arXiv:2301.08952v3 [hep-th] 5 Dec 2024

弦几何理论中的 T 对称性

Matsuo Sato[†1] 和 Taiki Tohshima[†2]

[†] 弘前大学理工学研究科数学与物理学系，日本青森县弘前市文京町 3，邮编 036-8561

摘要

弦几何理论是弦理论非微扰表述的候选理论之一。本文表明，经过维数约化的弦几何理论具有我们称为 T 对称性的性质。对于沿类空方向进行维数约化的情形，T 对称变换给出了 IIA 型与 IIB 微扰真空态之间的 T 对偶变换。对于沿弦几何时间 τ 方向进行维数约化的情形，T 对称变换独立于 T 对偶变换，并给出一种在微扰弦理论中无法观察到的对称性。

[1]电子邮箱：msato@hirosaki-u.ac.jp[2]电子邮箱：h20ms117@hirosaki-u.ac.jp

1 引言

微扰弦理论定义在各种微扰稳定的真空态上，这些真空态由对偶性连接。人们认为，所有微扰稳定的真空态都包含在弦理论的一种非微扰表述中，并由其对称性和对偶性相互连接。关于 T 对偶，[1, 2, 3], 双场论在 [4, 5, 6, 7]中被提出，并作为弦理论中仅包含无质量模且同时涵盖 IIA 型和 IIB 真空态的简化模型，得到了深入研究。然而，我们不仅应研究在这种简化模型中如何实现微扰稳定真空态之间的对偶性，也应研究在弦理论本身的非微扰形式中如何实现这些对偶性。

弦几何理论是弦理论非微扰表述的一种候选理论。由此可以导出 IIA 型、IIB、SO(32) I型、SO(32) 和 $E_8 \times E_8$ 杂化微扰弦理论在弯曲背景下的路径积分 [8, 9, 10, 11, 12]。也就是说，单一的弦几何理论包含这些微扰稳定的真空态。通过对弦几何理论进行一致截断，还可以得到 IIA 型、IIB、SO(32) I型、SO(32) 和 $E_8 \times E_8$ 杂化超引力 [13, 14]。也就是说，弦几何理论包含弦背景，而不像微扰弦理论那样将其视为外场。弦背景的动力学是该理论中场动力学的一部分。

本文研究弦几何理论中微扰稳定真空态之间如何实现对偶性。由此我们发现，IIA 型和 IIB 超引力之间的 T对偶，在降维弦几何理论中推广为我们称之为 T 对称性的对称性。

本文的组织结构如下。第 2 节简要回顾弦几何理论。第 3 节将说明，降维后的弦几何作用量具有 T 对称性，这是对微扰真空之间 T 对偶的一种自然推广。第 4 节总结并讨论我们的结果。

2 弦几何概述

弦流形是通过拼接弦模型空间中的开集构造的 E，其定义见 [8] ，总结如下。首先，一个坐标由弦几何时间张成 $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$ ，另一个坐标由超黎曼曲面 $\mathbf{\Sigma} \in \mathcal{M}$ 张成，其中 $\mathcal{M}$ 是黎曼曲面的模空间。在每个超黎曼曲面 $\mathbf{\Sigma}$上，都可以通过阿贝尔微分[15, 16]的积分实部，典范且唯一地定义全局时间。我们将此全局时间认定为 $\bar{\tau}$，并将 $\mathbf{\Sigma}$ 限制在一条 $\bar{\tau}$ 常数线上，从而得到 $\bar{\mathbf{\Sigma}}|_{\bar{\tau}}$。从 $\bar{\mathbf{\Sigma}}|_{\bar{\tau}}$ 到 $\mathbb{R}^{1,\,d-1}$ 的嵌入表示 $\mathbb{R}^{1}$中的$^{d-1}$超弦多体态，并由其他坐标 $\mathbf{X}\hat{}_{D_T}(\bar{\tau})$ 参数化，其中 $\hat{}\,D_T$表示除靶空间度规之外的所有背景场，包括 B 场、膨胀子和 R-R场。

这里，我们将弦态定义为等价类 $[\mathbf{\Sigma}, \mathbf{X}\hat{}_{D_T}(\bar{\tau} \simeq \pm\infty)\ \bar{\tau} \simeq \pm\infty]$，其等价关系为 $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{X}\hat{}_{D_T}(\bar{\tau} \simeq \pm\infty)\ \bar{\tau} \simeq \pm\infty) \sim (\mathbf{\Sigma}', \mathbf{X}'_{\hat{D}_T}(\bar{\tau} \simeq \pm\infty)\ \bar{\tau} \simeq \pm\infty)$，当且仅当 $\mathbf{\Sigma}|_{\bar{\tau}\simeq\pm\infty} = \mathbf{\Sigma}'|_{\bar{\tau}\simeq\pm\infty}$ 且 $\mathbf{X}\hat{}_{D_T}(\bar{\tau} \simeq \pm\infty) = \mathbf{X}'_{\hat{D}_T}(\bar{\tau} \simeq \pm\infty)$。弦模型空间 E定义为弦态的集合 $[\mathbf{E}, \mathbf{X}\hat{}_{D_T}(\bar{\tau})\ \bar{\tau}]$，其中考虑所有的 $\mathbf{\Sigma}$、 $\bar{\tau}$的所有取值，以及所有的 $\mathbf{X}\hat{}_{D_T}(\bar{\tau})$。$\mathbf{E}$ 是 $\mathbf{\Sigma}$ 上的超四重标架，其中 $\bar{}$表示世界面上超微分同胚和超维 Weyl 变换的一个代表。给定一个超黎曼曲面 $\mathbf{\Sigma}$，等价于给定一个模去超微分同胚和超维 Weyl 变换的超四重标架 $\mathbf{E}$。

