arXiv:2301.08966v2 [math.CT] 5 Jun 2024

有限范畴的欧拉示性数

MUSTAFA AKKAYA 和 OZGUN UNLU

Abstract. 我们为每个对象集和态射集均为有限集的范畴 $\mathcal{A}$ 关联一个有理数 $\chi(\mathcal{A})$。我们证明，这一赋值 χ 在不交并下具有可加性，并且保持乘积。因此，我们将 χ 视为一族范畴上的欧拉测度；对于这族范畴，这一赋值还满足一种容斥原理。

1. 引言

我们为每个对象集和态射集均为有限集的范畴 $\mathcal{A}$ 关联一个有理数 $\chi(\mathcal{A})$。我们证明，这一赋值 χ 在不交并下具有可加性（定理 2.17），并且保持乘积（定理 2.16）。因此，如 [8] 和 [10], 中一样，我们将 $\chi(\mathcal{C})$ 称为一族范畴 $\mathcal{C}$ 的欧拉测度；对于这族范畴，这一赋值还满足一种容斥原理（定理 2.15）。

令 χ_{Lein} 为 Leinster 在 [6]中定义的欧拉示性数。我们证明（定理 2.6），χ 将 χ_{Lein} 推广到了所有范畴。具体而言，要定义 χ_{Lein}，Leinster 要求与该范畴关联的有向多重图的邻接矩阵同时存在加权和余加权。在这里，我们可以不附加任何条件地定义有限范畴的 χ。然而，要证明 χ 在范畴伴随下是不变量（定理 2.7），我们需要采用与 Leinster 相同的条件。此外，在例 3 中，我们证明这些条件不能省略。因此，只有当 χ 与χ_{Lein}一致时，我们才称其为欧拉示性数。

Leinster 用于计算范畴图表的格罗滕迪克构造的欧拉示性数的公式（此处重新证明为定理 2.14），要求与该格罗滕迪克构造关联的矩阵存在余加权。在这里我们证明，若对范畴图表附加一些条件，就可以省略这一条件。因此，我们可以将 χ 视为一种欧拉测度，适用于更大范围的一类范畴；这一类范畴在偏序集上的格罗滕迪克构造下封闭。然而，在例 4 中我们证明，偏序集这一条件不能省略。

在第 3 节中，我们将讨论一种计算 χ 的方法，以证明它总是为每个有限范畴赋予一个有理数。

在此，我们还指出，Stephanie Chen 和 Juan Pablo Vigneaux 独立地想到使用摩尔－彭若斯广义逆来研究范畴大小，其时间与我们大致相同，都在 [9] 。

2. Definition of Euler Characteristic

本文中的所有矩阵的元素均属于 $\mathbb{Q}$。对于一个 $m \times n$ 矩阵 M，令 M^{+}为 M的摩尔－彭若斯广义逆，M^{*}为 M的转置。

2.1. 摩尔－彭若斯广义逆的性质。本小节列出一些众所周知的摩尔－彭若斯广义逆性质，这些性质将在全文中使用。令M为一个$m\times n$矩阵。众所周知（参见 [7], [1], 和 [11]），$m \times n$矩阵 M的摩尔－彭若斯广义逆是唯一满足以下四个方程的 $n \times m$矩阵 M^+：

$$MM^+M = M \tag{1}$$

and

$$M^+MM^+ = M^+ \tag{2}$$

and

$$(M^+M)^* = M^+M \tag{3}$$

and

$$(MM^+)^* = MM^+. \tag{4}$$

对于一个 $m \times n$ 矩阵 M， M 的行空间 Row(M) 是由 M 的各行张成的 $1\times n$ 矩阵子空间。将 M 视为从 $n\times 1$ 矩阵向量空间到 $m\times 1$ 矩阵向量空间的线性函数， M 的零空间 Null(M) 是 M 的核，而 M 的像 im(M) 是其像。对于 $m\times 1$ 矩阵向量空间的子空间 V，投影映射 Proj$_V$ 到 V 是从 $m\times 1$ 矩阵向量空间到 V 的正交投影，其中我们在 $m\times 1$ 矩阵向量空间上考虑标准内积。对于 $m\times 1$ 矩阵向量空间的子空间 V。令 $V^\perp$ 表示 V 的正交补。

