arXiv:2301.08948v1 [physics.flu-dyn] 21 Jan 2023

壁面湍流的佩龙–弗罗贝尼乌斯分析

Javier Jim´enez 航空学院，马德里理工大学，西班牙马德里 28040

2023年1月24日

摘要

本文将佩龙–弗罗贝尼乌斯算子（PFO）从动力系统理论引入湍流通道流研究。研究表明，只要分析局限于系统吸引子，PFO 无需进行干预实验便可区分因果关系与相干性和简单相关性；而关键难点仍在于收集足够的数据，以填充算子矩阵。通过将分析限制在相空间的二维投影上，并构建一系列指标，从大量可能的参数对中选出最佳组合，这一难题得以缓解。本文将由此发展的技术用于研究通道惯性层中的猝发，重点关注猝发衰减后重新启动的过程。根据 PFO 所指示的相空间轨迹进行条件平均后发现，一个有些违反直觉的关键因素是：壁面附近低剪切区域的形成，其上方覆盖着一层抬升的剪切层。计算实验进一步证实了这一发现；在该实验中，湍流脉动对平均速度剖面的控制被人为减弱。因此，平均速度剖面的变化有所改变，但低壁面剪切与猝发启动之间的关联仍然存在。

1 引言

人们普遍认为，物理现象都有原因，但对于这意味着什么，却并没有多少共识。由此不禁产生几个问题。首先，当运动方程已知时，原因这一概念是否还有意义？即使人们能够就其定义达成一致，它是否具有任何实际价值？例如，Russell（1912）认为，如果一个动力系统的时间演化由一组确定性微分方程描述，那么因果关系就等同于对初始条件的了解。这种观点可以追溯到牛顿，甚至可以追溯到经典世界；它意味着，系统在时刻 t 的状态，其唯一的原因就是系统在此前任一时刻的状态。如图 1(a) 所示。除去孤立的奇点，相空间中的任意点 $\boldsymbol{v}(t_e)$ 都是唯一一条流入轨迹上所有点 $\boldsymbol{v}(t_c < t_e)$ 的“结果”。反过来，$\boldsymbol{v}(t_e)$ 则是该轨迹上所有满足 $t > t_e$ 的点的“原因”。

然而，Russell（1912）可能考虑的是可逆的哈密顿力学；尽管理论上这一观点成立，但他的结论未必适用于更一般的情形。许多力学系统具有耗散性，而识别特定状态的 Russell（1912）原因意味着要进行积分

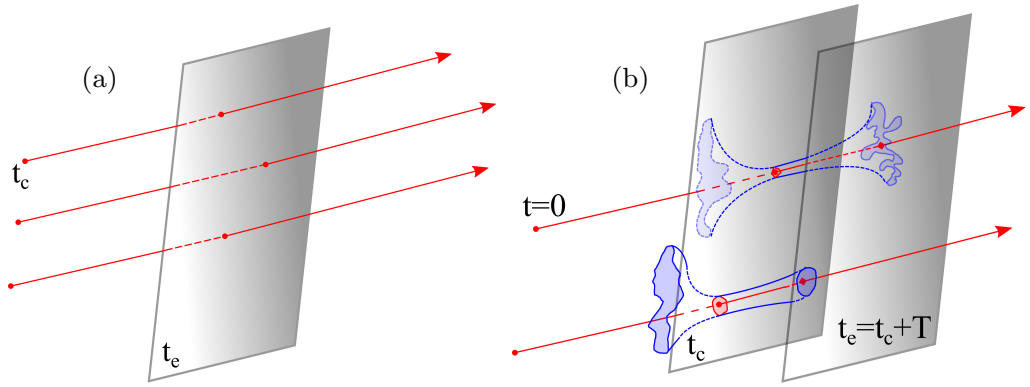


图1：（a）动力系统的决定论观点。阴影平面表示某一时刻的完整相空间，每条轨迹都是系统的一种可能演化。（b）耗散与混沌的影响。相点必须替换为邻域，流动在时间正向和反向上都会变得病态。

时间反向上的病态方程。这当然适用于纳维–斯托克斯湍流，而这正是我们在此最感兴趣的系统。同样，Russell（1912）对确定性混沌知之甚少，但我们现在明白，大多数具有许多自由度的动力系统都是混沌的，实际上无法唯一地向前积分。湍流的演化更接近图 1(b)：其中 $\boldsymbol{v}(t_e)$ 被一个小邻域所取代，向前和向后的轨迹则变成不规则的分形锥，由一簇簇轨迹构成，包含邻域中 $\boldsymbol{v}(t_e)$各点的原因与结果。Russell 的问题可以重新表述为：在这种情况下，图 1(a) 中的确定性图景是否还保留了某些内容。

另一个相关问题是，不进行干预实验能否对因果关系有所判断。通常的回答是否定的，因为观测所产生的相关性并不意味着因果关系（Granger，1969年；Pearl，2009）。然而，前一段的讨论表明，事情或许并非如此简单；对系统时间演化足够谨慎的观测，可能有助于识别穿过感兴趣邻域的“因果”轨迹（Angrist等，1996年）。

图 1(b) 中固有的粗粒化表明，至少在固定的时间范围内，可以通过将相空间划分为有限大小、彼此不相交的邻域，来简化动力系统。这是混沌动力系统中的常见做法（Beck & Schl¨ogl，1993年）。尽管人们给出的理由通常是，这样做可以避免统计学中的奇异测度，而且数值实验本身也是离散的，但图 1(b) 表明，这背后还有更根本的依据。如果混沌使我们无法预测无限接近的邻近点的行为，那么坚持将它们视为不同的点就毫无意义；我们不妨将有限大小的邻域视为基本动力学单元。这对系统的定义有重要影响。最主要的一点是，系统传播算子被系统访问不同单元的频率和顺序所构成的“符号”动力学所取代，而确定性方程则被第 2 节介绍的 Perron-Frobenius（转移）算子中包含的转移概率所取代。

湍流非常适合采用这些技术，因为它是一个具有许多自由度、且其（纳维–斯托克斯）方程已知的混沌确定性系统。难点不在于如何

求解这些方程——原则上，能力足够强大的计算机可以胜任——而在于如何用更简单的规则解释并预测湍流。直接数值模拟虽然精确，但代价高昂；我们希望建立能够再现流动的降阶模型，即使无法复现全部细节，也至少要足以提供关于其未来行为的一般规律，并理想地说明如何影响这种行为。剪切驱动湍流尤其适合研究，因为它可以达到统计稳态，例如管道或通道中的流动；此外，人们认为它部分受线性过程控制（del ´Alamo & Jim´enez, 2006; McKeon & Sharma, 2010; Jim´enez,2013），并且至少在一定程度上可以用相干结构来描述，这些结构在动力系统中扮演对象的角色（Adrian, 2007; Jim´enez, 2018）。

尤其值得关注的是壁面湍流的再生循环，其持续性被解释为流向速度和横向流速扰动之间相互作用的结果（Jim´enez，1994；Hamilton 等，1995；Waleffe，1997）。人们普遍认为，壁法向速度通过使平均剪切发生变形而产生流向速度脉动，而剪切则与横流脉动相互作用，使其得到放大（Orr，1907；Jim´enez，2013，2015）。但在大多数模型中，这种放大都是瞬态的（Butler & Farrell，1993；Farrell & Ioannou，1996；Schoppa & Hussain，2002；Jim´enez，2013），而猝发衰减后循环如何闭合，细节仍不清楚。阐明这一再生过程是本研究的根本“应用”，但本文很大篇幅都用于构建分析方法本身。

请注意，我们的分析结果并不具备 Granger（1969年）或 Pearl（2009）意义上的因果性，因为其中不涉及观察者的任何干预。不过，我们更关注可预测性，也可能关注相干性，并希望寻找能够让我们依据部分流动信息得出结论的最佳系统状态。这里，因果关系的根本问题将交由运动方程处理，而因果方向则由时间方向决定。我们分析的主要目的是识别这样的流动构型：在这些构型中，运动方程能够在无需详细求解的情况下，尽可能充分地提供有关系统未来的信息，并且或许有助于形成有效控制策略。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍 Perron-Frobenius算子，并在 §3 中将其具体应用于小盒湍流通道。§3.2 和 §3.3 将介绍使用该算子的技术，进而在 §4 研究相空间中的条件轨迹。最后，第 5 节将描述一项简单的干预实验，以帮助分析壁面再生循环，并在第 6 节给出结论。

2 佩龙–弗罗贝尼乌斯算子

假设一个统计平稳遍历系统，

$$\boldsymbol{v}(t+T) = \mathbf{S}(T;t)\,\boldsymbol{v}(t), \tag{1}$$

对于这类系统，时间平均与系综平均可以互换。状态变量 $\boldsymbol{v}$ 在相空间划分 $\{C_j \,|\, j = 1 \dots N\}$ 的各单元上的概率密度，可用系统在每个单元内停留时间的分数分布 $\boldsymbol{q} = \{q_j\}$ 近似。经过足够长的时间，或对足够大的实验系综而言，这些概率会趋于一个平衡分布，我们将其记为 $\boldsymbol{q}_\infty$。更局部地，若考察两个不同时刻的概率分布 $\boldsymbol{q}(t)$ 和 $\boldsymbol{q}(t+T)$，则二维佩龙–弗罗贝尼乌斯算子（PFO） $\widehat{\mathbf{P}}^e$ 将过去与未来联系起来（Beck 与 Schl¨ogl，1993年），

$$\boldsymbol{q}(t+T) = \widehat{\mathbf{P}}^e(T;t)\,\boldsymbol{q}(t). \tag{2}$$

由于概率表示相互独立检验的结果， $\widehat{\mathbf{P}}^e$ 是线性的；对于有限划分，它可化为一个 $N \times N$ 矩阵，其中 N 是划分中的单元数，可能远大于原始动力系统的自由度数。我们假设 $\widehat{\mathbf{P}}^e$ 与 t无关。

当应用于完全集中的初始分布时， $\boldsymbol{q}^{(a)}(t) = \{\delta_{aj}\}$，其中 δ_{aj} 是克罗内克 delta， a列的 $\widehat{\mathbf{P}}^e$ 表示系统最初位于划分中第a个单元内时，经过时间区间 T 后演化到各个单元的概率。请注意，这些集中的初始概率分布可解释为非干预实验；在此类实验中，通过对系统进行足够长时间的观测，可以获得关于粗粒化系统因果结构的统计知识（Angrist 等，1996年）。

PFO 等价于贝叶斯条件概率矩阵（Feller，1971年），经过足够长时间的观测后，可根据联合概率分布进行估计（Ulam，1964年）

$$\mathsf{Q}_{ij}(t, t+T) \equiv \mathsf{Q}_{ij}(T) = \mathrm{prob}_t(\boldsymbol{v}(t+T) \in C_i, \boldsymbol{v}(t) \in C_j), \tag{3}$$

as

$$\mathsf{P}^e_{ij} = \mathsf{Q}_{ij} / \sum_s \mathsf{Q}_{sj}, \tag{4}$$

该算子经过归一化，列和为单位值；输入概率 $\boldsymbol{q}(t)$ 归一化为 $\sum q_j = 1$ 后，会得到同样经过归一化的输出概率 $\boldsymbol{q}(t+T)$。矩阵 $\mathbf{P}^e$ 通常不是对称矩阵，并且存在一个对偶矩阵，

$$\mathrm{P}^c_{ij} = \mathsf{Q}_{ji} / \sum_s \mathsf{Q}_{is}, \tag{5}$$

在给定 $\boldsymbol{q}(t)$ 的情况下生成 $\boldsymbol{q}(t-T)$，从而让我们能够估计给定效应的原因的统计分布。请注意，即使

$$\boldsymbol{q}(t-T) = \widehat{\mathbf{P}}^c(T)\, \boldsymbol{q}(t) \tag{6}$$

看起来像是 ◦eq:PF1 的逆运算， $\widehat{\mathbf{P}}^e$ 并不是 $\widehat{\mathbf{P}}^c$ 的逆运算，因为边缘概率 $\boldsymbol{q}(t)$ 和 $\boldsymbol{q}(t+T)$ 在 ◦eq:PF1 与 ◦eq:PF4 中含义不同。在前者中， $\boldsymbol{q}(t)$ 是观测值，而 $\boldsymbol{q}(t+T)$ 是在 $t+T$ 条件下给定该观测值的条件概率分布；而在 ◦eq:PF4 中，它们的含义正好相反。粗粒化划分的效应之一，是破坏原始动力系统中可能存在的任何可逆性。

离散划分的另一个后果是会抑制动力系统的半群特性，即$\mathbf{S}(T_1 + T_2) = \mathbf{S}(T_1) \circ \mathbf{S}(T_2)$。事实上，即使原始动力系统具有马尔可夫性，也就是说其未来仅取决于当前状态（即其“初始条件”），离散化系统通常也不具有马尔可夫性。高维相空间中几乎任意划分所得的单元，都是沿某些被忽略的系统维度延伸的无限圆柱的投影。在给定时刻与某个单元相交的两条轨迹，实际上可能在截然不同的位置与该单元对应的圆柱相交；而区分不同轨迹的唯一方法，往往是考察它们在整个过去过程中经过的单元序列。即便如此，信息也可能仍然不足；对于能在高维系统中保持马尔可夫性的划分，我们所知甚少（Beck & Schl¨ogl，1993年，§3.6）。转移算子通过作用于转移概率来绕过这一限制，并再次具有马尔可夫性，也就是说，形式上 $\boldsymbol{q}(t+T)$仅取决于 $\boldsymbol{q}(t)$（Feller，1971，§X）；但我们恢复马尔可夫性的代价是失去确定性。我们将在§3.1看到，湍流通道的近似转移算子很快就会失去半群性质$\mathbf{P}^e(nT) = \mathbf{P}^e(T)^n$。

有几个原因使$\mathbf{P}^e$ 无法完美估计真实算子 $\widehat{\mathbf{P}}^e$，其中最重要的一点与吸引子的存在有关。耗散系统（例如湍流）通常会演化至整个相空间中一个低维的吸引子子集，而用于 °eq:PF2的观测仅反映该子集的统计特征。因此，$\mathbf{P}^e$ 是$\mathbf{P}^e$ 在系统吸引子上的限制，几乎不包含或完全不包含系统在吸引子之外如何响应的信息。因此，它适用于物理建模，因为人们关注的是系统如何随时间演化；但在控制应用中，若希望在吸引子之外采取行动，则可能还需要额外信息。

使用 PFO 分析复杂动力系统有两种方式。第一种是将其视为一个矩阵，其性质反映了吸引子整体的行为。诸如$\mathbf{P}^c$ 或$\mathbf{P}^e$这样的“随机”矩阵具有非负元素和单位列和，其有用性质已得到广泛研究；尤其是在处理表示系统从未访问过的单元的零元素时，需格外谨慎（Lancaster，1969）。这类矩阵最著名的性质是具有一个为 1 的主特征值，以及一个元素均为非负实数的实特征向量；该特征向量可解释为划分上的概率分布。对于$\mathbf{P}^e$，这个特征向量满足 $\boldsymbol{q}_1(t+T) = \mathbf{P}^e\boldsymbol{q}_1(t) = \boldsymbol{q}_1(t)$，并定义了一种在系统演化过程中保持不变的概率密度，该密度与本节前面提到的自然不变密度 $\boldsymbol{q}_\infty$ 相同。次主特征值决定了不同于自然分布的初始分布趋近于 $\boldsymbol{q}_\infty$ 的过程，也决定了吸引子能否划分为近似互不相交的子集（Froyland，2005）。