两个弦态之间的接近程度由 $\bar{\tau}$ and how near $\mathbf{X}\hat{}_{D_T}(\bar{\tau})$ 的值的接近程度来定义。$[\mathbf{\Sigma}, \mathbf{X}\hat{}_{D_T s}(\bar{\tau}_s)\ \bar{\tau}_s]$ 的一个 ϵ-开邻域定义为

$$U([\bar{\mathbf{E}}, \mathbf{X}_{\hat{D}_T s}(\bar{\tau}_s), \bar{\tau}_s], \epsilon) := \left\{ [\bar{\mathbf{E}}, \mathbf{X}_{\hat{D}_T}(\bar{\tau}), \bar{\tau}] \;\middle|\; \sqrt{|\bar{\tau} - \bar{\tau}_s|^2 + \|\mathbf{X}_{\hat{D}_T}(\bar{\tau}) - \mathbf{X}_{\hat{D}_T s}(\bar{\tau}_s)\|^2} < \epsilon \right\}, \quad (2.1)$$

其中 $\mathbf{E}$ 是弦几何拓扑中的一个离散变量。弦拓扑的精确定义见 [8] 的第 2 节。

根据这一定义，E 中连通超黎曼曲面上的任意两个弦态都连续连通。因此，$\mathbb{R}^{1,\,d-1}$ 中的超黎曼曲面与由 $\bar{\tau}$ 从 $\bar{\tau} = -\infty$ 到 $\bar{\tau} = \infty$ 在E上参数化的曲线之间存在一一对应关系。也就是说，表示 E 上渐近过程的曲线，能重现 $\mathbb{R}^{1,\,d-1}$中超黎曼曲面的正确模空间。因此，弦几何理论包含超弦理论的全阶信息。实际上，微扰

弯曲背景中的超弦理论可由弦几何理论推导得到，如[8, 9, 10, 11, 12]所示。微扰理论的一致性决定了 $d = 10$ （临界维数）。

黎曼弦流形是通过在弦流形上引入度规定义的。首先，余切空间由以下元素张成

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}^{10}_{\hat{D}_T} &:= d\bar{\tau} \\ d\mathbf{X}^{(\mu\bar{\sigma}\bar{\theta})}_{\hat{D}_T} &:= d\mathbf{X}^{\mu}_{\hat{D}_T}\left(\bar{\sigma},\bar{\tau},\bar{\theta}\right), \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中，由于 $\bar{\mathbf{E}}$ 是离散变量（如式（2.1）所示），$d\bar{\mathbf{E}}$ 不能作为张成余切空间的基的一部分。这里，我们将 $(\mu\bar{\sigma}\theta)$ 视为指标，而 $\mu = 0$、……、9。$(\bar{\sigma},\ \theta)$ 上的求和定义为 $\int d\bar{\sigma}d^2\bar{\theta}\hat{}\bar{\mathbf{E}}(\bar{\sigma},\bar{\tau},\bar{\theta})$。$\hat{}\bar{\mathbf{E}}(\bar{\sigma},\bar{\tau},\bar{\theta}) := \frac{1}{\bar{n}}\bar{}\bar{\mathbf{E}}(\bar{\sigma},\bar{\tau},\bar{\theta})$，其中 $\bar{n}$ 是二维度量的拉普斯函数。在 $\bar{\tau} \mapsto \bar{\tau}'(\bar{\tau}, \mathbf{X}\hat{}_{D_T}(\bar{\tau}))$ 下，该求和按标量变换；在超对称变换 $(\bar{\sigma},\theta) \mapsto (\bar{\sigma}'(\bar{\sigma},\theta)\ \theta'(\bar{\sigma},\theta))$ 下保持不变。由于所有指标都已缩并，作用量（2.4）在此 $\mathcal{N} = (1, 1)$ 超对称变换下保持不变。线元的显式形式为

$$\begin{aligned} & ds^2(\bar{\mathbf{E}}, \mathbf{X}_{\hat{D}_T}(\bar{\tau}), \bar{\tau}) \\ = \quad & G(\bar{\mathbf{E}}, \mathbf{X}_{\hat{D}_T}(\bar{\tau}), \bar{\tau})_{10\ 10}(d\bar{\tau})^2 \\ & +2d\bar{\tau}\int d\bar{\sigma}d^2\bar{\theta}\hat{\mathbf{E}}\sum_{\mu} G(\bar{\mathbf{E}}, \mathbf{X}_{\hat{D}_T}(\bar{\tau}), \bar{\tau})_{10\ (\mu\bar{\sigma}\bar{\theta})}d\mathbf{X}^{(\mu\bar{\sigma}\bar{\theta})}_{\hat{D}_T}(\bar{\tau}) \\ & +\int d\bar{\sigma}d^2\bar{\theta}\hat{\mathbf{E}}\int d\bar{\sigma}'d^2\bar{\theta}'\hat{\mathbf{E}}'\sum_{\mu,\mu'} G(\bar{\mathbf{E}}, \mathbf{X}_{\hat{D}_T}(\bar{\tau}), \bar{\tau})_{\ (\mu\bar{\sigma}\bar{\theta})\ (\mu'\bar{\sigma}'\bar{\theta}')}d\mathbf{X}^{(\mu\bar{\sigma}\bar{\theta})}_{\hat{D}_T}(\bar{\tau})d\mathbf{X}^{(\mu'\bar{\sigma}'\bar{\theta}')}_{\hat{D}_T}(\bar{\tau}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