引理 2.1. 设 x 是一个 $m\times 1$ 矩阵， y 是一个 $n\times 1$ 矩阵，且 M 是一个 $m\times m$ 矩阵。那么，当且仅当 $y^* \in Row(M)$ 且 $My =$Proj$^{im(M)}(x)$ 时， $M^+x = y$。

证明。注意，由（2）可知 $M^+x = y$蕴含 $y = M^+My$。将 $M^+x = y$从左侧乘以 M，得到 $My = MM^+x$。反过来，若假设 $y = M^+My$和$My = MM^+x$，则有 $M^+x = M^+MM^+x = M^+My = y$。因此我们证明了

$$M^+x = y \text{ if and only if } y = M^+My \text{ and } My = MM^+x. \tag{5}$$

设 $P = M^+M$。由（1）可得 $P^2 = P$，由（3）可得 $P^* = P$。因此 P是一个正交投影。注意，由（1）可知 $M（I - P）= 0$。所以 im($I - P$) $\subseteq$Null(M)。我们还有 $P = M^*（M^+）^*$。因此 im(P) $\subseteq$im(M^*)。由于 im(M^*) $=$Null(M)$^\perp$，我们有

$$M^+M = P = \text{Proj}_{\text{im}(M^*)}.$$

还要注意，$（M^*）^+ =（M^+）^*$。因此我们有

$$MM^+ = (MM^+)^* = (M^+)^*M^* = (M^*)^+M^* = \text{Proj}_{\text{im}(M^{**})} = \text{Proj}_{\text{im}(M)}.$$

命题 $y^* \in Row(M)$ 等价于命题 $y \in$im(M^*)。另请注意，$(I - M^+M)y = 0$ 当且仅当 $y \in$im(M^*)，因为 $M^+M =$Proj$_{\text{im}(M^*)}$.因此，我们有 $y^* \in Row(M)$ 当且仅当 $y = M^+My$。于是，(5) 中的等价关系变为

$$M^+x = y \text{ if and only if } y^* \in Row(M) \text{ and } My = \text{Proj}_{im(M)}(x).$$

□

设 P 是一个可逆的 $m \times m$ 矩阵。则 $P^+ = P^{-1}$。特别地，如果 P 是正交矩阵，那么 $P^+ = P^*$。此外，对于正交矩阵，我们有以下引理。

引理 2.2. 设 P是一个正交的 $m \times m$ 矩阵， M 是任意 $m \times m$ 矩阵。则 $(MP)^+ = P^+M^+$ 且 $(PM)^+ = M^+P^+$。

证明。由于 P是正交的，我们有 $P^+ = P^*$。矩阵 P^+M^+ 满足方程（1），因为

$$(MP)(P^+M^+)(MP) = MM^+MP = MP.$$

矩阵 P^+M^+ 满足方程（2），因为

$$(P^+M^+)(MP)(P^+M^+) = P^+M^+MM^+ = P^+M^+.$$

矩阵 P^+M^+ 满足方程（3），因为

$$((P^+M^+)(MP))^* = P^*M^*(M^+)^*(P^+)^* = P^+(M^+M)^*P = (P^+M^+)(MP).$$

矩阵 P^+M^+ 满足方程（4），因为

$$((MP)(P^+M^+))^* = (MM^+)^* = MM^+ = (MP)(P^+M^+).$$

类似地，$(PM)^+ = M^+P^+$。

□

令 $M \otimes N$ 表示方阵 M 和 N 的克罗内克积。那么我们知道

$$(M \otimes N)^+ = M^+ \otimes N^+$$

因为一般来说，当 A、 B、 C、 D 是方阵时，我们有 $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$。