如前所述，这些都是适用于整个吸引子的全局性质示例。其他近似策略也是如此，例如本征正交分解（POD，Berkooz 等，1993年）或动态模态分解（DMD，Schmid，2010），它们利用遍历性来最小化降阶模型的全局误差。我们在此更感兴趣的是将 PFO 用作计算状态依赖条件平均的工具的局部分析；这类分析能够提供有关系统在特定单元邻域内预期短期行为的信息。我们的目标是探究某些单元是否比其他单元更有可能成为改进预测的基础，因而是否“更具因果性”。

3 对最小通道的应用

我们的大部分分析以一组数据为中心，这组数据已在 Jim´enez（2015）中使用。我们对平行板之间的压力驱动空间周期性湍流通道流进行了模拟，平行板间距为 $2h$。计算盒沿壁面方向的周期长度分别为 $L_x = \pi h/2$ 和 $L_z = \pi h/4$，名义摩擦雷诺数为 $h^+ = hu_\tau/\nu = 950$，其中 x，y和 z分别是流向、壁法向和展向坐标，对应的速度分量为 u，v 和 w。大写字母表示依赖于 y 的系综平均，$\langle\rangle$，例如 $U(y)$；小写字母表示相对于该平均值的扰动。撇号专用于表示均方根强度，脉动动能定义为 $E = u^2 + v^2 + w^2$。“+”上标表示采用运动黏度 ν 和摩擦速度 $u_\tau = \sqrt{\nu\partial_y U}$ 进行“壁面”归一化。数值代码采用标准的完全去混叠傅里叶–切比雪夫谱方法，与 Kim等—(1987）相同，并保持质量通量恒定。时间通常按涡旋周转时间 h/u_τ 归一化，并记作带星号的形式 $t^* = u_\tau t/h$。更多详情见 Jim´enez（2013）。

为改善统计效果，将模拟的时长延长至 $t^* \approx 650$，并以帧间时间区间 $\Delta t^* \approx 0.025$ 进行采样。这类模拟仅适用于一定范围内的壁面距离

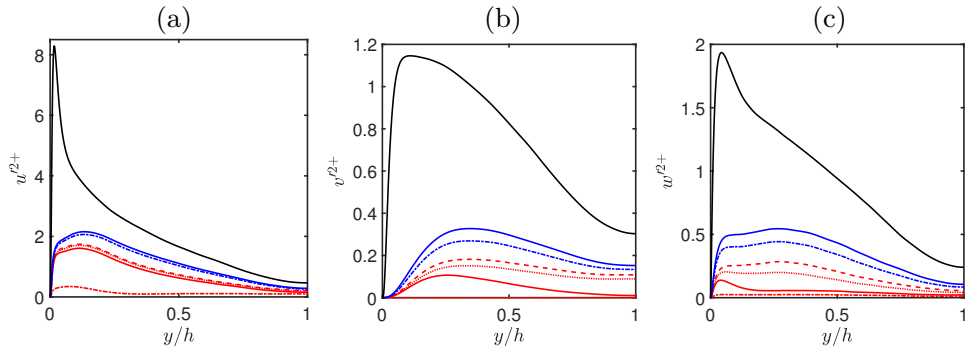


图2：彩色曲线表示本文保留的谐波的累积方差分布。从下到上依次为： [00]、 [01]+[01*]、 [10]、 [20]、 [11]+[11*]、 [21]+[21*]。黑色实线表示该速度分量的总方差。(a) 流向速度。(b) 壁法向速度。(c) 展向速度。

$y/h \approx 0.2 - 0.6$ （Flores & Jim´enez，2010），也就是说，前几个最大的壁面平行傅里叶模态包含了不可忽略比例的动能。靠近壁面处，流动包含范围更广的含能尺度，因此不能视为最小湍流。离壁面较远处，由于缺少一些最大的尺度，模拟结果无法与典型湍流直接比较。上述壁面距离范围大致涵盖一个最大的结构，该结构会不规则地发生猝发。Flores & Jim´enez（2010）已表明，爆发之间的典型间隔为 $t^* \approx 2$–3，因此，本文分析的模拟中每个壁面均包含数百次爆发，每次爆发约有100个样本。此外，由于计算区域过小，无法容纳通道中央部分中充分发展的较大尺度，因此将两个壁面视为独立实现（下文讨论的变量的互相关系数小于0.05）。数据快照总数约为 5×10^4。

如果我们将三个速度分量沿 x 和 z 方向的傅里叶展开定义为

$$a(x,y,z) = \sum_{m,n} \widetilde{a}_{mn}(y) \exp[\mathrm{i}(k_x x + k_z z)], \tag{7}$$

其中， a 是待展开的变量， $k_x = 2\pi m/L_x$和 $k_z = 2\pi n/L_z$是傅里叶系数，记作 $[mn]$。如上所述，只有距壁面给定距离处的最大结构，才有望用相对少量的自由度来描述，从而能够轻松研究其动力学；我们的分析仅保留前几个模态， $m = 0$，1，2 和 $n = -1$，0，1。附录A说明了如何将具有 $n \neq 0$ 的模态作为 $\pm n$ 对的组合来使用，从而得到两个沿展向相差四分之一波长的等效模态。尽管展向均匀性保证了这些组合与 $n = 0$ 模态之间的相互作用在统计上等效，但它们彼此之间存在非平凡的相互作用，因此两种组合都予以保留。例如，它们分别记作 [21] 和 [21*]。图2给出了本文所用全部模态的累积方差分布。结果表明，这些模态的总能量所占比例相对较小，但不可忽略；不过我们将在后文看到，它们遵循相当独立的动力学。此外，保留的模态约占切向雷诺应力的65%， $-\langle uv \rangle$（未示出）。请注意，由于计算盒较小，[00] 模态在 u 和 w中具有相当大的能量，其脉动仅随时间变化。它们可近似视为对壁面区域上平均速度剖面空间变化的建模，区域尺度约为

计算盒的大小。

这个有限的数据子集仍然包含大量自由度，因为每个傅里叶分量都是关于 y 的函数，具有 $O(100)$ 个网格点。尽管我们稍后会看到，通过合理滤波，壁法向分辨率可以降至 $O(10)$ 个点，但每个速度分量的原始自由度为 $O(100)$ 个复数，而我们主要将分析范围限制在少数积分“汇总变量”的行为上，这些变量代表所选壁面距离范围内速度的全局性质。具体来说，如果我们关注的范围是 $y \in (y_0,\ y_1)$，我们便按照 Jim´enez（2013、2015）的做法，采用积分强度，

$$I^2_{a,mn} = \frac{1}{y_1 - y_0} \int_{y_0}^{y_1} |\widetilde{a}^+_{mn}|^2 \,\mathrm{d}y, \tag{8}$$

它表示速度大小；当 $k_x \neq 0$时，还采用平均倾斜角

$$\psi_{a,mn} = -\arctan\left(\mathrm{Im} \frac{\int_{y_0}^{y_1} \widetilde{a}^\dagger_{mn} \partial_y \widetilde{a}_{mn} \,\mathrm{d}y)}{k_x \int_{y_0}^{y_1} |\widetilde{a}_{mn}|^2 \,\mathrm{d}y} \right), \tag{9}$$

其中，“Im”表示虚部，而匕首符号表示复共轭。该角度的取值范围为 $-\pi/2$ 到 $\pi/2$，用于描述傅里叶模态相位的壁法向结构。

我们还考虑了若干其他汇总变量，它们或基于物理原理，或采用标准统计方法（例如单个 POD 模态）定义，但这些变量并未对论证或结论产生显著补充。本文其余部分不再讨论这些变量，唯一例外是使用 POD 作为滤波工具，以平衡保留流场的壁面平行与壁法向分辨率，详见附录 B。

由于保留谐波排除了最小尺度，因此与完整流场相比，它们在更靠近壁面处仍然可信；我们的所有结果都采用积分带 $y^+ > 40$ 和 $y/h \leq 0.6$。我们也测试了略窄或略宽的范围，结果几乎没有变化。

并非所有以这种方式定义的汇总变量都完全相互独立。图3给出了它们的相关系数：

$$C_{ab} = \frac{\langle (a - \langle a \rangle)(b - \langle b \rangle) \rangle}{\langle (a - \langle a \rangle)^2 \rangle^{1/2} \langle (b - \langle b \rangle)^2 \rangle^{1/2}}. \tag{10}$$

有几点值得注意。 u 和 v 分量形成了相关性相当好的配对，尤其是在汇总变量和傅里叶模态相似时；但涉及 w 的大多数量与 u 和 v之间，或彼此之间，相关性都不高。 u 和 v 强度之间的相关性显著，这是因为尽管它们涉及的是积分量而非变量本身，却反映了切向雷诺应力 $-uv$的生成。与低阶模态 [10] 和 [20]相比，高阶模态 [11] 和 [21],在不同变量之间往往具有更高的相关性。尤其是，图3中相关性最高的三个数值为 $C(I_{v01},\ I_{w01*}) \approx 0.70$、 $C(I_{u11},\ I_{w11*}) \approx 0.74$和$C(I_{v11},\ I_{w11*}) \approx 0.59$；尽管涉及 w的汇总量与其他速度分量的汇总量通常相关性较差。有趣的是，这些相关性以 $[m1,\ m1$ *] 对的形式出现，代表彼此相隔四分之一展向波长的流动结构。它们对应于壁面受限流动中常被描述的倾斜“涡辊”。

有些出乎意料的是，角度与强度通常彼此不相关，包括 $(I_{v10},\ \psi_{v10})$ 这一对。Jim´enez (2013, 2015) 和 Encinar & Jim´enez (2020) 曾指出，这一对尤其有用，因为流动会以一种具有物理可解释性的方式遍历其联合概率分布。

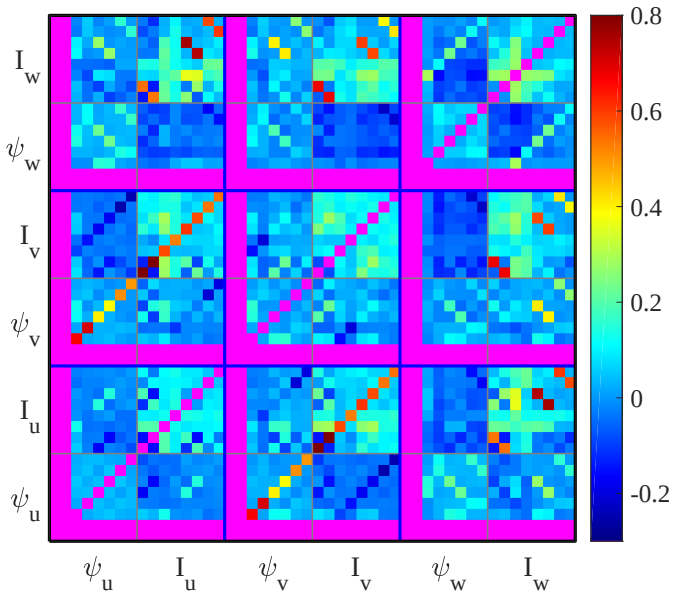


图3：不同汇总量之间的相关系数。蓝色边框的大方块对应三个速度分量。灰色边框的小方块表示汇总变量，每个灰色方块内最小的单元表示傅里叶模态，其排列顺序为从下到上、从左到右依次为 [01], [01*], [10], [20], [11], [11*], [21], [21*], 。为清晰起见，主对角线已屏蔽；对于 $k_x = 0$ 的模态，其倾斜角未定义。

这表明，相关性和相干性是不同的概念。举一个简单的例子，sin(*t*) 和 cos(*t*) 的时间演化彼此正交且不相关，但从它们共同横越其相空间中的一维圆形子流形这一意义上说，它们构成一对相干信号。

或许会让人想要将图3中矩阵的主导特征值所对应的特征向量用作汇总变量。这些变量组合能够最优地解释数据的方差（Berkooz 等，1993年），但结果表明，它们尤其不善于描述动力学。观察图4(a)中 (I_{v10}, ψ_{v10}) 的联合概率密度，便能很好地理解这一点。显然， I_{v10} 不能解释 ψ_{v10}，反之亦然，这正是为何可以用这对变量来定义二维因果组合。

在本文余下部分，我们将探讨能否找到其他有趣的变量对。

3.1 最小通道的转移算子

从前面的讨论应该可以清楚看出，对于给定系统构建 PFO 时，主要问题在于选择基础划分，以及用于表示该划分的变量。图4给出了刚才所述最小通道的结果，所采用的变量是壁法向速度的倾角 ψ_{v10} 及其均方根振幅 I_{v10}，二者的联合概率分布如图 4(a) 所示。大部分分布包含在内侧概率等值线以内，但外侧边缘颇为有趣，因为 Jim´enez（2015）表明，其上边缘可以

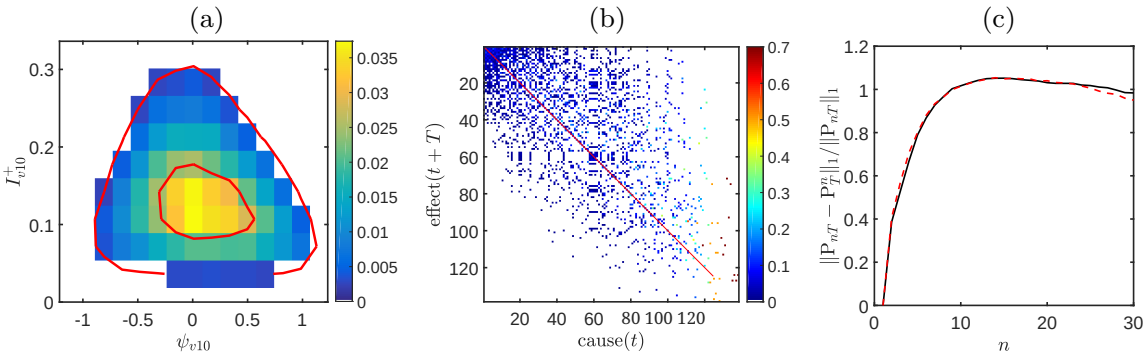


图4: （a）壁法向速度分量的 $[10]$ 模态的积分倾角与振幅的二维联合概率分布 $\boldsymbol{q}_\infty$（即 $k_x = 2\pi/L_x$, $k_z = 0$），对 $y^+ > 40$ 和 $y/h < 0.6$取平均。倾角划分为15个等宽分箱，振幅划分为13个分箱。红色等高线包含30%和95%的概率质量，且仅绘制外侧等高线内的单元。（b）PF算子 $\mathbf{P}^e$，通过将（a）中的变量合并为一个向量、偏移 $T^* = 0.078$，并按联合概率$\mathbf{Q}$ 在 ˚eq:PF2d中的列和从大到小的顺序重新排列而得到。和为零的行和列已被剔除。（c）PF 矩阵的 L_1-范数马尔可夫检验。 , $\mathbf{P}^e$; , $\mathbf{P}^c$。

被建模为线性化猝发，其中平均剪切通过将速度扰动向前倾斜来放大它们（Orr，1907；Jim´enez，2013），尽管对闭合该循环的过程仍不甚了解。

PFO 的构建始于将图4(a)中参数空间的 15×13 划分整理为一个长度为 195 的向量，并根据数据序列中的所有快照构建双时刻联合分布 $\mathbf{Q}(t,\ t+T)$。图4 中使用的区间 $T^* = 0.078$ 根据 Jim´enez (2015) 以及 Encinar & Jim´enez (2020) 的经验选取，代表系统沿图4(a)上边缘移动一个增量 $\Delta\psi \approx 0.3$ 所需的时间。Jim´enez (2015) 还表明，在这段时间内，流动在相平面的该区域可以进行线性预测。

$\mathbf{Q}$ 中含非零元素的列使用 ˚eq:PF2 进行归一化，而仅含零的列则予以舍弃。由此得到的估计 $\mathbf{P}^e$ 如图4(b)所示，其中每一列均归一化为 1，并为便于绘图，按行和从大到小排序。在此步骤中舍弃零值时，将完整的 $\widehat{\ }\mathbf{P}^e$限制为吸引子上的估计 $\mathbf{P}^e$ 。

需要注意的是，尽管离散变量被视为一个长向量的各个部分，但$\mathbf{Q}$ 中的概率对应于两个独立变量同时出现的情形，这使我们能够研究取决于两个“原因”的效应（Pearl，2009）。这一方法可以扩展到相空间的三维或更高维投影，也可以用于研究三个或更多独立原因同时出现（这种情形越来越不可能）所产生的效应，但很快就会受到可用数据量的限制。此处使用的 5×10^4 快照必须填充图4(b)中的 138^2 矩阵$\mathbf{P}^e$，平均每个矩阵元素只有2.5个相点。实际上，数据量从填充较充分的矩阵元素所含的 O(100)个数据点，到吸引子以外元素的零个数据点不等。对于图4(a)中更平滑的分布，这一限制并没有那么严格；该分布本质上是PFO的一个特征向量（见§2）。它的维度只有138个单元，每个单元代表 O(300–1000)个数据点。测试表明，将划分细化至 10×10 个单元左右，并不会定性地改变下文所述的结果，

但尝试 t 而在分布中有趣的边缘区域采用更细的划分则会遇到问题 .