这里需要注意，场是 $\bar{}\bar{\mathbf{E}}$ 的泛函。逆度规 $\mathbf{G^{IJ}}(\bar{}\bar{\mathbf{E}}, \mathbf{X}\hat{}_{D_T}(\bar{\tau})\ \bar{\tau})$[1] 由 $\mathbf{G_{IJ}G^{JK}} = \mathbf{G^{KJ}G_{JI}} = \delta^{\mathbf{K}}_{\mathbf{I}}$ 定义，其中 $\delta^{10}_{10} = 1$ 和 $\delta^{\mu'\bar{\sigma}'\bar{\theta}'}_{\mu\bar{\sigma}\bar{\theta}} = \delta^{\mu'}_{\mu}\delta^{\bar{\sigma}'\bar{\theta}'}_{\bar{\sigma}\bar{\theta}}$，其中 $\delta^{\bar{\sigma}'\bar{\theta}'}_{\bar{\sigma}\bar{\theta}} = \delta_{(\bar{\sigma}\bar{\theta})(\bar{\sigma}'\bar{\theta}')} = \frac{1}{}\hat{}\mathbf{E}\delta(\bar{\sigma}-\bar{\sigma}')\delta^2(\bar{\theta}-\bar{\theta}')$。

在接下来的 章节中，我们将研究其作用量由下式给出的弦几何理论 ，

$$S = \int \mathcal{D}\mathbf{E}\mathcal{D}\bar{\tau}\mathcal{D}\mathbf{X}_{\hat{D}_T}\sqrt{-\mathbf{G}}\left(e^{-2\mathbf{\Phi}}\left(\mathbf{R} + 4\nabla_{\mathbf{I}}\mathbf{\Phi}\nabla^{\mathbf{I}}\mathbf{\Phi} - \frac{1}{2}|\tilde{\mathbf{H}}|^2 - \mathrm{tr}(|\mathbf{F}|^2)\right) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}|\tilde{\mathbf{F}}_p|^2\right) \tag{2.4}$$

其中，我们对指标 I 使用爱因斯坦求和约定 $= \{10,(\mu\bar{\sigma}\theta)\}$ 其中，μ、$\bar{\sigma}$和 θ 分别表示弦的靶空间方向、用于指定弦的坐标及其超

[1]如此一来，场 $\mathbf{G_{IJ}}$, $\mathbf{\Phi}$、$\mathbf{B_{L_1L_2}}$和 $\mathbf{A_{L_1\cdots L_{p-1}}}$ 都是坐标 $\bar{}\bar{\mathbf{E}}$、$\mathbf{X}\hat{}_{D_T}(\bar{\tau})$ 和 $\bar{\tau}$ 的泛函。

相应的伴侣。该模型的运动方程可以一致地截断为所有十维超引力的运动方程，即 IIA 型、IIB、SO(32) I型和 SO(32)，以及 $E_8 \times E_8$ 如 [14]中所述的异质超引力。也就是说，该模型包含所有超弦背景。

作用量 (2.4) 由度规 $G_{I_1 I_2}$，的标量曲率 R、标量场 Φ、二形式场 $B_{I_1 I_2}$，的场强 $\tilde{H} = dB - \omega_3$ 组成，其中 $\omega_3 = \mathrm{tr}(A \wedge dA - \frac{2i}{3} A \wedge A \wedge A)$，A 是一个 $N \times N$ 厄米规范场，其场强由 F 给出，而 p形式 $\tilde{F}_p$。$\tilde{F}_p$ 定义为 $\sum_{p=1}^{\infty} \tilde{F}_p = e^{-B_2} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} F_k$，其中 F_k 是 (k-1)形式场 A_{k-1} 的场强。具体而言，$\tilde{F}_p = \sum_{k=0}^{\lfloor (p-1)/2 \rfloor} \frac{1}{k!} (-B_2)^k F_{p-2k}$。$A_p$ 与 R-R场 C_p 之间的关系由 $A_p = \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \frac{1}{k!} (B_2)^k \wedge C_{p-2k}$ 给出，于是 $\tilde{F}_p = dC_{p-1} + H_3 \wedge C_{p-3}$。

3 弦几何中的 T 对称性

我们将在第 3.1 小节讨论沿空间方向进行维数约化所得到的作用量中的一种对称性，并将其称为 T 对称性；在第 3.2 小节讨论沿时间方向进行维数约化所得到的作用量中的 T 对称性。在空间方向的情形中，T 对称性给出了微扰弦理论之间的 T对偶；而在时间方向的情形中，T 对称性是一种无法在微扰弦理论中看到的新对称性。下面我们考虑规范场 A 解耦的情形，此时作用量（2.4）变为

$$S' = \int \mathcal{D}\mathbf{E}\mathcal{D}\bar{\tau}\mathcal{D}\mathbf{X}_{\hat{D}_T} \sqrt{-\mathbf{G}} \left(e^{-2\Phi} \left(\mathbf{R} + 4\nabla_{\mathbf{I}}\Phi\nabla^{\mathbf{I}}\Phi - \frac{1}{2}|\mathbf{H}|^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} |\tilde{\mathbf{F}}_p|^2 \right), \tag{3.1}$$

其中 $H = dB$。

3.1 空间方向中的 T 对称性

在本小节中，我们考虑将作用量 $(\mathbf{X}^{(9\bar{\sigma}\bar{\theta})}$ 沿 D_T 方向的作用量进行维数约化后得到的作用量，所有场 φ 均满足

$$\partial_{(9\bar{\sigma}\bar{\theta})} \varphi = 0. \tag{3.2}$$

我们将坐标指标分解为 $\mathbf{M} = (M', 9)$，其中 x^9 是 $\mathbf{X}^{(9\bar{\sigma}\bar{\theta})}$ 的零模，而 M' 表示其他方向。我们将度规分解为

$$\mathbf{G_{MN}} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{M'N'} + \mathbf{k}^2 \mathbf{A}^{(1)}_{M'} \mathbf{A}^{(1)}_{N'} & -\mathbf{k}^2 \mathbf{A}^{(1)}_{M'} \\ -\mathbf{k}^2 \mathbf{A}^{(1)}_{N'} & \mathbf{k}^2 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

