arXiv:2301.08921v1 [math.RT] 21 Jan 2023

拓扑半无限张量（超）模

FRANCESCO ESPOSITO 和 IVAN PENKOV

Abstract. 我们构造了与 Tate空间 V相关的李超代数 $\mathfrak{gl}(V \oplus \Pi V)$ 和 $\mathfrak{osp}(V \oplus \Pi V)$ 上拓扑张量超模的通用幺半范畴。这里 $V \oplus \Pi V$ 是一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$分次拓扑向量空间，其偶部和奇部均同构于 V。我们首先讨论纯偶情形，通过引入幺半范畴$\widehat{\mathbf{T}}_{\mathfrak{gl}(V)}$、$\widehat{\mathbf{T}}_{\mathfrak{o}(V)}$ 和 $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathfrak{sp}(V)}$，并证明这些范畴分别与先前研究过的范畴 $\mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$、$\mathbb{T}_{\mathfrak{o}(V)}$、$\mathbb{T}_{\mathfrak{sp}(V)}$ 反等价。后面这些范畴作为幺半范畴具有某些通用性，因而这些性质也相应地传递到 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$、$\mathbf{T}^{\mathfrak{o}(V)}$和 $\mathbf{T}^{\mathfrak{sp}(V)}$。此外，已知范畴 $\mathbb{T}_{\mathfrak{o}(V)}$ 和 $\mathbb{T}_{\mathfrak{sp}(V)}$ 等价，由此可推出范畴 $\mathbf{T}^{\mathfrak{o}(V)}$ 和 $\mathbf{T}^{\mathfrak{sp}(V)}$等价。在引入超对称框架后，我们证明范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$ 与范畴 $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathfrak{gl}(V\oplus\Pi V)}$ 等价，并证明范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{o}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{sp}(V)}$ 均与 $\mathbf{T}_{\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)}$ 等价。

关键词：张量表示、普适幺半范畴、Tate空间、拓扑张量积、李超代数

2020年数学主题分类：17B10、17B65、46A13、46A20

1. Introduction

设 V是一个复无限维自对偶Tate空间。我们将 V视为一个可数维离散复向量空间 U及其对偶 U^*的 $U \oplus U^*$，并赋予 V局部线性紧拓扑。Tate在 [14], 中研究了拓扑向量空间 V 的连续自同态李代数 $\mathfrak{gl}(V)$，并在其中给出了曲线上留数的定义，以及通过 $\mathfrak{gl}(V)$的中心扩张证明留数定理的方法。 [1], 将这一方法完全明确化，作者重新诠释了Tate的工作，并通过相应的无限维群$\mathbf{GL}(V)$的中心扩张证明了曲线的互反律。 $\mathfrak{gl}(V)$及其中心扩张也被作为非线性可积系统的对称性加以研究（例如 [5], [4]）；表示论方面的考量可参见 [8]和 [9]。

本文构造了一个$\mathfrak{gl}(V)$上的拓扑张量模的自然范畴。在近期的短文 [7], 中，我们为离散向量空间 U引入并研究了两个彼此反等价的范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(U)}$ 和 $\mathbf{T}^{\mathfrak{gl}(U)}$ 。这两个范畴继承了范畴 $\mathbb{T}_{\mathfrak{gl}}(\infty)$的泛性质，见 [7]。

我们的目标之一是将 [7] 的结果从空间 U 推广到 Tate 空间 $V = U \oplus U^*$。另一个目标是将李代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的张量模置于超对称背景中，并获得关于某些“半无限”李超代数上的张量超模范畴的结果。我们解决这一问题的方法基于 V. Serganova 的一个想法：她将李代数 $\mathfrak{gl}(\infty)$ 和 $\mathfrak{o}(\infty)$ 或 $\mathfrak{sp}(\infty)$ 上张量模的研究，与相应李超代数 $\mathfrak{gl}(\infty|\infty)$ 和 $\mathfrak{osp}(\infty|\infty)$ [13] 上张量超模的研究联系起来。

具体而言，我们构造了反等价的幺半范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$，它们由拓扑张量 $\mathfrak{gl}(V)$-模组成，其中 V、V^* 和 $\mathfrak{gl}(V)$ 是 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$ 中的对象。范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$ 分别与范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(U)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(U)}$ 等价。这是幺半范畴等价的结果

$$\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty)}$$

我们将在第3节中证明这一点。有一个有趣的特点：尽管在 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(U)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$ 的等价关系下，$\mathfrak{gl}(U)$-模 U 对应于 $\mathfrak{gl}(V)$-模 V，但拓扑向量空间 U 和 U^* 并不同构，而拓扑向量空间 V 和 V^* 同构。随后，我们引入半无限正交李代数和辛李代数 $\mathfrak{o}(V)$ 和 $\mathfrak{sp}(V)$，以及相应的拓扑模幺半范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{o}(V)}$, $\mathbf{T}_{\mathfrak{sp}(V)}$, $\mathbf{T}_{\mathfrak{o}(V)}$, $\mathbf{T}_{\mathfrak{sp}(V)}$。

第4节介绍超对称情形。我们考察 Tate超空间$V\oplus\Pi V$ 以及李超代数 $\mathfrak{gl}(V\oplus\Pi V)$ 和 $\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)$。我们证明，超模范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V\oplus\Pi V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V\oplus\Pi V)}$ 分别与 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$等价。幺半范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)}$ 与幺半范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{o}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{sp}(V)}$均等价，$\mathbf{T}_{\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)}$ 与幺半范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{o}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{sp}(V)}$均等价。因此，范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{o}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{sp}(V)}$ 是等价的幺半范畴，$\mathbf{T}_{\mathfrak{o}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{sp}(V)}$也同样如此。最后，我们讨论本文引入的所有范畴的泛性质。

致谢。F.E. 是 INDAM 研究组 GNSAGA 的成员；其研究部分由帕多瓦大学项目 BIRD203834/20 资助。I.P. 的研究部分由德国研究联合会资助项目 PE 980/8-1 资助。

2. Preliminaries on topological vector spaces

底域 $\mathbb{C}$ 赋予离散拓扑。我们考虑的所有向量空间均赋予线性拓扑；除非另有明确说明，拓扑向量空间之间的同态均假定为连续的。维数至多可数的向量空间视为离散拓扑向量空间；反过来，我们考虑的所有离散向量空间的维数均至多可数。离散向量空间的对偶是线性紧向量空间，即有限维向量空间的（可数）射影极限，并赋予射影极限拓扑。离散向量空间范畴与线性紧向量空间范畴这两个阿贝尔半单范畴，通过取连续对偶的函子互为对偶。这两个范畴的交集是有限维向量空间构成的自对偶范畴。

自然的下一步是研究拓扑向量空间的归纳极限和射影极限。我们考虑的归纳系统是可数的，其中涉及的态射均连续且具有闭像。对偶地，我们考虑的射影系统也是可数的，其中涉及的态射均连续且满射。由此，我们将归纳线性紧向量空间和逆离散向量空间视为线性紧向量空间与离散向量空间的推广。

在 [2] A. Beilinson 引入了拓扑向量空间的张量积 $\otimes^*$ 和 $\otimes^!$ 。在一个 $\widehat{\otimes}^{\mathrm{g}}$与我们先前的工作一致 [7], ，我们分别将这些张量积记为 $\widehat{\otimes}^*$ 和 $\otimes$ 。我们还设 $\otimes := \otimes_{\mathbb{C}}$。

定义 2.1. 令 $\mathcal{I}$ 为一个范畴，其对象是归纳线性紧向量空间，态射是连续线性映射。

定义 2.2. 令 $\mathcal{P}$ 为一个范畴，其对象是逆离散向量空间，态射是连续线性映射。

命题 2.3. (i) 范畴 $\mathcal{I}$ 在 Beilinson 张量积 $\widehat{\otimes}^*$下封闭。

(ii) 配备 $\widehat{\otimes}^*$ 后，范畴 $\mathcal{I}$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性对称拟阿贝尔半单幺半范畴。(iii) 范畴 $\mathcal{P}$ 在 Beilinson 张量积 $\widehat{\otimes}^!$ 下稳定。(iv) 配备 $\widehat{\otimes}^!$ 后，范畴 $\mathcal{P}$ 是一个 $\mathbb{C}$- 线性对称拟阿贝尔半单幺半范畴。(v) 取连续对偶可得到对称幺半拟阿贝尔范畴 $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{P}$ 之间的反等价。