因此，我们将研究范围限制在相空间的二维投影，并在 §3.2 中探讨哪些汇总变量组合能得出更有趣的结果。§3.3 中还会通过对这些投影平面上的其他变量进行条件平均，恢复部分三维动力学。

此外，为确保结果中的噪声源于离散划分，而非数据量不足，图4(a)及后续类似图中的分布仅绘制在包含总概率质量 95% 的概率等值线范围内。该等高线上的每个单元都包含 $O(100)$ 个数据快照。§3.2 中的全局平均值也在此高概率区域内计算；我们还将数据量减半后重复了分析，得出了类似结论。

图4(c)检验了 §2 中讨论的 $\mathbf{P}^c$ 和 $\mathbf{P}^e$ 的非马尔可夫行为。图中显示了 $\mathbf{P}(nT)$ 与 $\mathbf{P}(T)^n$ 在 $T^* = 0.025$ 时两者差值的相对弗罗贝尼乌斯范数。对于互不相关的随机矩阵，其相对差值取决于单个矩阵列的标准差与均值之比；但对于图4所示的情形，该值约为 1。显然，经过几个时间步后，所检验的两个矩阵便基本不再相关；因此，从现在起我们将 $\mathbf{P}(nT)$ 用作基本算子。

图5展示了如何利用 PFO 提取给定观测的原因与结果的概率分布。图5(a)假设我们知道系统位于 $t = 0$ 处实心圆标记的单元内。$t = T$ 处的条件概率分布由转移算子 $\mathbf{P}^e$ 中相应的列给出，并以蓝色虚线等高线显示在图中。反过来，$t = -T$ 处原因的条件概率分布由后向算子 $\mathbf{P}^c$ 中相应的列给出。该分布以黑色实线显示，两种分布之间的差异体现了系统沿图中顺时针方向的时间演化，参见 Jim´enez（2015）。

向前分布与向后分布的区分并不适用于所有单元。图5(b)将这一方法应用于不变密度分布高概率核心区中的一个单元。其向前分布和向后分布的标记方式与图5(a)相同，但二者相互重叠，难以区分。

图5(c)展示了分布中所有单元的平均位移。箭头从每个参考单元的中心指向经过给定时间区间后其效应的平均位置。图5(d)以同样方式展示原因；两图均显示，沿分布上缘，系统平均呈顺时针位移（参见 Jim´enez，2015 年的图3b，以作比较）。除了这种环形位移外，图5(c)中的箭头还呈螺旋状朝分布中心移动，而图5(d)中的箭头则向外移动。时间区间越长，这种趋势越明显；其原因是概率演化中的非马尔可夫分量。

从外围出发的任意随机位移都倾向于朝分布中心部分中概率最高的位置移动，而进入外围的随机位移最有可能来自核心。这一点在图5(e,f)中最为明显：这些图是在流快照的时间戳随机化后，采用与图5(c,d)相同的方法计算得到的。事实上，在这种情况下，效应和原因是从系统状态中随机选取的，因此它们的预期平均值与不变分布的总体平均值一致。这些随机化后的图与时间区间无关。

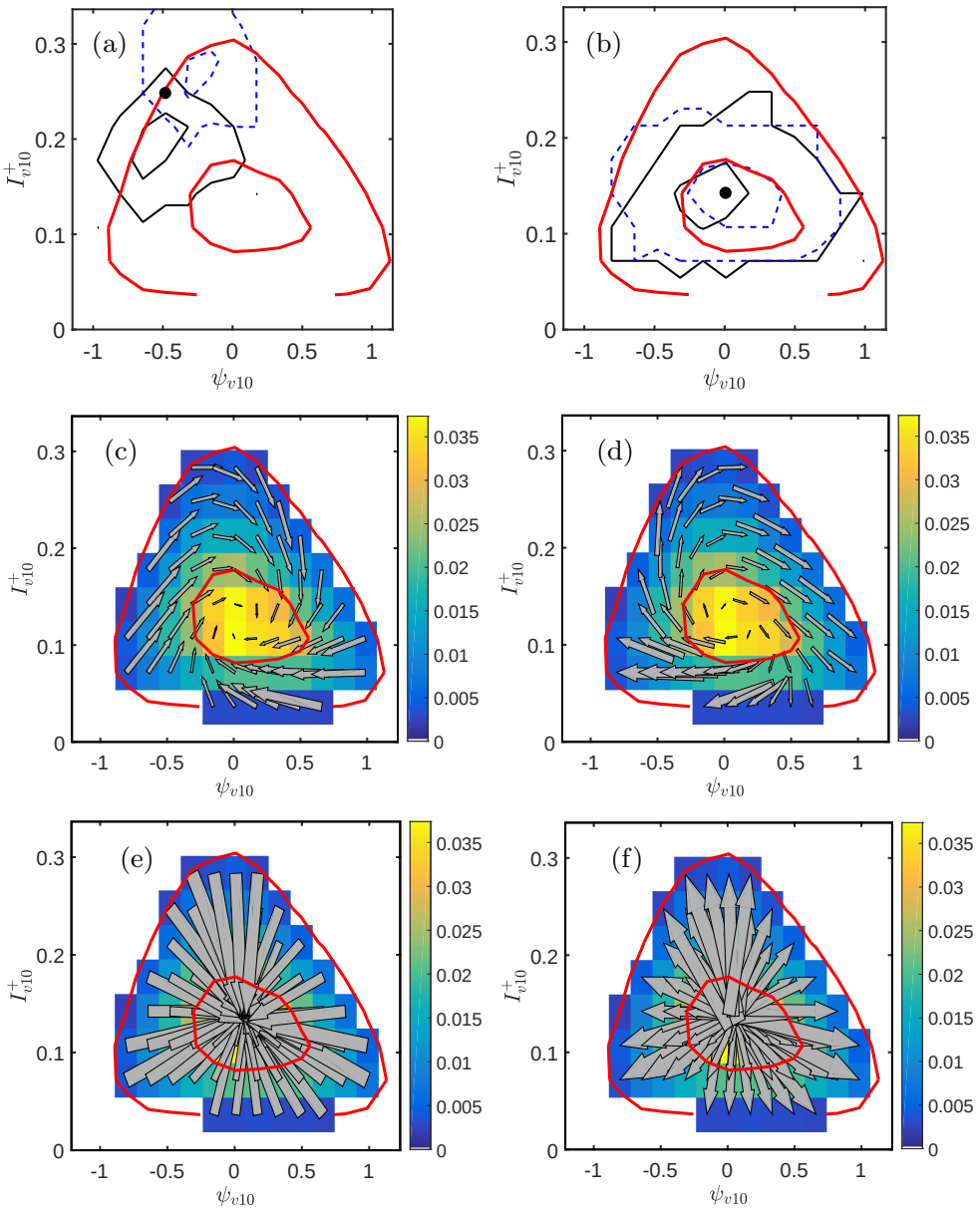


图5：(a) 对于图4(a)中的变量和区间 $T^* = 0.078$，黑色实线等高线表示可能的 T 前兆的概率分布，这些前兆对应于对实心圆标记单元的观测；蓝色虚线等高线表示经过 T 后可能产生的效应分布。等高线分别包含30%和95%的概率质量。(b) 与(a)相同，但观测位于不变密度分布的核心区域。(c) 参数平面中的平均系统位移。彩色背景表示不变密度，箭头连接作为原因的单元与经过时间 T 后的平均系统位置。(d) 与(c)相同，但箭头连接经过时间 T 后将通过作为参考点的单元的系统的平均位置。红色等高线分别包含30%和95%的不变密度。(e、f) 与(c、d)相同，但数据使用随机化时间戳。

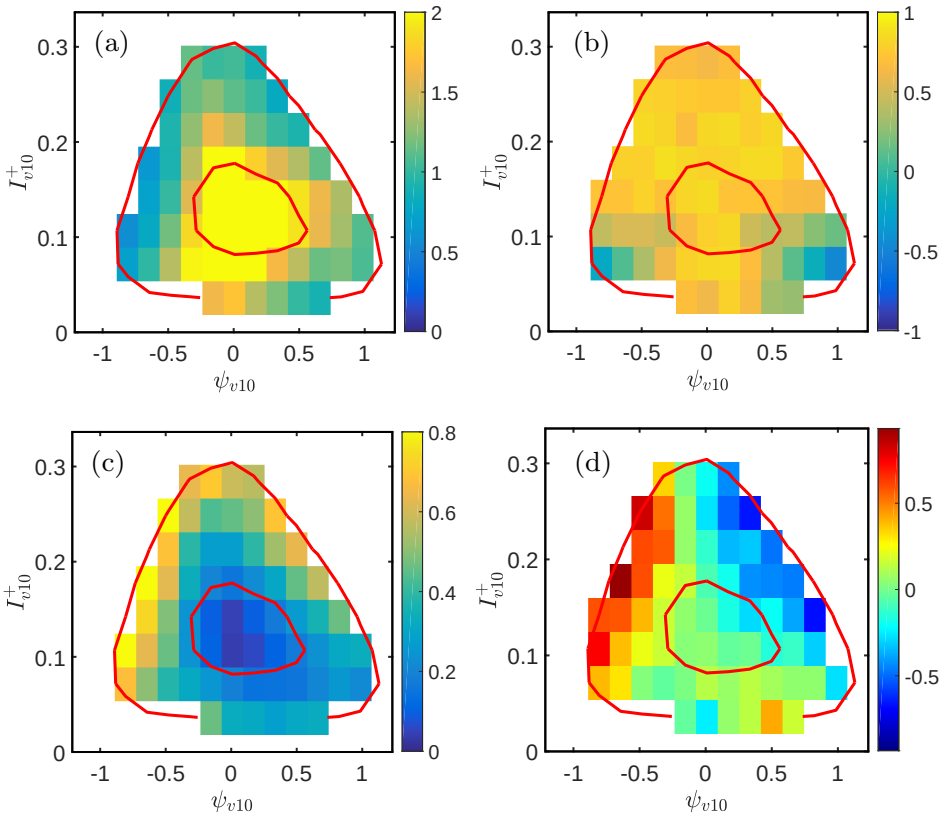


图6：与图4相同。(a) 效应平均位移与其标准差之比。每个变量均以其总体标准差归一化，以补偿单位差异。(b) 原因与结果平均位移之间的确定性指数 ˚eq:corrce。绘制范围为 $T^* = 0.025$。(c) 前向条件分布与反向条件分布之间的 Hellinger分离指数 ˚eq:Hell，以观测单元为函数表示。(d) 根据效应和原因的分布计算的 Kullback–Leibler信息增益 ˚eq:KL2，以比特为单位。暖色表示信息的产生，冷色表示信息损失。所有面板均针对壁法向速度的 [10]模态，并且仅使用位于$\boldsymbol{q}_\infty$概率等值线内的单元。除(b)外，所有面板中均有 $T^* = 0.078$。

3.2 质量指标

我们在上一节中看到，构建 PFO 的主要问题在于需要收集足够的数据来填充二维直方图 **Q**，因此难以考虑包含两个以上独立变量的分布。我们还提到，我们的策略是测试所有可能的变量对，希望找出统计行为最理想的变量对；但图3中使用的36个变量可以组成630种可能的组合，而自动化搜索需要使用比目视检查图5中的二维图更易于实现的指标。本节将讨论其中四种指标。

位移向量的统计不确定性在图6(a)中进行了讨论，图中展示了系统在给定时间内的条件平均位移的标准差与其均值之比

为补偿图中两个变量幅值的差异（它们通常具有不兼容的单位），在计算条件统计之前，分别用各自的全局标准差对其进行归一化。所得结果衡量了图5(c)中每个箭头对应的误差条。

相对标准差较小，并不保证某个量在物理上具有相关性。观察图5(c-f)可发现，就原因与结果之间的不对称性而言，确定性演化和随机演化的行为有所不同。图5(c,d)中，原因和结果的位移向量朝同一方向旋转，因为两者都表示系统的确定性演化。但图5(e,f)中的随机化向量指向相反方向，因为无论时间方向如何，它们都从条件单元移向分布最密集的部分。因此，我们可以将观测单元 $\boldsymbol{v}_0$ 的“确定性”指标定义为归一化内积

$$C_{ce}(\boldsymbol{v}_0, T) = \frac{(\boldsymbol{v}^e - \boldsymbol{v}_0) \cdot (\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}^c)}{\|\boldsymbol{v}^e - \boldsymbol{v}_0\| \|\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}^c\|}, \tag{11}$$

其中， $\boldsymbol{v}^e - \boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{v}_0 - \boldsymbol{v}^c$ 分别是时间区间 $\pm T$内结果和原因的条件平均位移。与图6(a)一样，在计算 °eq:corrce之前，先用标准差对变量进行归一化。该指标表明了 $\boldsymbol{v}_0$邻域内系统演化的确定性程度，以及通过观测变量对所获得的信息量。当所考虑的子空间内系统完全确定时，$C_{ce} \approx 1$；而当系统基本上是随机的时， $C_{ce} \approx -1$。图6(b)展示了图5中数据对应的 C_{ce} ，并表明该参数平面中这一特定傅里叶模态的演化几乎处处都是确定性的。

