arXiv:2301.08924v1 [math.RA] 21 Jan 2023

所有真特征子群均同构的阿贝尔群

Andrey R. Chekhlov，托木斯克国立大学数学与力学学院代数组，俄罗斯托木斯克 634050电子邮箱: a.r.che@yandex.ru，cheklov@math.tsu.ru以及 Peter V. Danchev，保加利亚科学院数学与信息学研究所代数组，保加利亚索非亚 1113电子邮箱：danchev@math.bas.bg，pvdanchev@yahoo.com

2023年1月24日

摘要

我们研究所有真特征子群均同构的阿贝尔群的两种变体，并深入考察它们的基本性质和特定性质，同时将其与所有真全不变子群均同构的阿贝尔群进行平行比较或对照；后者由本文作者于《Communications in Algebra》（2015）中作了详细研究。此外，我们还考察至少有一个真特征子群与整个群同构的阿贝尔群。我们所得结果在一定程度上扩展了 Grinshpon-Nikolskaya 分别发表于《Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics》（2011、2012）和《Communications in Algebra》（2011）的研究成果。

1 引言与定义

本文中，所考虑的所有群均采用加法记号，且均为阿贝尔群。本文使用的群论记号和术语主要是标准用法，分别沿用 [3], [4] 和 [8], 。关于本文所探讨主题的另一个有用资料来源是 [10] 。例如，若 p 是一个素整数，且 G 是任意群，则 $p^nG = \{p^ng \mid g \in G\}$ 表示由 G 中所有 p-高度大于或等于 $n \in \mathbb{N}$的元素组成的 p^n 次幂子群； $G[p^n] = \{g \in G \mid p^ng = 0, n \in \mathbb{N}\}$ 表示 G的 p^n-底；而 $G_p = \cup_{n<\omega} G[p^n]$ 表示 G的挠部分 $tG = \oplus_p G_p$ 的 p-分量。

另一方面，若 G 是一个无挠群且 $a \in G$，则分别用 $\chi_G(a)$ 表示特征，用 $\tau_G(a)$ 表示 a 的类型。具体而言，所有特征构成的集合中的等价类称为类型

[0]2010 美国数学会学科分类：主要分类 20K10、20K12。关键词与短语：阿贝尔群、全不变子群、特征子群。

并记作 τ。若 $\chi_G(a) \in \tau$，则记作 $\tau_G(a) = \tau$，因此 $\tau(G) = \{\tau_G(a) \mid 0 \neq a \in G\}$ 是 G的所有非零元素的类型构成的集合。集合 $G(\tau) = \{g \in G \mid \tau(g) \geqslant \tau\}$ 构成无挠群 G的一个纯全不变子群。回顾一下，无挠群 G 称为齐次群，若其所有非零元素具有相同的类型。

关于环论，我们假设所考虑的所有环都是含单位元的结合环。对于任意环 R，用字母 R^+ 表示其加法群。为简化记号并避免混淆，我们用 $\mathrm{E}(G)$ 表示 G 的自同态环，并用 $\mathrm{End}(G) = \mathrm{E}(G)^+$ 表示 G的自同态群。

按照惯例，群 G 的子群 F 称为全不变子群，如果对于任意 $\phi \in \mathrm{E}(G)$，都有 $\phi(F) \subseteq F$；而如果 ϕ 是一个可逆自同态（= 是一个自同构），则称 F 为特征子群。

任意群 G 的一些经典重要全不变子群包括前文定义的子群 p^nG 和对任意自然数 n 而言的 $G[p^n]$，以及 tG 和 G的极大可除子群 dG；事实上，dG 是 G 的一个全不变直和项（例如参见 [3]）。

为避免任何混淆和误解，我们称群 G仅有平凡的全不变子群，当且仅当 $\{0\}$ 和 G 是仅有的此类子群。特征子群也有相应的说法。

以下概念见于 [2]。

定义 1. 若非零群 G 只有平凡的全不变子群，或其所有非平凡全不变子群彼此同构，则称其为 IFI 群。

定义 2. 若非零群 G 只有平凡的特征子群，或其所有非平凡特征子群彼此同构，则称其为 IC 群。

注意，定义 2 蕴含定义 1。换言之，任意 IC 群都是 IFI 群；事实上，每个全不变子群都是特征子群。

定义 3. 若非零群 G 只有平凡的全不变子群，或其所有非零全不变子群彼此同构，则称其为强 IFI 群。

定义 4. 若非零群 G 只有平凡的特征子群，或其所有非零特征子群彼此同构，则称其为强 IC 群。

注意，定义 4 蕴含定义 3。

另一方面，定义 4 显然推出定义 2，但反过来则不成立。事实上，[8] 中构造了一个 2-群，其非平凡特征子群两两不同构，从而给出了一个 IC 群的例子，而它显然不是强 IC 群；换言之，定义 4 严格蕴含定义 2。

本文旨在探讨上述群类的一些基本而特殊的性质，尤其是 IC 群和强 IC 群。此外，我们还将进一步研究一个问题：给定的群是否存在一个非平凡特征子群，且该子群与整个群同构；我们将这类群称为弱

IC 群。我们这样做的动机，是为了展示并比较这些群类在特征方面的相似之处与差异。

我们在下一节中阐述并证明主要成果。

2 主要定理与例子

为使论述完整并便于读者理解，我们首先简要回顾在[2] 中关于IFI群和强IFI群所取得的最主要成果。

按照惯例，符号 $\oplus_m G = G^{(m)}$ 表示群 G的 m个副本的外直和，其中 m 是某个序数（有限或无限）。

定理2.1 设 G 为一个 p群， $m \geqslant 2$ 为一个序数。那么， $G^{(m)}$ 是IFI 群，当且仅当 G 是IC 群，当且仅当 G 是IPI群。

命题 2.2 设 G 为一个无挠群。那么， G 是IFI 群，当且仅当 G 是强 IFI 群。

引理2.3 (a) IFI 群的全不变子群是 IFI 群。(b) 强 IFI 群的全不变子群是强 IFI 群。

命题2.4 非零 IFI 群要么是可除群，要么是约化群。

定理 2.5 以下两点成立：

(i) 非零群 G 是 IFI 群，当且仅当满足以下条件之一：

- 对于某个素数 p，要么 $pG = \{0\}$，要么 $p^2G = \{0\}$，其中 $r(G) = r(pG)$。
- G 是幂等类型的齐次无挠IFI群。

(ii) 非零挠群 G 是强 IFI 群，当且仅当它是某个素数 p 对应的初等 p 群。

命题 2.6 任何幂等类型的齐次全传递无挠群都是 IFI 群。

推论 2.7 全传递无挠 IFI 群的直和项仍是全传递 IFI 群。

接下来，我们继续陈述并证明主要结果。在此之前，先记录以下两个或许有用的断言。

引理 2.8 若 G 是可分解的全传递齐次无挠群，则它的所有特征子群都是全不变的。

证明。将 $G = A \oplus B$ 分解为，其中 A、$B \neq \{0\}$、 $H \leq G$ 是特征子群，$\pi : G \to A$ 是相应的投影。若 $x \in \pi(H)$， $f \in \mathrm{E}(A)$ 且 $y = f(x)$，则存在元素 $z \in B$，使得 $\chi(z) = \chi(y)$。因此， $\varphi(y) = z$， $\psi(z) = y$，其中某些 $\varphi \in \in$同态集(A, B)， $\psi \in \in$同态集(B, A)。应用下文提出的引理 2.15，可得 $y \in H$。再次运用引理 2.15 (1)，即可推出 H 的全不变性。 ∎

引理 2.9 若 G 是齐次无挠传递群，则其所有特征子群都是全不变的。

证明。取 $0 \neq x \in H$ 和 $f \in \mathrm{E}(G)$，其中 H 是G的特征子群。我们有 $\chi(x) \leq \chi(f(x))$，并且只要 $f(x) \neq 0$，就有 $t(x) = t(f(x))$，因此对于某个自然数 k，有$\chi(kx) = \chi(f(x))$，从而 $\varphi(kx) = f(x)$，其中$\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，于是 $f(x) \in H$，证毕。