证明。（i）如 [10, Remark 12.1] 所述，对于任意拓扑向量空间 U 和 W，张量积 $U\widehat{\otimes}^*W$ 是空间 $U\otimes W$ 关于 $*$-拓扑的完备化（定义见 [2, 1.1(a)] 或 [10, 第 12] 节），并且满足关于连续多重线性映射的泛性质。因此，若 $U=\bigcup_i U_i$ 和 $W=\bigcup_j W_j$ 是 $\mathcal{I}$ 的对象，则有 $U\otimes W=\bigcup_{i,j} U_i\otimes W_j$，且 $*$-拓扑与归纳极限拓扑一致。此外，完备拓扑向量空间的归纳极限是完备的。因此可以得出

$$U\widehat{\otimes}^*W=\bigcup_{i,j} U_i\widehat{\otimes}^*W_j\ ,$$

因此 $\mathcal{I}$ 在 $\widehat{\otimes}^*$下是封闭的。

(ii) $\mathcal{I}$ 是拟阿贝尔半单的这一事实已在 [7, 命题 2.9] 中证明。因此，根据 [10, 命题 13.4(a)] , ，函子 $\widehat{\otimes}^*$ 是正合且结合的，并且 $\mathcal{I}$ 是一个对称拟阿贝尔幺半半单范畴。

(iii) 由 [2, 1.1(b)] 可知，对于任意两个原离散拓扑向量空间$U=\lim_{\longleftarrow i} U_i$ 和 $W=\lim_{\longleftarrow j} W_j$，有

$$U\widehat{\otimes}^!W=\varprojlim_{i,j} U_i\otimes W_j\ .$$

因此 $\mathcal{P}$ 在张量积运算 $\widehat{\otimes}^!$下是封闭的。

(iv) $\mathcal{P}$ 是拟阿贝尔半单的这一事实已在 [7, 命题 2.9]中证明。因此，根据 [10, 命题 13.4(c)], $\widehat{\otimes}^*$ 是正合且结合的。由此， $\mathcal{P}$ 是一个对称幺半拟阿贝尔半单范畴。

(v) 连续对偶将 $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{P}$作为拟阿贝尔范畴联系起来并构成反等价，这一事实见 [7, 命题 2.6]。此外，取连续对偶显然是从离散向量空间范畴到线性紧向量空间

范畴的幺半函子。因此，对于 $\mathcal{I}$中的对象$U=\bigcup_i U_i$和 $W=\bigcup_j W_j$，可得

$$(U\widehat{\otimes}^* W)^* = (\bigcup_i U_i \ \widehat{\otimes}^* \ \bigcup_j W_j)^* = (\bigcup_{i,j} U_i \widehat{\otimes}^* W_j)^* =$$
$$(\bigcup_{i,j} U_i \widehat{\otimes} W_j)^* = \varprojlim_{i,j} \ U_i^* \otimes W_j^* = \varprojlim_{i,j} \ U_i^* \widehat{\otimes}^! W_j^* = U^* \widehat{\otimes}^! W^* \ .$$

因此，对称幺半拟阿贝尔范畴 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{P}$ 之间存在反等价。□

定义 2.4. 设 $\mathcal{T}$ 是范畴 Top （由所有线性拓扑化的拓扑向量空间构成）的全子范畴 $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{P}$ 的交。它就是局部线性紧向量空间范畴，也称为 Tate 向量空间范畴。

接下来，我们介绍 Tate 向量空间的一些基本性质。

引理 2.5. (i) 设 $W=\bigcup_i W_i$ 是由线性紧向量空间 $\{W_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 的递增链之并定义的归纳线性紧向量空间。那么， W 是 Tate 向量空间，当且仅当对于每个 $i\in\mathbb{Z}$，空间 W_i 在 W_{i+1} 中具有有限余维。(ii) 设 $Z=\varprojlim_j Z_j$ 是由离散向量空间 $\{Z_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 的射影极限定义的逆离散向量空间。那么， Z 是 Tate 向量空间，当且仅当对于每个 $j\in\mathbb{Z}$，满射映射 $Z_j \to Z_{j-1}$ 的核都是有限维的。(iii) 范畴 $\mathcal{T}$ 是拟阿贝尔半单的，并且在取连续对偶的函子下是自对偶的。(iv) 设 V 是无限维 Tate 向量空间。那么， V 是自对偶的，当且仅当 $V=U\oplus U^*$ 对于某个无限维离散向量空间 U。

证明。（i）设$W=\bigcup_i W_i$ 是一个归纳线性紧向量空间，它与一个逆离散向量空间 $Z=\varprojlim_j Z_j$ 同构（作为拓扑向量空间），即设 W 是一个 Tate 向量空间。复合映射

$$W_i \to W \cong Z \to Z_j$$

是从线性紧向量空间到离散向量空间的连续映射；因此，其像$Z_{i,\ j}$是有限维的。于是可以用 $Z_{i,\ j}$来表示空间 W_i 和 Z_j：

$$W_i = \varprojlim_j Z_{i,j} \ \text{ and } \ Z_j = \bigcup_i Z_{i,j} \ .$$

由此得到 W 的两种不同的二重极限表达式:

$$W = \bigcup_i \varprojlim_j Z_{i,j} = \varprojlim_j \bigcup_i Z_{i,j} \ .$$

为理解这些二重极限，对每个 i、$j\geq 0$，记 $K_{i,\ j}$ 为满射$Z_{i,\ j}\to Z_{i,\ j-1}$的核，并选取补空间 $Z'_{i,\ j}$，使得

$$K_{i,j} = Z'_{i,j} \oplus (Z_{i-1,j} \cap K_{i,j}) \ .$$

于是$W_i/W_{i-1}=\prod_j Z'_{i,j}$，并且还有等式

$$W = \bigoplus_{i\geq 0} \prod_{j\geq 0} Z'_{i,j} = \prod_{j\geq 0} \bigoplus_{i\geq 0} Z'_{i,j} \ . \tag{1}$$

现在注意到，等式 (1) 成立当且仅当对于除有限多个 i 之外的所有 i，都有$Z'_{i,j}=0$ 对于除有限多个 j 之外的所有 j。因此，不失一般性，可以假设对于所有 $i>0$，只有有限多个 $Z'_{i,j}$ 非零。这意味着 W_{i-1} 在 W_i中具有有限余维。

反过来，若 $W=\bigcup_i W_i$ 满足：对于所有 i，线性紧空间 W_{i-1} 在 W_i 中的余维有限，则子空间 W_i 在 W 中是开集，并构成 W 的开邻域基。因此，$W\cong\lim\limits_{\longleftarrow i} W/W_i$ 是前离散的，进而 W 是一个 Tate空间。

这就证明了（i）。陈述（ii）可用同样的方法证明。陈述（iii）由命题 2.3（v）得出。

我们来证明（iv）。设 U 是一个可数维的无限维离散向量空间。显然，$U\oplus U^*$ 是自对偶的 Tate空间。反过来，设 V 是无限维、自对偶且为 Tate空间。则存在一个滤过

$$V=\bigcup_{i\in\mathbb{O}} V_{\geq i}$$

其中 $V_{\geq i}$ 是 $V_{\geq i-1}$ 中余维为一的线性紧子空间，且 $\mathbb{O}$ 是一个与 $\mathbb{Z}$ 同构的全序集。为使一些公式更加对称，我们固定 $\mathbb{O}$ 为 $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$。我们还固定 V 的一个拓扑基 $\{v_i\}_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$，使得线性紧子空间 $V_{\geq i}$ 是 $<v_j|j\geq i>$的闭包。于是，由 $j<i$ 对应的 v_j 张成的子空间 $V_{<i}$是离散的，并且

$$V=V_{<i}\oplus V_{\geq i}\ .$$

此外，容易看出存在一个拓扑同构 $(V_{\geq i})^*\cong V_{<i}$。由此得出，$V=U\oplus U^*$，其中 $U=\bigcup_{i>0}V_{<i}$为可数维离散空间。