设 A_1、 A_2、 $\ldots$ A_m 为大小可能不同的方阵。那么，矩阵 $\mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 定义为这样一个方阵：将 A_1、 A_2、 $\ldots$ A_m 放在对角线上，其余位置均为零。那么我们知道

$$\mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_n)^+ = \mathrm{diag}(A_1^+, A_2^+, \ldots, A_n^+).$$

2.2. $\chi(\mathcal{A})$ 的定义。令 $\mathbf{1}_m$ 表示所有元素均为 1 的 $m \times 1$ 矩阵。给定一个有限范畴 $\mathcal{A}$，令 $[\mathcal{A}]$ 表示与从范畴 $\mathcal{A}$ 忽略其复合数据后得到的有向多重图相关联的邻接矩阵。换言之，若 $\mathcal{A}$ 的对象集为 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，则 $[\mathcal{A}]$ 是一个 $m \times m$ 矩阵，其 ij^{th} 项等于态射集 $\mathcal{A}(a_i, a_j)$ 中元素的数量。令 $|\mathcal{A}|$ 表示范畴 $\mathcal{A}$ 的对象数。我们如下定义与范畴 $\mathcal{A}$ 相关联的有理数 $\chi(\mathcal{A})$:

$$\chi(\mathcal{A}) = \mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[\mathcal{A}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}$$

其中，我们将右侧的 1×1 矩阵视为一个有理数。注意， $\chi(\mathcal{A})$ 与所选的 $\mathcal{A}$ 的对象类上的顺序无关。为此，设 P 是任意一个 $|\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}|$-置换矩阵。那么 P 是一个正交矩阵，因此根据引理 2.2，我们有

$$\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}(P^{-1}[\mathcal{A}]P)^+\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|} = \mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}P^{-1}[\mathcal{A}]^+P\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|} = \mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[\mathcal{A}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}.$$

这证明 $\chi(\mathcal{A})$ 与 $\mathcal{A}$ 的对象顺序无关。

2.3. 与 $\chi_{Lein}(\mathcal{A})$ 的比较。我们称 w 为 $n\times 1$-矩阵 M 的加权，当且仅当

$$Mw=\mathbf{1}_m.$$

如果 $1\times m$-矩阵 v 满足以下条件，则称其为 $m\times n$-矩阵 M 的余加权

$$vM=\mathbf{1}_n^*.$$

我们将使用以下关于加权和余加权的事实。

引理 2.3. 设 M 为一个 $m\times n$-矩阵。当且仅当 M 有加权时， $M^+\mathbf{1}_m$ 是 M 的加权。

证明。假设 w 是 M 的加权。那么

$$\mathbf{1}_m=Mw=MM^+Mw=MM^+\mathbf{1}_m.$$

因此， $M^+\mathbf{1}_m$ 是 M 的加权。反之显然。 □

引理 2.4. 设 M 是一个 $m\times n$-矩阵。那么， $\mathbf{1}_n^*M^+$ 是 M 的余加权，当且仅当 M 具有余加权。

证明。假设 v 是 M 的余加权。那么

$$\mathbf{1}_n^*=vM=vMM^+M=\mathbf{1}_n^*M^+M.$$

因此， $\mathbf{1}_n^*M^+$ 是 M 的余加权。逆命题显然成立。 □

引理 2.5. 设 M 是一个 $m\times n$-矩阵。假设 w 是 M 的加权，且 v 是 M 的余加权。那么

$$\mathbf{1}_n^*w=v\mathbf{1}_m=\mathbf{1}_n^*M^+\mathbf{1}_m.$$

证明。假设 w 是 M 的加权，且 v 是 M 的余加权。那么我们有

$$\mathbf{1}_n^*w=vMw=v\mathbf{1}_m.$$

为证明最后一个等式，注意到

$$vMw=vMM^+Mw=\mathbf{1}_n^*M^+\mathbf{1}_m.$$

□

令 $\chi_{Lein}(\mathcal{A})$ 表示文献 [6] 中定义的范畴 $\mathcal{A}$ 的欧拉示性数。现在我们证明， χ 是 χ_{Lein} 在所有有限范畴上的推广。