■

2.1 IC 群

我们从一些初等但有用的观察开始：

• 由于任意群的可除部分必然是全不变的，非零 IC 群要么是可除群，要么是约化群，因此由定理 2.5 可知，它要么是 p-群，要么是幂等类型的齐次无挠群。

• 如果 G 是无挠群，那么 G 是 IC 群，当且仅当 G是强 IC 群（与下一小节对照）。证明与 [2]中的命题 2.2 相同。

• 任意幂等类型的齐次传递无挠群都是 IC 群；事实上，鉴于其齐次这一条件，我们知道这样的群必然是全传递的。

• 任意可除群是 IC 群，当且仅当它是无挠群。（这可由 [2, 命题 2.7]直接得出。）

现在我们继续讨论以下技术细节。

引理 2.10 (1) 如果对于某个素数 p，$p^2G = \{0\}$，那么 G 中的每个特征子群 H 都是全不变的。

(2) 每个挠 IFI 群都是 IC 群。

证明. (1) 我们有 $G = G_1 \oplus G_2$，其中 G_1 是初等的，并且当 $pG \neq \{0\}$ 时，$G_2 \cong \bigoplus \mathbb{Z}(p^2)$。如果 $pH \neq \{0\}$，则如命题 2.20 $H = G$ 所示。因此，设 $pH = \{0\}$。假设 $\pi\colon\ G \to G_1$ 是相应的投影，且 $\pi(H) \neq \{0\}$，由引理 2.15 可直接推出 $H = G[p]$。然而，如果 $\pi(H) = \{0\}$，那么再次应用同一引理 2.15，可得$H = G_2[p] = pG[p]$。因此，在这两种情况下，子群 H 都是全传递的，证毕。

(2) 由 (1) 得出。 ■

显然，若自同态环 $\mathrm{E}(G)$ 中的任意元素都是可逆元与某个整数的乘积，那么给定群的所有全不变子群总是特征子群。

此外，根据 [2, 定理 2.12], ，若 G 是一个无挠 IFI 群，且其非零自同态均为单态射，那么 G 是一个 E 群。因此，对于这样的群 G，若加法群 $\mathrm{E}(G)^+$ 的秩有限，则张量积 $\mathrm{E}(G) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ 是一个域，并且 G 的每个自同态都是可逆元与某个整数的乘积（参见 [9]中定理 4.7 前的段落）。由此可得以下直接推论：

推论 2.11 如果 G 是一个有限秩无挠 IFI 群，且其非零自同态都是单态射，那么 G 是一个 IC 群。

然而，对于无限秩无挠群，情况则截然不同，正如下一个构造所示。在列出该构造之前，我们需要先介绍以下技术细节。

如果环 R 的加法群 R^+ 是无挠群，那么我们称环 R 为无挠环。同样，我们定义 $\pi(R) = \{p \in \mathbb{P} \mid pR \neq R\}$，其中 $h_p^G(x)$ 是元素 x 在 G 中的 p-高度。

引理 2.12 *[9,* 引理 44.*6]* 无挠环 R 的下列性质等价：

(1) 对每个 $p \in \pi(R)$ 及所有 $a, b \in R$，若 $p \mid ab$，则（或者） $p \mid a$ 或 $p \mid b$；
(2) 对每个 $p \in \pi(R)$ 及所有 $a, b \in R$，等式 $h_p(ab) = h_p(a) + h_p(b)$ 成立；
(3) 环 R/pR 没有零因子。

现在我们可以给出这个例子了。

例 2.13 存在一个不是 IC 群的 IFI 群。

ˆ证明。设 $\sigma \in \mathbb{Z}_p$ 是可逆元，但在 $\mathbb{Z}$ 上超越，且 R 是由 1 和 σ 生成的 $\mathbb{Z}_p$ 中的纯 ˆ ˆ 子环；通常， $\mathbb{Z}_p$ 表示 p- 进整数环。令 $G = R^+$，则显然它是一个 E 群。现在我们要说明 R 是主理想环，因此参照 [2, 定理 2.12]， G 将是一个 IFI 群。为此，设 $I \lhd R$ 是任意理想。若 $\alpha \in R$，则 $p^n\alpha \in \mathbb{Q}_p[\sigma]$；通常， $\mathbb{Q}_p$ 表示所有分母不被 p 整除的有理数构成的环，而 $\mathbb{Q}_p[\sigma]$ 是系数取自 $\mathbb{Q}_p$ 的 σ 多项式环。令 γ 为来自 I 的“次数最低”多项式，则可知 $\gamma R \leq I$。还要注意，对于每个素数 $q \neq p$， I 都是 R 中的一个 q-纯环（无单位元）。因此，对每个 $\beta \in I$，可得对于某个 $m \in \mathbb{N}$， $p^m\beta \in \gamma R$ 。事实上，若 $\beta = b_0\sigma^k + b_1\sigma^{k-1} + \cdots + b_k$，则 $\gamma = c_0\sigma^s + c_1\sigma^{s-1} + \cdots + c_s$，其中 b_i、 $c_j \in \mathbb{Q}_p$、 $k\ s \in \mathbb{N}\ c_0 = p^t d_0 \qquad d_0 \in \mathbb{Q}_p \setminus p\mathbb{Q}_p \qquad k \geq s \qquad p^t\beta - b_0 d_0^{-1}\sigma^{k-s}\ \gamma$， ... ...，其中.....，那么.....，而（ ）在 σ 上的次数小于 k，因此可以使用归纳法。假设 ˆ ˆ$\gamma_0 = p^s\gamma$，其中 $\gamma_0 \in \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$。因此， $\gamma_0 R$ 是 R 中的纯子环。事实上，由于 ˆ ˆ ˆR 在 $\mathbb{Z}_p$ 中是纯的，我们有 $R/pR \cong \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$；应用引理 2.12 可得 $h_p^R($ $\gamma_0 r) = h_p^R(\gamma_0) + h_p^R(r) = h_p^R(r)$，因为 $h_p^R(\gamma_0) = 0$。

此外，由上述 I 中元素的性质可知 $I \leq \gamma_0 R$。但是 $\gamma_0 R/\gamma R \cong \mathbb{Z}_{p^s}$ ，且由于 $I/\gamma R \leq \gamma_0 R/\gamma R$，可验证对于某个 $l \leq s$，有 $I/\gamma R \cong \mathbb{Z}_{p^l}$ 。特别地， $I = (p^l\gamma)R$，也就是说，I 是 R 的一个真主理想，正如预期的那样，因此 G 是一个 IFI-群，正如所指出的。

此外，注意到 Aut(G) 同构于群 $U(\mathbb{Q}_p)$，它由环 $\mathbb{Q}_p$ 的所有可逆元组成。为证明这一点，假设 $\alpha \in R$ 可逆，且由于 $p^n\alpha \in \mathbb{Q}_p[\sigma]$，必有 $p^n\alpha = a_0\sigma^k + a_1\sigma^{k-1} + \cdots + a_k$，其中$k \in \mathbb{N}$和 a_0、 a_1、.....、 $a_k \in \mathbb{Q}_p$。类似地， $p^m\alpha^{-1} = b_0\sigma^s + b_1\sigma^{s-1} + \cdots + b_s$。因此，$(a_0\sigma^k + a_1\sigma^{k-1} + \cdots + a_k)$ $(b_0\sigma^s + b_1\sigma^{s-1} + \cdots + b_s) = p^{n+m}$，这实际上正是所需的矛盾：若 $k \neq 0$，则 σ 是超越的。因此，在 G 中将存在一个秩 1 的特征子群；但由于假定 G 是无限秩，它显然不会是 IC 群，正如所声称的那样。 ∎