沿分布的上边缘，这与 Jim´enez (2015) 基于物理的结论一致；但沿下边缘则不一致，因为 Jim´enez (2015) 和 Encinar & Jim´enez (2020) 都认为，平均位移与解释上边缘的模型预测相反，而且位移的不确定性过大，无法信任其平均值。图6(a)清楚地显示了该区域的不确定性很高，但图6(b)表明，分布的这一部分也是确定性的。部分原因是，图6(a)采用的时间区间比图6(b)更长。随着非马尔可夫行为逐渐占据主导地位，演化看起来会随着区间延长而愈发随机。图6(b)中的确定性指数几乎为1，此时位移的量级约为一个分布单元；而当图中采用图6(a)所用的、更具物理意义的时间区间时，该指数降至 $C_{ce} \approx 0.8$ ；采用 Jim´enez (2015) 使用的更长区间时，则降至 $C_{ce} \approx 0.5$ 。Encinar & Jim´enez (2020) 采用了不同于上述方法的另一种方法，并使用了另一组数据，计算出一个与图6(a)中的相对离散度等效的优度指标。以滤波场距壁面的平均距离 y 对其时间偏移进行归一化后（Flores & Jim´enez, 2010；Jim´enez, 2015），该指标的取值范围为 $u_\tau T/y = 0.04$至0.19。对于这些区间中最短的区间，所得标准差可以忽略不计；而对于最长的区间，标准差则大到足以使部分位移反向。将这些数值应用于当前情形，并假设积分带为 $y \approx 0.3$，则图6(b)中的时间区间为 $u_\tau T/y = 0.087$，图6(a)中的时间区间为 $u_\tau T/y = 0.26$，这解释了图6(a)与图6(b)之间看似存在的差异。

图6(c)量化了图5(a,b)中原因与结果的条件概率分布之间的时间分离。两个归一化概率分布 $\boldsymbol{q}^{(1)}$和 $\boldsymbol{q}^{(2)}$ 之间的距离可用海林格范数（Nikulin，2001）来表征，其定义为

$$H^2(\boldsymbol{q}^{(1)}, \boldsymbol{q}^{(2)}) = \tfrac{1}{2} \sum_j \left(\sqrt{q_j^{(1)}} - \sqrt{q_j^{(2)}} \right)^2, \tag{12}$$

当 $\boldsymbol{q}^{(1)} = \boldsymbol{q}^{(2)}$时，该范数为零；对于互不相交的分布，其达到最大值 $H = 1$。在图5(a,b)和图6(c)中，原因与结果的条件分布之间的距离从密度分布边缘处的 $H \approx 0.9$ （此处二者显然不同），变化至中心处的 $H \approx 0.1$ （此处过去与未来几乎无法区分）。

指标 °eq:corrce和 °eq:Hell提供的信息相关但并不相同。 °eq:Hell的值较高意味着原因与结果不同，而 °eq:corrce的值较高则还表明与两者相关的平均漂移方向相似，并且概率流动可以用一个平滑的向量场来描述。

综合考察图6(a-c)可以看出，概率分布的右上边缘和左上边缘由以相当确定的方式演化的系统占据，而分布的下边缘，尤其是其中心核心，则具有更强的随机性。

最后，图6(d)探讨了这种演化是否会影响本节所用变量的概率分布。实质上，这关乎以给定单元为条件的效应是否比其原因更有序。相对于参考分布 $\boldsymbol{q}^{(2)}$，分布 $\boldsymbol{q}^{(1)}$的Kullback-Leibler（KL）信息定义为

$$K(\boldsymbol{q}^{(1)}, \boldsymbol{q}^{(2)}) = \sum_j q_j^{(1)} \log_2(q_j^{(1)}/q_j^{(2)}), \tag{13}$$

以比特为单位测量的该值始终非负，且仅当 $\boldsymbol{q}^{(1)} = \boldsymbol{q}^{(2)}$ 时才为零。直观而言，它描述了与 $\boldsymbol{q}^{(2)}$ 相比，$\boldsymbol{q}^{(1)}$ 的组织程度高出多少。请注意， °eq:KL1 只有在 $\boldsymbol{q}^{(1)}$ 的支撑集包含于 $\boldsymbol{q}^{(2)}$ 的支撑集时才有限，因此， K 也可以理解为一种度量，表示将 $\boldsymbol{q}^{(2)}$ 限制到其某个子集时所获得的信息量。在这里，我们始终以不变分布 $\boldsymbol{q}_\infty$ 作为参考点，因此，对于条件原因的分布 $\boldsymbol{q}^c$ 和效应的分布 $\boldsymbol{q}^e$ ， K 都必定存在。这一选择还意味着，具有 $K = 0$ 的分布在统计上与 $\boldsymbol{q}_\infty$ 无法区分，并代表一组不受约束的相点。假设系统在 $t = 0$ 时被限制在单个单元内，那么当允许这一集中分布向过去或未来扩散时，信息几乎必然会丢失；但这两个分布所包含的信息无法直接比较，因为它们通常并不具有共同支撑集。图6(d)显示了这种差异，

$$K^{ce} = K(\boldsymbol{q}^e, \boldsymbol{q}_\infty) - K(\boldsymbol{q}^c, \boldsymbol{q}_\infty), \tag{14}$$

相对于参考点，条件效应的信息与条件原因的信息之间的差异。在分布的左侧（增长）边缘，该差异为正；在右侧（衰减）边缘，该差异为负，这表明随着系统顺时针漂移，相干性先形成，随后被破坏。由于系统处于平稳状态，这两种效应相互抵消，信息的平均生成量为零。

不过，这些指标真正的价值在于对不那么显而易见的变量对进行大规模筛选。图7展示了三个速度分量的模态倾角与强度各种组合的确定性 °eq:corrce 和分离度 °eq:Hell 指标，这些指标是对相应分布取平均后得到的。不出所料，确定性最高的组合是涉及同一傅里叶模态倾角和强度的组合；但有趣的是， v_{10}（这是 Jim´enez (2015) 基于物理理由选定的模态）的确定性也明显高出许多。确定性稍低的是 v_{20}，它只是 v_{10} 的一个谐波，而相同的理论也适用于该模态。摆动模态 v_{11}、 v_{21}、 u_{11}、 u_{21}的组织性较弱，但并非完全不相干。展向速度无法用倾斜角和强度很好地描述，不过，有一对有趣的变量是（I_{v11}、 I_{w11*}），反过来也一样；根据图3中的相关性，这一变量对已被识别为倾斜涡辊。它出现在图7的两项指标中，表明这个涡辊具有自身的因果

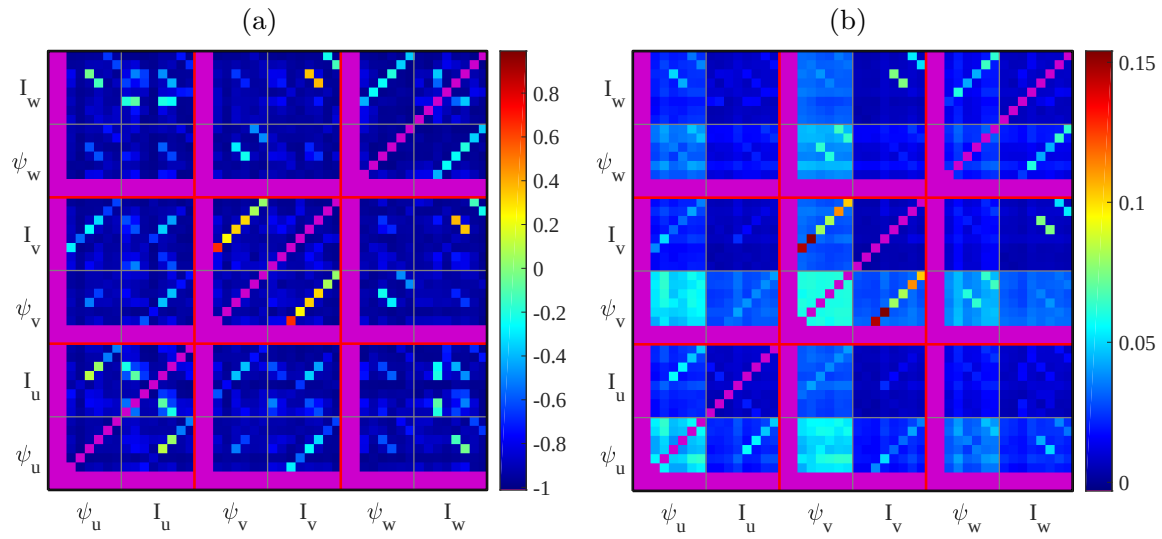


图7：与图3相同。(a) 不同模态倾角和强度组合下，对不变分布取平均的确定性指数 ˚eq:corrce。(b) 分离指数 ˚eq:Hell。两种情况下，主对角线和 $k_x = 0$ 模态的倾角均以洋红色标出。

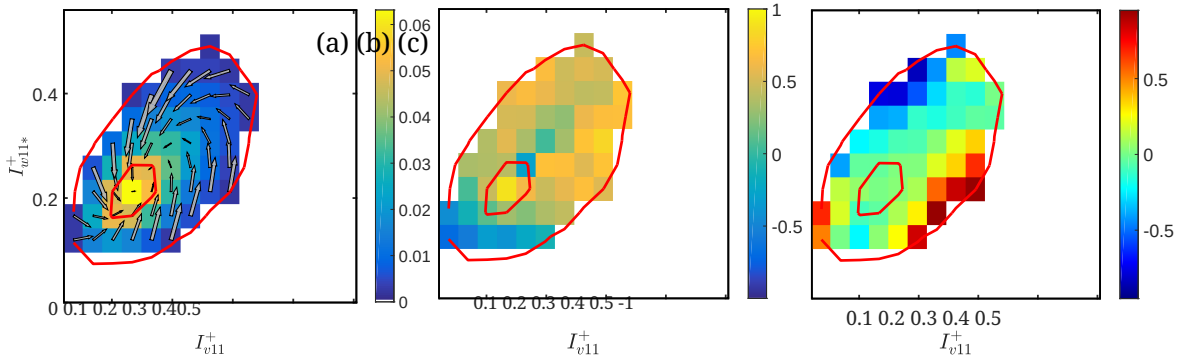


图8：与图5和图6相同，针对涡辊变量（I_{v11}, I_{w11*}）。(a) 效应的矢量图，与图5(c)相同。(b) 确定性指数 ˚eq:corrce，与图6(b)相同。(c) Kullback–Leibler信息增益 ˚eq:KL2，与图6(d)相同。

动力学，二次谐波（I_{v21}，I_{w21*}）也是如此。然而，流向均匀的涡辊（I_{v01}，I_{w01*}）并未出现在图7中，尽管它是图3相关性中耦合最强的结构之一，也是图2中脉动能量的最大贡献者之一。这类二维结构不会与剪切相互作用；即使它们可能发展得很强，其自身的动力学也很弱。

图8展示了(I_{v11}，I_{w11*})涡辊的漂移图和两个质量指标。这两个变量的相关性相对较强，可能是由连续性导致的，且其分布呈逆时针旋转。这表明涡辊最初以壁法向速度的喷射（或扫掠）形式产生，随后向展向扩展。图8(c)显示，与图6(d)一样，相干性是在

结构增强时形成，减弱时则被破坏。

3.3 条件平均

前几节的分析揭示了哪些变量对以确定性方式演变，但对相关流场的说明甚少。朝这一方向迈出的第一步是图 9，其中展示了以基本(ψ_{v10}，I_{v10})变量对为条件的其他流动变量的平均值。大多数条件平均提供的信息相对有限。它们要么几乎均匀地分布于不变概率分布之上，要么跟随基准变量的演变，所说明的无非是强结构在大多数变量中都很强。少数情况则更有意思。

随着壁法向速度突发，流向速度在流向上的非均匀性增强（u_{10}）。根据条件变量的选取，这一点对壁法向速度同样成立，但对展向分量则不成立（未显示）。 u_{10} 与 v_{10} 的耦合是连续性所要求的，这两个变量属于 Orr（1907）和 Jim´enez（2013）所描述的二维猝发。然而，自持湍流需要三维性，这由图 9(b) 中的 $k_z \neq 0$ 模态提供。该图显示了形成可能非均匀条带的 u 模态。它们沿猝发的衰减段增长，因此很可能是猝发的结果，而非前兆。可以证明，图 9(b) 中的大部分增长由 [01] 模态导致；该模态衡量流向均匀条带的强度，也造成图中沿 ψ 轴的大部分不对称性。高阶模态 [11]和 [21],仅略有增长，且是在猝发的上升段增长。另一方面，横流（v，w）涡辊沿下降支增长，如图 9(c) 中的 [11] 谐波所示。 [01] 流向涡卷也有同样的情况，其强度相近；而 [21] 模态的增长则弱得多，该模态较弱且相干性较差。在所有这些情况下，图中都将 k_z 的两种符号归为一组。

当以非均匀性指数替代依赖于 x的模态的强度时，

$$\Omega_{a,mn} = I_{a,mn}/I_{a,0n}, \tag{15}$$

图 9 会发生一些变化。图 9(c) 中涡辊的增长转移到了分布的底部。其非均匀性始于猝发下降段中的 w_{11} ，并沿着向左延伸的底边移动到u_{11} 和 v_{11} 。该区域中的波状准流向涡卷非常弱，但也非常不均匀，因此很容易让人得出这样的结论：这种波状起伏是最终触发后续猝发的因素之一。

图 9(d-f) 展示了在（I_{v11}、I_{w11*}）蜿蜒涡辊平面上的条件平均。图9(d) 与图9(a) 等效，并证实涡辊是一种三维结构，其中流向速度随 v_{11} 和 w_{11*} 一同增大。对于 u_{11} ，这一效应远强于 u_{11*}，这表明活跃的流向速度与壁法向分量 v_{11} 同位，而非与 w_{11*} 同位。三维性还延伸至其他谐波，图 9(e) 显示，其作用之一是增强展向均匀分量 u_{10} 的流向非均匀性。该图与图9(a) 互为对偶，并表明涡辊的增强发生在（ψ_{v10}、I_{v10}）猝发的上缘，不过从这种表示中无法确定确切位置。例如，条件 I_{v10}本可直接指示（ψ_{v10}、I_{v10}）猝发中的位置，却未能在（I_{v11}、I_{w11*}）平面上产生清晰信号。图 9(f) 展示了 u 的条件$k_z \neq 0$ 分量，与图 9(b) 中的量相同，提供了更多信息。图 9(b) 显示， u 条带沿着（ψ_{v10}、I_{v10}）顺时针演化的下降段增长；而图 9(f) 显示，它沿逆时针演化的上升段增长

