组织执行复杂任务的能力带来重大风险；合并企业原本的企业文化越不一致，这种风险就越大。企业文化不兼容常被视为合并失败的原因（Cartwright and Cooper，1993；Kotter，2008），也被视为解释哪些企业能够成功整合的一种机制，因而值得关注（Gorodnichenko, Kukharskyy, and Roland，2018）。[17]

我们考虑的第二个挑战，是大型组织中的领导层更迭。领导者能够发挥的一项重要作用，是确立企业文化并协调

[15]管理学文献中有大量研究提出了与这种建模方法相符的企业文化类型学。例如，Groysberg 等人（2018）。[16]管理学文献中有一类研究提出了与这种建模方法相符的企业文化类型学。例如，参见 Groysberg 等人（2018）。[17]由于企业文化难以衡量，要获得能够确立其因果效应的田野证据并不容易。Weber 和 Camerer（2003）开展了一项实验室实验。在一种与我们的观点相符的企业文化解释下，他们发现，受试者群体可以分别建立规范和共识；一旦这些群体合并，表现就会显著下降。

全组织范围的努力方向（Gibbons 和 Henderson，2012；Bolton 等，2013）。我们可以认为，可用文化的选择集因领导层而异：即 Θ_j 取决于企业 j的领导层。因此，领导层更迭后，原有的 θ_j^* 可能不再可行。这既会带来机遇，也会带来风险。新领导层或许能够为组织选择更好的企业文化，从而改善 π_j。如果组织起初处于这样一种 π_j ，以至于正在进行零贡献均衡，那么由此带来的任何均衡选择变化都至少不会造成损害。然而，如果正在进行正贡献均衡，那么企业文化的改变可能导致贡献归零。事实上，领导层更迭可能意味着这将成为唯一的均衡。再次，这种变化会削弱公司承担复杂任务的能力，损害其利益。

有一些观察结果与此相符。首先，拥有强大企业文化的组织似乎常常从内部任命领导者，从而有助于维持企业文化。其次，当强有力的领导者意外离任时，组织的股票价格往往会大幅下跌（Quigley、Crossland 和 Campbell，2017）。这可能反映出人们担心新领导层无法维持成功的企业文化。

5. Proofs

引理*1*的证明。根据式（1），如果 $r = \rho(\pi)$ 且 $r > 0$，那么我们可以对（1）进行变换，得到

$$\pi = \Pi(r) := \frac{1 - (1 - r^{1/m})^{1/n}}{r}.$$

Elliott、Golub 和 Leduc（2022）的引理SA1证明了（iv）中除第一条陈述外的所有内容。证明方法是指出， Π 在某一点（r_{crit}， π_{crit}）处有唯一最小值，并且 Π 是 ρ 在定义域 $\pi \in [\pi_{\text{crit}}, 1]$ 上的反函数。为验证（iv），注意到前一句意味着 $\frac{d\rho}{d\pi}\big|_{\pi \downarrow \pi_{\text{crit}}} = 1 \Big/ \frac{d\Pi(r)}{dr}\big|_{r \downarrow r_{\text{crit}}}$。由于 Π 连续可微，且在 $r = r_{\text{crit}}$ 处取得最小值，因此其导数在该处必须为0。□

命题*1*的证明。 我们先证明 (b) 部分。考虑工人 i 在无限长度（$L = \infty$）树中的期望效用：

$$U_i(x_i, x_{-i}) = a_i \rho(\pi_k(x, \underline{\pi})) - c(x_i).$$

根据链式法则，工人 i 增加其投资所带来的边际效用为

$$\frac{dU_i(x)}{dx_i} = a_i \left(\frac{\partial \rho(\pi_k(x, \underline{\pi}))}{\partial \pi_k(x, \underline{\pi})} \right) \left(\frac{\partial \pi_k(x, \underline{\pi})}{\partial x_i} \right) - c'(x_i). \tag{4}$$

第一项是 i 增加 x_i 所带来的边际收益，第二项是 i 的边际成本。

令 $\frac{\partial \rho}{(\pi_k(x,\pi))\ \partial \pi_k(x,\pi)}\Big|_{\pi_k(x,\pi)=\pi}$ 为 $\rho'(\pi)$，并注意到 $\frac{\partial \pi_k}{(x,\pi) \partial x_i} = w_{k,i} h'(x_i)$，则一阶最优条件（$\frac{dU_i}{(x)\ dx_i} = 0$）可表述为

$$a_i w_{k,i} h'(x_i) \rho'(\pi) = c'(x_i), \tag{5}$$

其中

$$\pi = \underline{\pi} + \sum_i w_{k,i} h(x_i). \tag{6}$$

正投资均衡 x^* 必须满足方程（5）和（6），且对所有满足 $x_i > 0$ 的 i 均成立，并且具有 $\pi_k(x, \pi) > \pi$。

现在考虑一列（以 k 为索引）的正贡献均衡。必定存在一个 $\delta > 0$ 以及序列 $i(k)$，使得对于每个 k，$x_{i(k)} \geq \delta$，并且公式 (5) 在 $i = i(k)$ 下成立；否则 $\lim_k \pi_k(x(k)\ \pi) = \pi$，根据引理1，没有人有动机进行正贡献。在该序列中，公式 (5) 的右侧与 0 保持正距离，而 $w_{k,\, i(k)} \to 0$ 根据假设1，且 h' 对于 $x_i \geq \delta$ 一致有界。因此，要使公式 (5) 成立，必须有 $\rho'(\pi_k(x(k)\ \pi)) \to \infty$；根据引理1，只有当 $\lim_k \pi_k(x(k)\ \pi) = \pi_{\text{crit}}$ 时，这才可能成立。

因此，存在一个 $k(\epsilon)$，使得如果 $k \geq k(\epsilon)$，那么 $\pi_k(x(k)\ \pi) < \pi_{\text{crit}} + \epsilon$。对基准企业文化强度 π 施加冲击 $s > \epsilon$，会导致企业文化强度变为 $\pi_{\text{crit}} - s < \pi_{\text{crit}}$，因而根据引理1，$\rho(\pi_{\text{crit}} - s) = 0$，从而证明了关于脆弱性的论断。

现在转向(a)部分，我们将证明，当 k 足够大时，始终存在一个零贡献均衡。我们考虑候选策略组合 $x = \vec{0}$ 以及偏离 $(x_i,\ x_{-i}) = (x_i,\ \vec{0})$，其中 i 采取行动 x_i，其他所有人都采取行动 0。当 k 足够大时，对于任意 $x_i \in (0, 1]$，

$$a_i \rho(\pi_k((x_i, \vec{0}), \underline{\pi})) = 0 < c(x_i),$$

因此投资收益小于成本。事实上，对于 $x_i > 0$，$c(x_i) > 0$；而当 $w_{k,\, i}$ 足够小时，对于所有 $x_i \in [0, 1]$，$a_i \rho(\pi_k((x_i,\ \vec{0})\ \pi)) = 0$，因为此时 $\pi_k((1,\ \vec{0})\ \pi) = \pi + w_{k,\, i} h(1) < \pi_{\text{crit}}$。由此可知，$x = \vec{0}$ 是一个均衡。

最后，我们证明正贡献均衡的存在性。定义 $g(x_i) = \frac{c'(x_i)}{h'(x_i)}$，它是递增的。[18] 注意，由于 $\lim_{x_i \to 0} g(x_i) = 0$ 且 $\lim_{x_i \to 1} g(x_i) = \infty$，因此可得 $\lim_{y \to 0} g^{-1}(y) = 0$ 且 $\lim_{y \to \infty} g^{-1}(y) = 1$。

对于 $\pi \geq \pi_{\text{crit}}$，定义 $X_i(\pi) = g^{-1}\Big(a_i w_{k,i} \rho'(\pi)\Big)$。现在定义[19]

$$P(\pi) = \underline{\pi} + \sum_i w_{k,i} h\Big(X_i(\pi)\Big) = \underline{\pi} + \sum_i w_{k,i} h\Big(g^{-1}\Big(a_i w_{k,i} \rho'(\pi)\Big)\Big). \tag{7}$$