根据 [2, 推论 2.22], ，可以说，若 G 是 IFI 群，则对任意序数 m，笛卡尔直和 $G^{(m)}$ 也是 IFI 群。然而，以下结论成立：

例 2.14 存在这样一个群 A ，使得对于每个序数 $m > 1$， $G = A^{(m)}$ 都是 IC 群，但 A 不是 IC 群。特别地， IC 群的直和项未必是 IC 群。

证明。取例 2.13 中的群 A 。因此， G 是 IFI 群，因为 A 是 IFI 群。现在，假设 $H \leq G$ 是一个特征子群。由于 G 的每个自同态都是自同构之和，因此 H 必定是全不变的。于是，$H \cong G$，即 G 是一个 IC 群，结论得证。

■

2.2 强 IC 群

我们从一些初等但有用的观察开始：

• 一个非零挠群 G 是强 IC 群，当且仅当它是某个素数 p 对应的初等 p 群。（这可由上文引用的定理 2.5 直接推出。）

根据定理 2.5，可推知强 IFI 群恰好就是强 IC 群；同样，无挠强 IC 群恰好就是无挠 IC 群。

2.3 弱 IC 群

在开始我们的研究之前，值得注意的是， [5], [6] 和 [7] 研究了具有与自身同构的真全不变子群的阿贝尔群（包括挠群和无挠群）。本小节将开始考察这样一种情形：群具有一个与整个群同构的真特征子群。为行文简洁起见，我们将这类群称为弱 IC 群。

现在我们继续讨论主要结果。具体而言，我们将证明以下命题。

引理 2.15 设 $G = A \oplus B$ 和 π： $G \to A$ 为相应的投影。若 H 是 G中的特征子群，则：(1) 对每个 $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$，包含关系 $f\pi(H) \leq H$ 成立。(2) $\pi(H)$ 是 A中的特征子群。

证明。(1) 显然，自同态 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}$ 是 G的一个自同构，因此，对于任意满足 $a \in A$的 $x = a + b \in H$， $b \in B$，我们有$f(x) = x + f(a)$。因此， $f(a) = f\pi(x) \in H$，证毕。

(2) 若 $\alpha \in$ 自同构群(A)，则易见 $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$ 自同构群(G)，因此，对于任意满足 $a \in A$ 的 $a + b \in H$，有 $\alpha(a) + b \in H$。于是， $a - \alpha(a) \in H$，因此 $\alpha(a) = a - (a - \alpha(a)) \in \pi(H)$，如所需。 ■

命题 2.16 (1) 设 $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$，其中，对于每个直和项 G_i，都存在另一个直和项 G_j，使得 $j \in I \setminus \{i\}$，且 $G_i \cong G_j$。那么， G 的每个特征子群都是全不变的。

(2) 设 $A = B \oplus G$，其中 G 是这样一个可分解群：对于它的每个直和项 C，它都分解为 $G = C \oplus K$，并且在补群 K 中存在一个与 C 同构的直和项。于是，若 $\pi\colon A \to G$ 是投影，且 H 是 A 中的特征子群，则可得 $\pi(H) = H \cap G$，并且 $H \cap G$ 在 G 中是全不变的。

证明。(1) 鉴于 G_i 与 G_j 之间的同构，并参照引理 2.15，我们推得，不仅对于投影 $\pi_i\colon G \to G_i$，有 $\pi_i(H) \leq H$，而且对于 G_i 的每个自同态 φ，都有 $\varphi\pi_i(H) \leq H$；此外，对于每个 $f \in$ 同态集 $\left(G_i, \bigoplus_{j\neq i} G_j\right)$，都有 $f\pi_i(H) \leq H$。这当然意味着子群 H 是全不变的，证毕。

(2) 直接由 (1) 得出。 ∎

现在，对于任意直和的情形，我们可以再多说一点。

引理 2.17 设 $G = \bigoplus_{i\in I} G_i$ 和 $\pi_i\colon G \to G_i$ 为相应的投影，其中 I 是任意指标集。若 H 是 G 中的特征子群，则子群 $\underline{H} = \bigoplus_{i\in I}(H \cap G_i)$ 和 $\overline{H} = \bigoplus_{i\in I} \pi_i(H)$ 也都是 G 中的特征子群。

证明。令 $x \in H \cap G_i$ 和 $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$。由于 $\alpha(x)$ 可以嵌入有限个直和分量 G_i 的和中，我们可以假设集合 I 是有限的，因此将 $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ 写成某个 $n \geq 2$ 和 $x \in G_1$。然后，仿照 [3],[4],，我们可以将 α 识别为 $n \times n$ 矩阵。

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

因此我们写作 $\alpha(x) = \alpha_{11}(x) + (\alpha_{21}(x) + \cdots + \alpha_{n1}(x)) \in H$。我们有 $\alpha_{11}(x) \in G_1$，因此由引理 2.15 (1) 得 $\alpha_{i1}(x) \in H \cap G_i$，其中 $i = 2, \dots, n$，从而 $\alpha_{11}(x) \in H \cap G_1$。因此， $\underline{H}$ 是 G的特征子群，证毕。

若此时 $x_1 \in \pi_1(H)$，则存在某个 $h \in H$，使得 $x_1 + \cdots + x_n = h$，且 $x_i \in G_i$ $(i = 2, \dots, n)$。因此，

$$\alpha(h) = \alpha_{11}(x_1) + \alpha_{22}(x_2) + \cdots + \alpha_{nn}(x_n) + \sum_{i\neq j} \alpha_{ij}(x_j),$$

其中 $\alpha(h) \in H$，再次应用引理 2.15 (1)，可知只要 $i \neq j$，就必有 $\alpha_{ij}(x_j) \in H \cap G_i$。因此，我们得到

$$\pi_1\alpha(h) = \alpha_{11}(x_1) + \alpha_{12}(x_2) + \cdots + \alpha_{1n}(x_n) \in \pi_1(H).$$

由于 $\alpha_{12}(x_2) + \cdots + \alpha_{1n}(x_n) \in \pi_1(H)$，可知在 $i = 2, \dots, n$ 的条件下， $\alpha_{11}(x_1) = \pi_1\alpha(x_1) \in \pi_1(H)$ 且 $\pi_i\alpha(x_1) \in H \cap G_i \leq \pi_i(H)$，也就是说， $\alpha(x_1) \in \pi_1(H) \oplus \cdots \oplus \pi_n(H)$。因此， $\pi_1(H) \oplus \cdots \oplus \pi_n(H)$ 是 G 的特征子群，正如所断言的。 ∎

注 2.18 注意，若 $G = A \oplus B$ 且 $\{0\} \neq H \leq G$ 是一个特征子群，满足 $H \not\leq B,$，那么假设条件 $A[2] = \{0\}$，便有 $H \cap A \neq \{0\}$。事实上，存在 $h \in H$ 满足 $h = a + b$，其中 $a \neq 0$。由于 $h' = a - b$ 也属于 H，我们有 $0 \neq h + h' = 2a \in H \cap A$。

然而，下面列出的命题 2.28 构造了一个 2-群 G，它有一个直和项 $\langle a\rangle \neq \{0\}$ 和一个特征子群 $\{0\} \neq H \leq G$，满足 $H \cap \langle a\rangle = \{0\}$，正如所需。

注意，鉴于引理 2.17，若 G 是循环群的直和，记作 $G = \bigoplus_{n\geq 1} G_n$，其中 G_n 是阶为 p^n 的循环群的直和，且 $\pi_n \colon G \to G_n$ 是相应的投影，并且对某个 G 的特征子群 H，有 $\overline{H} = \bigoplus_{n\geq 1} \pi_n(H)$，则 $\overline{H}$ 是一个全不变子群，并且对于每个满足 $H \leq F$ 的全不变子群 F，都有 $\overline{H} \leq F$。事实上，利用下面引用的命题 2.28，每个子群 $\pi_n(H)$ 都是 G_n 中的全不变子群，因此由引理 2.15 可知，$\overline{H}$ 确实是 G 中的全不变子群。此外，由于对于每个满足$H \leq F$的全不变子群 F，都有 $\pi_n(H) \leq F$，因此可以推知 F 包含 $\overline{H}$，正如预期。