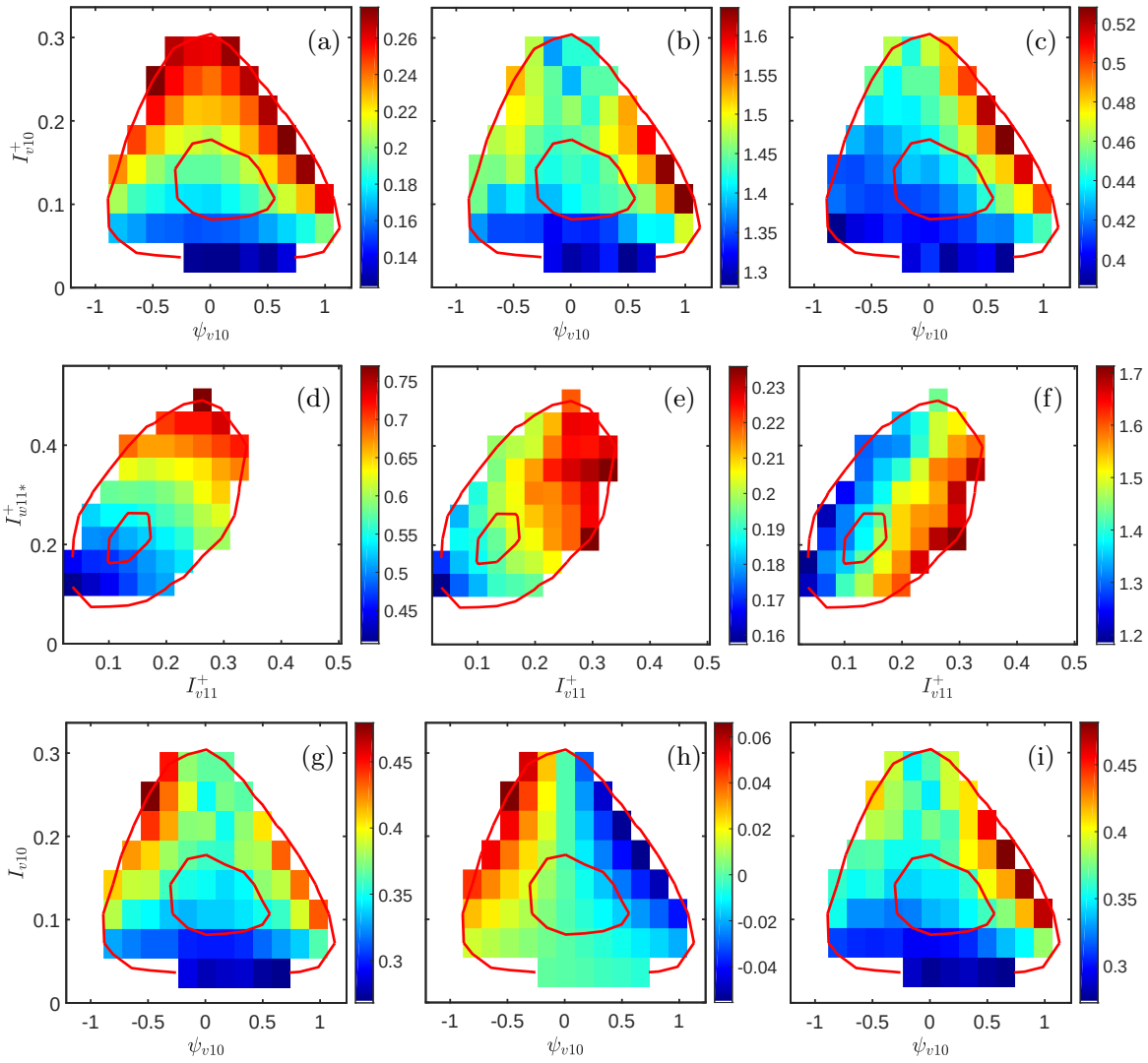


图 9： (a-c) 以变量对 (ψ_{v10}， I_{v10}) 为条件的不同速度模态的平均强度。(a) u_{10}。(b) u 的所有模态，$k_z \neq 0$。(c) $\sqrt{v_{11}^2 + w_{11}^2}$。(d-f) 以 ($I_{v11}$， I_{w11*}) 为条件。(d) u_{11}。(e) u_{10}。(f) u 的所有模态，$k_z \neq 0$。(g-i) 条件切向雷诺应力， θ。(g) 所有保留谐波。(h) θ_{10}。(i) 所有谐波， $k_z \neq 0$。

(I_{v11}， I_{w11*})。因此，两个阶段大概对应流动的同一阶段，这与图 9(c) 中高涡辊强度所在的位置一致。

同样值得关注的是图 9(g-i)，其中展示了条件切向雷诺应力 $\theta_{mn} =$–Re($\widetilde{u}_{mn}\widetilde{v}^\dagger_{mn}$)，其积分方式与 ◦ eq:ampdef 中相同。尽管运动方程中的量是 $\partial_y\theta$，而不是 θ 本身，但正应力往往会使平均速度剖面更具湍流特征、靠近壁面处更陡；负应力则往往会降低壁面剪切。图 9(g) 展示了所有保留谐波产生的条件雷诺应力；我们在 §3 中看到，这些谐波约占总流动应力的三分之二。该应力处处为正，在分布的上边缘处更强，而其他流动特征在此处也较强。

分布中，其他流动特征在此处也较强。它在（ψ_{v10}，I_{v10}）平面上也不对称，在猝发的增长阶段强于其衰减阶段。原因如图 9(h) 所示，该图展示了 Orr（1907）谐波 θ_{10} 产生的应力。它在 ψ_{v10} 上几乎呈反对称，在猝发增长期间为正，在衰减期间为负。这正是猝发呈瞬态的原因，因为其衰减抵消了增长的作用。[10] 模态是唯一会产生逆梯度应力的模态。图 9(i) 展示了所有其他模态产生的切向应力。这些应力处处为正；尽管猝发本身具有瞬态特征，但其净效应是在衰减段形成三维结构。

尽管图中未显示，但有趣的是，当 θ_{10} 以（I_{v11}，I_{w11*}）平面为条件时，在涡卷分布最上端也为负值，这证实了我们先前的结论：强涡卷对应于猝发衰减阶段。

宽泛地说，图 9(a-c)中概率分布向下延伸的右边缘，以及图 9(d-f)中向上延伸的右边缘，都描绘了非均匀 u条带演变为（v，w）涡辊的过程。图 9上排显示条带的衰减阶段，中排则显示涡辊的增长。对两组图中条件变量的比较表明，涡辊演变过程中相干的右边缘对应于猝发的衰减阶段，因此，图 9(a-c)中趋近三角形右下顶点的过程，对应于图 9(d-f)中的分布顶部。按照这种解释，图 9(a-c)中沿分布底边发生的猝发低强度演变，部分应对应于图 9(d-f)中沿分布左边缘发生的涡辊衰减阶段。下一节将更详细地考察猝发的这一相位。

4 条件轨迹

此处或许值得回顾一下，诸如图 9 中的图并非 PFO，而是将其主特征向量重新排列成二维矩阵，以便于人们查看。算子本身是图4(b)中的较大矩阵，或者是在不同时间间隔下此类矩阵的堆叠。图 9 中的图展示了流动状态在相空间中的概率分布，而用于生成图5(a,b)的狄拉克 δ 分布则表示一次测量，它会将该概率坍缩为描述某种流动构型的变量的单一组合。在本文余下部分，我们将研究这些坍缩概率，以及连接两个或更多此类状态的轨迹的统计性质。由此，PFO 主要成为一种指引，帮助我们判断哪些单元可能提供更有趣的信息，以及应如何选择连接这些单元的轨迹。

例如，可以考察满足两个不同时刻条件的轨迹的统计特征描述，例如经典回归检验：通过监测轨迹在给定延迟后何时接近自身，来识别近似周期行为（Kawahara 等，2012年）。与之对应的统计问题是：给定单元的效应所对应的条件概率分布，在经过一段延迟后是否包含条件单元。实际上，这归结为在矩阵 $\mathbf{P}^{e}(T)$ 的对角线中，找出每个时间延迟下回归概率最大的单元。图10(a)给出了一个例子，其中绘制了（ψ_{v10}，I_{v10}）平面上 PFO 对角线的最大值。在 $T=0$ 时，该值为 1，此时轨迹仍处于初始位置；随后迅速衰减至约 0.05，这就是随机轨迹与不变分布 $\boldsymbol{q}_{\infty}$ 核心中的某个单元相交的概率。然而，该曲线在 $T^{*}=0.66$ 处再次达到峰值；有趣的是，在两倍于该延迟的 $T^{*}=1.35$ 处也达到峰值。此外，由于 PFO 包含分布中所有单元的信息，我们可以找出是哪个条件单元导致了概率最大值，

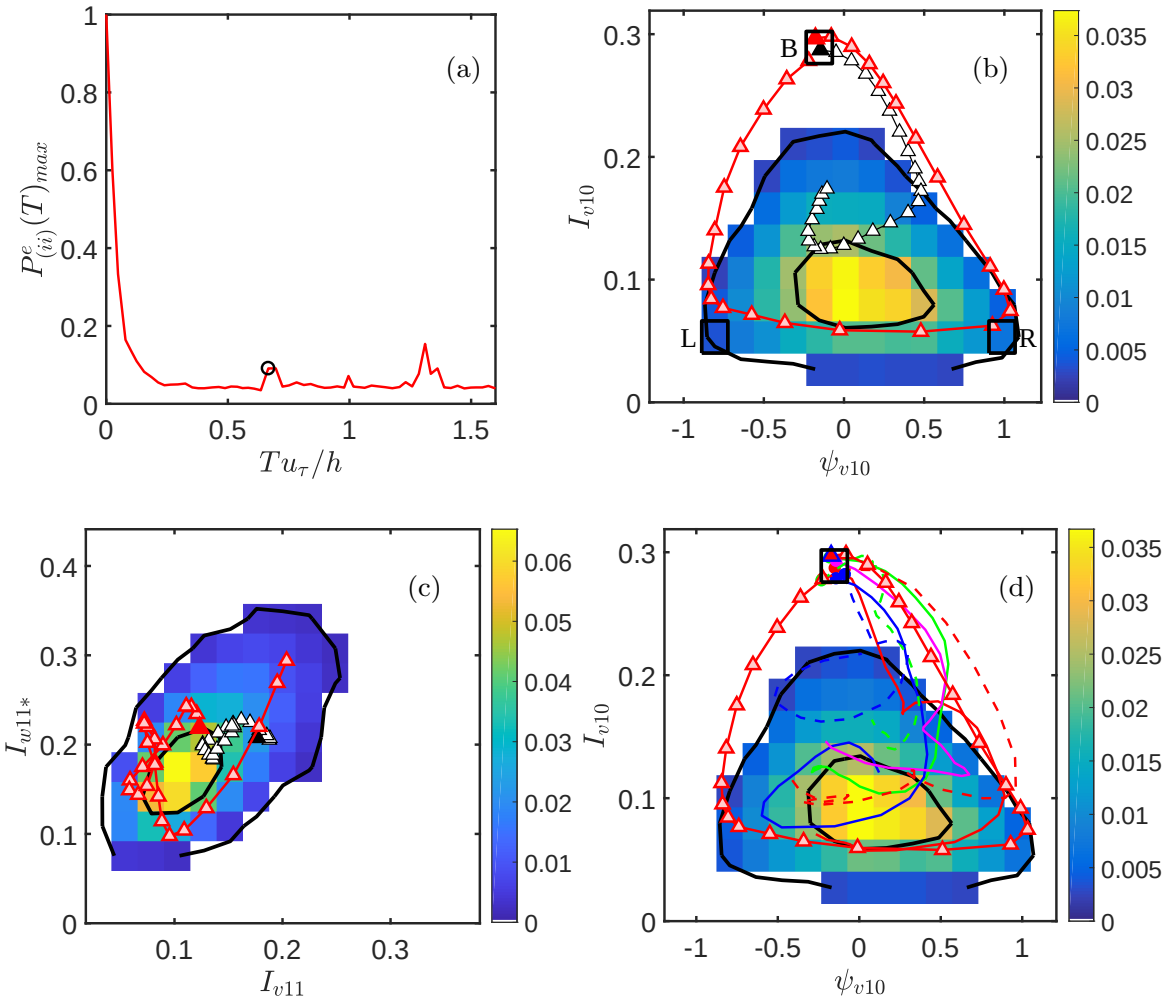


图10：（a）(ψ_{v10}，I_{v10})平面中轨迹的复现检验。解释见正文。（b）黑色符号表示穿过最可能复现单元的平均轨迹，对应于（a）中实心圆标示的周期。红色符号表示穿过该单元的唯一复现轨道，因此造成了（a）中的局部最大值。（c）如（b）所示，为蜿蜒涡辊的(I_{v11}，I_{w11*})平面。（d）如（b）所示，但将所有非复现轨迹绘制为简单线段，每条线段均以一个实心圆开始。

因此，哪个单元再次出现的概率最高。图10(b)中用“B”（代表猝发）标记了这一点，结果发现它是一个极端高振幅事件，超过了迄今为止用作分布实际边界的95%阈值。在本节讨论的轨迹中，实心符号标记了 $t = 0$处的位置，部分轨迹上的空心三角形则以$t^* = 0.025$为等间距排列。

图10(b)中还标出了另外两个单元，分别对应三角形分布的右角（“R”）和左角（“L”）。本节余下部分将沿用这一命名方式，但会适当调整单元的位置。沿上行阶段（R $\rightarrow$ B）、下行阶段（B

$\rightarrow$ L）和底部阶段（L $\rightarrow$ R）穿过三角形外围的轨迹，将分别称为增长、衰减和恢复轨迹。增长阶段和衰减阶段构成猝发（Jim´enez，2013）。这两个阶段的上半部分具有确定性，可以通过线性方法预测（Jim´enez，2015），但线性化爆发不会重复出现。对于底部的恢复阶段，目前没有明显的理论解释；然而，若要用猝发来解释自持湍流，就必须有这一阶段。本节的大部分内容都用于分析恢复过程。

在我们的 5×10^4 个快照中，只有八条轨迹穿过图10中的极端 B。它们大多不会复现，图10(b)中的黑色空心三角形连线描绘了复现周期内的平均条件轨迹。与大多数轨迹一样，它趋近于分布的高概率核心区。不过，可以检验单条轨迹；图10(b)中的红色三角形连线显示了导致图10(a)中峰值的那条轨迹。以这条轨道为中心，其增长、衰减阶段和恢复阶段分别持续约 $T^*=0.25$，0。25和0.16，总复现时间为 $T^*\approx0.66$，如图10(a)所示。其两个猝发阶段的总长度$T^*\approx0.5$也与Jim´enez（2015）中该流动的爆发相关性的宽度一致。

尽管复现轨迹在图10(b)的平面上近似闭合，但纳入更多变量后，其复现性会减弱。例如，图10(c)在涡辊的(I_{v11}，I_{w11*})平面上绘出了相同的轨迹。与之前一样，复现轨迹以红色三角形表示。它在(I_{v11}，I_{w11*})分布的高概率核心区附近徘徊一段时间，并在(ψ_{v10}，I_{v10})猝发的增长阶段加入逆时针相干环流。平均轨迹的黑色三角形再次与复现轨迹大不相同，而且从未加入相干环流。

然而，复现轨迹与其他穿过 B 的轨迹之间的发散主要是长时间现象。这一点可以从图10(d)中看出：该图与图10(b)等效，但绘出了所有经过 B 的单条轨迹。复现轨道仍以空心红色三角形表示，而其他轨迹则以不同颜色的线条表示，不带符号，且不按特定顺序排列。图中所有轨迹都从同一个单元出发，并在一段时间内表现相似。只有当它们衰减到初始 I_{v10} 的大约一半后，才会偏向高概率核心区。未展示的(I_{v11}，I_{w11*})平面中的类似图也呈现出相同趋势，不过由于轨迹不再从同一个单元出发，情况稍微复杂一些。复现轨道的特殊之处在于，它起初对应一个相对较弱且正在衰减的涡辊，直到轨道末端才逐渐增强。这可能就是其(ψ_{v10}，I_{v10})投影能够在相对较长的时间内不受干扰地继续演化的原因。