其中逆由下式给出

$$\mathbf{G^{MN}} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{M'N'} & \mathbf{A}^{(1)M'} \\ \mathbf{A}^{(1)N'} & \mathbf{k}^{-2} + \mathbf{g}^{P'Q'} \mathbf{A}^{(1)}_{P'} \mathbf{A}^{(1)}_{Q'} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

我们还将其他场分解为

$$\mathbf{\Phi} = \phi + \frac{1}{2} \ln \mathbf{k} \tag{3.5}$$

$$\mathbf{B}_{M'9} = \mathbf{A}^{(2)}_{M'} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{B}_{M'N'} = \mathbf{B}_{M'N'} + \mathbf{A}^{(1)}_{[M'} \mathbf{A}^{(2)}_{N']} \tag{3.7}$$

$$\mathbf{C}_{M'_1 \cdots M'_{2n-1} 9} = -\mathbf{C}^{B}_{M'_1 \cdots M'_{2n-1}} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{C}_{M'_1 \cdots M'_{2n}} = \mathbf{C}^{B}_{M'_1 \cdots M'_{2n}} - 2n \mathbf{A}^{(1)}_{[M'_1} \mathbf{C}^{B}_{M'_2 \cdots M'_{2n}]} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{C}_{M'_1 \cdots M'_{2n-2} 9} = \mathbf{C}^{A}_{M'_1 \cdots M'_{2n-2}} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{C}_{M'_1 \cdots M'_{2n-1}} = \mathbf{C}^{A}_{M'_1 \cdots M'_{2n-1}} - (2n-1) \mathbf{A}^{(1)}_{[M'_1} \mathbf{C}^{A}_{M'_2 \cdots M'_{2n-1}]}. \tag{3.11}$$

由这些分解可得 $2n$-形式场强

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{M'_1 \cdots M'_{2n-1} 9} &= \mathbf{G}^{A}_{M'_1 \cdots M'_{2n-1}} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{M'_1 \cdots M'_{2n}} &= \mathbf{G}^{A}_{M'_1 \cdots M'_{2n}} + \mathbf{A}^{(1)}_{[M'_1} \mathbf{G}^{A}_{M'_2 \cdots M'_{2n}]}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{A}_{2n-1} &= d\mathbf{C}^{A}_{2n-2} + \hat{\mathbf{H}}_3 \wedge \mathbf{C}^{A}_{2n-4} - \mathbf{F}^{(2)}_2 \wedge \mathbf{C}^{A}_{2n-3} \\ \mathbf{G}^{A}_{2n} &= d\mathbf{C}^{A}_{2n-1} + \hat{\mathbf{H}}_3 \wedge \mathbf{C}^{A}_{2n-3} - \mathbf{F}^{(1)}_2 \wedge \mathbf{C}^{A}_{2n-2}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(i)}_2 &= d\mathbf{A}^{(i)} \quad (i = 1, 2) \\ \hat{\mathbf{H}}_3 &= d\mathbf{B} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^{(1)} \wedge \mathbf{F}^{(2)}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{A}^{(2)} \wedge \mathbf{F}^{(1)}_2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

因此,

$$|\tilde{\mathbf{F}}_{2n}|^2 = |\mathbf{G}^A_{2n}|^2 + \mathbf{k}^{-2}|\mathbf{G}^A_{2n-1}|^2. \tag{3.15}$$

另一方面， $2n-1$形式场强满足

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}_{M'_1\cdots M'_{2n-2}9} &= -\mathbf{G}^B_{M'_1\cdots M'_{2n-2}}\\ \tilde{\mathbf{F}}_{M'_1\cdots M'_{2n-1}} &= \mathbf{G}^B_{M'_1\cdots M'_{2n-1}} + \mathbf{A}^{(1)}_{[M'_1}\mathbf{G}^B_{M'_2\cdots M'_{2n-1}]},\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{G}^B_{2n} &= d\mathbf{C}^B_{2n-1} + \hat{\mathbf{H}}_3 \wedge \mathbf{C}^B_{2n-3} - \mathbf{F}^{(2)}_2 \wedge \mathbf{C}^B_{2n-2}\\ \mathbf{G}^B_{2n-1} &= d\mathbf{C}^B_{2n-2} + \hat{\mathbf{H}}_3 \wedge \mathbf{C}^B_{2n-4} - \mathbf{F}^{(1)}_2 \wedge \mathbf{C}^B_{2n-3}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

因此,

$$|\tilde{\mathbf{F}}_{2n-1}|^2 = |\mathbf{G}^B_{2n-1}|^2 + \mathbf{k}^{-2}|\mathbf{G}^B_{2n-2}|^2. \tag{3.18}$$

综上所述， (3.1) 在 (3.2) 下变为

$$\begin{aligned}S'' = \int \mathcal{D}\mathbf{E}\mathcal{D}\bar{\tau}\mathcal{D}\mathbf{X}_{\hat{D}_T}\sqrt{-\mathbf{G}}\Bigg(&e^{-2\phi}\left(\mathbf{R} + 4(\partial_{M'}\phi)^2 - 4(\partial_{M'}\ln\mathbf{k})^2 - \frac{1}{2}|\hat{\mathbf{H}}_3|^2 + \frac{1}{2}\mathbf{k}^2|\mathbf{F}^{(1)}_2|^2 + \frac{1}{2}\mathbf{k}^{-2}|\mathbf{F}^{(2)}_2|^2\right)\\ &-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(\mathbf{k}|\mathbf{G}^A_{2p}|^2 + \mathbf{k}^{-1}|\mathbf{G}^B_{2p}|^2 + \mathbf{k}^{-1}|\mathbf{G}^A_{2p-1}|^2 + \mathbf{k}|\mathbf{G}^B_{2p-1}|^2)\Bigg).\end{aligned} \tag{3.19}$$