任取 k。注意，$P(1) = \pi$。此外，根据我们上文关于 g 的讨论，当 $\pi \to \pi_{\text{crit}}$ 时，由上文可知，$P(\pi) \to 1$。因此，利用式 (7) 右侧的连续性和介值定理，存在 P 的一个不动点，且满足 $\pi \geq \pi_{\text{crit}}$。从现在起，令 $\pi^*(k)$ 表示这样的最大不动点，它满足 $\pi^*(k) > \pi_{\text{crit}}$。与此 $\pi^*(k)$ 对应的投资配置为 $x^*(k)$，其中 $x_i^*(k) = X_i(\pi^*(k)) = g^{-1}\Big(a_i w_{k,i} \rho'(\pi^*)\Big)$，且满足投资的一阶条件。

每个个体的投资问题在其自身投资 x_i 上是凹的，定义域为满足 $\pi_k((x_i, x^*_{-i}(k))\pi) \geq \pi_{\text{crit}}$ 的 x_i。因此，在这类 x_i 中恰好存在一个内点最优解。为证明这是全局最优解，我们检查 i 的收益在 $X_i(\pi^*(k))$ 处是否高于任何满足 $\pi_k((x_i, x^*_{-i}(k))\ \pi) < \pi_{\text{crit}}$ 的 x_i 所得到的 0 收益（若根据其他人的贡献，这种情况可能发生）。为此，我们首先注意到，存在一个 x，使得对所有 i，都有 $X_i(\pi^*(k)) < x < 1$；否则，根据关于权重比的假设，所有 $X_i(\pi^*(k))$ 都会趋近于 1，因此 $\pi^*(k)$ 会趋近于 1，这与 (b) 矛盾。现在，由于根据 (b)，$\pi^*(k) \to \pi_{\text{crit}}$，只需检查 $a_i \rho(\pi_{\text{crit}}) - c(x)$ 为正；根据 a 足够大的假设，这一点成立。□

[18] 这是因为 $g(x_i) = \frac{c'(x_i)}{h'(x_i)}$ 是递增的，而这又是因为 $c'(x_i)$ 递增，同时 $h'(x_i)$ 弱递减。[19] 其动机在于，利用（6），一个使所有主体都进行正投资的均衡企业文化强度 π，是 P 的不动点。

References

Akerlof, G. A. and R. E. Kranton (2005 *Journal of Economic Perspectives* 19 9 32): “身份认同与组织经济学”, , –。Akerlof, R., N. Matouschek, and L. Rayo (2020): “职场故事”, 载于 *AEA Papers and Proceedings*, 第 110 卷, 199–204。Bénabou, R., A. Falk, and J. Tirole (2018): “叙事、命令与道德推理”, 技术报告, 美国国家经济研究局。Blume, L., D. Easley, J. Kleinberg, R. Kleinberg, and É. Tardos (2013): “存在传染性风险时的网络形成”, *ACM Transactions on Economics and Computation (TEAC)*, 1, 1–20。Bolton, P., M. K. Brunnermeier, and L. Veldkamp (2013): “领导力、协调与企业文化”, *Review of Economic Studies*, 80, 512–537。Bramoullé, Y. and R. Kranton (2007): “网络中的公共品”, *Journal of Economic Theory*, 135, 478 494–。Brummitt, C. D., K. Huremović, P. Pin, M. H. Bonds, and F. Vega-Redondo (2017): “经济发展中的传染性扰动与复杂性陷阱”, *Nature Human Behaviour*, 1, 665。Camerer, C. and A. Vepsalainen (1988 *Strategic Management Journal* 9 115 126): “企业文化的经济效率”, , –。Cartwright, S. and C. L. Cooper (1993): “文化兼容性在成功的组织联姻中的作用”, *The Academy of Management Executive*, 7, 57–70。Dasaratha, K. (2023): “创新与战略性网络形成”, *Review of Economic Studies*, 即将出版, arXiv:1911.06872。Elliott, M., B. Golub, and M. V. Leduc (2022 *American Economic Review* 112 2701 47): “供应网络的形成与脆弱性”, , –。Erol, S. and R. Vohra (2022): “网络形成与系统性风险”, *European Economic Review*, 148, 104213。Gibbons, R. and R. Henderson (2012): “管理者做什么？：探究看似相似的企业之间持续存在的绩效差异”, 载于 *Handbook of Organizational Economics*, 普林斯顿大学出版社。Gibbons, R., M. LiCalzi, and M. Warglien (2021): “这是什么情境？共享框架与集体绩效”, *Strategy Science*, 6, 124–140。Gorodnichenko, Y., B. Kukharskyy, and G. Roland (2018): “文化距离、企业边界与全球采购”, 工作论文, 加州大学伯克利分校。Graham, J. R., J. Grennan, C. R. Harvey, and S. Rajgopal (2022): “企业文化：来自实地的证据”, *Journal of Financial Economics*, 146, 552–593。Groysberg, B., J. Lee, J. Price, and Y.-J. Cheng (2018): “如何管理组织生活的八个关键要素”, *Harvard Business Review*。Kets, W. (2021): “组织设计：文化与激励机制”, 工作论文, 数学研究所, 乌得勒支大学。König, M. D., A. Levchenko, T. Rogers, and F. Zilibotti (2022): “自适应生产网络中的总量波动”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 119, e2203730119。Kotter, J. P. (2008): *Corporate Culture and Performance*, 西蒙与舒斯特出版社。Kreps, D. M. (1990): “企业文化与经济理论”, *Perspectives on Positive Political Economy*, 90。Levin, J. (2002 *The Quarterly Journal of Economics* 117 1075 1103): “多边契约与雇佣关系”, , –。Levine, D. (2012): “生产链”, *Review of Economic Dynamics*, 15, 271–282。Nguyen, K.-T.(2018): “企业内部的信任与创新：来自匹配的首席执行官—企业数据的证据”, 技术报告, 工作论文。伦敦政治经济学院。Quigley, T. J., C. Crossland, and R. J. Campbell (2017): “股东对首席执行官影响变化的认知：对意外首席执行官死亡事件的市场反应, 1950–2009年”, *Strategic Management Journal*, 38 939 949, –。Rahmandad, H. and N. Repenning (2016): “能力侵蚀动态”, *Strategic Management Journal*, 37 649 672, –。Weber, R. A. and C. F. Camerer (2003): “文化冲突与并购失败：实验方法”, *Management Science*, 49, 400–415。

在线补充附录：企业文化与组织脆弱性

MATTHEW ELLIOTT、BENJAMIN GOLUB 和 MATHIEU V. LEDUC*

1. Convergence of finite trees

在实践中，大型企业成功完成一项复杂任务所需的工人数量和协作次数并非无限。因此，分析我们所研究的极限树在多大程度上能够代表有限树是有益的。为了对此形成一些直观认识，我们将分析一个规则协作树网络的情形，其中$m = n = 2$。请注意，对于任何有限的 L，任务成功完成的概率 $\rho_L(\pi)$都可以用递归公式表示。该公式为

$$\rho_L(\pi) = (1 - (1 - \pi\rho_{L-1}(\pi))^2)^2$$

且 $\rho_1(\pi) = 1$。（参见 Elliott、Golub 和 Leduc（2022 年），第 II.C 节。）

图1展示了任务成功完成的概率 $\rho_L(\pi)$随 π 变化的情况，其中 L取不同值。我们可以看到，层数较少的生产树（即$L = 5$ 或 $L = 10$）已经能够相当准确地逼近极限情形，因为曲线在 π_{crit} 附近的斜率非常大。此外，我们还可以看到，导数达到最大值的点迅速收敛至 $\pi_{\text{crit}} \approx 0.844$，且曲线在该点附近的斜率几乎变为垂直。

还需注意，对于任何有限的 L 值，曲线都是连续的；不连续点仅出现在极限情形（标记为 $L = \infty$）中。然而，曲线在 π_{crit} 附近的斜率几乎变为垂直，这正是随着工人数量增加，能够使具有正公共品贡献的均衡得以存在的关键因素。

为了计算每个 L 对应的均衡，我们将采用以下函数形式。首先，在收益函数中（正文中的式 (3)，此处重列），对所有 i，令 $a_i = 2$：

$$U_i(x_i, x_{-i}) = a_i\rho_L(\pi_k(x, \underline{\pi})) - c(x_i).$$

其次，在正文的式 (2) 中，我们将个人投资通过以下函数映射为企业文化强度

$$\pi_k(x, \underline{\pi}) = \underline{\pi} + \frac{1}{k}\sum_i x_i.$$

我们注意到，我们将每个工人的权重设为 $w_{k,i} = 1/k$，其中 k 为工人总数，因此他们对企业文化强度的影响相同。这将使对称均衡得以成立。为简单起见，我们还令 $k = \kappa(L) = L$ 和 $\underline{\pi} = 0$。