还要注意，每个 G 中的全不变子群 H 都是闭的，也就是说，商群 G/H 是可分的。事实上，这一结论可由观察到 $H = \bigoplus_{n\geq 1}(H \cap G_n)$ 得出，其中因子群 $G_n/(H \cap G_n)$ 也是循环群的直和。然而，如果我们假设 H 在 G 中仅为特征子群，那么这一性质可能不成立，下一例清楚地表明了这一点（其中 G 必须是一个 2-群）。

例 2.19 设 $G = \langle a_1\rangle \oplus \langle a_2\rangle \oplus \ldots$，其中 $o(a_i) = 2^{2i-1}$, $h_i = a_1 + 2^i a_{i+1}$, $H = \langle h_i \mid i \geq 1\rangle$。那么 H 不是 G 中的闭特征子群。

证明。对每个 $i \geq 1$，记 $a_1 = h_i - 2^i a_{i+1}$，即 $\overline{0} \neq a_1 + H \in (G/H)^1$，这意味着 H 在 G 中不是闭的。此外，子群 $\langle h_i\rangle$ 是 $\langle a_1\rangle \oplus \langle a_{i+1}\rangle$ 的特征子群，因为它由所有形如 $o(x) = 2^{i+1}$, $h(x) = 0$ 和 $h(2x) = i + 1$ 的元素生成。并且，由于容易验证这两个不等式

$$f(\langle 2^{i+1}a_{i+2}\rangle) \leq 2^{i+1}a_{i+1} \leq \langle h_i\rangle, \varphi(2^i a_{i+1}) \leq \langle 2^{i+2}a_{i+2}\rangle \leq \langle h_{i+1}\rangle$$

对每个元素 $f \in$同态集$\left(\bigoplus_{j\geq i+2}\langle a_j\rangle, \bigoplus_{1\leq j\leq i+1}\langle a_j\rangle\right)$ 以及每个元素$\varphi \in$同态集$\left(\bigoplus_{1\leq j\leq i+1}\langle a_j\rangle, \bigoplus_{j\geq i+2}\langle a_j\rangle\right)$均成立，因此我们可以推断，正如所要证明的，$H$ 在 G中是特征的。 ∎

接下来的三个命题在后续内容中相当有用。

命题 2.20 每个有界 p-群、可除 p-群以及可除无挠群都不是弱 IC 群。

证明。设 G 是一个有界 p群，记作 $p^{k+1}G = 0$，其中 $p^k G \neq 0$，并反设 $H \cong G$ 是 G中的特征子群。若对某个$g \in H$有 $o(g) = p^k$，则对某个 $A \leq G$有 $G = \langle g\rangle \oplus A$。由于 Hom $(\langle g\rangle, A)\langle g\rangle = A$，结合引理 2.15 可得 $H = G$，矛盾。此外，由于任意可除子群都是给定群的一个直和项，剩余两种情况也可用类似方法证明。 ∎

注 2.21 由命题 2.20 可知，所有有界群和可除群都不是弱 IC 群。此外，容易看出，一个非约化群是弱 IC 群，当且仅当其约化部分也是弱 IC 群。因此，下文我们只考虑约化群。

同理，由于每个无挠弱 IC 群 G 必定是非可除的，可知 $nG \cong G$ 但 $nG \neq G$ 对某个自然数成立，因此，对于无挠弱 IC 群 G，我们将假设它包含不同于 nG 、且与 G 同构的自身特征子群（注意，这一观察在 *[7]* 中关于 IF 群的情形也成立）。

命题 2.22 任意非约化无挠群是弱 IC 群，当且仅当其约化部分是弱 IC 群。

证明。“必要性。”写作 $G = R \oplus D$，其中 R 是该群的约化部分， D是其可除部分 G，并假设 π： $G \to R$ 是相应的投影。设 H 是 G中的一个特征子群，若 π（H） $= \{0\}$，则$H \leq D$ ，这意味着 $H = D$。因此，若 $H \cong G$，则 π（H） $\neq \{0\}$。然而，由引理 2.15 可知 $D \leq H$。于是， $H =$ （$H \cap R$） $\oplus D$。因此，若 $H \cong G$，则 $H \cap R \cong R$，证毕。

“充分性”显而易见。 ∎

注意，根据 [7, 推论 6], ，齐次全传递无挠群 G 中与整个群同构 G的任一全不变子群，必具有 nG 的形式，其中 n 是某个自然数。由于齐次传递无挠群总是全传递的，我们得到：

推论 2.23 齐次全传递无挠群不是弱 IC 群。

因此，我们得到如下构造：任选一个无限幂为 $\mathfrak{m}$ 的齐次可分无挠群，由此便可得到非弱 IC 群的存在性。

并且，由于在每个自同态环同构于 $\mathbb{Z}$ 的无挠群 G 中，任一自同态像都是形如 nG 的子群，其中 n 是某个自然数，因此我们得到：

命题 2.24 自同态环同构于 $\mathbb{Z}$ 的无挠群不是弱 IC 群。

注意，对于任意自然数 n 以及任意无限基数 $\mathfrak{m}$（它是最小的强不可达基数），都存在秩为 n 的无挠群，也存在基数为 $\mathfrak{m}$ 的无挠群（参见 [3, § 88, 练习 8；§ 89，练习 1]）。

例 2.25 存在一些不可分解无挠群，它们是弱 IC 群。

证明。我们将展示如下两个构造：

(1) 取群 G，使得 $\mathrm{E}(G)=\mathbb{Z}+\sqrt{-5}\mathbb{Z}$。那么，在此群中，所有自同态都是单射，且所有子群都是特征子群。因此，$G\cong\sqrt{-5}G$。此外，假设对于某个自然数 k，有 $\sqrt{-5}G=kG$。由此，$5G=k^2G$。由于 5 和 k 互素，容易验证 $kG=G$，从而 $k=1$。然而，不等式 $\sqrt{-5}G\neq G$ 成立，这便是所需的矛盾。注意，这样的群 G 可以按给定的方式选取（例如，秩为 4 的情形见 [3, § 110，练习 8]）。

(2) 设 $\hat{}\,\mathbb{Z}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\hat{}\,\mathbb{Z}_p$，其中 $\mathbb{P}$ 是全体素数的集合，而 $\hat{}\,\mathbb{Z}_p$ 是 $\hat{}\,\hat{}$ p-进整数环。此外，$\pi_p:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_p$ 是相应的 $\hat{}\,\hat{}$ 投影，$1=(\ldots,1_p,\ldots)$ 是 $\mathbb{Z}$ 的单位元，而 $\xi\in\mathbb{Z}$ 满足 $\pi_p(\xi)=\hat{}\,p\xi_p\in\mathbb{Z}_p$，其中 ξ_p 是 $\mathbb{Z}$ 上的某个超越元。进一步，我们定义 $S=\mathbb{Z}[\xi]$ 为由 $\{1,\xi\}$ 在 $\hat{}\,\mathbb{Z}$ 中诱导的子环，而 $R=S_*^+$ 是 S^+ 在 $\hat{}\,\mathbb{Z}$ 中的纯包。因此，R 也将是 $\hat{}\,\mathbb{Z}$ 中的子环。容易验证，R 的每个元素都是某个 $a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\cdots+a_n$ 的整数倍，其中 $a_i\in\mathbb{Z}$，因此 R 中唯一的可逆元是 ±1。由于 $G=R^+$ 是一个 E-群，且它是 E-群 $\mathbb{Z}$ 的纯子群，故可推出 G 中的任何子群实际上都是特征子群。但我们有 $G\cong\xi^2G$，并且由于 ξ^2G 中每个元素的类型必然严格高于 ξ 的类型，我们得出，对于所有 $k\in\mathbb{N}$，均有 $\xi^2G\neq kG$，证毕。