该作用量在 Z_2 变换下保持不变,

$$(\mathbf{k}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{C}^A_n) \leftrightarrow (\mathbf{k}^{-1}, \mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{C}^B_n). \tag{3.20}$$

在 [14], 中，我们证明了通过特定构型（分别称为 IIA 和 IIB 弦背景构型），弦几何理论可一致地截断为 IIA 型和 IIB 型超引力。也就是说，将这些构型代入弦几何理论的运动方程后，分别等价于 IIA 型和 IIB 型超引力的运动方程。这些构型的显式形式如下:

度规:

$$\begin{aligned}&\mathbf{G}_{00}\left(\bar{\tau}, \mathbf{X}_{\hat{D}_T}\right) = -1\\ &\mathbf{G}_{(\mu_1\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)(\mu_2\bar{\sigma}_2\bar{\theta}_2)}\left(\bar{\tau}, \mathbf{X}_{\hat{D}_T}\right) = G_{\mu_1\mu_2}\left(\mathbf{X}_{\hat{D}_T}(\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)\right)\delta_{(\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)(\bar{\sigma}_2\bar{\theta}_2)}\delta_{(\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)(\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)}\\ &\text{the others} = 0,\end{aligned} \tag{3.21}$$

标量场:

$$\mathbf{\Phi}\left(\bar{\tau},\mathbf{X}_{\hat{D}_T}\right)=\int d\bar{\sigma}d^2\bar{\theta}\hat{\mathbf{E}}\delta_{(\bar{\sigma},\bar{\theta})(\bar{\sigma},\bar{\theta})}\,\Phi(\mathbf{X}_{\hat{D}_T}(\bar{\sigma},\bar{\theta})), \tag{3.22}$$

B场:

$$\begin{aligned}&\mathbf{B}_{(\mu_1\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)(\mu_2\bar{\sigma}_2\bar{\theta}_2)}\left(\bar{\tau},\mathbf{X}_{\hat{D}_T}\right)=B_{\mu_1\mu_2}\left(\mathbf{X}_{\hat{D}_T}(\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)\right)\delta_{(\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)(\bar{\sigma}_2\bar{\theta}_2)}\delta_{(\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)(\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)}\\&\text{the others}=0,\end{aligned} \tag{3.23}$$

p形式场:

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}_{(\mu_1\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)\cdots(\mu_p\bar{\sigma}_p\bar{\theta}_p)}\left(\bar{\tau},\mathbf{X}_{\hat{D}_T}\right)=C_{\mu_1\cdots\mu_p}\left(\mathbf{X}_{\hat{D}_T}(\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)\right)\delta_{(\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)(\bar{\sigma}_2\bar{\theta}_2)}\cdots\delta_{(\bar{\sigma}_{p-1}\bar{\theta}_{p-1})(\bar{\sigma}_p\bar{\theta}_p)}\delta_{(\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)(\bar{\sigma}_1\bar{\theta}_1)}\\&(p=0,1,\cdots,8)\\&\text{the others}=0,\end{aligned} \tag{3.24}$$

其中

$$\begin{aligned}&C_{\mu_1\cdots\mu_p}=0\ (\text{p: even})\\&\tilde{F}_8=-*\tilde{F}_2\\&\tilde{F}_6=*\tilde{F}_4,\end{aligned} \tag{3.25}$$

对于 IIA 弦背景构型，或者

$$\begin{aligned}&C_{\mu_1\cdots\mu_p}=0\ (\text{p: odd})\\&\tilde{F}_9=*\tilde{F}_1\\&\tilde{F}_7=-*\tilde{F}_3\\&\tilde{F}_5=*\tilde{F}_5,\end{aligned} \tag{3.26}$$

对于 IIB弦背景构型。如果将这些构型代入（3.1）的运动方程，我们便得到

$$\begin{aligned}S_{IIA}\ =\ &\frac{1}{2\kappa_{10}^2}\Bigg(\int d^{10}x\sqrt{-G}\left(e^{-2\phi}\left(R+4\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi-\frac{1}{2}|H|^2\right)-\frac{1}{2}|\tilde{F}_2|^2-\frac{1}{2}|\tilde{F}_4|^2\right)\\&-\frac{1}{2}\int B\wedge dC_3\wedge dC_3\Bigg),\end{aligned} \tag{3.27}$$

在 IIA 情况下 [17, 18, 19], 以及

$$S_{IIB} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\left(\int d^{10}x\sqrt{-G}\left(e^{-2\phi}\left(R+4\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi-\frac{1}{2}|H|^2\right)-\frac{1}{2}|\tilde{F}_1|^2-\frac{1}{2}|\tilde{F}_3|^2-\frac{1}{4}|\tilde{F}_5|^2\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int C_4\wedge H\wedge dC_2\right), \tag{3.28}$$

以及自对偶条件,

$$\tilde{F}_5 = *\tilde{F}_5,$$

在 IIB 情形下[20, 21]。也就是说，弦几何理论（3.1）一致地截断为 IIA 和 IIB 超引力（3.27）和（3.28），分别对应 [14]。对弦背景构型施加条件（3.2），我们得到

$$\partial_9\varphi = 0, \tag{3.29}$$

对于所有超引力场 φ。将弦背景构型（3.21）$\sim$ (3.26) 按照（3.3）$\sim$ (3.11）进行分解后，超引力的场可分解为

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{\mu'\nu'}+k^2A^{(1)}_{\mu'}A^{(1)}_{\nu'} & -k^2A^{(1)}_{\mu'} \\ -k^2A^{(1)}_{\nu'} & k^2 \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