最后，我们令成本函数为

$$c(x) = \frac{1}{(1-x)^\alpha} - 1,$$

打印日期. 2023年1月20日。

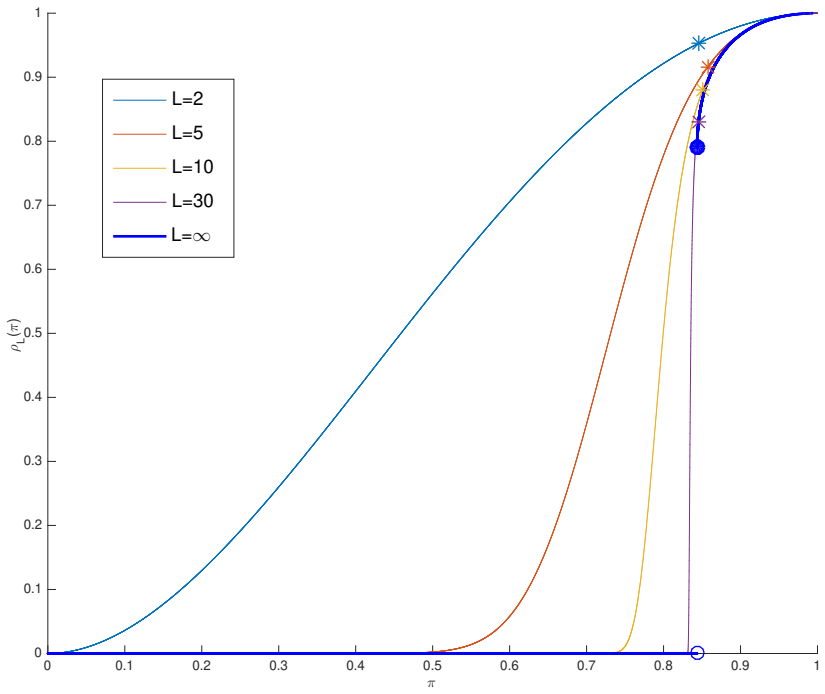

FIGURE 1. 复杂任务完成概率 $\rho_L(\pi)$ 随企业文化强度 π 变化的曲线：当协作树网络为规则网络时，L（层数）取不同值的情况（$n = 2$ 和 $m = 2$）。当$L = \infty$时，不连续临界点为（π_{crit}，$\rho(\pi_{\text{crit}})$）$\approx$(0。844，0。790)。每条具有有限 L 的曲线上的星号，对应于特定层数下的均衡点。

其中 $\alpha = 0.08$。

采用这些函数形式，图1中的“星号”对应于均衡点$\big(\pi_k(x^*,\ \pi)\ \rho_L(\pi_k(x^*,\ \pi))\big)$，分别对应 L的不同取值。 –

请注意，复杂任务完成均衡概率$\rho_L(\pi_k(x^*,\ \pi))$对企业文化强度外生冲击的敏感性会随着 L的增加而增强。以有 $L = 10$ 层的协作树网络为例，该网络对无限网络的近似相当合理。我们看到，外生冲击 s 导致企业文化强度下降略多于10%（从 $\pi_{10}(x^*,\ \pi)$ ≈ 0.85 降至$\pi_{10}(x^*,\ \pi - s) = \pi_{10}(x^*,\ \pi) - s \approx 0.75$），会使成功完成概率下降近100%（从 $\rho_{10}(\pi_{10}(x^*,\ \pi)) \approx 0.88$ 降至约0）。

–

2. FRAGILITY WITH FINITE TREE DEPTH

在本小节中，我们将展示，对脆弱性的分析所得出的主要结论同样适用于具有 $L < \infty$ 层的网络。

命题 SA 1。 (i) 对任意 $\zeta > 0$，存在 L 和 k，使得对于所有 $L > \underline{L}$ 和$k > k$，都存在一个均衡，满足对于所有 i均有 $x_i^* < \zeta$。(ii) 固定任意 ϵ，$\eta > 0$。存在L 和 k，使得当 $L > L$ 和 $k > k$时，任何均衡投资配置 x^* – –

使得 $\pi_k(x^*,\ \pi) > \underline{\pi}_{\text{crit}}$ 是（$\epsilon,\ \eta$）脆弱的，其含义是 $\rho_L(\pi_k(x^*,\ \pi - s)) < \eta$ 对所有冲击 $s > \epsilon$ 均成立。

我们首先证明第(i)部分：

回顾上一节，$\rho_L(\pi)$可以表示为

$$\rho_L(\pi) = (1 - (1 - \pi\rho_{L-1}(\pi))^n)^m$$

其中 $\rho_1(\pi) = 1$。

考虑一个投资配置 $\hat{x}$，使得对所有 i，$\hat{x}_i = 0$ 成立。于是，对所有 L 和 k，任一个体 i 的边际收益都高于边际成本：

$$a_i \left(\frac{\partial \rho_L(\pi_k(\hat{x}, \underline{\pi}))}{\partial \pi_k(\hat{x}, \underline{\pi})} \right) \left(\frac{\partial \pi_k(\hat{x}, \underline{\pi})}{\partial x_i} \right) > c'(\hat{x}_i) = 0$$

因为根据正文的假设2，$c'(0) = 0$；而 $\rho_L(\pi)$是在(0,1)上严格递增的函数，因此对所有 $\pi \in [\pi, 1,\ \rho'_L(\pi) > 0$（此处令 $\pi > 0$）。

现在考虑一个投资配置 $\hat{x}^\zeta$，使得对所有 i，$\hat{x}_i^\zeta = \zeta > 0$ 成立，其中 ζ 任意。于是，存在 L 和 k，使得对所有 $L > L$ 和 $k > k$，任一个体 i 的边际收益都低于边际成本：

$$a_i \left(\frac{\partial \rho_L(\pi_k(\hat{x}^\zeta, \underline{\pi}))}{\partial \pi_k(\hat{x}^\zeta, \underline{\pi})} \right) \left(\frac{\partial \pi_k(\hat{x}^\zeta, \underline{\pi})}{\partial x_i} \right) < c'(\hat{x}_i^\zeta)$$

因为根据正文的假设2，对于所有 $x_i > 0,\ c'(x_i) > 0$；而根据正文的假设1，$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial \pi_k(x,\pi)}{\partial x_i} = \lim_{k\to\infty} w_{k,i} = 0$，且 $\frac{\partial \rho_L(\pi_k(x,\pi))}{\partial \pi_k(x,\pi)}$ 是有限的（注意，根据正文的引理1，除 ρ 的间断点外，$\lim_{L\to\infty} \frac{\partial \rho_L(\pi_k(x,\pi))}{\partial \pi_k(x,\pi)}$ 均为有限值）。

由于对于所有有限的 L，$\frac{\partial \rho_L}{(\pi_k(x,\pi))\ \partial \pi_k(x,\pi)}$，其在 $\pi_k(x, \pi)$ 中连续，且 $\pi_k(x, \pi)$ 在 x_i 中连续，根据介值定理，必定存在使边际收益等于边际成本的投资 $x_i = x$。因此，当 $L > L$ 且 $k > k$ 时，存在一个均衡，使得对于所有i，$x_i^* = x < \zeta$。

现在我们证明第(ii)部分：

在任何满足 $\pi_k(x,\ \pi) \geq \pi_{\text{crit}}$ 的均衡中，每个个体 i 通过贡献获得的净边际效用必须为零：$\frac{dU_i(x)}{dx_i} = 0$。考虑每个个体的任意均衡投资水平序列，$\hat{x}_i(L,\ k)$，使得对于任意 i

$$\left[a_i \left(\frac{\partial \rho_L(\pi_k(x, \underline{\pi}))}{\partial \pi_k(x, \underline{\pi})} \right) \left(\frac{\partial \pi_k(x, \underline{\pi})}{\partial x_i} \right) \right] \Bigg|_{x_i = \hat{x}_i(L,k)} = c'(\hat{x}_i(L, k)).$$