近似复发轨道包含一次罕见的极端事件，这表明它可能与流统计乃至流动的演化都没有太大关系。它的价值在于包含一个恢复阶段，该阶段沿着“错误”的方向穿过参数空间的下边界，这表明存在相干恢复连接，并提示了研究这些连接的方法。问题在于，是否还存在其他轨迹沿相同方向穿过分布的下边界，即使它们没有沿着完整的 (ψ_{v10},I_{v10}) 平面绕行复现轨道。

图 11 和图 12 回答了这个问题。图11(a,b)相当于图5(a)中的因果分布，但应用于不同延迟间隔下的 R 和 L 角单元。尽管我们在图6(a)中看到，分布的下缘是系统漂移散布较大的区域，但图11(a)显示，随着延迟增加，流动会从 R 稳定地传播到 L，并且只会缓慢地溢入分布的高概率核心。图11(b)中 L 单元的原因也有同样的情况。若对分布下缘中央部分的一个单元绘制类似图形，则漂移会更慢，散布也更大（未显示），这表明图11(a,b)中的传播可解释为一种直接连接

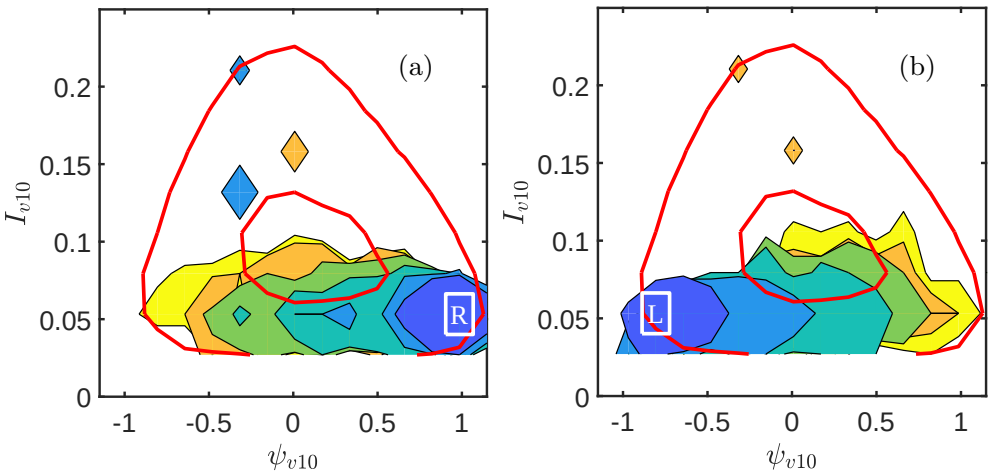


图11：几个延迟区间内原因与结果的概率分布，如图5(a,b)所示。(a) 以不变密度分布右下角标记为R的单元为条件的效应。从蓝色到黄色，$T^* = 0.025$(0.025)0.15。(b) 同(a)，表示导致左下角标记为L的单元的原因。

在R与L之间绕过概率分布中某些中间状态的直接连接。

图12(a-c)对此作了进一步分析。每个面板分别表示猝发的一个阶段，该阶段沿着(ψ_{v10}, I_{v10})平面中分布的外围移动。例如，图12(a)表示增长段，从标记为L的单元移动到标记为B的单元（注意，后者的位置选得比图10中低得多，以使其落在95%概率等值线内）。系统需要 $T^* \approx 0.25$ 才能从一个单元移动到另一个单元；灰线表示经过L且时间为 $t = 0$的 O(500)条轨迹。其中，只有以蓝色绘出的六条轨迹也在区间 $T^* = 0.2$–0.3内经过B。图12(b,c)分别以类似方式绘出了猝发的衰减阶段和恢复阶段。这三个阶段中的轨迹彼此并非连续。例如，有一条轨迹依次连接单元L、B和R，有三条轨迹连接R、L和B，而没有轨迹连接B、R和L。此平面中唯一近似构成完整周期的轨迹是图10中的那条。

图12(d-f)分别展示了沿图12(a-c)中蓝色轨迹保留的谐波重构出的流场平均演化，时间从上至下递增。由于该问题在 x 和 z方向上均匀，不同轨迹中的流动在进行平均前必须对齐到同一原点。具体做法是在 $t = 0$ 将每种情况平移，使流向速度中最深的低速扰动位于显示框中心。为便于视觉追踪，随后以速度 $U_{ad}^+ = 8$推动参考系，使结构在近壁处近似保持平稳。

剪切作用使 v结构向前倾斜，这一点在猝发的增长段和衰减段中十分明显（图12d、e）。图12(f)中的恢复阶段较难解读，部分原因是其整体强度远弱于另外两种情况；但最明显的差异是，增长阶段和衰减阶段主要由近壁处的高流向速度结构主导，而恢复阶段的高速区域则主要位于流动内部更远处。近壁层中只有一条微弱且不连续的低速条带。由于图12(d-f)中的结构是相对于长期平均速度剖面定义的，这种组织结构上的差异意味着盒平均

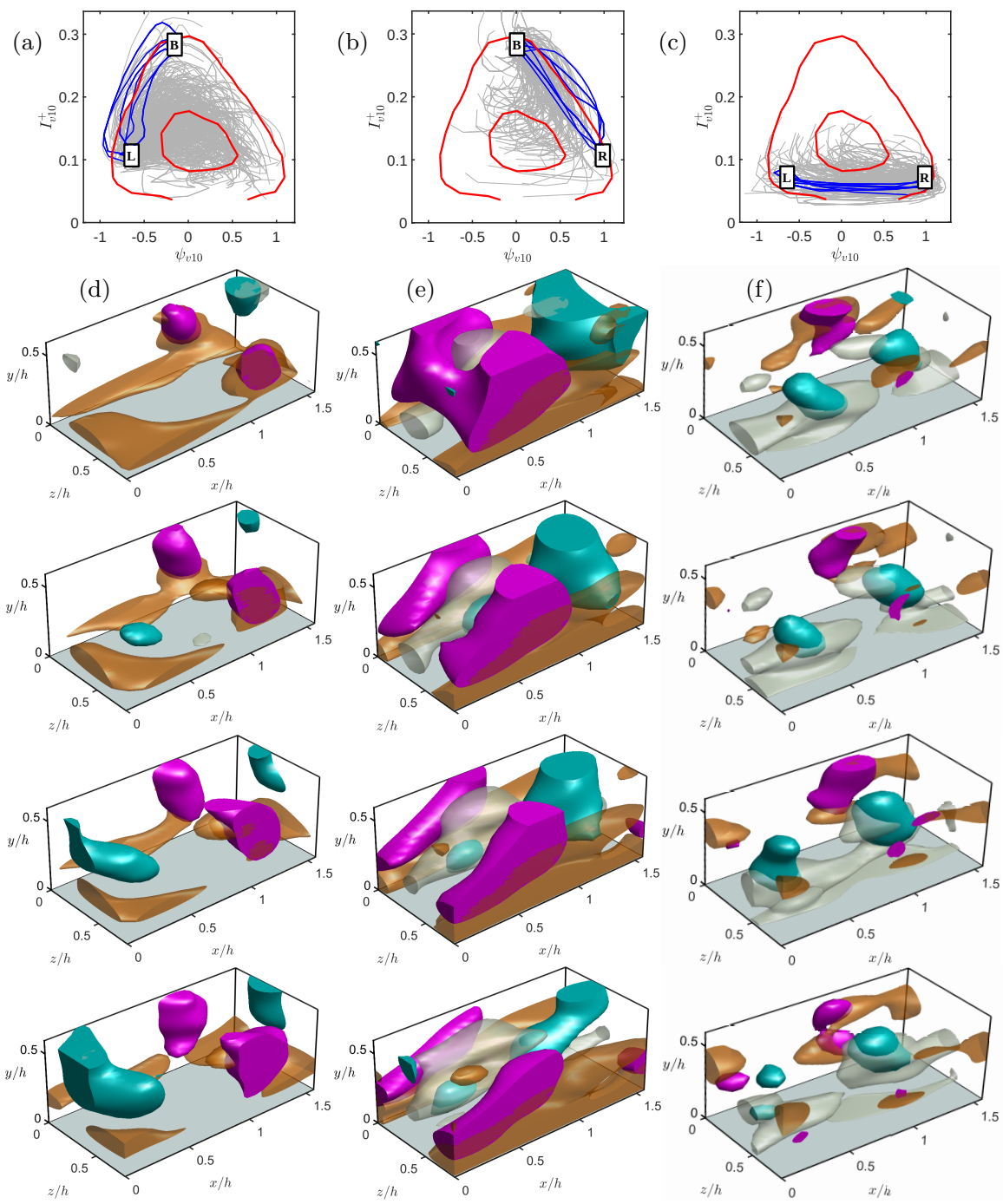


图12：(a-c) 灰线表示在 $t = 0$ 处穿过因果单元的相位轨迹。蓝线表示在给定时间间隔范围内也穿过效应单元的轨迹。(a) 猝发的增长阶段，从 L $\rightarrow$B，位于 $T^* = 0.2$–0.3。(b) 衰减阶段，从 B $\rightarrow$ R，位于 $T^* = 0.2$–0.3。(c) 恢复阶段，从 R$\rightarrow$ L，位于 $T^* = 0.15$ – 0.175。(d-f) 沿 (a-c) 中蓝色轨迹的流动平均演化，分别由保留谐波重构。流动方向为从左至右，时间方向为从上至下。半透明橙色等值面，$u^+ = 0.7$；半透明灰色，$u^+ = -0.7$；青色，$v^+ = 0.4$；紫色，$v^+ = -0.4$。(d-e) $t^* = 0.075$(0.05)0.225。(f) $t^* = 0$(0.05)0.15，且 $v^+ = \pm 0.3$。22

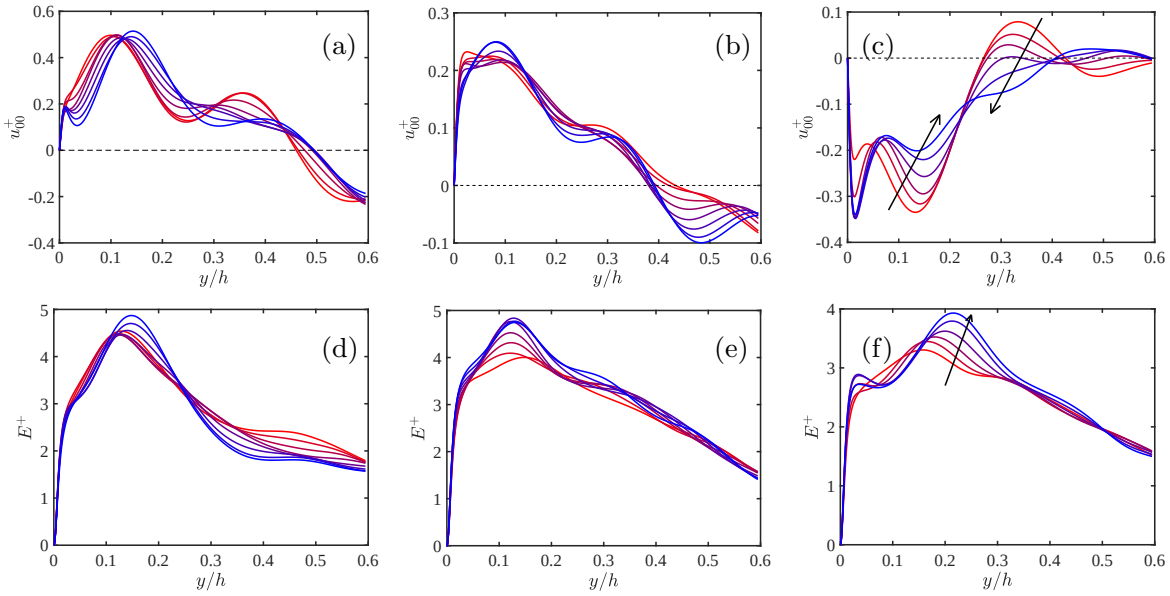


图 13：图12中以蓝色标记的轨迹对应的盒平均速度剖面。(a-c) 平均速度， $\widetilde{u}_{00}$。(d-f) 保留谐波的动能。(a,d) 增长阶段。(b,e) 衰减阶段。(c,f) 恢复。时间从红色到蓝色递增，相邻曲线之间间隔为 $t^* = 0.025$ 。

各阶段的瞬时速度剖面各不相同。

图 13(a,b)证实了这一点，图中显示猝发的特征是壁面附近速度较高且剖面陡峭。图 13(c)显示，恢复发生在壁面附近速度较低的区域，剪切则向远离壁面的方向偏移。流动进入恢复阶段时， $y/h \approx 0.2$ 处的速度梯度很陡；随着恢复过程推进，该梯度逐渐减小（从红色到蓝色）。图 13(d-f)显示了相同时刻脉动能的演变。在猝发期间，如图 13(d,e)所示，脉动相对集中在壁面附近（$y/h \approx 0.12$），能量峰一直延伸至壁面。在恢复阶段，如图 13(f)所示，分离剪切层所在位置出现一个新的峰值并逐渐增强，同时在壁面处形成一个新的次峰（$y/h \approx 0.22$）。

请注意，图12(d-f)的大多数帧中的流向速度扰动都短小且不连续，这与 Jim´enez（2022）的最新证据一致：长条带与壁面湍流再生循环并无直接关联。

猝发的恢复依赖于壁面附近的低剪切区域，这一结论与一种直觉看法并不一致：既然剪切是湍流能量的最终来源，那么更高的剪切理应是湍流活动增强的先决条件。事实上，湍流强度与剪切之间存在相关性，这一点早已为人所知（Marusic 等，2010年；Jim´enez，2012年；Mathis 等，2013年），但通常所隐含的模型认为，湍流强度会演变至与剪切达到平衡。我们的讨论表明，因果关系恰恰相反（图 9），剪切是由脉动产生的雷诺应力所形成的。事实上，由于我们的通道中质量通量恒定，壁面附近剪切较低意味着更高处的剪切较大。我们先前的讨论表明，猝发衰减会使壁面处的剪切略微减弱，进而使远离壁面的速度剖面变陡。正是这一陡峭的离壁剖面触发了新一轮猝发，也就是

图12(f)下游部分中，蓝色/洋红色结构向远离壁面的方向发展。Flores 和 Jim´enez（2010年）表明，在诸如本文这类小盒子模拟中，应力波会朝向壁面传播，也会从壁面向外传播，其壁法向速度约为 u_τ。仅凭这类运动学观测，很难判断这两个方向中哪一个是主要的因果方向；但上述讨论表明，至少向下传播的波具有因果作用。这与先前的报告一致：壁面受限流动中对数层的结构相对独立于壁面的具体细节，因此壁面并非因果作用的首要来源，至少不是唯一来源（Townsend，1976年；Mizuno 和 Jim´enez，2013年；Kwon 和 Jim´enez，2021年）。

5 干预实验

前几节的分析为我们提供了有力线索，说明壁面受限流动中哪些变量会协同演化，以及如何从相空间吸引子内部的因果关系角度理解这种演化。不过，引言中提出的第二个问题——这些信息是否具有实际价值——通常需要我们走出吸引子，而这只能通过更传统的干预实验或理论模型来回答。严格来说，这超出了本文的范围；本文旨在提出一种方法论，并举例说明如何利用它来启发更传统的研究。但在本节中，我们将以图12的讨论为基础，举例说明这类研究可以如何开展。