其中 $\mu' = 0$、1、$\cdots$、8,

$$\Phi = \phi + \frac{1}{2}\ln k \tag{3.31}$$

$$B^{[10]}_{\mu'9} = A^{(2)}_{\mu'} \tag{3.32}$$
$$B^{[10]}_{\mu'\nu'} = B_{\mu'\nu'} + A^{(1)}_{[\mu'}A^{(2)}_{\nu']}, \tag{3.33}$$

and

$$C^{[10]}_{\mu'_1\cdots\mu'_{2n-2}9} = C_{\mu'_1\cdots\mu'_{2n-2}} \tag{3.34}$$
$$C^{[10]}_{\mu'_1\cdots\mu'_{2n-1}} = C_{\mu'_1\cdots\mu'_{2n-1}} - (2n-1)A^{(1)}_{[\mu'_1}C_{\mu'_2\cdots\mu'_{2n-1}]}, \tag{3.35}$$

在 IIA 情形下，以及

$$C^{[10]}_{\mu'_1\cdots\mu'_{2n-1}9} = -C_{\mu'_1\cdots\mu'_{2n-1}} \tag{3.36}$$
$$C^{[10]}_{\mu'_1\cdots\mu'_{2n}} = C_{\mu'_1\cdots\mu'_{2n}} - 2nA^{(1)}_{[\mu'_1}C_{\mu'_2\cdots\mu'_{2n}]}, \tag{3.37}$$

在 IIB 情形下，其中 [10]左侧表示分解前的场。我们以这种方式分解除高阶 R-R 形式（高于 4 形式）之外的所有场。高阶 R-R 形式的分解由 Poincar´é 对偶关系（3.25）和（3.26）确定。

施加条件（3.29），并代入这些分解后，IIA 型超引力作用量（3.27）和 IIB 型超引力作用量（3.28）在以下变换下相互转化

$$(k, A^{(1)}) \leftrightarrow (k^{-1}, A^{(2)}). \tag{3.38}$$

这种关系称为 IIA 型与 IIB 型超引力之间的 T 对偶[2, 22], 若将该变换表示为分解前场的变换，则称之为 Buscher 规则[2] 。因此，作用量（3.19）在变换（3.20）下的不变性应称为弦几何理论中的 T 对称性[2] 。

在 [12, 24], IIA 型和 IIB 型微扰弦的路径积分被证明可由 $G_{10\,10}$ 围绕微扰真空态的量子部分的二点关联函数得到；这些微扰真空态由 $G_{10\,10}$ 的经典部分（固定为真空构型）以及 IIA 型和 IIB 型弦背景构型（3.21） ∼ （3.26），分别组成。$G_{10\,10}$ 在 T 对称变换（3.20）下保持不变；在该变换下，IIA 型和 IIB 型弦背景构型彼此交换。因此，如果将量子部分的变换定义为使 $G_{10\,10}$ 在经典部分的变换下保持不变，那么 IIA 型和 IIB 型微扰弦的路径积分就会在 T 对称变换下彼此交换。由 IIA 型和 IIB 型微扰弦的路径积分得到的弦谱和散射振幅，在 T 对称变换下彼此对应；其中，IIA 型弦中的卡鲁扎-克莱因模与 IIB 型弦中的绕弦模互换，反之亦然，有质量模也彼此交换。因此，T 对称变换（3.20）在超引力之外、微扰弦层面上本身也是 T 对偶变换。

[2]如果将 C_n C_n^A （3.34）和（3.35）右边的项命名为 C_n C_n^B （3.36）和（3.37）右边的项命名为，则变换（3.38）变为（k， $A^{(1)}$， C_n^A） $\leftrightarrow$ （k^{-1}， $A^{(2)}$， C_n^B），并且与变换（3.20）的关系显而易见。

3.2 时间方向上的 T 对称性

本小节中，我们将通过沿 $\bar{\tau} = X^{10}$方向对作用量（3.1）进行维数约化，证明微扰弦理论之间存在一种独立于 T对偶的对称性，其中所有场 $\boldsymbol{\varphi}$ 满足

$$\partial_{10}\boldsymbol{\varphi} = 0. \tag{3.39}$$

我们将度规分解为

$$\mathbf{G_{MN}} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{M'N'} - \mathbf{k}^2\mathbf{A}^{(1)}_{M'}\mathbf{A}^{(1)}_{N'} & +\mathbf{k}^2\mathbf{A}^{(1)}_{M'} \\ +\mathbf{k}^2\mathbf{A}^{(1)}_{N'} & -\mathbf{k}^2 \end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

其中 $M' = (\mu\bar{\sigma}\theta)$ 且 $N' = (\mu'\bar{\sigma}'\theta')$，其他场如（3.5）$\sim$(3.11) 所示，其中我们将第 9 方向改为第 10 方向。因此，（3.1）在（3.39）下变为

$$S'' = \int \mathcal{D}\mathbf{E}\mathcal{D}\mathbf{X}_{\hat{D}_T}\sqrt{\mathbf{G}}\left(e^{-2\phi}\left(\mathbf{R} + 4(\partial_{M'}\phi)^2 - 4(\partial_{M'}\ln|\mathbf{k}|)^2 - \frac{1}{2}|\hat{\mathbf{H}}_3|^2 + \frac{1}{2}\mathbf{k}^2|\mathbf{F}_2^{(1)}|^2 + \frac{1}{2}\mathbf{k}^{-2}|\mathbf{F}_2^{(2)}|^2\right)\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(\mathbf{k}|\mathbf{G}^A_{2p}|^2 - \mathbf{k}^{-1}|\mathbf{G}^B_{2p}|^2 - \mathbf{k}^{-1}|\mathbf{G}^A_{2p-1}|^2 + \mathbf{k}|\mathbf{G}^B_{2p-1}|^2)\right). \tag{3.41}$$