考虑任意一个在两个坐标方向上都趋于无穷大的数值序列 (L, k)。注意，当 $\pi_k(\hat{x}(L, k)\ \pi) > \pi_{\text{crit}}$ 时，$\hat{x}(L, k)$ 有一个严格大于零的下界。因此，上述方程右侧的极限严格为正。由于 $\frac{\partial \pi_k(x,\pi)}{\partial x_i}$ 趋于 0，且 a_i 一致有界，所以 $\frac{\partial \rho_L(\pi_k(x,\pi))}{\partial \pi_k(x,\pi)}$ 趋于 ∞。根据正文中的引理1，可知 $\pi_k(\hat{x}(L, k)\ \pi) = \pi \pm \sum_i w_k,\ {}_i h(\hat{x}_i(L, k))$ 趋于 π_{crit}。

由此可知，对于任意 $\epsilon,\ \eta > 0$，都存在 L 和 k，使得当 $L > L$ 且 $k > k$ 时，对所有冲击 $s > \epsilon$，均有 $\rho_L(\pi_k(x,\ \pi - s)) < \eta$。因此，即使是一次小冲击，也会使组织完成复杂项目的能力近乎彻底崩溃。

3. A GENERALIZED MODEL WITH ANTICIPATED SHOCKS

我们假设，在第 1 层，必须完成复杂任务的工人 i 需要 m_i种输入，其中 m_i取自概率分布 p，其支持集为 $[m, m+1, ..., \bar{m}]$；对于每种输入，都有 n_i 个潜在提供者，这些提供者取自支持集为 $[n, n+1, ..., \bar{n}]$的概率分布 q。我们取 $m \geq 2$和 $n \geq 1$。第 2 层的情况大致相同。该层的输入提供者 j 自身需要 m_j 种输入，其中m_j 同样取自概率分布 p；对于每种输入，他都有 n_j 个潜在供应商，其中 n_j 取自概率分布 q。这一过程以此类推，直至第 L 层，在这一层，任务完成不再需要任何输入。因此，从本质上说，这棵树直到最后一层都是一个随机分枝过程：每个节点所需品种的数量取自分布 p，而每种品种可用的任务提供者数量则依据 q抽取。

博弈的时间安排如下。在时间 0，主体同时投资于企业文化$x_i \in [0,1]$ 。投资成本 x_i 为 $c(x_i)$，由 i承担。令 x 表示投资选择的组合。企业文化强度由投资 x、企业文化基准水平 π以及冲击s决定，是它们的函数 $\pi_k(x,\pi,s)$；当所有个体都选择 $x_i = 0$（即 $x = \vec{0}$）时， $\pi_k(\vec{0},\pi,0) = \pi$。在时间 1，随机潜在协作树状网络形成，其中每个节点 j 都需要下层的 $m_j \sim p(m)$ 个输入，并且每项输入都可能由 $n_j \sim q(n)$名工人提供，具体如前所述。此外，冲击发生的概率为$\psi > 0$。发生冲击时，其幅度 s 取自概率密度函数$f(s)$。随后，与复杂任务相关的每条连接都以 $1-\pi_k(x,\pi,s)$ 的概率失效，最终网络由此形成。这决定了任务能否成功完成。

在时点 0，工人 i 进行投资时的期望收益为

$$U_i(x_i, x_{-i}) = \underbrace{(1-\psi)a_i\rho_L(\pi_k(x,\underline{\pi},0)) + \psi a_i \int_s \rho_L(\pi_k(x,\underline{\pi},s))f(s)ds}_{\text{Expected payoff from the complex project}} - \underbrace{c(x_i)}_{\text{Cost of investment}}. \quad (1)$$

与正文一样，我们主要关注具有无限层数（$L = \infty$）的模型，并将证明 $\rho_L(\pi)$ 一致收敛于 $\rho(\pi)$。

我们作出以下假设：

假设 SA 1。

(i) $c(x_i)$ 是光滑、凸的，且 $c(0) = 0$，对于所有 $x_i > 0$， $c'(x_i) > 0$， $c'(0) = 0$，并且 $\lim_{x_i \uparrow 1} c'(x_i) = \infty$。(ii) $\pi_k(x,\pi,s)$ 是一个函数 π_k：$[0,1] \times [0,1] \times [s,s] \to [0,1]$，具有以下性质：(a) 光滑、凹，且关于每个 x_i 严格递增，关于 π严格递增，关于 s 严格递减。当所有主体都选择 $x_i = 0$（即 $x = \vec{0}$）时，$\pi_k(\vec{0},\pi,0) = \pi$。(b) 对所有可能的贡献组合 x，当 $k \to \infty$ 时，$\max_i \partial\pi_k(x,\pi,s)/\partial x_i \to 0$。(iii) $f(s)$ 连续，其支撑集为 $[s,s]$，且 $s > s > 0$。

假设 SA 1(i) 是成本函数的标准假设。要求 π_k 关于 x_i 严格递增，这意味着只要主体数量有限，每个个体的贡献都会严格提高企业文化强度。条件 (ii)(b) 要求，当工人数量 k 变大时，搭便车效应会加剧——每个个体的贡献对整体企业文化强度的影响微乎其微。最后，假设 SA 1(iii) 意味着任何特定大小 s 的冲击发生的概率为零，并要求所有冲击（发生时）的大小至少为 $s > 0$，从而排除大小为 0 的冲击。

以下补充定义将会有所帮助。

定义 SA 1 ((ϵ, γ)-脆弱性)。 如果存在某个企业文化强度 $\tilde{\pi}$ 使得均衡策略组合 x^* 满足以下条件，则称其为(ϵ, γ)-脆弱的

(1) $\pi_k(x^*, \pi, 0) \geq \tilde{\pi} > \pi_k(x^*, \pi, s)$ 对所有冲击 $s > \epsilon$均成立；(2) 存在一个正常数 $\gamma > 0$，使得 $\lim_{\pi \downarrow \tilde{\pi}} \rho(\pi) - \lim_{\pi \uparrow \tilde{\pi}} \rho(\pi) > \gamma$。

因此，(ϵ, γ)-脆弱的均衡位于临界点或接近临界点，即 $\tilde{\pi}$ 是 ρ的不连续点。

我们还可以定义一种更强的脆弱性概念（它是上述概念的一个特例），要求组织彻底丧失完成复杂任务的能力。这对应于正文中的定义 1。

定义 SA 2 (ϵ-脆弱性)。 若均衡策略组合 x^* 满足：对于任意 $s > \epsilon > 0$， $\rho(\pi_k(x^*, \pi, s)) = 0$， 则称其为 ϵ-脆弱的。也就是说，当企业文化强度遭受幅度大于 ϵ 的负向冲击后，完成复杂项目的概率会降至 0。

命题 SA 2。 存在 k，使得对于 $k > k$，总是存在一个（不贡献）均衡，满足对所有 i均有 $x_i^* = 0$。此外，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $k(\epsilon)$ 和 $\gamma > 0$，使得对于 $k > k(\epsilon)$，任何具有正投资配置 x^*的均衡都是 (ϵ, γ)-脆弱的，并且 $\lim_{k \to \infty} \pi_k(x^*, \pi, 0) = \pi_j$，其中 $\pi_j \in \Pi$ 是 $\rho(\pi)$ 的某个间断点（而 Π 是 $\rho(\pi)$ 的间断点集合）。

我们可以看到，当协作树是规则的（m 和 n 为固定值，因此根据正文中的引理1， $\rho(\pi)$ 只有一个间断点），且冲击未被预期（对应于情形 $\psi = 0$）时，正文中的命题1是命题 SA 2 的推论。我们在下文正式重述该命题。

推论 SA 1. 假设 p 和 q 是退化的，即对于某些$m \geq 2$ 和 $n \geq 1$， $p(m) = 1$ 且 $q(n) = 1$。进一步假设 $\psi = 0$。存在k，使得对于 $k > k$，始终存在一个满足对所有 i都有 $x_i^* = 0$ 的（无贡献）均衡。此外，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $k(\epsilon)$，使得对于 $k > k(\epsilon)$，任何具有正投资配置 x^* 的均衡都是 ϵ-脆弱的，并且 $\lim_{k \to \infty} \pi_k(x^*, \pi, 0) = \pi_{\text{crit}}$。

4. Additional Results and Proofs

首先，我们给出若干用于证明主要结果的引理。随后，我们利用这些引理证明主要结果，之后再证明引理本身。

4.1. **引理**。

引理 SA 1 （极限中的任务成功完成）。

$$\rho(\pi) \equiv \lim_{L\to\infty} \rho_L(\pi) = \sup\left\{ r : r = \sum_{m=0}^{\infty} p(m) \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} q(n) \left(1 - \pi r\right)^n \right]^m \right\}. \tag{2}$$