注意，每个元素都是可逆元的整数倍的环被称为强齐次环。

■

如果 G 是任意一个弱 IC 群，那么 G 的直和项不可能是弱 IC 群。事实上，取 G 的一个有界直和项即可得到这种情况（例如，参见命题 2.20）。

现在我们从下面这个例子入手讨论主群，它明显说明弱 IC 群类在取直和项的运算下并不封闭。

例2.26 存在这样的 p-主弱 IC 群 G，使得 G 的某个无界直和项不是弱 IC 群。

证明。根据 [6, 定理19 和推论 21],，如果 G 是由循环 p 群构成的直和，且 $f_n(G)=\gamma,\ n\in\mathbb{N}_0$，其中某个基数为 γ，那么G 是弱 IF 群。令 $\gamma\geq\aleph_0$，则命题 2.16 (1) 告诉我们，G 的每个特征子群都是全不变的，因此 G 是弱 IC 群。假设 A 是 G 的这样一个直和项，其 Ulm-Kaplansky 不变量具有性质 $f_0(A)\geq2$，前提是 $f_0(A)\neq0$，并且所有 $f_n(A)$ 构成一个非负整数递增序列。因此，我们可以应用 [6,推论 18]，得到 A 不是弱 IF 群；于是，对 $f_n(A)$ 所加的限制保证了 A 也不是弱 IC 群。

■

请注意，下面的技术性细节与 [1] 中的定理 2.8 相似，但彼此独立。

引理2.27 设 $B=\bigoplus_{k\geq1}B_k$，其中 $B_k=\bigoplus\mathbb{Z}(p^k)$ 和 $\pi_k:\ B\to B_k$ 是相应的投影，H 是 B 的特征子群。那么 $\pi_k(H)=p^{n_k}B_k$，其中：

(1) 对所有 $k \geq 1$, $n_k \leq k$；(2) 对所有 $k, r \geq 1$, $n_k \leq n_{k+r} \leq n_k + r$；(3) 若 $n_k < k$, 则对所有 $k, r \geq 1$, $p^{n_k+r} B_{k+r} \leq H$；(4) 若 $r(B_k) \geq 2$, 则 $\pi_k(H) \leq H$。

证明。假设 $\pi_k(H) \neq \{0\}$。若 $r(B_k) = 1$, 则对某个 $n_k < k$, 有 $\pi_k(H) = p^{n_k} B_k$。令 $r(B_k) > 1$, $B_k = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$ 和 $\theta_i : B \to \langle a_i \rangle$ 是相应的投影。因此, $\theta_i(H) = \langle p^{n_{k_i}} a_i \rangle$。令 $n_k = \min\{n_{k_i} \mid i \in I\}$。若 $f: a_k \to a_i$ 是同构, 则根据引理 2.15, $p^{n_k} a_i = f(p^{n_k} a_k) \in H$。因此, 在此情形下, $\pi_k(H) = p^{n_k} B_k \leq H$, 即条件 (1) 和 (4) 成立。

(2) 令 $x \in p^{n_k} B_k \setminus p^{n_k+1} B_k$。因此 $o(x) = p^{k-n_k}$, 所以对每个 $f \in$ 同态集 (B_k, B_{k+r}), 都有 $f(x) \in p^{n_k+r} B_{k+r} \leq H$。因此, $n_{k+r} \leq n_k + r$。若 $y \in H \cap p^{n_{k+r}} B_{k+r}$, 其中 $n_{k+r} < n_k$, 则对某个 $\varphi \in$ 同态集 (B_{k+r}, B_k), 有 $\varphi(y) \in p^{n_{k+r}} B_k$, 因为 $\varphi(y) \in H$ 与 $\pi_k(H) = p^{n_k} B_k$ 矛盾。最后, 不等式 $n_k \leq n_{k+r} \leq n_k + r$ 成立。

(3) 证明与上一点类似。事实上, 若 $B_k = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle$, 则对于每个满足 $n_k < k$ 的 $x \in p^{n_k+r} B_{k+r}$, 存在 $f \in$同态集 (B_{n_k}, B_{k+r}), 使得 $f(p^{n_k} a_i) = x$。现在应用引理 2.15, 可得 $x \in H$, 即 $p^{n_k+r} B_{k+r} \leq H$, 正如所需。 ∎

下一条结论通常归功于 Kaplansky, 他证明了该结论对模成立（参见 [8, 定理26, 第 63] 页）。

命题 2.28 若 $G = \bigoplus_{i \geq 1} G_i$ 是一个 2-群, 其中 $G_i = \bigoplus \mathbb{Z}(2^i)$ 是循环群的直和, 则 G 的每个特征子群都是全不变的, 当且仅当 G 至多有两个等于一的 Ulm 不变量; 若恰有两个, 则它们对应于相继序数。

证明。"⇒"。假设 $f_{k-1}(G) = f_{k+r-1}(G) = 1$, 其中 $r > 1$, 且$\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$是 G的相应直和项, 满足 $o(a) = 2^k$, $o(b) = 2^{k+r}$。设 $h = 2^{k-1}a + 2^{k+r-2}b$、$H = \langle h \rangle = \{0, 2^{k-1}a \pm 2^{k+r-2}b, 2^{k+r-1}b\}$ 和

$$\underline{H} = H \oplus \left(\bigoplus_{k+1 \leq i \leq k+r-1} G_i \right)[2] \oplus \left(\bigoplus_{i \geq k+r+1} G_i \right)[2^2].$$

因此, 可以验证子群 $\underline{H}$ 必为 G中的特征子群。事实上, H 是 $\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$中的特征子群, $f(\underline{H}) = \{0\}$ 对于 $f \in$同态集 $(\bigoplus_{i \geq k} G_i, \bigoplus_{i < k} G_i)$, $\varphi(H) \leq \underline{H}$对于 $\varphi \in$同态集 $\left(\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle, \bigoplus_{i > k,\ i \neq k+r} G_i\right)$ 且 $\left(\bigoplus_{k+1 \leq i \leq k+r-1} G_i\right)[2] \oplus \left(\bigoplus_{i \geq k+r+1} G_i\right)[2^2]$ 在 $\left(\bigoplus_{k+1 \leq i \leq k+r-1} G_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i \geq k+r+1} G_i\right)$中是全不变的。但 H 并非全不变, 因为对于 G 在 $\langle a \rangle$上的投影 α, 我们有$\alpha(H) = \langle 2^{k-1}a \rangle \not\leq H,$, 正如预期。

"⇐"。假设 $G_k = \langle a \rangle, G_{k+1} = \langle b \rangle$ 和 $r(G_i) \geq 2$, 其中 $i \neq k, k+1$。令 $\pi: G \to G_k, \theta: G \to G_{k+1}$ 为相应的投影, 并令 $H \leq G$ 为 G 的一个特征子群。借助引理 2.15 可知, 若 $h = x_i + y$, 其中 $x_i \in G_i$ 对某些 $i \neq k, k+1$ 成立, 则 $x_i \in H$ 且 $\beta(H) \leq H$, 其中 β 是 G 在 $\bigoplus_{j \neq k}$ 上的投影, $_{k+1}G_j$, 并且 $\beta(H)$ 在 G 中全不变。令 $\pi(H) = p^{n_k} a, \theta(H) = p^{n_{k+1}} b$, 则 $p^{n_k+1} b \in H$。若 $p^{n_k+1} = p^{n_{k+1}}$, 则 $p^{n_k} a \in H$, 因为在这种情况下, 正如前文所指出的, $p^{n_k} a + y \in H$ 对某个 $y \in H$ 成立