该作用量在 Z_2 变换下保持不变，

$$(\mathbf{k}, \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{C}^A_n) \leftrightarrow (-\mathbf{k}^{-1}, \mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{C}^B_n). \tag{3.42}$$

在弦背景构型（3.21）$\sim$ (3.26) 下，这种分解得到$\mathbf{k}^2 = 1$ 和$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}^{(2)} = 0$。然后，在 T 对称变换（3.42）下，超引力中的度规和 B 场不发生变换[3]。因此，此处的 T 对称变换独立于 T 对偶变换（3.38），并给出了微扰弦理论中无法看到的对称性。

4 结论与讨论

弦几何理论的场（2.4）包括代表弦背景的十维超引力场。通过对弦几何

[3]IIA（IIB）超引力中的 R-R场并不变换为 IIB（IIA）超引力中的场，而是变换为弦几何场的其他部分。

场一致截断至超引力场，可以从弦几何理论中得到所有类型的超引力，即 IIA 型、IIB 型、SO(32) I型、SO(32) 和 $E_8 \times E_8$ 十维杂化超引力 [14]。本文证明，维数约化后的弦几何作用量（3.19）在我们称为 T 对称性的变换下保持不变。对于沿 $\mathbf{X}^{(9\sigma\bar{\theta})} \hat{} D_T$ 方向的维数约化，T 对称变换在弦几何场中的 IIA 和 IIB 超引力场上起到 T 对偶变换的作用，因此，通过一致截断得到的 IIA 和 IIB 超引力会相互转化。此外，正如我们在第 3 节所讨论的，T 对称变换（3.20）在超引力之外的微扰弦层面上本身也是 T 对偶变换，因为 T 对称变换会将 IIA 和 IIB 微扰真空周围的涨落相互交换，而这些涨落分别给出 IIA 和 IIB 微扰弦的路径积分 [12, 24]。也就是说，T 对称变换给出了微扰真空之间的 T 对偶变换。对于沿 $\bar{\tau}$ 方向的维数约化，T 对称变换独立于 T 对偶变换，并给出一种在微扰弦理论中不可见的对称性。未来我们将对此对称性进行详细研究。

如此一来，T 对称性具有高度非平凡的性质，因而对作用量施加了严格约束。包含至二阶导数项的弦几何理论作用量将由（2.4）确定，因为所有十维超引力都是由该理论经过一致截断得到的，而且其降维作用量（3.19）具有 T 对称性。

所谓的奇异膜[25, 26, 27, 28] 被猜想存在于弦理论中，以与 T对偶保持一致。然而，例如， 5_2^2 膜 [29, 30, 31, 32, 33]无法存在于超引力中，因为它在普通流形上是多值的。另一方面，在 [14],弦几何理论中，（2.4）被证明可以一致截断为十维引力 [23] ；若在 T^d 上紧化，该十维引力具有 O(d,d)对称性，并且可以一致截断为 IIA 型和 IIB 型超引力的玻色部分。在这种十维引力中， 5_2^2 膜可以存在，因为多值性能够被 O(d,d)变换吸收。因此，奇异膜可以一致地存在于弦几何理论中。也就是说，弦几何包含一类超越普通流形、与T对偶相容的几何。

T 对偶将在非微扰形式化的弦理论中成为 T 对称性——

因为它包含 IIA 型和 IIB 微扰真空态，而二者彼此 T 对偶。这显然与「量子引力不存在全局对称性（包括离散对称性）」这一猜想相矛盾。[34, 35, 36, 37]虽然弦几何理论中的 T 对称性是一种全局离散对称性，但它并非完整对称性，而是一种有效对称性，也就是说，只有在理论进行维度约化时才存在这种对称性。因此，弦几何理论化解了 T 对偶与量子引力之间的悖论。

致谢

我们谨此感谢 M. Fukuma、Y. Sakatani、S. Sasaki、K. Shiozawa、Y. Sugimoto，尤其感谢 H. Kawai、A. Tsuchiya 和 T. Yoneya 与我们进行了长期且富有价值的讨论。M. S. 的工作得到弘前大学未来创新重点研究基金的资助。

参考文献

[1] K. Kikkawa 和 M. Yamasaki，“超弦理论中的卡西米尔效应”，Phys. Lett. B 149, 357-360(1984)

[2] T. H. Buscher，“弦背景场方程的一种对称性”，Phys. Lett. B 194, 59-62(1987)

[3] M. J. Duff，“弦理论中的对偶旋转”，Nucl. Phys. B 335, 610 (1990)

[4] W. Siegel,《弦启发的轴子引力的双标架形式》，Phys. Rev. D 47, 5453-5459(1993) [arXiv:hep-th/9302036 [高能物理理论]]。

[5] W. Siegel,《低能超弦中的超空间对偶性》，Phys. Rev. D 48, 2826-2837 (1993) [arXiv:hep-th/9305073 [高能物理理论]]。

[6] C. Hull and B. Zwiebach,《双场论》，《高能物理学报》09, 099 (2009) [arXiv:0904.4664[高能物理理论]]。

[7] O. Hohm、C. Hull 和 B. Zwiebach，《双场论的广义度规形式》，《高能物理学报》08，008（2010） [arXiv:1006.4823 [高能物理理论]]。