引理 SA 2 （ $\rho_L(\pi)$ 的极限性质）. 假设 $m \geq 2$、 $n \geq 1$、 p 和 q 均处于一般位置。那么函数 $\rho(\pi) = \rho_\infty(\pi)$ 具有以下性质:

(1) 它在非空区间 $[0, \pi)$ 内所有 π 处均等于 0，并且在 $\pi \in [\pi, 1]$ 处为正。此外，如果 $n \geq 2$，那么 $\pi \in (0,1)$。(2) 除有限个跳跃间断点外，它处处可微。(3) 它是右连续的。(4) 函数 ρ 在某个 $\pi_i \in (0,1)$ 处不连续，当且仅当

$$\lim_{\pi \downarrow \pi_i} \rho'(\pi) = \infty.$$

此外，存在一个非空区间 (π_i, π_i^+)，在该区间上 ρ 为凹函数。

引理 SA 3 （ $\rho_L(\pi)$的连续性与一致收敛）。 令 $\mathbf{\Pi}$ 为 $\rho(\pi)$的不连续点集合。

(1) 对每个 L，定义在 $\pi \in (0,1)$上的函数 $\rho_L(\pi)$严格递增且无穷次可微。(2) 设(π_i, π_{i+1})为 $\mathbf{\Pi}$中两个相邻点之间的开区间，其中$\pi_0 = 0$ 且 $\pi_{|\mathbf{\Pi}|+1} = 1$。则 $\{\rho_L(\pi)\}_{L=1}^{\infty}$ 在(π_i, π_{i+1})上一致收敛到 $\rho(\pi)$。

引理 SA 4。对于任意 x,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{\partial \rho(\pi_k(x, \underline{\pi}, s))}{\partial \pi_k(x, \underline{\pi}, s)} \frac{\partial \pi_k(x, \underline{\pi}, s)}{\partial x_i} \right] = 0.$$

其中期望是对概率密度函数 $f(s)$取的。

引理 SA 5 （正规树）。 假设 $p(m) = 1$ 且 $q(n) = 1$ ， 其中某些 $m \geq 2$ 和$n \geq 1$满足条件。则 $\rho(\pi)$在 $\pi_{crit} \in (0, 1]$ 处有唯一的间断点，并且对所有 $\pi < \pi_{crit}$，有 $\rho(\pi) = 0$。

引理 SA 5 对应于正文中引理1的情形。

4.2. 命题 SA 2 的证明。 $\rho_L(\pi)$ 一致收敛于 $\rho(\pi)$ 的性质已在引理 SA 3 中确立。因此，我们考察工人 i 在无限长度（$L=\infty$）树中的期望效用：

$$U_i(x_i,x_{-i})=(1-\psi)a_i\rho(\pi_k(x,\underline{\pi},0))+\psi a_i\int_s\rho(\pi_k(x,\underline{\pi},s))f(s)ds-c(x_i).$$

根据链式法则，工人 i 增加投资所带来的边际效用为

$$\begin{aligned}\frac{dU_i(x)}{dx_i} &= \left[(1-\psi)a_i\left(\frac{\partial\rho(\pi_k(x,\underline{\pi},0))}{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},0)}\right)\left(\frac{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},0)}{\partial x_i}\right)\right.\\ &\left.+\psi a_i\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial\rho(\pi_k(x,\underline{\pi},s))}{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},s)}\right)\left(\frac{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},s)}{\partial x_i}\right)\right]\right]-c'(x_i),\end{aligned}\tag{3}$$

其中，期望是针对概率密度函数 $f(s)$ 计算的。第一项是 i 增加 x_i 所获得的边际收益，第二项是 i的边际成本。

为使符号表示更简洁，我们将期望项写为

$$\theta_{i,k}(x):=\psi a_i\mathbb{E}\left[\frac{\partial\rho(\pi_k(x,\underline{\pi},s))}{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},s)}\frac{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},s)}{\partial x_i}\right].$$

记 $\frac{\partial\rho(\pi_k(x,\pi,0))}{\partial\pi_k(x,\pi,0)}\Big|_{\pi_k(x,\pi,0)=\pi}=\rho'(\pi)$，一阶最优条件（$\frac{dU_i(x)}{dx_i}=0$）可表述为

$$(1-\psi)a_i\rho'(\pi)\frac{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},0)}{\partial x_i}+\theta_{i,k}(x)=c'(x_i),\tag{4}$$

其中

$$\pi=\pi_k(x,\underline{\pi},0).\tag{5}$$

因此，正投资均衡是满足方程（4）和（5）的一个配置 x^*，对所有i均成立，且 $U_i(x^*)>0$。

定义 $g(x_i)=c'(x_i)$。那么根据式 (4)，我们有

$$x_i=g^{-1}\Big((1-\psi)a_i\rho'(\pi)\frac{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},0)}{\partial x_i}+\theta_{i,k}(x)\Big)$$

因此，利用式 (5)，均衡企业文化强度 π^* 将是 $P(\pi)$ 的不动点，其中

$$P(\pi)=\pi_k(\{g^{-1}\big((1-\psi)a_i\rho'(\pi)\frac{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},0)}{\partial x_i}\big|_{x:\pi_k(x,\underline{\pi},0)=\pi}+\theta_{i,k}(x)\big|_{x:\pi_k(x,\underline{\pi},0)=\pi}\big)\}_{i=1}^k,\underline{\pi},0).\tag{6}$$

我们首先关注生产性均衡。只有在 $\pi\geq\underline{\pi}$ 的情况下才可能出现这种均衡，因为根据引理 SA 2，当 $\pi<\underline{\pi}$ 时，$\rho(\pi)=0$。

令 $\mathbf{\Pi}$ 为 $\rho(\pi)$ 的不连续点集合，并令 (π_j,π_{j+1}) 为 $\mathbf{\Pi}$ 中两个相邻点之间的开区间，其中 $\pi_0=0$、$\pi_1=\underline{\pi}$ 和 $\pi_{|\mathbf{\Pi}|+1}=1$。

在任意区间 $[\pi_j,\pi_{j+1})$ 上，当 $j\geq1$, $P(\pi)$ 在 $\pi=\pi_j$ 处达到最大值。这是因为 $g^{-1}=(c')^{-1}$ 是递增函数，而根据引理 SA 2，对于 $\pi\in(\pi_j,\pi_{j+1})$，$\lim_{\pi\downarrow\pi_j}\rho'(\pi)=\infty$，且 $\rho'(\pi)$ 有限。

g^{-1} 是递增函数，这一事实源于 $g(x_i) = c'(x_i)$ 是递增函数。此外，由于 $\lim_{x_i \to 0} g(x_i) = 0$ 且 $\lim_{x_i \to 1} g(x_i) = \infty$，因此可得 $\lim_{y \to 0} g^{-1}(y) = 0$ 且 $\lim_{y \to \infty} g^{-1}(y) = 1$。

根据假设 SA 1(ii)(a)，回忆一下 $\pi_k(\vec{0}, \pi, 0) = \pi \leq \pi_j$。另请注意，对于任意 $\pi \in (\pi_j, \pi_{j+1})$，$\rho'(\pi)$ 都是有限的；而根据假设 SA 1(ii)(b)，$\lim_{k \to \infty} \frac{\partial \pi_k(x, \pi, 0)}{\partial x_i} = 0$，又根据引理 SA 4，$\lim_{k \to \infty} \theta_{i,k}(x) = 0$，因此，当 $k \to \infty$ 时，公式（6）中 $g^{-1}()$ 的自变量趋于 0。由公式（6）可知，存在 k 和 $\tilde{\pi}_j \in (\pi_j, \pi_{j+1})$，使得当 $k > k$ 时，对所有 $\pi \in [\tilde{\pi}_j, \pi_{j+1})$，均有 $P(\pi) < \pi_j$。