，因此 $p^{n_k}a \in H$。现在可以验证， H 确实在 G 中全不变。然而，若 $p^{n_k+1} > p^{n_{k+1}}$，则 $p^{n_{k+1}} \leq p^{n_k}$，但在这种情况下，关系 $p^{n_{k+1}}a \in H$ 只有在 $p^{n_{k+1}} = p^{n_k}$ 时才可能成立，因此 $\pi(H) \leq H$ ，由此得到 $\theta(H) \leq H$，即 H 是全不变的。在剩下的情形 $p^{n_k+1} < p^{n_{k+1}}$ 中，可以推知 $p^{n_k+1}b \in H$ ，这是不可能的。

■

或者，我们也可以将上一个结果推广为以下结论。

命题2.29 设 G 是一个可分 2-群，则 G 的每个特征子群都是全不变的，当且仅当 G 至多有两个 Ulm 不变量等于一；若恰有两个，则它们对应于相继序数。也就是说，当且仅当其基本子群满足相应性质。

证明。“⇒”。与上一个命题中所示的方法相同，若 $B = \bigoplus_{i\geq 1} B_i$是 G中的一个基本子群，其中 $B_i = \bigoplus \mathbb{Z}(2^i)$，则对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们可以写成 $G = (\bigoplus_{i=1}^{n} B_i) \oplus (B_n^* + 2^n G)$，其中 $B_n^* = \bigoplus_{i\geq n+1} B_i$。

现在令 $f_{k-1}(G) = f_{k+r-1}(G) = 1$，其中 $r > 1$，且 $\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle$ 是 G 的相应直和项，满足 $o(a) = 2^k$， $o(b) = 2^{k+r}$。假设$h = 2^{k-1}a + 2^{k+r-2}b$、$H = \langle h\rangle = \{0, 2^{k-1}a \pm 2^{k+r-2}b, 2^{k+r-1}b\}$ 并

$$\underline{H} = H \oplus \left(\bigoplus_{k+1\leq i\leq k+r-1} B_i \right)[2] \oplus \left(B_{k+r}^* + 2^{k+r}G\right)[2^2].$$

因此可以看出， $\underline{H}$ 是 G中的一个特征子群，但不是全不变子群。请注意，此处并未用到可分性。

”⇐”。设 H 是 G中的一个特征子群，并设 $x \in H$ 和 $y = f(x)$，其中 $f \in \mathrm{E}(G)$。由于 G 是可分的，我们知道元素 x 和$f(x)$可嵌入 G的某个基本子群中，记作 B。参阅下文陈述并证明的引理 2.34，可知 $H \cap B$ 是B中的特征子群，因此它是全不变的。又由于$\mathrm{h}^B(x) \leq \mathrm{h}^B(f(x))$，且 B 是全传递的，所以对某个 $\varphi \in \mathrm{E}(B)$，必有 $\varphi(x) = f(x)$，从而 $f(x) \in H$，如所求。

■

下一个技术性结论颇为奇特，对我们的目标很有帮助。

引理 2.30 若 G 是一个 p-群，且 H 是其特征子群，并且商群 $H/(H \cap p^\omega G)$无界，则 $p^\omega G \leq H$。

证明。若 $B = \bigoplus_{i\geq 1} B_i$（其中 $B_i = \bigoplus \mathbb{Z}(p^i)$）是 G 中的基本子群，则对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们都可以写成 $G = (\bigoplus_{i=1}^{n} B_i) \oplus (B_n^* + p^n G)$，其中 $B_n^* = \bigoplus_{i\geq n+1} B_i$。令 $\pi_n\colon G \to B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ 为相应的投影。由于因子群 $H/(H \cap p^\omega G)$ 无界，对于每个 $s \in \mathbb{N}$，都存在元素 $x = p^s h,\ h \in H$ ，使得 $x \notin p^\omega G$。注意，对于某个$n_s > s$ ，有 $p^s\pi_{n_s}(h) \neq 0$ ；否则，对每个 $n_s > s$，我们都会有 $x \in B_{n_s}^* + p^{n_s}G$ 。现在，若 $o(h) = p^{m_s}$，则 $m_s \geq s$。根据假设，对所有$k \geq 1$，都有 $x \in B_{k+m_s}^* + p^{k+m_s}G$ ，所以 $x \in p^{k+1}G$，即 $x \in p^\omega G$，这与元素x的选取矛盾。因此，对每个自然数 t，都存在 $n_t \in \mathbb{N}$ 和 $x \in H$ ，使得$o(\pi_{n_t}(x)) \geq t$。但是，由于对每个满足 $o(y) \leq t$ 的 $y \in p^\omega G$，都有 $U(y) \geq U(\pi_{n_t}(x))$，我们

推得，对于某个 $f \in \mathrm{Hom}(B_1 \oplus \cdots \oplus B_{n_t}, B^*_{n_t} + p^{n_t}G)$，有 $f(\pi_{n_t}(x))$。因此，由引理 2.15 可得 $y \in H$。最后， $p^\omega G \leq H$，如所述。 ∎

下面的断言与前一个断言密切相关。

命题 2.31 若 G 是一个 p-群，且对所有 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，要么 $f_n(G) = 0$，要么 $f_n(G) \geq 2$，则对于 G 的每个特征子群 H，子群 $H' = H + p^\omega G$ 都是 G 的全不变子群。特别地，若 $H/(H \cap p^\omega G)$ 无界，则 H 是 G 的全不变子群。

证明。考虑到命题 2.29，商群 $H'/p^\omega G$ 是 $G/p^\omega G$ 的全不变子群，因此 H' 是 G 的全不变子群，如所述。利用前一个断言中的论证，第二部分显然成立。

∎

为避免进一步的误解和混淆，我们重申，$p^n G[p^m]$ 仅表示不带括号书写的 $(p^n G)[p^m]$，这样写只是为了简洁。

接下来的四个技术性断言对于得到我们的主要结果至关重要。它们在某种程度上拓展了 [3] 和 [4] 中密切相关的结果（另请参阅其中已有的参考文献）。

引理 2.32 如果 B 是约化 p-群 G 的基本子群，那么以下两点成立：

(1) 对所有 m，$n \in \mathbb{N}$；（$G = B + \sum_{i \geq 1} p^{n_i} G[p^{m_i}]$ $1 \leq m_1 < m_2 < \ldots$ $\{n_i\}$）对任意自然数序列以及所有自然数集合。

证明。(1) 对所有 $n \in \mathbb{N}$，记 $G = B + p^n G$。如果此时对于某个 $g \in G$ 有 $p^m g = 0$，那么对于 $g = b + p^n g'$，$g' \in G$，有 $p^m b + p^{n+m} g' = 0$。由于 B 是 G 中的纯子群，因此对于某个 $b' \in B$，有 $p^m b = p^{n+m} b'$。所以，$p^{n+m} g' = -p^{n+m} b'$，从而 $g' + b' \in G[p^{n+m}]$。因此，对于某个 $g'' \in p^n G[p^m]$，$p^n (g' + b') = g''$，于是 $g = b - p^n b' + g'' \in B + p^n G[p^m]$，即得所需结论。

(2) 由 (1) 以及以下事实得出：对于每个自然数序列 $1 \leq m_1 < m_2 < \cdots$，$G = \sum_{i \geq 1} G[p^{m_i}]$。 ∎