定理 2.6. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限范畴，并假设 $\chi_{Lein}(\mathcal{A})$ 有定义。那么

$$\chi_{Lein}(\mathcal{A})=\chi(\mathcal{A}).$$

证明。设 $\mathcal{A}$ 是一个有限小范畴。假设范畴 $\mathcal{A}$ 的欧拉示性数 $\chi_{Lein}(\mathcal{A})$ 按照 [6] 中的定义存在。这意味着存在一个余加权 v 和一个加权 w，适用于 $[\mathcal{A}]$。因此，根据引理 2.5，我们有

$$\chi_{Lein}(\mathcal{A})=\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}^*w=\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}^*[\mathcal{A}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}=\chi(\mathcal{A}).$$

□

2.4. χ 的性质。对于函子 $L\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，令 $[L]$ 表示 $|\mathcal{B}|\times|\mathcal{A}|$ 矩阵，其 ij^{th} 项在 L 将 $\mathcal{A}$ 的 j^{th} 对象映射到 $\mathcal{B}$ 的 i^{th} 对象时为 1，否则为 0。我们在 [6] 中使用上述术语给出命题 2.4 的证明。

定理 2.7. 设 $L\colon \mathcal{A}\rightleftarrows B\colon R$ 是一个伴随。假设 $[\mathcal{A}]$ 有余加权，且 $[\mathcal{B}]$ 有加权。那么 $[\mathcal{B}]$ 有余加权，且 $[\mathcal{A}]$ 有加权，并且我们有 $\chi(\mathcal{A})=\chi(\mathcal{B})$。

证明。假设 $[\mathcal{A}]$ 有余加权，且 $[\mathcal{B}]$ 有加权，并且 $L\colon \mathcal{A}\rightleftarrows B\colon R$ 是一个伴随。根据引理 2.3 和引理 2.4，我们知道

$$\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[\mathcal{A}]^+[\mathcal{A}]=\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}\quad\text{and}\quad[\mathcal{B}][\mathcal{B}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{B}|}=\mathbf{1}_{|\mathcal{B}|}.$$

此外，我们知道

$$\mathbf{1}^*_{|\mathcal{B}|}=\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[R]\quad\text{and}\quad[L]^*\mathbf{1}_{|\mathcal{B}|}=\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}$$

因为矩阵 $[R]$ 和 $[L]$ 的每一列都恰好有一个等于 1 的元素。最后我们有

$$[\mathcal{A}][R]=[L]^*[\mathcal{B}]$$

因为 R 和 L 互为伴随。现在注意到

$$\mathbf{1}^*_{|\mathcal{B}|}=\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[R]=\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[\mathcal{A}]^+[\mathcal{A}][R]=\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[\mathcal{A}]^+[L]^*[\mathcal{B}].$$

因此，$\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[\mathcal{A}]^+[L]^*$ 是 $[\mathcal{B}]$的余加权。同样地，$[R][\mathcal{B}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{B}|}$ 是$[\mathcal{A}]$的加权。最后，我们有

$$\mathbf{1}^*_{|\mathcal{B}|}[\mathcal{B}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{B}|}=\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[R][\mathcal{B}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{B}|}=\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[\mathcal{A}]^+[\mathcal{A}][R][\mathcal{B}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{B}|}$$

$$=\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[\mathcal{A}]^+[L]^*[\mathcal{B}][\mathcal{B}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{B}|}=\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[\mathcal{A}]^+[L]^*\mathbf{1}_{|\mathcal{B}|}=\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[\mathcal{A}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}.$$