由于 $P(\pi)$ 在 π_j 处达到最大值，且对于所有 $\pi \in [\tilde{\pi}_j, \pi_{j+1}$，$P(\pi) < \pi_j$，因此根据介值定理，在区间 $[\pi_j, \pi_{j+1}$ 上至少存在一个满足 $\pi^* \geq \pi_j$ 的不动点，条件是 $P(\pi_j) \geq \pi_j$。从现在起，用 π^* 表示此类不动点（即均衡）中的最大者。与此 $\pi^* = \pi_k(x^*, \pi, 0)$ 相对应的是一个均衡投资配置 x^*，其中 $x_i^* \equiv g^{-1}\left((1-\psi)a_i\rho'(\pi^*)\frac{\partial \pi_k(x^*, \pi, 0)}{\partial x_i} + \theta_{i,k}(x^*)\right), \forall i$。另一方面，如果 $P(\pi_j) < \pi_j$，则在区间 (π_j, π_{j+1}) 上不存在满足 $\pi^* \geq \pi_j$ 的不动点（因而也不存在均衡）。

注意，根据公式（6），$P(\pi_j) = \pi_k(\vec{1}, \pi, 0)$，其中 $x = \vec{1}$ 表示所有主体都选择 $x_i = 1$ 的投资配置。因此，如果 $\pi_k(\vec{1}, \pi, 0) < \pi_j$，那么 $P(\pi_j) < \pi_j$，因而在区间 (π_j, π_{j+1}) 上不存在生产性均衡。另一方面，如果 $\pi_k(\vec{1}, \pi, 0) > \pi_j$，那么 $P(\pi_j) > \pi_j$，因而在区间 (π_j, π_{j+1}) 上存在生产性均衡。

现在注意，根据公式（6），对于任意 $\pi \in (\pi_j, \pi_{j+1})$，$\lim_{k \to \infty} P(\pi) = \pi$，因为根据假设 SA 1(ii)(b)，$\frac{\partial \pi_k(x, \pi, 0)}{\partial x_i} \to 0$，而根据引理 SA 2，$\rho'(\pi)$ 是有限的；并且根据引理 SA 4，$\lim_{k \to \infty} \theta_{i,k}(x) = 0$。由此可知，若 $P(\pi_j) \geq \pi_j$，则当 $k \to \infty$ 趋于极限时，在区间 $[\pi_j, \pi_{j+1})$ 上存在唯一的生产性均衡，且 $\lim_{k \to \infty} \pi_k(x^*, \pi, 0) := \pi(x^*, \pi, 0) = \pi_j$。企业文化强度受到任何 $s > 0$ 冲击，都会导致企业文化强度变为 $\pi(x^*, \pi, s) < \pi_j$，从而使任务成功完成的概率出现不连续下降，即对于某个 $\gamma > 0$，$\rho(\pi(x^*, \pi, 0)) - \rho(\pi(x^*, \pi, s)) > \gamma$。因此，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在 $k(\epsilon)$ 和 $\gamma > 0$，使得当 $k > k(\epsilon)$ 时，任何具有正投资配置 x^*（其中 $\pi_k(x^*, \pi, 0) \in [\pi_j, \pi_{j+1})$）的均衡，根据定义 SA 1 都是 (ϵ, γ)-脆弱的。

现在我们证明，当 k 足够大时，始终存在一个零贡献均衡。

令 $x_{i'} = 0$ 对于 $i' \neq i$，并将其记为 $x_{-i} = \vec{0}$。此时，投资配置记为 $(x_i, x_{-i}) = (x_i, \vec{0})$。当 k 足够大时，对于任意 $x_i \in (0, 1]$

$$(1-\psi)a_i\rho(\pi_k((x_i, \vec{0}), \pi, 0)) + \psi a_i \int_s \rho(\pi_k((x_i, \vec{0}), \pi, s))f(s)ds = 0 < c(x_i)$$

因此，投资收益小于成本。事实上，对于 $x_i > 0$，$c(x_i) > 0$；而当 $\frac{\partial \pi_k((x_i, \vec{0}), \pi, 0)}{\partial x_i}$ 和 $\frac{\partial \pi_k((x_i, \vec{0}), \pi, s)}{\partial x_i}$ 足够小时（根据假设 SA 1(ii)(b)，当 k 足够大时就会出现这种情况），对于所有 $x_i \in [0, 1]$，$(1-\psi)a_i\rho(\pi_k((x_i, \vec{0}), \pi, 0)) + \psi a_i \int_s \rho(\pi_k((x_i, \vec{0}), \pi, s))f(s) ds = 0$，因为此时 $\pi_k((1, \vec{0}), \pi, 0) \approx \pi < \pi_1 = \pi$。事实上，当 k 足够大时，任何单个代理人对企业文化的投资都无法将其提升到临界阈值 π 以上，而在该阈值处 ρ 才会变为正值。因此，对于所有 i，$x_i = 0$ 是一个均衡。

4.3. 推论 SA 1 的证明。 当协作树是规则的（m 和 n 固定），且冲击未被预期（对应于 $\psi = 0$ 的情形）时，正文中的命题1是命题 SA 2 的一个推论。因此，读者可参阅命题1的证明。

4.4. 引理 SA 1 的证明。假设协作树有 L 层。那么，复杂任务的完成概率为

$$r_L = G_p\left(1 - G_q(1 - \pi r_{L-1})\right),$$

其中，r_{L-1} 是具有 $L-1$ 层的树中复杂任务的完成概率。在上述方程中，G_p 和 G_q 分别是与概率质量函数 p 和 q 相关的概率生成函数。

在只有一层的树中，显然有 $r_1 = 1$，因为不存在关系，因此也没有关系会失败。我们感兴趣的过程是当 L 趋于无穷大时 r_L 的极限。以 $r_1 = 1$ 初始化该序列，对于所有有限的 L，都有 $r_L < r_{L-1}$。因此，由于在每次迭代中，成功生产的概率都从初始值 1 开始递减，成功生产的极限概率就是该序列的极限；该序列从上方收敛到以下函数的最大不动点

$$r = G_p\left(1 - G_q(1 - \pi r)\right)$$

或者等价地，是.....的最大不动点

$$r = \sum_{m=0}^{\infty} p(m)\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\left(1 - \pi r\right)^n\right]^m.$$

4.5. **引理 SA 2 的证明。**第（*1*）部分：

注意，$\rho(\pi)$ 是.....的最大不动点

$$\begin{aligned} r &= R(r) \\ &:= \sum_m p(m)\Big[1 - \sum_n q(n)(1-\pi r)^n\Big]^m \end{aligned} \tag{7}$$

还要注意，对于任意 $\pi \in [0,1]$，$r = 0$ 始终是式（7）的一个不动点。此外，当 $\pi = 1$ 时，$r = 1$ 始终是式（7）的一个不动点。

因此，我们首先需要证明，当 π 足够小时，除了 $r = 0$ 之外不存在其他不动点。为此，只需证明，当 π 足够小时，式（7）右侧的导数始终小于左侧的导数（即始终小于 1）。因此，右侧所描述的曲线除在 $r = 0$ 处外，永远不会与左侧所描述的曲线相交。为此，注意到

$$\begin{aligned} \frac{dR(r)}{dr} &= \sum_m p(m)m\Big[1 - \sum_n q(n)(1-\pi r)^n\Big]^{m-1} \sum_n q(n)n(1-\pi r)^{n-1}\pi \\ &\leq \hat{m}\hat{n}\pi \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\hat{m} = \sum_m p(m)m$ 和 $\hat{n} = \sum_n q(n)n$。由此可得，必定存在 $\tilde{\pi} \in (0,1]$，使得 $\frac{dR(r)}{dr} < 1$ 对所有 $\pi < \tilde{\pi}$ 均成立。因此，必定存在 $\bar{\pi} \geq \tilde{\pi}$，使得对于任意 $\pi < \bar{\pi}$，都有 $\rho(\pi) = 0$。

其次，要证明 $\rho(\pi)$ 在 $\bar{\pi}$ 处不连续，我们需要证明，对于任意$\pi \in [0,1]$， $R(r)$ 在 $r=0$ 附近的斜率始终接近于零。换言之，对于任意 $\eta > 0$ ，都存在 $\bar{r}$ ，使得 $\frac{dR}{(r)\ dr} < \eta$ 对所有 $r \in [0,\bar{r})$ 均成立。通过检查式 (8) 即可轻松验证这一点。因此，当对于某个足够大的 $\bar{\pi}$ ，存在一个不同于 $r=0$ 的不动点时，它必定位于一个非空邻域或 $r=0$之外，这意味着 $\rho(\pi)$ 在 $\pi=\bar{\pi}$ 处不连续。