□

3. Categories of mixed tensors

3.1. 空间 V。这里我们固定本文其余部分所用的记号。设 V 是一个固定的无限维自对偶 Tate 向量空间。我们用 $\mathfrak{gl}(V)$ 表示 V的连续自同态所构成的李代数。这是范畴 $\mathcal{P}$中的一个李代数。

由引理 2.5(iv)，我们可以固定一个分解 $V=U\oplus U^*$，其中 U是无限维离散空间。与此分解相联系的是一个非退化对称双线性形式

$$A:V\times V\to\mathbb{C}\ ,\quad A((u,\varphi),(u',\varphi'))=\varphi(u')+\varphi'(u)\ ,$$

以及一个非退化反对称双线性形式

$$B:V\times V\to\mathbb{C}\ ,\quad B((u,\varphi),(u',\varphi'))=\varphi(u')-\varphi'(u)\ .$$

我们用 $\mathfrak{o}(V):=\mathfrak{o}(V,A)$ 表示 $\mathfrak{gl}(V)$ 中由满足以下条件的连续自同态f：$V\to V$构成的李子代数：对所有 $v,w\in V$

$$A(f(v),w)+A(v,f(w))=0\ .$$

因此，$\mathfrak{sp}(V):=\mathfrak{sp}(V,B)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的李子代数，由满足以下条件的连续自同态 f：$V\to V$ 构成：对所有 $v,w\in V$

$$B(f(v),w)+B(v,f(w))=0\ .$$

此外，可以选定离散向量空间 U 的一个基 $\mathcal{U}^- = \{v_{-1}, v_{-2}, \ldots\}$。由此得到 U^* 的一个拓扑基 $\mathcal{U}^+ = \{v_1, v_2, \ldots\}$，它与基 $\mathcal{U}^-$ 对偶。并集 $\mathcal{V} = \{\ldots, v_{-2}, v_{-1}, v_1, v_2, \ldots\}$ 是 V 的一个拓扑基。

用 $\mathfrak{h}$ 表示 $\mathfrak{gl}(V)$ 的阿贝尔李子代数，它由相对于拓扑基 $\mathcal{V}$ 具有对角矩阵的 V 的自同态组成。

定义 3.1. 令 $\mathfrak{h}_1$ 为 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{o}(V)$ 的交阿贝尔李代数，或等价地，为 $\mathfrak{sp}(V)$ 的交阿贝尔李代数；它由相对于基 $\mathcal{V}$ 的对角矩阵 $D = (a_{i,\ i})_{i\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ 组成，满足 $a_{i,\ i} = -a_{-i,\ -i}$。

定义 3.2. 令 $\mathfrak{g}(V)$ 为以下拓扑李代数中的任意一个：$\mathfrak{gl}(V)$ $\mathfrak{o}(V)$ $\mathfrak{sp}(V)$；并令 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)} := \mathfrak{h}$，当 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{gl}(V)$ 时；而在 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{o}(V)$ 或 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{sp}(V)$ 的情形下，令 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)} := \mathfrak{h}_1$。

3.2. 混合张量的拓扑向量空间。

Definition 3.3. V 的混合张量拓扑空间为以下空间 s

$$\mathbf{V}^{p,q} := V^{\widehat{\otimes}^* p}\ \widehat{\otimes}^* (V^*)^{\widehat{\otimes}^* q}$$

and

$$\widehat{\mathbf{V}}^{p,q} := V^{\widehat{\otimes}^! p}\ \widehat{\otimes}^! (V^*)^{\widehat{\otimes}^! q}\ .$$

根据定义，空间 V 是李代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个表示。因此，由函子的函子性，所有混合张量的拓扑空间也都是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的表示，或称模。此外，通过限制，它们也是 $\mathfrak{o}(V)$ 和 $\mathfrak{sp}(V)$ 上的模。

^引理 3.4。空间 $\mathbf{V}^{p,q}$ 是归纳线性紧的。空间 $\mathbf{V}^{q,p}$ 是 $\mathbf{V}^{p,q}$ 的连续对偶，因此是前离散的。

证明。直接由命题 2.3 (i)、(v) 得出。 □

引理 3.5。 V^* 与 V 同构，作为拓扑 $\mathfrak{o}(V)$-模；同时也作为拓扑$\mathfrak{sp}(V)$-模同构。

证明。我们针对双线性形式 A给出论证，关于 B 的论证与此类似。映射 $v \mapsto A(v, -)$ 是从 $\Phi_A\colon V \to V^*$ 出发的线性映射，并且容易验证它是双射且双连续，例如可由分解 $V = U \oplus U^*$ 看出。此外，若 φ 是线性形式 $A(v, -)$，则 $\Phi_A(v) = \varphi$；若 $X \in \mathfrak{o}(V)$，则可得

$$\Phi_A(Xv) = X\Phi_A(v)\ .$$

因此，同构 Φ_A 是 $\mathfrak{o}(V)$-等变的。 □

3.3. $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-模结构与权部分。设 W 是一个 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-模。回忆一下，元素 $\chi \in \mathfrak{h}^*_{\mathfrak{g}(V)}$ 是 W 的一个权，当且仅当

$$W^\chi = \left\{w \in W \mid\ tw = \chi(t)w\ ,\ \ \forall t \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}\right\} \neq 0\ .$$

空间 W^χ 是 W 的 χ-权空间。W 的所有权空间之和是 W 的权部分 W^{wt}；它是 W 的最大半单 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$- 子模。

按定义，$\varepsilon_k \in \mathfrak{h}^*$ 对于 $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 的权就是 $\mathfrak{gl}(V)$-模 V的权，并且对所有 k，$\dim V^{\varepsilon_k} = 1$。特别地，$V_{\geq i}$的权全都是 ε_k，其中 $k \geq i$。此外，向量v_k^* 构成 V^* 的拓扑基，该基与 $\mathcal{V}$对偶，而v_k^* 的权为 $-\varepsilon_k$。

接下来，线性形式 $\chi_k := (\varepsilon_k)|_{\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}}$ 构成$\mathfrak{h}^*_{\mathfrak{g}(V)}$的一组基。如果 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{o}(V)$或 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{sp}(V)$，我们假设 $k > 0$，因为这里 $\chi_{-k} = -\chi_k$。

引理 3.6. 以下陈述成立：

(i) 子空间

$$\mathbf{V}_i^{p,q} := V_{\geq i}^{\widehat{\otimes}^* p} \,\widehat{\otimes}^*\, ((V_{\leq -i})^*)^{\widehat{\otimes}^* q}$$

是 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-子模，并且作为 $\mathfrak{g}(V)$-模 $\mathbf{V}^{p,q}$ 是线性紧的。对于 $\mathbf{V}_i^{p,q}$ 的任意权 $\chi \in \mathfrak{h}^*_{\mathfrak{g}(V)}$，权空间 $(\mathbf{V}_i^{p,q})^\chi$ 是有限维的，并且

$$\mathbf{V}_i^{p,q} = \prod_\chi (\mathbf{V}_i^{p,q})^\chi$$

其中出现的权只有可数多个。此外，

$$(\mathbf{V}^{p,q})^{wt} = V^{p,q} := (V^{wt})^{\otimes p} \otimes (V^{*wt})^{\otimes q} .$$

(ii) $\mathbf{V}^{p,q}$ 的闭 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-稳定子空间与 $V^{p,q}$ 的$\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-稳定子空间之间存在一个保序双射，该双射在一个方向上通过取权部分给出，在另一个方向上通过取闭包给出。特别地，$(\mathbf{V}^{p,q})^{wt}$ 在 $\mathbf{V}^{p,q}$ 中稠密。