上述讨论的主要结论是，平均速度剖面中某种特定的弱剪切构型是猝发恢复的必要条件。这并非新观点：关于如何控制壁湍流，最古老的理论或许就是基于剪切与湍流强度之间的双向相互作用（Malkus，1956）。此外，人们也知道，强迫速度剖面在局部变得更陡或更平缓，会导致与局部剪切相关的平衡强度（Tuerke & Jim´enez，2013）；许多描述湍流循环的低阶模型也包含一个代表平均速度的变量（Waleffe，1997）。

然而，Malkus（1956）模型最初的线性版本已被 Reynolds & Tiederman（1967）推翻。他们发现，湍流通道中完全没有该模型所提出的速度剖面临界不稳定性的迹象。Waleffe（1997）的分析虽然颇具启发性，因为强壁面剪切会抑制条带的不稳定性，但仅适用于临界湍流低雷诺数流动中的定常行进波。同样，Tuerke & Jim´enez（2013）讨论的是长期流动平均值，目前尚不清楚这些结果是否与间歇性猝发循环的短期行为有关。我们要检验的假设是：一种反馈循环能否解释至少部分决定爆发频率和振幅的机制；在这种循环中，湍流脉动会改变平均剖面，而平均剖面又会控制湍流脉动。

我们通过对联系脉动与平均剖面的演化方程进行平滑处理来实现这一点。这里，平均剖面定义为盒平均流向速度脉动相对于长期平均速度剖面的偏差，$\widetilde{u}_{00}(y)$。在常规通道中，它满足：

$$\partial_t \widetilde{u}_{00} = R - P + \partial_{yy}\widetilde{u}_{00}, \tag{16}$$

其中，$R = -\partial_y(\widetilde{uv})_{00}$ 是瞬时平均雷诺应力梯度，而压力梯度P 由附加的通量守恒条件确定，

$$\int_0^{2h} \widetilde{u}_{00}\,\mathrm{d}y = 0 \tag{17}$$

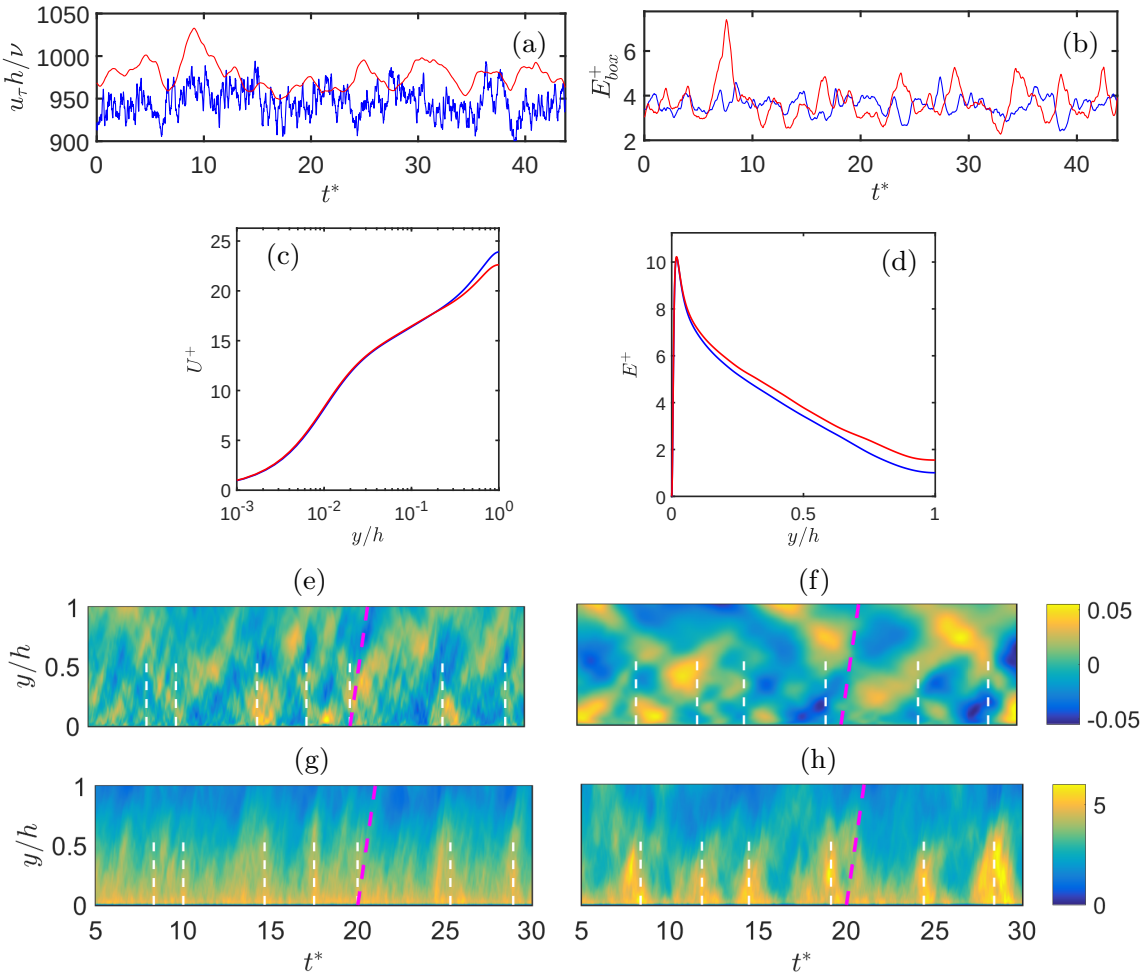


图14：（a）时间平滑实验和自然实验的瞬时摩擦速度（16–19）。（b）与（a）相同，展示盒平均脉动动能 $E = u'^2 + v'^2 + w'^2$，以其长时间平均值为参照测量。（c）平均速度剖面。（d）平均动能。所有情况中：蓝色表示自然通道；红色表示 $\tau^* = 2.27$。（e–h）平均剖面随时间的演化。（e、f）相对于其长时间平均值的平均流向速度脉动。（g、h）动能。（e、g）自然通道。（f、h）时间平滑实验。

在我们的实验中，我们用以下内容替换 °eq:RQ1

$$\partial_t \widetilde{u}_{00} = Q - P + \partial_{yy} \widetilde{u}_{00}, \tag{18}$$

其中

$$\partial_t Q = (R - Q)/\tau, \tag{19}$$

经过一段初始条件的影响呈指数衰减的瞬态后，可通过以下方式求解

$$Q(y,t) = \tau^{-1} \int_0^t \exp[(\xi - t)/\tau]\, R(y,\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{20}$$

因此，修正后的右端项 Q 是 R 的平滑版本，平滑时间为 τ。沿通道对 R 或 Q 积分，可视为一种必须由压力梯度补偿的体积力；但从其表达式很容易看出，对于不透水壁面，$\int R\mathrm{d}y = 0$，而初始瞬态过后，Q 也同样如此。

图14展示了实验的一些结果。图14(a)展示了自然通道和平滑通道的摩擦雷诺数随时间的变化。平滑情形下，摩擦雷诺数仅略微增加，从 $\langle h\rangle^+ = 950$ 升至975，不过其时间振荡变得缓慢得多。更值得关注的是图14(b)，它展示了盒平均动能的振荡。平滑情形下的振荡幅度稍大，频率则显著降低且更加规律。根据下文介绍的方法进行粗略计数后，得到自然情形下猝发之间的平均间隔为 $\Delta t^* \approx 3.9$，平滑情形下则为 $\Delta t^* \approx 5.2$。这两个间隔都长于Flores和Jim´enez（2010）报告的结果；他们根据积分雷诺应力的时间谱得到 $\Delta t^* \approx 2$，这很可能是因为他们的方法对比本文方法更微弱的振荡也较为敏感。

对积分速度剖面的影响很小。图14(c)显示了平均速度，揭示主要影响是在 $y/h \approx 0.3$ 以上减弱尾流分量；但这里也正是该通道开始受到数值计算域限制的高度，而且无论如何，该处的剖面都会偏离自然流动的剖面。图14(d)显示，动能脉动也略有增强，这与图14(b)所示的情况相符。

图14(e-h)展示了各剖面的时间演化，并提供了更多信息。图14(e,f)显示了平均速度剖面相对于其长时间平均值的偏差 $\widetilde{u}_{00}$。这些图像中的每个竖直截面都是一个瞬时盒平均剖面。蓝色区域表示速度比通常更慢，黄色区域则表示速度更快。应将它们与图13(a-c)中的瞬时剖面进行比较，尽管本图中的流动未经任何滤波或条件筛选。图14(e,g)对应自然流动，图14(f,h)对应时间平滑后的流动。图14(e-h)中的白色竖直虚线标示了动能爆发发生的时刻，其演化见图14(g,h)。为检测这些爆发，将 $y/h \in$ (0,0.4) 内的动能积分，并将积分能量超过用于划定时间序列顶部15%部分的阈值的区间定义为爆发。

最值得关注的差异，是图14(e、f)中的平均速度之间的差异。图14(e)所示自然情形下的演变显然比图14(f)所示时间平滑情形更为复杂，而且平均速度与白色虚线标出的爆发位置之间没有明显的相关性。图14(f)所示的平滑情形则恰恰相反：平均剖面沿一系列对角波状起伏，而标记爆发的线条即使肉眼观察，也与壁面附近以蓝色区域标出的低速区间相对应。图中四个面板里的倾斜红线标示摩擦速度，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = u_\tau$；已知它是强雷诺应力结构的垂直平流速度（Flores & Jim´enez, 2010; Lozano-Dur´an & Jim´enez, 2014）。这与图14(g、h)能量演化图中上升和下降图样的倾斜角一致。它也大致描述了图14(e)中速度剖面精细结构的垂直平流速度，这很可能是因为平均剖面受雷诺应力通过 ◦eq:RQ1控制。另一方面，在图14(f)中，这种影响被打破：由于 ◦eq:RQ4的平滑效应，雷诺应力仅间接作用于平均剖面，垂直平流也慢得多。这强烈表明，图14(f)与图14(h)之间的任何相关性都反映了平均速度对爆发的因果效应，而非相反。

图15直接检验了这一点。该图展示了以检测到的能量爆发时刻为中心，对不同物理量进行条件平均后得到的时间演化。图15(a)展示了平均剖面的条件演化，并清楚地显示了低速时段

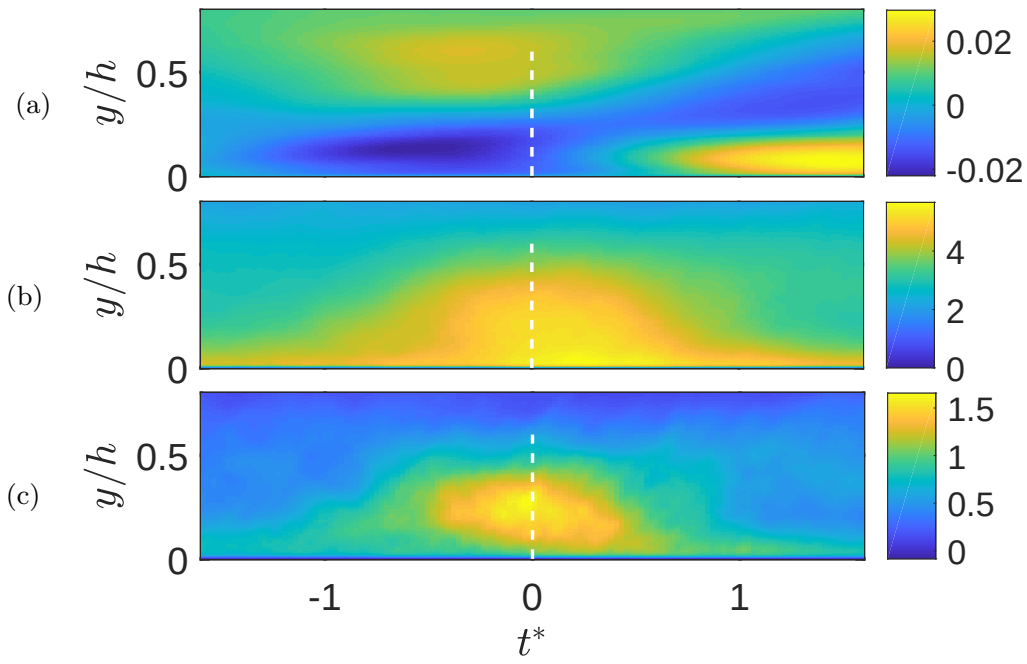


图15：平滑实验中，以动能猝发为条件的盒平均剖面的时间演化。(a) 平均流向速度脉动，同图14(f)。(b) 动能。此为条件场。(c) 切向雷诺应力，$-(\widetilde{uv})^{+}_{00}$。

在猝发发生前的壁面剖面，随后被猝发产生的雷诺应力所形成的更陡壁面剖面取代，如图15(b)所示。条件雷诺应力显示于图15(c)，表明这是由猝发本身引起的局部效应。尝试对图15(e、g)中的自然流动重复这一过程未能成功，原因无疑部分在于流场结构更为复杂，使得爆发更难识别。事实上，在这种情况下，即使像图15(b)那样根据突发位置对猝发进行条件筛选，也未能成功。

6 结论

本文可分为两部分。第一部分截至第 3 节，我们将动力系统理论中的佩龙–弗罗贝尼乌斯算子（PFO）应用于湍流通道流在相空间划分上的演化的概率描述。我们指出，实现这一点的主要困难在于收集足够的数据以填充算子矩阵；为此，我们将研究范围限制在相空间的二维投影，从而绕过了这一困难。这引出了如何选择最佳变量对的问题，也促使我们开发用于评估特定表征质量的简单指标。我们提出了若干此类指标，并说明它们可以从吸引子内的因果关系和相干性角度加以解释。我们认为，后一限制使我们能够根据流动历史得出有关因果关系和信息通量的结论，而无需进行干预实验。

特别是，我们表明，可以利用这些指标区分相关性与相干性，并将例如具有自身动力学的较弱结构（如

波状涡辊和条带）与更强、相关性更高且不具备自身动力学的结构（如流向均匀条带和涡卷）区分开来。

我们在§3.2中展示，这些指标如何帮助我们区分较不理想的变量对与更可能有助于构建连贯物理模型的变量对。在所分析的案例中，从630种可能性中找到了两个有前景的变量对。第一个是壁法向速度的强度和倾斜角，Jim´enez（2015）已用它来表示近似线性的 Orr（1907）猝发；第二个则是较为新颖的倾斜波状涡旋。

本文其余部分将运用第一部分所推导的技术来分析 Orr（1907）猝发，重点关注尚未得到充分理解的恢复过程，即猝发衰减后重新启动的过程。与以往试图通过大规模搜索在不同分析方案中进行选择的研究（例如 Jim´enez，2018，2020）一样，本研究主要提出了一些机制，这些机制仍需通过更经典的方法加以验证，主要原因是研究最初仅限于吸引子上的动力学。在本案例中，PFO 指引我们选择相空间轨迹，这些轨迹在已知的时间区间内连接有意义的流动构型，其中也包括描述恢复过程的轨迹。至少在我们这个相对较小的计算盒中，对这些连接进行条件平均后发现，一个有些违背直觉的结果是：再生的关键因素是在壁面附近形成低剪切区域。新的猝发由其上方的分离剪切层触发。它们的雷诺应力将剪切带回壁面；在旧猝发衰减并再次使剪切层分离之前，不会出现新的猝发。这个过程是否适用于包含多个猝发的更大计算盒，尚不得而知。

为将结论推广到吸引子之外，我们最后进行了一项简单的计算实验，在实验中放宽了猝发对平均剪切的控制。因此，平均剖面的行为发生了变化，但低壁面剪切与爆发启动之间的关联仍得以维持。

本研究得到欧洲研究委员会 Caust 项目 ERC-AdG- 101018287 的资助。

参考文献

Adrian, R. J. 2007 壁湍流中的发夹涡组织。《流体物理》**19**, 041301.del Álamo, J. C. & Jiménez, J. 2006 湍流通道中的线性能量放大。《流体力学杂志》**559**, 205–213.Angrist, J. D., Imbens, G. W. & Rubin, D. B. 1996 利用工具变量识别因果效应。《美国统计协会杂志》**91**, 444–455.Beck, C. & Schlögl, F. 1993 混沌系统的热力学。剑桥大学出版社。Berkooz, G., Holmes, P. & Lumley, J. L. 1993 本征正交分解在湍流分析中的应用。《流体力学年度评论》**25**, 539–575.Butler, K. M. & Farrell, B. F. 1993 壁面约束剪切流中的最优扰动与条带间距。《流体物理 *A*》**5**, 774–777.Encinar, M. P. & Jiménez, J. 2020 湍流通道流中线性化涡旋的动量传递。《流体力学杂志》**895**, A23.