现在，为了证明当 $n \geq 2, \pi \in \in (0,1)$ 时，只需证明式（7）的最大不动点 $\rho(\pi)$ 在 $\pi=1$ 的某个邻域内关于 π 连续变化。由此可推出 $\pi<1$。

为证明这一点，我们令 $f(r,\pi) = \sum_m p(m)\left[1-\sum_n q(n)(1-\pi r)^n\right]^m - r$，并利用隐函数定理证明存在一个连续函数 $r=\rho(\pi)$，使其在 $\pi=1$ 的某个邻域内满足 $f(r,\pi)=0$，且该函数关于 π 单调递增，即对 $\pi=1$ 左侧某个邻域内的所有 π，均有 $\frac{d\rho_{(\pi)}}{d\pi} > 0$。

根据隐函数定理，如果满足条件 $\frac{df}{(dr}{}^{r\,\pi}\,|_{r=1,)\ ,\pi=1} \neq 0$，则可确定存在这样的连续可微函数 $\rho(\pi)$。该条件成立，因为

$$\begin{aligned}\frac{df(r,\pi)}{dr}\Big|_{r=1,\pi=1} &= \sum_m p(m)m(1-\sum_n q(n)(1-\pi r)^n)^{m-1}\sum_n q(n)n(1-\pi r)^{n-1}\pi - 1\Big|_{r=1,\pi=1} \\ &= -1 \neq 0\end{aligned}$$

此外，在 $\pi=1$, $\frac{d\rho_{(\pi)}}{d\pi}$ 的某个邻域内，可以表示为

$$\begin{aligned}\frac{d\rho(\pi)}{d\pi} &= -\frac{df(r,\pi)}{d\pi}\Big/\frac{df(r,\pi)}{dr} \\ &= -\frac{\sum_m p(m)m(1-\sum_n q(n)(1-\pi r)^n)^{m-1}\sum_n q(n)n(1-\pi r)^{n-1}r}{\sum_m p(m)m(1-\sum_n q(n)(1-\pi r)^n)^{m-1}\sum_n q(n)n(1-\pi r)^{n-1}\pi - 1}\end{aligned}$$

观察上式可知，对于 $\pi \in (1-\eta,1)$， $\frac{d\rho}{d\pi}{}_{(\ \pi} \approx -\frac{\eta'}{\eta''-1} \approx) \eta'''$，其中 $\eta, \eta', \eta'', \eta''' > 0$ 均为较小的数。由此可知， $\rho(\pi)$ 在 $\pi=1$左侧某个非空邻域内处处为正且连续，这意味着第一个不连续点 $\bar{\pi}$ 严格小于 1，即 $\bar{\pi} \in (0,1)$。

第（2）部分：定义 $\Pi : (0,1] \to \mathbb{R}$ 为

$$\pi := \Pi(r) = \frac{1-G_q^{-1}(1-G_p^{-1}(r))}{r}. \tag{9}$$

注意，该函数在其定义域上连续可微。通过对 $r=G_p(1-G_q(1-r\pi))$ 求逆，可以将 π 单独移至等式左边，从而得到方程 (9)。方程 (9) 给出了 π 与 r 之间的简单关系，使我们无需直接处理隐式定义的 r。通过这一变换，并利用生成函数的性质，我们将能够证明引理 SA 2 中记录的其余性质。

我们先作初步观察。令 $\mathbf{\Pi} = \{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{|\mathbf{\Pi}|}\}$ 为 $\rho(\pi)$ 不连续处构成的点集。令 (π_i, π_{i+1}) 为 $\mathbf{\Pi}$ 中两个相邻点之间的开区间，其中 $\pi_0 = 0$ 和 $\pi_{|\mathbf{\Pi}|+1} = 1$。任取 $\tilde{\pi} \in [\pi_i, \pi_{i+1})$，

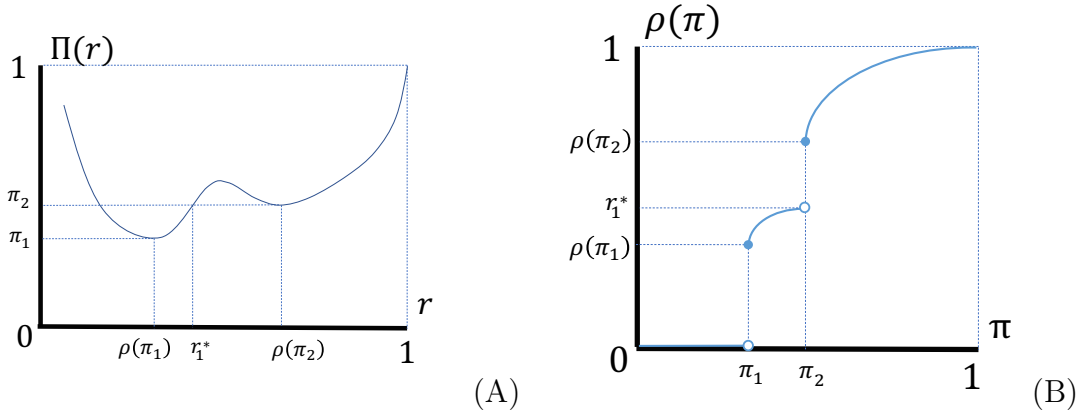

FIGURE 2. Π(r)与 ρ(π)之间的关系：在 ρ(π)于 π_1 和 π_2处有两个不连续点的情况下。面板 (A)：函数 Π(r)。面板 (B)：对应的 ρ(π)。我们看到， Π(r)的局部极小值对应于 ρ(π)的不连续点。

并定义 $\tilde{r} = \rho(\tilde{\pi})$，函数 Π(r) 在区间 $[\tilde{r}, r_i^*]$ 上于 $\tilde{r}$ 处取得最小值，其中 $r_i^* = \lim_{\pi \uparrow \pi_{i+1}} \rho(\pi) < \rho(\pi_{i+1})$。否则，若在此区间上 Π(r) 严格小于 Π($\tilde{r}$)，那么由于 Π(r) 必须在 $r = r_i^*$ 处达到值 π_{i+1}，因此（根据介值定理）存在某个点 $r \in (\tilde{r}, r_i^*)$，使得 $\Pi(r) = \tilde{\pi}$，这与 ρ(π) 的定义（即方程（7）的最大不动点）以及我们的假设 $\tilde{r} = \rho(\tilde{\pi})$ 相矛盾。由此可知，在 $\tilde{r}$ 处，要么 $\Pi'(\tilde{r}) > 0$，要么 $\Pi'(\tilde{r}) = 0$。后一种情况下，Π(r) 在 $\tilde{r}$ 处有局部最小值或拐点。

根据 p 和 q的一般性，函数 Π(r)在任何地方都不可能有拐点（稍后我们会对此作出正式证明），因此排除了这种可能性。现在我们可以考虑剩下的两种可能性。第一种情况下，如果 $\Pi'(\tilde{r}) > 0$，那么由于 Π(r)可微，隐函数定理保证 ρ($\tilde{\pi}$)的导数有限（因此也连续）。第二种情况下， Π(r)在 $\tilde{r}$ 处有局部最小值这一事实意味着（回想 ρ(π)的定义） ρ(π)在$\tilde{\pi} = \Pi$处有不连续点$\tilde{r}$。令 $\pi_i = \tilde{\pi}$，将该不连续点的坐标记为（ρ(π_i) π_i）。

图2展示了 Π(r)与 ρ(π)之间的关系。

现在，我们正式证明，对于一般位置的概率质量函数 p 和 q，其支持集分别为 $\{1, 2, ...\bar{m}\}$ 和 $\{1, 2, ..., \bar{n}\}$， Π(r)没有拐点。将 p 和q 的依赖关系明确写出，记为 Π(r, p, q)，这等价于证明方程 $^{d\Pi}_{(r,p,q)\ dr} = 0$在上述定义的支持集上几乎处处的 p 和 q 处都是“正则”的。也就是说，对于几乎所有的 p 和 q，若 $^{d\Pi}_{(r,p,q)\ dr} = 0$，则应有$^{d^2\Pi(r\ p\ q)}_{dr^2} \neq 0$, ,)。根据横截性定理，只要在 $^{d\Pi}_{(r,p,q)\ dr} = 0$时，雅可比矩阵$J_{r,p,q}\left[\begin{smallmatrix} d\Pi(r,p,q) \\ dr \end{smallmatrix}\right]$ 满行秩（此处意味着秩为1），上述结论便成立。因此，我们只需验证在该条件下$J_{r,p,q}\left[\begin{smallmatrix} d\Pi(r,p,q) \\ dr \end{smallmatrix}\right] \neq 0$ 。