证明。注意，空间 $\mathbf{V}_i^{p,q}$ 是线性紧的，并且可以实现为以下逆极限

$$\mathbf{V}_i^{p,q} = \varprojlim_r V_{[i,r]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-r,-i]}^{\otimes q})^* , \quad r > |i| .$$

典范映射

$$V_{[i,r]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-r,-i]}^{\otimes q})^* \to V_{[i,r-1]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-(r-1),-i]}^{\otimes q})^*$$

是一个 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-模的满同态。由于它限制在$V_{[i,r]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-r,-i]}^{\otimes q})^*$中与 $V_{[i,r-1]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-(r-1),-i]}^{\otimes q})^*$对应的权子空间的直和上时是一个同构，因此它有唯一的右逆。由此可知，相对于 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$ 的 $\mathbf{V}_i^{p,q}$，的所有权空间都是有限维的。此外，典范映射

$$\prod_\chi (\mathbf{V}_i^{p,q})^\chi = \varprojlim_\chi (\mathbf{V}_i^{p,q})^\chi \to \varprojlim_r V_{[i,r]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-r,-i]}^{\otimes q})^*$$

是拓扑向量空间的同构。$\mathbf{V}_i^{p,q}$的权具有 $\chi = \sum_k n_k \chi_k$ 的形式（注意，对于 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{gl}(V)$，$\chi_k = \varepsilon_k$），其中整数 n_k 满足

$$\sum_k |n_k| \leq p + q .$$

此外，由上文可知

$$\begin{aligned}(\mathbf{V}^{p,q})^{wt} &= \bigcup_{i,j} (\mathbf{V}_i^{p,q})^{wt} = \bigcup_{i,r} (V_{[i,r]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-r,-i]}^{\otimes q})^*)^{wt} \\ &= \bigcup_{i,r} (V_{[i,r]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-r,-i]}^{\otimes q})^*) = V^{\otimes p} \otimes V_*^{\otimes q} = V^{p,q} ,\end{aligned}$$

其中，单射 $V_{[i,r-1]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-(r-1),-i]}^{\otimes q})^* \hookrightarrow V_{[i,r]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-r,-i]}^{\otimes q})^*$是唯一的$\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-模同态，且它是典范满射 $V_{[i,r]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-r,-i]}^{\otimes q})^* \to V_{[i,r-1]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-(r-1),-i]}^{\otimes q})^*$的右逆。至此，$(i)$得证。

现在证明 (ii)。注意，对每个 i，$\prod_\chi(\mathrm{V}_i^{p,q},)^\chi$ 的闭 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-稳定子空间与其权部分 $\bigoplus_\chi(\mathrm{V}_i^{p,q},)^\chi$的 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-稳定子空间之间存在一个保序双射。若 L 是 $V^{p,q}$中的一个 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-稳定子空间，则 $L=\bigcup_i L_i$ 其中$L_i=L\cap(\mathrm{V}_i^{p,q},)^{wt}$。此外，容易验证 $\overline{L_i}=\overline{L_{i-1}}\cap(\mathrm{V}_i^{p,q},)$。因此，$\mathrm{V}^{p,q}$ 中 L 的闭包 $\overline{L}$等于$\bigcup_i\overline{L_i}$，其中 $\overline{L_i}$ 是 $\mathrm{V}_i^{p,q}$, 中 L_i 的闭包。因此，取权部分可得 $\mathrm{V}^{p,q}$的闭 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-稳定子空间与 $V^{p,q}$的 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-稳定子空间之间的一个保序双射。其逆双射由取闭包给出。特别地，有 $\underline{(\mathrm{V}^{p,q})^{wt}}=\mathrm{V}^{p,q}$，因此 $(\mathrm{V}^{p,q})^{wt}$ 在 $\mathrm{V}^{p,q}$中稠密。至此，(ii)得证。□

$\widehat{}$3.4. 范畴 $\mathrm{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 和 $\mathrm{T}_{\mathfrak{g}(V)}$。范畴 $\mathrm{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$、$\mathrm{T}_{\mathfrak{o}(V)}$、$\mathrm{T}_{\mathfrak{sp}(V)}$的定义彼此平行，因此，采用一个统一的定义来描述拓扑 $\mathfrak{g}$-模的范畴 $\mathrm{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 更为方便，其中 $\mathfrak{g}(V)$ 是下列拓扑李代数之一：$\mathfrak{gl}(V)$、$\mathfrak{o}(V)$ 或$\frown$ $\frown\mathfrak{sp}(V)$。类似地，也可以统一定义范畴 $\mathrm{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$、$\mathrm{T}_{\mathfrak{o}(V)}$、$\widehat{\mathrm{T}}_{\mathfrak{sp}(V)}$。

定义 3.7. 范畴 $\mathrm{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 的对象是形如Z/Q的拓扑向量空间，其中 Z 是有限个形如 $\mathrm{V}^{p,q}$的拓扑向量空间之直和中的一个闭 $\mathfrak{g}(V)$-稳定子空间，而 Q 是 Z的一个闭 $\mathfrak{g}(V)$-稳定子空间。范畴 $\mathrm{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 中的态射是 $\mathfrak{g}(V)$-等变连续线性映射。

注 3.8. 引理 3.5 表明，在定义 3.7 中取 $\mathfrak{o}(V)$ 或 $\mathfrak{sp}(V)$ 的情形下，只需考虑满足 $q=0$的空间 $\mathrm{V}^{p,q}$。

引理 3.9. 设 W是 $\mathrm{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 的一个对象，且 Z是 W的闭 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-稳定子空间。那么存在 W的一个闭 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-稳定子空间 Q，使得典范映射 $Z\oplus Q\to W$是一个 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-等变拓扑同构。

证明. 由定义 3.7 可知，只需考虑情形 $W=\mathrm{V}^{p,q}$。这里，滤过 $\{\mathrm{V}_i^{p,q}\}$,诱导出一个由闭线性紧子空间$W=\bigcup_i W_i$ 构成的 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-稳定滤过；根据引理 3.6 (i)，这些子空间同构于有限维权空间的直积。类似地，闭子空间 Z 具有诱导滤过 $Z=\bigcup_i Z_i$。对于 W的每个权 χ，都可以在 $(W_i)^\chi$中选择相容的补子空间 $(Q_i)^\chi$，使其对应于 $(Z_i)^\chi$。于是，子空间 $Q_i:=\prod_\chi(Q_i)^\chi$ 是闭且 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-稳定的，并且存在拓扑 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-模的同构 $Z_i\oplus Q_i\cong W_i$。因此，$Q:=Q_i$ 是 W的一个闭且$\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-稳定子空间，并且典范态射 $Z\oplus Q\to W$是拓扑 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-模的一个同构。证明完毕。□

定义 3.10. 令 $\mathfrak{g}(\infty)$ 为稳定 V^{wt} 的 $\mathfrak{g}(V)$ 子代数。

定义 3.11. 范畴 $\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}$ 的对象是形如 Z'/Q' 的向量空间，其中 Z' 是形如 $(\mathrm{V}^{p,\ q})^{wt}$ 的向量空间有限直和的一个 $\mathfrak{g}(\infty)$-稳定子空间，而 Q' 是 Z' 的一个 $\mathfrak{g}(\infty)$-稳定子空间。范畴 $\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}$ 中的态射是 $\mathfrak{g}(\infty)$-等变线性映射。

引理 3.12. 取权部分是一个函子 $(\ )^{wt}:\mathrm{T}_{\mathfrak{g}(V)}\to\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty}$ $)$.