Farrell, B. F. & Ioannou, P. J. 1996 广义稳定性理论。第二部分：非自治算子。《大气科学杂志》53, 2041–2053。Feller, W. 1971 概率论及其应用导论，第2版，，第2卷。威利出版社。Flores, O. & Jiménez, J. 2010 对数层中最小流动单元的层级结构。《流体物理》22, 071704。Froyland, G. 2005 统计最优近似不变集。《物理学D辑》200, 205–219。Granger, C. W. J. 1969 利用计量经济模型和互谱方法研究因果关系。《计量经济学》37, 424–438。Hamilton, J. M., Kim, J. & Waleffe, F. 1995 近壁湍流结构的再生机制。《流体力学杂志》287, 317–348。Jiménez, J. 1994论近壁湍流的结构与控制。《流体物理》6, 944–953。Jiménez, J. 2012壁面湍流中的级联。《流体力学年度评论》44, 27–45。Jiménez, J. 2013壁面湍流有多线性?《流体物理》25, 110814。Jiménez, J. 2015 直接检测湍流中的线性化猝发。《流体物理》27, 065102。Jiménez, J. 2018 壁面湍流中的相干结构。《流体力学杂志》842, P1。Jiménez, J. 2018 机器辅助湍流理论。《流体力学杂志》854, R1。Jiménez, J. 2020蒙特卡罗科学。《湍流杂志》21, 544–566。Jiménez, J. 2022 壁面湍流的条带不一定很长。《流体力学杂志》945, R3。Kawahara, G., Uhlmann, M. & van Veen, L. 2012 简单不变解在湍流中的重要性。《流体力学年度评论》44, 203–225。Kim, J., Moin, P. & Moser, R. D. 1987 低雷诺数下充分发展通道流的湍流统计量。《流体力学杂志》177, 133–166。Kwon, Y. & Jiménez, J. 2021 孤立对数层。《流体力学杂志》916, A35。Lancaster, P. 1969 矩阵理论。学术出版社。Lozano-Durán, A. & Jiménez, J. 2014 湍流通道中相干结构的时间分辨演化：涡与级联的表征。《流体力学杂志》759, 432–471。Malkus, W. V. R. 1956 湍流剪切流理论纲要。《流体力学杂志》1, 521–539。Marusic, I., Mathis, R. & Hutchins, N. 2010 壁面湍流的预测模型。《科学》329, 193–196。Mathis, R., Marusic, I., Chernyshenko, S. I. & Hutchins, N. 2013根据外区输入估计壁面剪切应力脉动。《流体力学杂志》715, 163–180。McKeon, B. J. & Sharma, A. S. 2010 湍流管流的临界层框架。《流体力学杂志》658, 336–382。Mizuno, Y. & Jiménez, J. 2013无壁湍流。《流体力学杂志》723, 429–455。

Nikulin, M. S. 2001Hellinger距离。载于《数学百科全书》。EMS出版社，柏林。Orr, W. M. 1907 理想液体和黏性液体稳态运动的稳定性或不稳定性。第一部分：理想液体。《爱尔兰皇家科学院学报》A辑27，9–68。Pearl, J. 2009 统计学中的因果推断：概述。《统计调查》3，95–146。Pearson, K. 1901关于空间中点系的最佳拟合直线和平面。《哲学杂志》6，559–572。Reynolds, W. C. & Tiederman, W. G. 1967 湍流通道流的稳定性及其在Malkus理论中的应用。《流体力学杂志》27，253–272。Russell, B. 1912 关于因果概念。《亚里士多德学会学报》13，1–26。Schmid, P. J. 2010 数值数据和实验数据的动态模态分解。《流体力学杂志》656，5–28。Schoppa, W. & Hussain, F. 2002 近壁湍流中的相干结构生成。《流体力学杂志》453，57–108。Townsend, A. A. 1976 湍流剪切流的结构。剑桥大学出版社。Tuerke, F. & Jiménez, J. 2013 具有给定速度剖面的湍流通道模拟。《流体力学杂志》723，587–603。Ulam, S. M. 1964 现代数学中的问题。Interscience出版社。

Waleffe, F. 1997关于剪切流中的自维持过程。《流体物理》9, 883–900.

A 非零展向波数模态

非零展向波数的模态需要特殊处理。对于 $k_z = 0$，变量 a表示为

$$a(x) = \sum_{\alpha} \widetilde{a}_{\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} + \text{c.c.}, \tag{21}$$

其中“c.c.”表示复共轭。平移 $x \to x + \Delta x$ 在$\widetilde{a}_{\alpha} \to \widetilde{a}_{\alpha}$exp(i$\alpha\Delta x$)中表现为一个相位，而正文中使用的变量被选为对这类平移保持不变。对于依赖于 z的模态，展开式变为，

$$a(x,z) = \sum_{\alpha,\beta} \widetilde{a}_{\alpha,+\beta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x+\beta z)} + \widetilde{a}_{\alpha,-\beta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha x-\beta z)} + \text{c.c.}. \tag{22}$$

每个（α,β）模态都有两个相关联的独立系数，它们在展向平移下的变换方式不同。物理上相关的展开式为

$$a(x,z) = \sqrt{2} \sum_{\alpha,\beta} \left[\widetilde{a}^{+}_{\alpha,\beta} \cos(\beta z) + \mathrm{i}\widetilde{a}^{-}_{\alpha,\beta} \sin(\beta z) \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x} + \text{c.c.}, \tag{23}$$

其中 $\widetilde{a}^{\pm}_{\alpha\ ,\beta} = \widetilde{a}_{\alpha,+\beta} \pm \widetilde{a}_{\alpha,-\beta}$。我们可以选择在任意方便的展向位置观测流动。在 °eq:11mode3中保留余弦项，相当于在 $z = 0$处进行观测；保留正弦项则相当于在 $\beta z = \pi/2$处进行观测，但这两者都不是物理观测。新的系数 $\widehat{a}^{\pm}_{\alpha\ ,\beta}$也是相互独立的傅里叶系数，并在全文中使用。

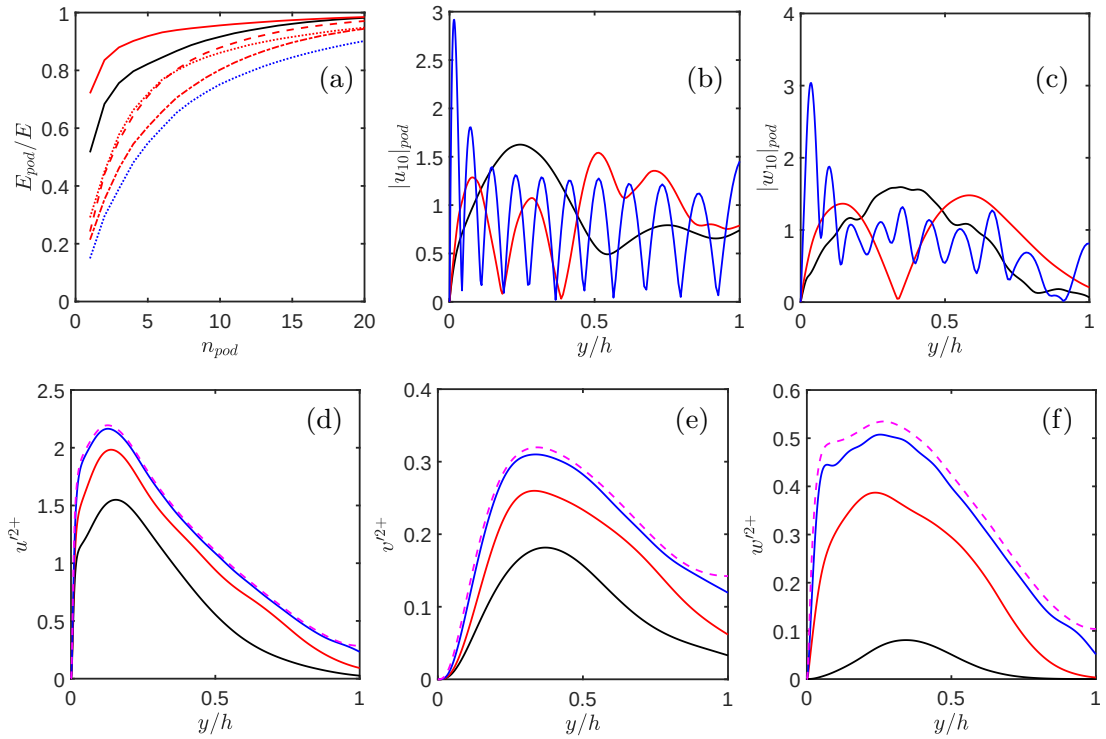


图16：（a）前 n_{pod} 个模态中不同谐波的能量占比。黑色实线，[00] 模态；红色实线，[10]；红色虚线，[10]；红色点划线，[20]；红色点线，[11]；蓝色点线，[21]。（b、c）[10] 谐波典型 POD 模态的壁法向强度分布。黑色，$n_{pod}=1$；红色，$n_{pod}=5$；蓝色，$n_{pod}=20$。（b）u_{10}。（c）w_{01}。（d-f）所有保留谐波的强度分布，采用不同数量的 POD 模态进行近似。颜色同（b）。洋红色虚线表示真实强度分布。（d）u。（e）v。（f）w。

B 本征正交滤波

Berkooz 等人于1993年将本征正交分解（POD）引入流体力学，作为 Pearson（1901）提出的较早的主成分分析近似方法的一种变体。它旨在将向量场 $\boldsymbol{u}$ 表示为 POD 模态 $\boldsymbol{\phi}_{(k)}$的展开，

$$\boldsymbol{u}_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \widehat{u}_k \boldsymbol{\phi}_{(k)}, \tag{24}$$

使得 $\boldsymbol{u}_{(n)}$ 的两点协方差尽可能逼近真实向量场的协方差，即使展开阶数远小于 $\boldsymbol{u}$ 中的自由度数量。如第 §2 节和第 §3 节所述，POD 模态并不是将动力系统约化为少数变量的理想选择，因为它们最小化的是整个吸引子上的误差积分，而不是像本文所关注的那样，区分不同的相空间邻域。不过，它们可以利用数量有所减少的空间模态来逼近流场。

显然，　　我们选择在（x，z）平面上用九个傅里叶模态来表示流动，这是一种极端的　　c

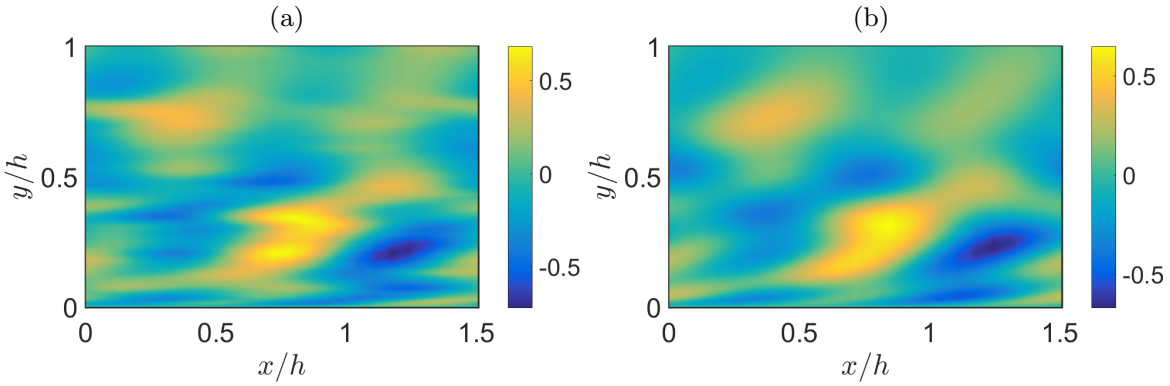


图17：POD滤波对 w 场流向截面影响的示例。(a) 使用保留的九个傅里叶模态，并在 y中采用全分辨率进行重构。(b) 在y中使用二十个POD。

降低该平面中的数值分辨率，但没有一种简单的等效方法可以降低非均匀方向 y上的分辨率。其结果是形成了一个强烈的各向异性流场，其中出现了由壁面平行分辨率无法充分支持的伪薄平行于壁面的层。POD 模态提供了一个有用的基，可在统计意义上平衡分辨率。事实上，傅里叶模态就是均匀方向上的POD 模态，例如 x 和 z；我们在图2中看到，少数保留模态占据了相当大一部分动能（本附录中提到的大多数数学性质均取自Berkooz *et al.*，1993年，不过下文将不再对此加以说明）。通过展开各个傅里叶模态，可以将POD分析扩展到 y；图16(a)显示了每个傅里叶模态的总能量中包含在其前 n 个POD 模态内的比例。前几个模态不能很好地表示能量，但大约二十个模态即可涵盖其中的大部分。由于 ˚eq:POD1中的POD 模态是协方差矩阵的特征向量，连续的特征向量包含数量不断增加的“波”，如图16(b,c)中的示例所示。笼统地说，上述二十个模态相当于十个点的壁法向分辨率，这对于壁面平行傅里叶模态的数量而言是一个合理的折中。图16(d-f)表明，该分辨率足以涵盖保留的傅里叶近似的大部分能量剖面。

要获得一致的近似，需要注意几点。首先，展开 ˚eq:POD1 优化的是在数值网格的配点节点上定义的 L_2 范数意义下对流场的近似，而采用积分范数 $\int |\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}y$ 在物理上更为合理。为此，需要将流场乘以网格间距的平方根进行缩放，并在重构时撤销缩放。同样，尽管图16将模态显示为与各个速度分量相关联，但重要的是同时对三个速度分量计算 POD，并将它们串接成一个复合向量。这样可以使近似误差的总动能最小化，并确保重构场满足连续性等要求。

图17展示了采用前二十个 POD 对 w 场进行滤波的效果示例。本文中的大多数结果均取自经二十个 POD 模态滤波的流场。这些结果与未滤波变量所得结果几乎没有差异，区别在于前者的流场略显干净一些，例如图17(b)所示的流场。