引理 2.33 若 H 是可分 p-群 G 的非有界特征子群，则对于每个基本子群 B，$G = H + B$ G。

证明。运用引理 2.32，只需证明：对于自然数序列 $1 \leq m_1 < m_2 < \cdots$，存在某个自然数集合 $\{n_i\}$，使得包含关系 $\sum_{i \geq 1} p^{n_i} G[p^{m_i}] \leq H$ 成立。为此，对每个 $n \geq 1$，都有 $G = (B_1 \oplus \cdots \oplus B_{n+1}) \oplus (B^*_{n+1} + p^{n+1} G)$，其中 $B^*_{n+1} = \bigoplus_{i \geq n+2} B_i$。令 $\pi_n : G \to B_n$ 是相应的投影。令 $h_1 \in H$ 和 $p^{n+1} h_1 = 0, p^n h_1 \neq 0$，其中 $n \in \mathbb{N}$。注意，对于某个 $k \geq 1$，有 $\pi_{n+k}(p^n h_1) \neq 0$。事实上，若对每个 $k \geq 1$，都有 $\pi_{n+k}(p^n h_1) = 0$，则 $p^n h_1 \in (B^*_{n+k} + p^{n+k} G)[p]$。然而，由于 $p^{n+k} G$ 在 $B^*_{n+k} + p^{n+k} G$ 中是本质的，我们推得 $(B^*_{n+k} + p^{n+k} G)[p] \leq p^{n+k} G$。因此，
$0 \neq p^n h_1 \in \bigcap_{k \geq 1} p^{n+k} G = \{0\}$ ——矛盾。所以，对于某个 $k \geq 1$，有 $0 \neq \pi_{n+k}(p^{n_1} h) = p^n \pi_{n+k}(h_1) \in B_{n+k}$。现在假设 $p_1^m = o(\pi_{n+k}(h_1))$。由于对每个 $z \in p^{n+k-m_1}(B^*_{n+k} +$

$p^{n+k}G)[p_1^m]$，引理2.15保证 $p^{n+k-m_1}(B^*_{n+k}+p^{n+k}G)[p_1^m]\le H$，且由于 $p^{n+k-m_1}G=p^{n+k-m_1}(B^*_{n+k-m_1}+p^{n+k-m_1}G)$，必有 $p^{n_1}G[p^{m_1}]\le H$，其中 $n_1=n+k-m_1$。

此外，由于子群 H 是无界的，因此存在一个自然数 $m_2>m_1$ 和某个正整数 n_2，满足关系$p^{n_2}G[p^{m_2}]\le H$，如所需。

■

引理 2.34 若 H 是可分 p-群 G 的一个无界特征子群，且 $B\le G$ 是基本的，则 $H\cap B$ 在 H中是基本的。

证明。我们的首要目标是证明 $H\cap B$ 在 H中是纯的。事实上，设$px=b$，其中 $x\in H$、$b\in H\cap B$。由于 B 在 G中是纯的，我们可以写成 $b=py$，其中 $y\in B$。若 $h(x)=h(y)$，则 $U(x)=U(y)$；又由于 G 是传递的，我们可写成$\alpha(x)=y$，其中 $\alpha\in$ 属于自同构群 Aut（G）；因此，$y\in H\cap B$。假设 $m=h(x)<h(y)$，则有 $h(px)>m+1$，从而 $f_m(G)\neq 0$；因此，$B_{m+1}\neq\{0\}$。令 $z\in B_{m+1}[p]$，由于 $h(z)=m$，我们推出 $h(y+z)=h(z)=h(x)$，于是$U(x)=U(y+z)$；因此，如上所述，$y+z\in H\cap B$，其中 $p(y+z)=b$。现在令 $h(x)>h(y)=m$。于是，$B_{m+1}\neq\{0\}$，且存在 $z\in B_{m+1}[p]$ 使得$h(y-z)>h(y)$。然而，若 $h(x)>h(y-z)$，我们同样可以选取 $z_1\in B[p]$，使得 $h(y-z-z_1)>h(y-z)$。此外，经过有限步后，我们得到 $h(x)=h(y+u)$，或 $h(x)<h(y+u)$，其中 $u\in B[p]$。在这两种情况下，如上所示，方程 $px=b$ 在 $H\cap B$中均可解。但由于 $B+pH$也等于 G，可知对于每个 n，都有 $H\cap p^nH=p^n(H\cap B)$，即 $H\cap B$在 H中是纯的。又由于$(B+H)/B\cong H/(H\cap B)$，其中 $B+H=G$，子群 $H\cap B$在 H中稠密，也就是说，$H\cap B$在 H中是基本的，证毕。

■

引理 2.35 若 H 是可分 p-群 G 的特征子群，且B 在 G中是基本的，则 $H\cap B$ 是 B的特征子群。

证明。对每个 n，有 $G=(B_1\oplus\cdots\oplus B_n)\oplus(B_n^*+p^nG)$。令 $\pi_n:G\to B_n$ 是相应的投影。若 $H\cap B\neq\{0\}$，则对某个 n有$\pi_n(H)\neq\{0\}$。若 $r(B_n)>1$，则根据命题 2.16，我们可知 $\pi_n(H)\le H$ 在 B_n中是全不变的。此外，引理 2.15 告诉我们，对每个 $f\in$Hom $(B_n,B_1\oplus\cdots\oplus B_{n-1})$ 和 $\varphi\in$ Hom $(B_n,B_n^*+p^nG)$，都有 $f(H\cap B_n)\ \varphi(H\cap B_n)\le H$。

现在令 $x\in H\cap B$和 $x=x_1+\cdots+x_m$，其中 $x_j=\pi_{i_j}(x)\in B_{i_j}$。若 $r(B_{i_j})>1$，我们可以观察到 $\pi_{i_j}(H)\le H$，并且 $\pi_{i_j}(H)$ 在 B_{i_j} 中是全不变的，因此我们可以假设对所有 $j=1,\ldots,m$，都有 $r(B_{i_j})=1$。给定$\alpha\in$Aut(B)，我们注意到对于所有 $j=1,\ldots,m$，$\pi_{i_j}\alpha$ 是 B_{i_j} 的一个自同构。事实上，若对某个 $0\neq y\in B_{i_j}[p]$有 $\pi_{i_j}\alpha(y)=0$，则对每个 $k<i_j$都有 $\pi_k\alpha(y)=0$，因此 $0\neq\alpha y\in(B^*_{i_j})[p]$。但在这种情况下，$U(\alpha y)>U(y)$，这显然不可能产生自同构。因此，ker$(\pi_{i_j}\alpha)=0$；鉴于 B_{i_j} 的数量有限，可知对所有$j=1,\ldots,m$，$(\pi_{i_j}\alpha)\restriction B_{i_j}$ 都是一个自同构。因此，

$$\mu=(\pi_{i_1}+\cdots+\pi_{i_m})\alpha\restriction\bigoplus_{j=1}^{m}B_{i_j}$$

是 $\oplus_{j=1}^m B_{i_j}$的一个自同构。由于 $\oplus_{j=1}^m B_{i_j}$ 是 B的直和项，μ 可视为 B 上自同构的扩张，因此（$\pi_{i_1}+\cdots+$

π_{i_m}）α（x） $\in$ $H \cap B$，正如所承诺的那样，因为由引理 2.15 可知（1_B −（$\pi_{i_1} + \cdots + \pi_{i_m}$））$\alpha$（$x$） $\in H \cap B$，正如所要求的那样。■

现在我们可以证明一个主要结果。值得注意的是，下面的定理与针对 IF 群证明的定理 14 相似。

定理 2.36 若可分 p-群 G 的某个基本子群 B 不是弱 IC 群，则 G 不是弱 IC 群。

证明。若 G 有界，则其基本子群与 G 重合，因此由命题 2.20 可知 G 不是弱 IC 群，结论得证。

现在令 G 无界，并反设 G 是弱 IC 群。于是存在一个特征子群 $H \lneqq G$，使得 $H \cong G$。由于 H 无界，根据引理 2.34 可得， $H \cap B$ 是 H 中的基本子群。若 $H \cap B = B$，则 $B \leq H$；又由于 $H + B = G$，应用引理 2.33 可知 $H = G$，这与我们最初的选择矛盾。因此， $H \cap B \neq B$。由于 $H \cong G$，其基本子群也彼此同构，记为 $H \cap B \cong B$（例如参见 [3]）。然而，引理 2.35 保证 $H \cap B$ 是 B 的特征子群，这显然荒谬，故得到了所需的矛盾。