证明。根据引理 3.6，$\mathrm{V}^{p,q}$的权部分是 $V^{p,q}$。注意，$V^{p,q}$不是 $\mathfrak{g}(V)$-稳定的，但在稠密李子代数 $\mathfrak{g}(\infty)$的作用下稳定。令$W\cong Z/Q$ 为 $\mathrm{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 中的一个对象，其中

$Q \subset Z$ 是有限直和$\bigoplus_i \mathbf{V}^{p_i,q_i}$的两个闭 $\mathfrak{g}(V)$-稳定子空间。那么，权部分 Q^{wt} 和 Z^{wt} 是 $\bigoplus_i V^{p_i,q_i}$的 $\mathfrak{g}(\infty)$-稳定子空间，而引理 3.9蕴含 $W^{wt} \cong Z^{wt}/Q^{wt}$。因此，权部分 W^{wt} 是范畴 $\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}$的一个对象。最后，显然，$\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 中的态射限制为权部分之间的 $\mathfrak{g}(\infty)$-等变态射。这就证明了该命题。□

引理 3.13. 映射

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}}(\mathbf{V}^{p,q}, \mathbf{V}^{p',q'}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}}((\mathbf{V}^{p,q})^{wt}, (\mathbf{V}^{p',q'})^{wt})$$

由函子 $(\ )^{wt}$ 诱导，是一个向量空间同构。

证明。由引理 3.6 (ii)，子空间 $(\mathbf{V}^{p,q})^{wt}$ 在 $\mathbf{V}^{p,q}$ 中稠密，因此映射 Φ 是单射。此外，由 [6, 第 6], 节可知，向量空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty)}}((\mathbf{V}^{p,q})^{wt}, (\mathbf{V}^{p',q'})^{wt})$ 由缩并和置换的复合生成。这些态射显然可由连续性延拓到 $\mathbf{V}^{p,q}$，因此属于映射 Φ 的像。于是 Φ 也是满射。□

回顾一下，拟阿贝尔范畴中严格态射的定义见 [11,1.1.7],，或参见 [7, 第 2] 节。

命题 3.14. 设

$$W = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathbf{V}^{p_k,q_k} \quad \text{and} \quad W' = \bigoplus_{k'=1}^{r'} \mathbf{V}^{p'_{k'},q'_{k'}}.$$

那么，每个 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}}(W, W')$ 都是严格的。此外，若 Q 是 W 的闭 $\mathfrak{g}(V)$-稳定子空间，则每个限制 $f_{|Q}$ 也都是严格的。

证明。取 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}}(W, W')$，并令 Z表示 f的像。根据 [7, 引理 2.10],，要证明 f 是严格的，只需证明 Z 是 W'的闭子空间。

考虑 $W_i := \bigoplus_{k=1}^{r} \mathbf{V}_i^{p_k\ q_k,}$ 和 $W'_{i'} := \bigoplus_{k'=1}^{r'} \mathbf{V}_{i'}^{p'_k\ q'_k,}$。$W$和 W'上的拓扑分别是$\bigcup_i W_i$和 $\bigcup_{i'} W'_{i'}$ 上的归纳极限拓扑。因此，若 $Z_{i'} := Z \cap W'_{i'}$，则有 $Z = \bigcup_{i'} Z_{i'}$；此外，Z 在 W' 中是闭的，当且仅当对每个 i'，子空间 $Z_{i'}$ 在 $W'_{i'}$中是闭的。

固定 i'，并证明 $Z_{i'}$在 $W'_{i'}$中是闭的。令 $Z_{i',\ i} := f(W_i) \cap W'_{i'}$。于是 $Z_{i'} = \bigcup_i Z_{i',\ i}$，并且根据 [7, 引理 2.3（$iii$）], ，子空间 $Z_{i'}$ 在 $W'_{i'}$ 中是闭的，当且仅当存在 i使得 $Z_{i',\ i} = Z_{i'}$。

现在我们证明确实存在一个 i，使得 $Z_{i',i} = Z_{i'}$，从而证明该命题。根据引理 3.6（i），对于任意 $\chi \in \mathfrak{h}^*_{\mathfrak{g}(V)}$，$W_i$ 和 $W'_{i'}$ 的 χ-权空间都是有限维的，并且

$$\overline{Z_{i'}} = \prod_{\chi} (Z_{i'})^{\chi} \quad \text{and} \quad Z_{i',i} = \prod_{\chi} (Z_{i',i})^{\chi}.$$

我们来讨论 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{gl}(V)$ 的情形。用 S 表示作用在可数个字母上的有限支撑对称群，即 $S = \bigcup_n S_n$。于是 S 通过置换基 $\mathcal{V}$的元素作用在 V 上，而 S则在 V^*上逆变地作用。因此，S也作用在 W和 W'上。引理 3.13 和 [6, 引理 6.1] 推出映射 f 是 S-等变的。注意，$W'_{i'}$在 S 的子群 S' 的作用下保持不变，该子群逐点固定集合 $\{v_i\}$（其中$|i| \leq N : = |i'|$）。此外，由于 S 正规化了 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)} = \mathfrak{h}$，可知 S'的作用会置换各个权，相应地也会置换各个权空间。记 $r = N + p + q$,

并注意，使 $(W_i')^\chi \neq 0$ 成立的权 χ 构成有限多个 S'-轨道，且每个轨道都包含一个来自 $V_{[i',r]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-\eta,-i']}^{\otimes q})^*$ 的权。取 i 使得对于 $V_{[i',r]}^{\otimes p} \otimes (V_{[-r,i']}^{\otimes q})^*$ 的每个权 χ，都有 $(Z_{i'})^\chi = (Z_{i',i})^\chi$。

下面证明，这意味着对于任意权 ψ，都有 $(Z_{i'})^\psi = (Z_{i',\ i})^\psi$，从而最终得到 $Z_{i'} = Z_{i',\ i}$。事实上，对于 $k < l$，令 $E_{k,\ l} \in \mathfrak{gl}(V)$ 为将 v_k 映到 v_l、并将所有其他基向量映到 0 的端omorphism。注意到 $E_{k,\ l}(W_{i'}') \subset W_{i'}'$，且对于每个 j，都有 $E_{k,\ l}(W_j) \subset W_j$；由于 f 是 $\mathfrak{gl}(V)$-等变的，因此还有 $E_{k,\ l}(Z_{i',\ i}) \subset Z_{i',\ i}$。

我们用反证法。

假设 $\psi = \sum a_l \varepsilon_l$ 是一个权，使得 $(Z_{i'})^\psi \neq (Z_{i',\ i})^\psi$，并且满足 $|l| > r$ 的非零系数个数在所有此类权中最小。根据关于i的假设，至少存在一个 l 使得 $|l| > r$ 且 $|a_l| > 0$，并且至少存在一个 k 使得$|i'| < k \leq r$ 且 $a_k = 0$。

令 $\sigma \in S'$ 为交换 k 和 l 的换位。令 $\theta = \sigma(\psi)$。由 S-等变性可知，$\dim(Z_{i'}^\theta) = \dim(Z_{i'}^\psi)$。此外，容易验证算子 $E_{k\,l}^{|a_k|}$ 将 $(W_i')^\theta$ 同构地映到 $(W_i')^\psi$。进而，由 f 的 $\mathfrak{gl}(V)$-等变性，同一算子将 $(Z_{i'},_i)^\theta$ 同构地映到 $(Z_{i'},_i)^\psi$，并将 $(Z_{i'},_i)^\theta$ 同构地映到 $(Z_{i'},_i)^\psi$。由于在 θ 的分解中，$|l| > r$ 对应的 ε_l 少了一个，因此产生矛盾，这意味着 $(Z_{i'})^\theta = (Z_{i'},_i)^\theta$，从而 $(Z_{i'})^\psi = (Z_{i'},_i)^\psi$ 也成立。这证明了 $Z_{i'} = Z_{i'},_i$，因此在 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{gl}(V)$ 的情况下，f 是严格的。

现在设 Q 是 W 的一个闭 $\mathfrak{gl}(V)$-稳定子空间。由引理 3.6，$Q = \overline{Q^{wt}}$，因此 Q 是 S-稳定的。若 $Q_i := Q \cap W_i$，则 $Q = \bigcup_i Q_i$ 是将 Q 表示为线性紧闭 $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}(V)}$-子模归纳极限的一个表示。上述论证可对 $Z = f(Q)$、$Z_j = Z \cap W_j'$、$Z_{j,\ i} = f(Q_i) \cap Z_j$ 重复进行，从而证明 $f_{|Q}$ 的像是闭的。因此 $f_{|Q}$ 是严格的。