[8] M. Sato, 《弦几何与弦理论的非微扰表述》, Int. J. Mod. Phys. A 34, 第 23 期, 1950126（2019） [arXiv:1709.03506 [高能物理理论]]。[9] M. Sato 和 Y. Sugimoto, 《拓扑弦几何》, Nucl. Phys. B 956, 115019（2020） [arXiv:1903.05775 [高能物理理论]]。[10] M. Sato 和 Y. Sugimoto, 《弦几何理论牛顿极限下的微扰弦理论》, Eur. Phys. J. C 80, 第 8 期, 789（2020） [arXiv:2002.01774 [高能物理理论]]。[11] M. Sato、Y. Sugimoto 和 K. Uzawa, 《弦几何理论中弯曲背景场上的微扰弦路径积分》, Phys. Rev. D 106, 第 8 期, 086006（2022）[arXiv:2203.16304 [高能物理理论]]。[12] M. Sato 和 K. Uzawa, 《弦几何理论中弯曲背景场上的微扰超弦路径积分》, Phys. Rev. D 107, 第 6 期, 066023（2023）[arXiv:2211.16959 [高能物理理论]]。[13] M. Honda 和 M. Sato, 《弦几何中的弦背景场》, Int. J. Mod. Phys. A 35, 第 27 期, 2050176 （2020） [arXiv:2003.12487 [高能物理理论]]。[14] M. Honda、M. Sato 和 T. Tohshima, 《弦几何中的超弦背景场》, Adv. High Energy Phys. 2021, 9993903（2021） [arXiv:2102.12779 [高能物理理论]]。[15] I. M. Krichever 和 S. P. Novikov, 《Virasoro 型代数、黎曼曲面与孤子理论的结构》, Funct. Anal. Appl. 21 126。[16] I. M. Krichever 和 S. P. Novikov, 《Virasoro 型代数、黎曼曲面与闵可夫斯基时空中的弦》, Funct. Anal. Appl. 21 294。[17] M. Huq 和 M. A. Namazie, 《十维卡鲁扎-克莱因超引力》, Class. Quant. Grav. 2, 293（1985） [勘误：Class. Quant. Grav. 2, 597（1985）[18] F. Giani 和 M. Pernici, 《十维 N=2 超引力》, Phys. Rev. D 30, 325-333（1984）[19] I. C. G. Campbell 和 P. C. West, 《N=2 D=10非手征超引力及其自发紧化》, Nucl. Phys. B 243, 112-124（1984）

[20] J. H. Schwarz, 《手征 N=2 D=10 超引力的协变场方程》, Nucl. Phys. B 226, 269 (1983年)[21] P. S. Howe 和 P. C. West, 《完整的 N=2、D=10 超引力》, Nucl. Phys. B 238, 181-220 (1984)[22] T. Ort´ın, 《引力与弦》（剑桥大学出版社，英国剑桥，2004年）[23] M. Fukuma、T. Oota 和 H. Tanaka, 《环面上拉蒙–拉蒙势的 T 对偶述评》, Prog. Theor. Phys. 103, 425-446 (2000年) [arXiv:hep-th/9907132].[24] K. Nagasaki 和 M. Sato, 《弦几何理论中的弦背景有效势》, [arXiv:2309.10394 [hep-th]].[25] J. de Boer 和 M. Shigemori, 《奇异膜与非几何背景》, Phys. Rev. Lett. 104, 251603 (2010年) [arXiv:1004.2521 [hep-th]].[26] E. A. Bergshoeff、T. Ortin 和 F. Riccioni, 《缺陷膜》, Nucl. Phys. B 856, 210 (2012) [arXiv:1109.4484 [hep-th]].[27] J. de Boer 和 M. Shigemori, 《弦理论中的奇异膜》, Phys. Rept. 532, 65 (2013) [arXiv:1209.6056 [hep-th]].[28]Y. Sakatani, 《奇异膜与非几何通量》, JHEP 03, 135 (2015)[arXiv:1412.8769 [hep-th]].[29] T. Kikuchi、T. Okada 和 Y. Sakatani, 《具有广义等距的双重几何中的旋转弦》, Phys. Rev. D 86, 046001 (2012) [arXiv:1205.5549 [hep-th]].[30] F. Hassler 和 D. Lust, 《非交换／非结合 IIA（IIB）Q 膜与 R 膜及其交叉》, JHEP 1307, 048 (2013) [arXiv:1303.1413 [hep-th]].[31] D. Geissbuhler、D. Marques、C. Nunez 和 V. Penas, 《探索双场论》, JHEP 1306, 101 (2013) [arXiv:1304.1472 [hep-th]].[32] T. Kimura 和 S. Sasaki, 《世界面瞬子修正对 5^2_2-膜几何的影响》, JHEP 1308, 126 (2013) [arXiv:1305.4439 [hep-th]].

[33] A. Chatzistavrakidis、F. F. Gautason、G. Moutsopoulos 和 M. Zagermann，《非几何五膜的有效作用量》，Phys. Rev. D 89, 066004 (2014) [arXiv:1309.2653[hep-th]].[34] T. Banks 和 L. J. Dixon，《时空超对称性下弦真空的约束》，Nucl. Phys. B 307, 93-108 (1988)[35] C. Vafa，《弦景观与沼泽地》，[arXiv:hep-th/0509212 [hep-th]].[36] N. Arkani-Hamed、L. Motl、A. Nicolis 和 C. Vafa，《弦景观、黑洞与作为最弱力的引力》，JHEP 06, 060 (2007) [arXiv:hep-th/0601001 [hep-th]].[37] D. Harlow 和 H. Ooguri，《量子场论与量子引力中的对称性》，《数学物理通讯》383, no.3, 1669-1804 (2021) [arXiv:1810.05338 [hep-th]].