■

下一个技术性断言是证明上一定理逆向结论的关键。

引理 2.37 (1) 若 H 是固定基本子群 B 中的一个无界特征子群，且 B 属于一个挠完全 p-群 G，则存在 G 中这样的特征子群 H^*，使得 $B \cap H^* = H$，并且 H 是 H^* 的基本子群。

(2) 若 H 是可分 p-群 G 的一个无界特征子群，且 B 是 G 的基本子群，则 $B \cap H$ 是 B 中的一个无界特征子群，并且 $B \cap H$ 是 H 的基本子群。

证明. (1) 令 $H^* = \sum_{f \in \text{自同构群}(G)} f(H)$ 和 $x \in B \cap H^*$。则 $x = y_1 + \cdots + y_n$，其中 $y_i = f_i(x_i)$， $f_i \in$ 自同构群(G)， $x_i \in H$； $i = 1$, ..., n。由于 G 是可分的，元素 x、 y_1、 ..... 、 y_n 可以包含在 G 的某个基本子群 B' 中（例如参见 [4]）。令 $\varphi : B \to B'$ 为一个同构。然而，由于 G 是挠完全的，因此 φ 可以视为 G 的一个自同构（参见 [4]）。因此， $z = \varphi^{-1}(x)$， $z_i = \varphi^{-1}(y_i) \in B$ 且 $U(x) = U(z)$， $U(z_i) = U(x_i)$。由于对于某个 $\psi_i \in$ 自同构群(B)，有 $z_i = \psi_i(x_i)$，我们得到 $z_i \in H$。所以，$z = z_1 + \cdots + z_n \in H$。此外，由于 $U(z) = U(x)$，必有 $x \in H$。但引理 2.34 得出 $B \cap H^* = H$ 是 H^* 的基本子群，正如所期望的。

(2) 同样，应用引理 2.34 可确保我们只需证明 $B \cap H$ 是 B中的一个无界特征子群。不过，为此我们注意到， $B \cap H$ 确实是无界的，因为 H 是无界的，且 $B \cap H$是 H中的基本子群。另一方面，正如所承诺的，根据引理 2.35，$B \cap H$是 B的特征子群。 ■

由此，我们得出下一个关键结果。事实上，对于挠完备群而言，它是定理 2.36 的逆命题。具体来说，以下断言成立：

定理 2.38 一个挠完备的 p-群 G 是弱 IC 群，当且仅当它的某个（因而所有）基本子群 B 是弱 IC 群。

证明。参照定理 2.36 可知，只需证明必要性，因为我们已经证明了充分性。不过，下面我们将给出略有不同的论证，再次证明该结论成立。

为证明必要性，设 H 在 G 中是特征的，且满足 $H \neq G$。由于 G 是弱 IC 群，且 $H \cong G$，我们推得 H 和 G 都是无界的。但此时，依照引理 2.37 (2)， $H \cap B$ 是 B 的特征子群，而 $H \cap B$ 是 H 的基本子群。注意，$H \cap B \neq B$，因为若假设 $B \leq H$，根据等式 $B + H = G$，便可推出 $H = G$——矛盾。但由于 $H \cong G$，其基本子群必定同构（例如参见 [3]），设为 $B \cap H \cong B$，即 B 也是弱 IC 群，如所述。

现在证明充分性的正确性。假设 G 是一个挠完备 p群，且 B 是它的基本子群，并且是弱 IC 群。根据命题 2.20， B 是无界群，因此 G 也无界。由于 B 是弱 IC 群，群 B 存在一个真特征子群 S，使得 $B \cong S$。由引理 2.37, G 存在一个真特征子群 S^*，使得 $S^* \cap B = S$，并且 S 是群 S^*的基本子群。如果商群 D/S^* 是商群 G/S^*的可除部分，那么通过常规验证可知， D 也是 G 的特征子群，并且 S 是 D中的一个基本子群。由于因子群 G/D 是约化的，因此 D 是一个挠完备群（例如，参见 [3, 推论 68.7]）。由此可得，群 G 有一个真特征子群D，使得群 G 的基本子群 B 同构于群 D的基本子群 S。最后，由于 G 和 D 都是挠完备群，根据 [3] 第二卷，我们可以得出 $G \cong D$，即 G 是弱 IC 群，证毕。

■

以下评论值得注意。

“挠完备性”这一性质在证明最后一个结论时起到了关键作用，尽管未必是促成性作用。然而，一个自然产生的问题是：若将“挠完备 p-群”的要求替换为“可分 p-群”，定理是否仍然成立？也就是说，定理 2.36 的结论是否可逆？提出这一问题的一个逻辑依据是，鉴于 [3], 第二卷，我们知道任意可分 p-群都可以嵌入某个挠完备 p-群中，且成为其纯稠密子群。不过，我们猜想答案是否定的。

3 总结性讨论与未解决问题

我们以对所得结果的一些有价值的评论作为本节的结尾。

因此，我们首先讨论具有一个同构真特征子群的阿贝尔群，并将这类群称为弱 IC 群。与 [2], 中引入的 IC 群和强 IC 群这两类群相比，它们之间的一些相似之处和差异如下：（1）这三类

群显然都不关于取直和项封闭；（2）如上所示，它们的结构截然不同。

这些差异有助于我们更全面地理解这三种可能情形中的复杂状况。

我们以两个值得关注且重要的问题作为本文的结尾。

关于例 2.14 和 2.26，我们提出以下问题。

问题 1. 找出使 IC 群的直和项仍为 IC 群的必要（及充分）条件。对于强 IC 群和弱 IC 群，情况也分别如此。

关于推论 2.23，我们提出以下问题。

问题 2. 是否存在并非（完全）传递的（强、弱）IC 群?

经费支持：Andrey R. Chekhlov 的科研工作得到俄罗斯科学与高等教育部的支持（协议编号：075-02- 2022-884）。Peter V. Danchev 的科研工作部分得到保加利亚国家科学基金的资助（资助项目 KP-06 No 32/1，日期为 2019 年 12 月 7 日），并得到安达卢西亚自治区 Junta de Andaluc´ıa、FQM 264 的资助。

参考文献

[1] K. M. Benabdallah、B. J. Eisenstadt、J. M. Irwin 和 E. W. Poluianov，《主阿贝尔群大子群的结构》，《匈牙利科学院数学学报》(3-4) 21 (1970年)，421–435。[2] A. R. Chekhlov 和 P. V. Danchev，《论所有真全不变子群均同构的阿贝尔群》，《Communications in Algebra》(12) 43 (2015年)，5059–5073。[3] L. Fuchs，《无限阿贝尔群》，第 I 卷和第 II 卷，学术出版社，纽约和伦敦，1970年和1973年。[4] L. Fuchs，《阿贝尔群》，施普林格（查姆，瑞士，2015年）。[5] S. Ya. Grinshpon 和 M. M. Nikolskaya，《主 IF 群》，《Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics》(3) 15 (2011年)，25–31。[6] S. Ya. Grinshpon 和 M. M. Nikolskaya（Savinkova），《具有有限 Ulm-Kaplansky 不变量的阿贝尔 p 群的全不变子群》，《Communications in Algebra》(11) 39 (2011年)，4273–4282。[7] S. Ya. Grinshponand M. M. Nikolskaya，《同构于该群的无挠群的真全不变子群》，《Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics》(1) 17 (2012年)，11–15。[8] I. Kaplansky，《无限阿贝尔群》，密歇根大学出版社，安娜堡，1954年和1969年。

[9] P. A. Krylov、A. V. Mikhalev 和 A. A. Tuganbaev，《阿贝尔群的自同态环》，多德雷赫特、波士顿和伦敦：克吕维尔学术出版社（2003年）。
[10] R.S. Pierce，《初等阿贝尔群的同态》，《阿贝尔群专题》，芝加哥，伊利诺伊州（1963年），215–310。