情形 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{o}(V)$ 或 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{sp}(V)$ 可用类似方法处理。事实上，在这种情形下，群 S 通过置换基元素 $\ldots, u_{-2}, u_{-1}$ 作用于 U，并在 U^* 上逆变地作用，相应地置换拓扑基 $u_1, u_2, \ldots$. 因此，S 以 $\mathfrak{g}(V)$-等变的方式作用于 $V = U \oplus U^*$，并最终作用于 W 和 W'。与情形 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{gl}(V)$ 类似，第 6] 节中的结果表明 f 是 S-等变的。设 S' 是固定向量 $v_{-N}, \ldots, v_N$ 的子群，其中 $N = |i'|$。再次利用 S' 对 $\mathfrak{h}(V)$ 的权以及各个权空间的作用，可证明对于适当的 i，有 $Z_{i'} = Z_{i'},_i$。对于 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{o}(V)$，只需将 $E_{k,l}$ 替换为 $E_{k,\ l} - E_{-k,-l}$，$0 < k < l$；而对于 $\mathfrak{g}(V) = \mathfrak{sp}(V)$，则替换为 $E_{k,l} + E_{-k,-l}$，$0 < k < l$。□

命题 3.15. $\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 中的每个对象都同构于有限直和 $\mathbb{V}^{p,q}$-s 的一个子对象。

证明。设 $W = Z/Q$ 其中 $Q \subset Z$ 是有限直和 $M = \bigoplus_j \mathbb{V}^{p_i,q_i}$ 的闭 $\mathfrak{g}(V)$-等变子空间。由引理 3.9 可知 $W^{wt} \cong Z^{wt}/Q^{wt}$。此外，根据 $[6, \text{命题 } 4.5]$，$\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}$ 的任意对象都同构于形如 $\bigoplus_j V^{r_j,s_j}$ 的某个内射对象的子对象。设 $\varphi\colon W^{wt} \to A$ 是一个 $\mathfrak{g}(V)$-等变同构，其中 A 是 $(M')^{wt} = \bigoplus_j V^{r_j,s_j}$ 中的一个 $\mathfrak{g}(V)$-稳定子空间，对任意 $M' = \bigoplus_j \mathbb{V}^{r_j,s_j}$ 均成立。令 Z' 为 A 在 M' 中的闭包。此外，由 $(M')^{wt}$ 的内射性及引理 3.13 可知，φ 是一个 $\mathfrak{g}(V)$-等变映射 $\tilde{\varphi}\colon M^{wt} \to (M')^{wt}$ 的限制；该映射可延拓为一个 $\mathfrak{g}(V)$-等变映射 $f\colon M \to M'$。由命题 3.14，子空间 $f(Z)$ 是闭的，因而等于 Z'。

现在，f 诱导出一个从 W 到 Z' 的双射连续线性映射；根据 [7, 引理 2.7(a)]，它是一个拓扑同构。这就证明了该命题。□

定义 3.16. 范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 的对象是形如Z/Q的拓扑向量空间，其中 Z 是有限个形如 $\mathbf{V}^{p,q}$ 的拓扑向量空间之有限直和中的一个闭 $\mathfrak{g}(V)$-稳定子空间，而 Q 是 Z 的一个闭 $\mathfrak{g}(V)$-稳定子空间。范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 中的态射是 $\mathfrak{g}(V)$-等变连续线性映射。

定理 3.17. 以下陈述成立：

(i) 范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 分别是 $\mathcal{I}$ 和$\mathcal{P}$ 的对称幺半阿贝尔子范畴。(ii) $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{P}$ 之间的对偶性限制为 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 与 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$之间的对偶性。(iii) 权部分函子

$$(\ )^{wt} : \mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)} \to \mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}$$

是对称幺半阿贝尔范畴之间的一个等价。

证明. 范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 是对称幺半范畴这一事实，是以下同构的结果

$$\mathbf{V}^{p,q}\widehat{\otimes}^{*}\mathbf{V}^{p',q'} \cong \mathbf{V}^{p+p',q+q'} \text{ and } \widehat{\mathbf{V}}^{p,q}\widehat{\otimes}^{!}\widehat{\mathbf{V}}^{p',q'} \cong \widehat{\mathbf{V}}^{p+p',q+q'} .$$

由 [7, 命题 2.9] 中对 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{P}$里的核与余核的描述可知，范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 分别在 $\mathcal{I}$和 $\mathcal{P}$ 中对取核与余核封闭。因此，$\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 继承了拟阿贝尔结构。此外，线性映射f 是 $\mathfrak{g}(V)$-等变的，当且仅当其对偶 f^* 是 $\mathfrak{g}(V)$-等变的。这意味着，命题 2.3 中所述的对偶性限制为拟阿贝尔范畴$\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 与 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$之间的对偶性，从而证明了 (ii)。

为证明 (i)，注意到拟阿贝尔范畴是阿贝尔范畴，当且仅当每个态射都是严格的（见 [3, 注 4.7 和注 4.9]）。由对偶性，只需证明 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 中的每个态射都是严格的。

设 $f\colon W \to W'$ 是 $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 中的一个态射。由命题 3.15，可设 W和 W'分别是模 M和 M' 的子模，而后两者都是 $\mathbf{V}^{p,q}$-s 的有限直和。由 [6, 命题 4.5] 和引理 3.13 可知，从 W到 W' 的 $\mathfrak{g}(V)$-等变连续线性映射，都是从M 到 M'的 $\mathfrak{g}(V)$-等变连续线性映射的限制，并且由命题 3.14，这些限制都是严格的。因此，(i) 得证。

下面证明 (iii)。沿用 (i) 中的记号 W、W'、M、M'。于是有如下线性算子的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}}(M, M') & \xrightarrow{a} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}}(W, M') \\ \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}}(M^{wt}, (M')^{wt}) & \xrightarrow{b} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}}(W^{wt}, (M')^{wt}) \end{array} .$$

根据引理 3.13，映射 c 是双射；由 $(M')^{wt}$([6, 命题 4.5]) 的单射性可知，映射 b 是满射。因此，d是满射。由于 W^{wt}在 W中稠密，映射 d也是单射，因此 d是同构。

假设 W'是同态 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}}(M', N')$ 的核，其中 N'是 $\mathbf{V}^{p,q}$-s 的有限直和。这就得到交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}}(W, W') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}}(W, M') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}}(W, N') \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}}(W^{wt}, (W')^{wt}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}}(W^{wt}, (M')^{wt}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}^{\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}}(W^{wt}, (N')^{wt}) \end{array}$$

其中各行均为正合的，中间的竖直箭头是上文的映射 d。我们已证明 d 是一个同构，同理可证明第三个竖直箭头也是一个同构。因此，第一个竖直箭头也必为同构。这证明了函子 $(\ )^{wt}$ 是全忠实的。

我们来证明函子 $(\ )^{wt}$的本质满射性。设 A 是 $\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}$的一个对象。根据 [6, 命题 4.5], 可设 A 是同态 $\phi \in \mathrm{Hom}^{\mathbb{T}_{\mathfrak{g}(\infty)}}((M'')^{wt}, (M''')^{wt})$ 的核，其中 M''、M'''是 $\mathbf{V}^{p,q}$-s 的有限直和。由引理 3.13，映射 ϕ是唯一映射 $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}}(M'', M''')$ 的限制。因此有 $(\ker\psi)^{wt} = A$；故函子 $(\ )^{wt}$ 是本质满射的。至此，(iii) 得证。□

推论 3.18. $\mathbf{T}_{\mathfrak{g}(V)}$ 中的每个对象都同构于$\widehat{\ }\mathbf{V}^{p,q}$-s 的有限直和的一个商。