记 $^{d\Pi}_{(r,p,q)\ dr}$ 为 $\Pi'(r, p, q)$，则有

$$J_{r,p,q}\left[\Pi'(r,p,q)\right] = \left[\frac{d\Pi'(r,p,q)}{dr}, \frac{d\Pi'(r,p,q)}{dp(1)}, \frac{d\Pi'(r,p,q)}{dp(2)}, ..., \frac{d\Pi'(r,p,q)}{dq(1)}, \frac{d\Pi'(r,p,q)}{dq(2)}, ...\right]. \tag{10}$$

只需证明，当 $\frac{d\Pi_{(r,p,q)}}{dr} = 0$时，该向量的第一个元素 $\frac{d\Pi'_{(r,p,q)}}{dr}$ 始终不等于零。我们可以将这个第一个元素表示为

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi'(r,p,q)}{dr} &= \frac{-G_q^{-1\prime\prime}(1-G_p^{-1}(r))(G_p^{-1\prime}(r))^2 + G_p^{-1\prime\prime}(r)G_q^{-1\prime}(1-G_p^{-1}(r))}{r} \\ &\quad - \frac{G_q^{-1\prime}(1-G_p^{-1}(r))G_p^{-1\prime}(r)}{r^2} \\ &\quad + \frac{-G_q^{-1\prime}(1-G_p^{-1}(r))G_p^{-1\prime}(r)r^2 + 2r(1-G_q^{-1}(1-G_p^{-1}(r)))}{r^4} \end{aligned} \tag{11}$$

而 $\frac{d\Pi_{(r,p,q)}}{dr} = 0$ 条件可表示为

$$\frac{d\Pi(r,p,q)}{dr} = \frac{G_q^{-1\prime}(1-G_p^{-1}(r))G_p^{-1\prime}(r)r - (1-G_q^{-1}(1-G_p^{-1}(r)))}{r^2} = 0. \tag{12}$$

将 (12) 代入 (11) 的第三项，可得 $\frac{d\Pi'_{(r,p,q)}}{dr}$ 的如下简化形式：

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi'(r,p,q)}{dr} &= \frac{-G_q^{-1\prime\prime}(1-G_p^{-1}(r))(G_p^{-1\prime}(r))^2 + G_p^{-1\prime\prime}(r)G_q^{-1\prime}(1-G_p^{-1}(r))}{r} \\ &= -\frac{\left(G_q^{-1}(1-G_p^{-1}(r))\right)''}{r} > 0 \end{aligned} \tag{13}$$

其中，第一个等号来自前面提到的代换，第二个等号来自对分子进行两次积分，而最后一个不等式则来自这样一个事实：对于所有 $r \in [0,1]$，$G_q^{-1\prime\prime}(r) < 0$。因此，当 $\frac{d\Pi_{(r,p,q)}}{dr} = 0$ 时，雅可比矩阵始终具有满行秩，正如所需；由此 $\Pi(r)$ 没有拐点。

第 *(3)* 部分：

根据前一部分以及 $\rho(\pi)$ 的定义，我们知道，在任意间断点 π_i，$\rho(\pi_i) = r_i$ 是当 π 从右侧趋近于 π_i 时 $\rho(\pi)$ 的极限，即 $\lim_{\pi\downarrow\pi_i}\rho(\pi) = r_i$。

根据第（2）部分，我们还知道，除了不连续点之外，$\rho(\pi)$是连续的。结合这两个论证可知，在任意给定的点 $\pi \in [0,1)$，对于任意 $\eta > 0$，都存在 $\xi > 0$，使得 $|\rho(x) - \rho(\pi)| < \eta$对所有 $x \in (\pi, \pi+\xi)$均成立。因此，$\rho(\pi)$是右连续的。

第（*4*）部分：

我们首先证明，如果 $\rho(\pi)$ 在 π_i 处不连续，那么 $\lim_{\pi\downarrow\pi_i}\rho'(\pi) = \infty$。使用第（2）部分中的相同记号，首先注意到，由于 $\Pi(r)$ 在区间 $[r_i, r_i^*]$ 上于 r_i 处取得最小值，因此必定存在非空区间 (r_i, r_i^+) 和 (π_i, π_i^+)，使得 $\Pi(r)$ 严格递增，因而等于函数$\rho(\pi)$（该函数也严格递增）的反函数。此外，由于 $\Pi(r)$ 连续可微，且 $\rho(\pi)$ 在 π_i 处的不连续与 $\Pi(r)$ 在 r_i 处的局部最小值相关联，因此 $\Pi(r)$ 局部凸，并且 $\Pi(r)$ 在 r_i 右侧紧邻各点处的导数趋近于 0，即 $\lim_{r\downarrow r_i}\Pi'(r) = 0$。因此，根据隐函数定理，当 π 从上方趋近于π_i 时，$\rho(\pi)$ 的导数趋近于 ∞，即 $\lim_{\pi\downarrow\pi_i}\rho'(\pi) = \infty$。

现在证明，$\lim_{\pi\downarrow\pi_i}\rho'(\pi) = \infty$ 意味着 $\rho(\pi)$ 在 π_i 处不连续。如果 $\lim_{\pi\downarrow\pi_i}\rho'(\pi) = \infty$，那么 $\lim_{r\downarrow r_i}\Pi'(r) = 0$ （同样根据隐函数定理），因此 π_i 是 $\Pi(r)$ 的局部最小值（因为第（2）部分已排除拐点）。根据 $\rho(\pi)$ 的定义可知，它在 π_i处不连续。

现在，由于 $\Pi(r)$ 在 (r_i, r_i^+) 上局部凸且递增，因此 $\rho(\pi)$（反函数）在 (π_i,π_i^+) 上局部凹且递增。
另请注意，由于 G_p 和 G_q 是多项式（即生成函数只有有限个非零系数），函数 $\Pi(r)$ 的导数仅有限次改变符号，因此 $\rho(\pi)$仅有有限个不连续点。

4.6. **引理 SA 3 的证明**。第 *(1)* 部分：注意

$$\rho_L(\pi) = G_p(1 - G_q(1 - \pi\rho_{L-1}(\pi))) \tag{14}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} p(m)\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} q(n)\left(1 - \pi\rho_{L-1}(\pi)\right)^n\right]^m \tag{15}$$

其中 $\rho_1(\pi) = 1$。因此， $\rho_2(\pi)$是 π 的严格递增函数。如果 $\rho_{L-1}(\pi)$ 关于 π 严格递增，那么 $\rho_L(\pi)$ 也如此。由此可通过归纳法得出，对于任意 L， $\rho_L(\pi)$ 关于 π 严格递增。

另请注意，对于任意 L， $\rho_L(\pi)$ 是变量 π 的多项式，因此它无穷次可微。

第（2）部分：

$\{\rho_L(\pi)\}_{L=1}^{\infty}$ 是一列单调递减（在 L中）且可微（在 π中）的函数，并逐点收敛于 $\rho(\pi)$。根据引理 SA 2，我们知道 $\rho(\pi)$在上述每个区间上连续且导数有限。因此，利用迪尼定理，$\{\rho_L(\pi)\}_{L=1}^{\infty}$ 在上述每个区间上一致收敛于 $\rho(\pi)$。

4.7. **引理 SA 4 的证明**。根据引理 SA 2 以及假设 SA 1 的 (ii)(b) 和 (iii)，对除零测集外的所有 $s \in [s, s]$ ，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\left[\left(\frac{\partial\rho(\pi_k(x,\underline{\pi},s))}{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},s)}\right)\left(\frac{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},s)}{\partial x_i}\right)\right] = 0.$$

因此我们有

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left[\frac{\partial\rho(\pi_k(x,\underline{\pi},s))}{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},s)}\frac{\partial\pi_k(x,\underline{\pi},s)}{\partial x_i}\right] = 0.$$

4.8. **引理 SA 5 的证明**。固定 m 和 n时，此情形对应于正文中的引理1。因此请读者参阅引理1的证明。

References

Elliott, M., B. Golub, and M. V. Leduc（2022 年）：“供应网络的形成与脆弱性”，《美国经济评论》，112，2701–47。