证明. 由定理 3.17(ii) 和命题 3.15 可得。 □

4. A supersymmetric setting

我们以定理 3.17 的一个超对称扩张作为本文的结尾。首先，我们来介绍范畴 $\mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty)}$、$\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$的超对称类比。

我们用 Π 表示向量超空间（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次向量空间）范畴上的函子，它将 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次变为相反的分次。将 V视为纯偶超空间（即 $V_0 = V, V_1 = 0$），我们引入拓扑超空间 $V \oplus \Pi V$。由于 $(V \oplus \Pi V)^* = V^* \oplus \Pi V^* = V \oplus \Pi V$，这是一个自对偶 Tate 超空间。$V \oplus \Pi V$的连续自同态李超代数记为 $\mathfrak{gl}(V \oplus \Pi V)$。李代数 $\mathfrak{gl}(V \oplus \Pi V)_0$, $\mathfrak{gl}(V \oplus \Pi V)$的偶部分，等于 $\mathfrak{gl}(V) \oplus \mathfrak{gl}(\Pi V)$。注意，$\mathfrak{gl}(\Pi V) = \mathfrak{gl}(V)$，即 $\mathfrak{gl}(V \oplus \Pi V)_0 = \mathfrak{gl}(V) \oplus \mathfrak{gl}(V)$。

现在令 $U \oplus \Pi U$为超空间，其具有 $(U \oplus \Pi U)_0 = U$和 $(U \oplus \Pi U)_1 = U$。在 U中选取一组基 $\{u_i^0\}$，便赋予 $U \oplus \Pi U$一组基 $\{u_i^0, u_i^1\}$，其中 u_i^1是将向量 u_i^0视为 ΠU中的元素。于是令 $U_* \oplus \Pi U_* = \mathrm{span}\{(u_i^0)^*, (u_i^1)^*\}$，其中 $\{(u_i^0)^*\}$是 $\{u_i^0\}$的对偶系，$\{(u_i^1)^*\}$是 $\{u_i^1\}$的对偶系，我们得到一个非退化配对

$$(U \oplus \Pi U) \times (U_* \oplus \Pi U_*) \to \mathbb{C}$$

它与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$分次相容。张量积

$$(U \oplus \Pi U) \otimes (U_* \oplus \Pi U_*)$$

因此是一个结合超代数（$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分次结合代数），而 $\mathfrak{gl}(\infty|\infty)$ 按定义是与该超代数相伴的李超代数。注意，$\mathfrak{gl}(\infty|\infty)$ 是 $\mathfrak{gl}(V \oplus \Pi V)$ 的李子超代数。

类似地， $V \oplus \Pi V$ 配有一个超对称配对

$$AB : (V \oplus \Pi V) \times (V \oplus \Pi V) \to \mathbb{C}$$

由 $AB((x,y),(z,t)) = A((x,z)) + B((y,t))$ 给出，其中 $x,z \in V$, $y,t \in \Pi V$，并且在取 $B((y,t))$ 时，我们将 V 与 ΠV 视为相同。李子超代数

$$\mathfrak{osp}(V \oplus \Pi V) \subset \mathfrak{gl}(V \oplus \Pi V)$$

是由宇称为 $\overline{\varphi} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-齐次算子 $\varphi \in \mathfrak{gl}(V \oplus \Pi V)$ 生成的李子超代数，使得

$$AB(\varphi((x,y)),(z,t)) + (-1)^{\overline{\varphi}} AB((x,y),\varphi((z,t))) = 0 \ .$$

李代数 $\mathfrak{osp}(V \oplus \Pi V)_0$ 同构于 $\mathfrak{o}(V) \oplus \mathfrak{sp}(V)$。

范畴 $\mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty)}$、$\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$ 和 $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathfrak{gl}(V)}$ 以显而易见的方式扩展到范畴 $\mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty|\infty)}$、$\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V\oplus\Pi V)}$ 和 $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathfrak{gl}(V\oplus\Pi V)}$ 的定义：在相应定义中将 V 替换为 $V \oplus \Pi V$，并使用向量超空间而非仅仅向量空间。

由此得到如下函子图表,

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V\oplus\Pi V)} & \\ {\scriptstyle i_{\Pi V}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle i_V} \\ \mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)} & & \mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(\Pi V)} \end{array} \tag{2}$$

and

$$\begin{array}{ccc} & \widehat{\mathbf{T}}_{\mathfrak{gl}(V\oplus\Pi V)} & \\ {\scriptstyle \widehat{i}_{\Pi V}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \widehat{i}_V} \\ \widehat{\mathbf{T}}_{\mathfrak{gl}(V)} & & \widehat{\mathbf{T}}_{\mathfrak{gl}(\Pi V)} \end{array} \tag{3}$$

其中， i_V和 i_V（分别为 $i_{\Pi V}$和 $i_{\Pi V}$）是取 $\mathfrak{gl}$（V）不变量（分别为 $\mathfrak{gl}$（ΠV）不变量）的函子。

权函子（ $)^{wt}$ 将图表 (2) 转化为图表

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty|\infty)} & \\ {\scriptstyle i_{\Pi V,\infty}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle i_{V,\infty}} \\ \mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty)} & & \mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty)} \ , \end{array} \tag{4}$$

其中，$i_{V,\infty}$ 和$i_{\Pi V,\infty}$ 分别是关于子代数$\mathfrak{gl}$（∞） $\subset \mathfrak{gl}$（V）和 $\mathfrak{gl}$（∞） $\subset \mathfrak{gl}$（ΠV）的不变量函子。定理 3.17 断言，权函子（ $)^{wt}$ 是范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$ 与 $\mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty)}$之间的等价；我们将这一结果同样适用于范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V\oplus\Pi V)}$ 与 $\mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty|\infty)}$的验证留给读者。此外，Serganova 在 [13] 中证明，图表 (4) 中的映射都是幺半范畴之间的等价，这意味着存在一个幺半范畴之间的等价

$$i_{V,\infty} \circ i_{\Pi V,\infty}^{-1} : \mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty)} \to \mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty)} \ .$$

由此，我们得到

定理 4.1。图 (2) 和 (3) 是幺半范畴之间的等价图。

证明。图（2）的结果由 Serganova 的结果以及权函子与相应的不变量函子可交换这一事实得出。图（3）的结果则由对偶性得出。□

接下来，我们将关注李超代数 $\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)$。首先回顾李超代数 $\mathfrak{osp}(\infty|\infty)$。它是 $\mathfrak{gl}(V\oplus\Pi V)$ 中李子超代数 $\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)$ 与 $(V\oplus\Pi V)\otimes(V\oplus\Pi V)$ 的交，其中 $V\oplus\Pi V$ 配备了配对 AB。伴随 $\mathfrak{osp}(\infty|\infty)$-模同构于超空间 $V\oplus\Pi V$ 的第二（超）外幂 $\bigwedge^2(V\oplus\Pi V)$，并且 $\mathfrak{osp}(\infty|\infty)_0\cong\mathfrak{o}(\infty)\oplus\mathfrak{sp}(\infty)$，其中$\mathfrak{o}(\infty)=\lim\longrightarrow\mathfrak{o}(n)$，$\mathfrak{sp}(\infty)=\lim\longrightarrow\mathfrak{sp}(2n)$。范畴 $\mathbb{T}_{\mathfrak{osp}(\infty|\infty)}$ 在 [13] 中引入，其对象是 $\mathfrak{osp}(\infty|\infty)$-模，且同构于有限直和的张量积的如下形式的子商 $(V\oplus\Pi V)^{\otimes k}$，其中 $k\geq 0$。

接下来，范畴 $\mathbf{T}^{\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)}$ 的对象是形如 Z/Q的拓扑向量超空间，其中 Z 是直和中由形如 $(V\oplus\Pi V)^{\widehat{\otimes}^* p}$ 的拓扑向量超空间构成的一个闭 $\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)$- 稳定子空间，而 Q 是 Z 的一个闭 $\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)$-稳定子空间。范畴 $\mathbf{T}^{\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)}$ 中的态射是 $\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)$-等变连续线性映射。与定理 3.17 类似，可以证明权部分函子给出了幺半范畴 $\mathbf{T}^{\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)}$ 与 $\mathbb{T}_{\mathfrak{osp}(\infty|\infty)}$之间的等价。

此外，Serganova 在 [13]中证明了该图式

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{T}_{\mathfrak{osp}(\infty|\infty)} & \\ {\scriptstyle i_{\mathfrak{sp}(\infty)}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle i_{\mathfrak{o}(\infty)}} \\ \mathbb{T}_{\mathfrak{o}(\infty)} & & \mathbb{T}_{\mathfrak{sp}(\infty)}\ , \end{array} \tag{5}$$

其中，$i_{\mathfrak{o}(\infty)}$ 和 $i_{\mathfrak{sp}(\infty)}$ 分别是关于子代数$\mathfrak{o}(\infty)\subset\mathfrak{o}(V)$和 $\mathfrak{sp}(\infty)\subset\mathfrak{sp}(V)$的不变量函子，是一个幺半范畴之间的等价图式。

这就引出了

定理 4.2。图表

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{T}_{\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)} & \\ {\scriptstyle i_{\mathfrak{sp}(V)}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle i_{\mathfrak{o}(V)}} \\ \mathbf{T}_{\mathfrak{o}(V)} & & \mathbf{T}_{\mathfrak{sp}(V)} \end{array} \tag{6}$$

and

$$\begin{array}{ccc} & \widehat{\mathbf{T}}_{\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)} & \\ {\scriptstyle \widehat{i}_{\mathfrak{sp}(V)}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \widehat{i}_{\mathfrak{o}(V)}} \\ \widehat{\mathbf{T}}_{\mathfrak{o}(V)} & & \widehat{\mathbf{T}}_{\mathfrak{sp}(V)}\ , \end{array} \tag{7}$$

其中 $i_{\mathfrak{o}(V)}$ 和 $i_{\mathfrak{o}(V)}$（分别地，$i_{\mathfrak{sp}(V)}$ 和 $i_{\mathfrak{sp}(V)}$）是取 $\mathfrak{o}(V)$-不变元（分别地，$\mathfrak{sp}(V)$-不变元）的函子，它们构成幺半范畴之间的等价图表。

□

本文最后简要讨论我们所有范畴的泛性质。首先回顾，幺半范畴 $\mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty)}$ 存在一个规范的左正合函子，映入任意一个 $\mathbb{C}$-线性对称阿贝尔幺半范畴；该范畴具有两个对象 X、Y，并带有一个态射 $X\otimes Y\to\mathbf{1}$，其中 $\mathbf{1}$ 表示幺半单位。此函子将 U 映为 X，将 U_* 映为 Y，并将配对 $U\otimes U_*\to\mathbb{C}$ 映为态射 $X\otimes Y\to\mathbf{1}$。这类函子的存在性已在 [12] 和 [6] 中确立。因此，任何作为幺半范畴与 $\mathbb{T}_{\mathfrak{gl}(\infty)}$ 等价的范畴，都具有相同的泛性质。根据定理 3.17 和 4.1，这适用于范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(U)}$、$\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$、$\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(U\oplus\Pi U)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V\oplus\Pi V)}$。

由于范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(U)}$ 与范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(U)}$ [7]，因此存在一个典范的右正合函子，从 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(U)}$ 映到任意具有两个对象X、Y以及一个态射 $\mathbf{1}\to X\otimes Y$的 $\mathbb{C}$-线性对称幺半范畴。此函子将 U映到 X，将 U^*映到 Y，并将单射$\mathbf{1}\to U\widehat{\otimes}^{!}U^*$映到态射 $\mathbf{1}\to X\otimes Y$。因此，本文引入的两个幺半范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{gl}(V\oplus\Pi V)}$ 都具有这一泛性质。

最后，我们回顾一下，等价的幺半范畴 $\mathbb{T}_{\mathfrak{o}(\infty)}$ 和 $\mathbb{T}_{\mathfrak{sp}(\infty)}$ 具有以下共同的泛性质：对于任意给定的 $\mathbb{C}$-线性对称幺半范畴，只要其中有一个对象 X 带有态射$X\otimes X\to\mathbf{1}$，它们各自都存在一个典范的左正合函子映入该范畴，并分别将 V或 $V\oplus\Pi V$映到 X。由于范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{o}(V)}$、$\mathbf{T}_{\mathfrak{sp}(V)}$和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)}$ 分别作为幺半范畴与 $\mathbb{T}_{\mathfrak{o}(\infty)}$ 和 $\mathbb{T}_{\mathfrak{sp}(\infty)}$等价，它们具有这一泛性质。反过来，范畴 $\mathbf{T}_{\mathfrak{o}(V)}$. $\mathbf{T}_{\mathfrak{sp}(V)}$ 和 $\mathbf{T}_{\mathfrak{osp}(V\oplus\Pi V)}$ 具有以下共同的泛性质：对于任意给定的 $\mathbb{C}$-线性对称幺半范畴，只要其中有一个对象 X 带有态射 $\mathbf{1}\to X\otimes X$，它们各自都存在一个典范的右正合函子映入该范畴，并分别将 V或 $V\oplus\Pi V$映到 X。

References

[1] E. Arbarello, C. De Concini, V. G. Kac. 代数曲线的无穷楔表示与互反律。Theta functions—Bowdoin 1987, Part 1 (Brunswick, ME, 1987), 171–190, Proc. Sympos. Pure Math., 49, Part 1, 美国数学会, Providence, RI, 1989.[2] A. Beilinson. 关于拓扑代数的评注。Moscow Mathematical Journal, 8(1) (2008), 1–20, .[3] T. B¨uhler. 正合范畴。Expositiones Mathematicae, 28(1) (2010), 1–69, .[4] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, and T. Miwa. 孤子方程的变换群。Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory (Kyoto, 1981) (M. Jimbo and T. Miwa, eds.), World Scientific, Singapore, 1983, pp. 39–120.[5] E. Date, M. Jimbo, and T. Miwa. 孤子、微分方程、对称性与无限维代数。Cambridge Tracts Math., vol. 135, Cambridge Univ. Press, 2000.[6] E. Dan-Cohen, I. Penkov, and V. Serganova. 有限型李代数表示的 Koszul 范畴。Adv. Math. 289 (2016), 250–278.[7] F. Esposito, I. Penkov. 对 $\mathfrak{gl}(V)$的拓扑张量表示，其中 V 是可数维空间。Algebraic Geometry and Physics, 即将出版; arXiv:2206.00654.[8] E. Frenkel, V. G. Kac, A. Radul, and W. Wang. $\mathcal{W}_{1+\infty}$ 和 $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}(N))$，中心荷为 N。Commun. Math. Phys. 170 (1995), 337–357.[9] V. G. Kac and A. Radul. 顶点代数 $\mathcal{W}_{1+\infty}$的表示论。Transform. Groups 1 (1996), 41–70.[10] L. Positselski. 具有线性拓扑的拓扑向量空间的正合范畴。2021 ; arXiv:2012.15431.[11] J. P. Schneiders. 拟阿贝尔范畴与层。Memoires de la Societe mathematique de France : supplement au Bulletin de la Societe mathematique de France 76 (1999), 1–134.[12] S. V. Sam and A. Snowden. 表示论中的稳定性模式。Forum Math. Sigma, 3:e11, 108, 2015.

[13] V. Serganova，《李超代数的表示》，李理论展望讲义，编者 F. Callegaro,G. Carnovale,F. Caselli, C. De Concini, A. De Sole，施普林格，2017年,125-177.[14] J. Tate. 曲线上微分的留数。Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4) 1 (1968年), 149–159.

Francesco Esposito, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Padova, viaTrieste 63, 35121 Padova, Italy电子邮箱地址：esposito@math.unipd.it

Ivan Penkov, Constructor University, 28759 Bremen, Germany电子邮箱地址：ipenkov@constructor.university