因此，$\chi(\mathcal{A})=\chi(\mathcal{B})$。 □

设 $\mathcal{A}$ 是一个范畴，且 $F\colon \mathcal{A}\to\mathsf{Cat}$ 是一个伪函子。那么，格罗滕迪克构造 $G(F)$ 是这样一个范畴：其对象是所有形如 (a,x) 的对，其中 a 是 $\mathcal{A}$ 中的一个对象，且 x 是 $F(a)$中的一个对象；从 (a,x) 到 (b,y) 的态射是所有形如 (f,ζ) 的对，其中 $f\colon a\to b$是 $\mathcal{A}$中的一个态射，且 $\zeta\colon F(f)(x)\to y$是 $F(b)$中的一个态射。

在本节的其余部分，设 $\mathcal{A}$ 是一个有限范畴，其对象集为

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{A})=\{a_1,a_2,\dots a_m\}.$$

设 $F\colon \mathcal{A}\to\mathsf{Cat}$ 是一个伪函子。假设对于 $\{1,2,\dots m\}$中的每个 i，范畴 $F(a_i)$的对象集为

$$\mathrm{Ob}(F(a_i))=\{x_{i1},x_{i2},\dots x_{in_i}\}$$

对于某个自然数 n_i。那么 $G(F)$ 有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 个对象类，$G(F)$ 的对象按如下顺序排列：(a_1,x_{11})、(a_1,x_{12})、…、(a_1,x_{1n_1})、(a_2,x_{21})、…、(a_2,x_{2n_2})、…、(a_m,x_{m1})、…、(a_m,x_{mn_m})。

令 $U\colon\mathsf{Cat}\to\mathsf{Set}$ 表示将一个范畴映射到其对象集合的函子。令 $T\colon\mathsf{Set}\to\mathsf{Cat}$ 表示离散范畴函子。定义 $L_1(F)\colon \mathcal{A}\to\mathsf{Cat}$ 如下：

$$L_1(F)=T\circ U\circ F.$$

注意，存在一个自然变换 $i: T \circ U \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{Cat}}$，其在每个分量上均由包含映射给出。定义 $L_2(F): T \circ U(\mathcal{A}) \to \mathsf{Cat}$ 如下：

$$L_2(F) = F \circ i_{\mathcal{A}}.$$

于是我们有以下引理：

引理 2.8. $[G(L_2(F))] = \mathrm{diag}([F(a_1)], [F(a_2)], \ldots, [F(a_m)])$。

证明。给定两个对象 a、$a' \in \mathcal{A}$，以及一个对象 $x \in F(a)$ 和 $x' \in F(a')$，我们有

$$G(L_2(F))((a,x),(a',x')) \cong F(a)(x,x')$$

当 $a = a'$ 且

$$G(L_2(F))((a,x),(a',x')) = \emptyset$$

当 $a \neq a'$。 □

引理 2.9. $[G(F)] = [G(L_1(F))]\,[G(L_2(F))]$.

证明。给定 $\mathcal{A}$ 中的两个对象 a, a'，以及 $F(a)$ 中的一个对象 x 和 $F(a')$ 中的一个对象 x'，我们有

$$G(F)((a,x),(a',x')) \cong \coprod_{y \text{ object in } F(a')} \{\, f \in \mathcal{A}(a,a') \mid f(x) = y \,\} \times F(a')(y,x').$$

现在注意到

$$|\{\, f \in \mathcal{A}(a,a') \mid f(x) = y \,\}| = |G(L_1(F))((a,x),(a',y))|.$$

由引理 2.8 可得

$$|G(L_2(F))((a',y),(a',x'))| = |F(a')(y,x')|.$$

因此我们有

$$|G(F)((a,x),(a',x'))| = \sum_{y \text{ object in } F(a')} |G(L_1(F))((a,x),(a',y))|G(L_2(F))((a',y),(a',x'))||.$$

同样由引理 2.8 可得

$$|G(L_2(F))((\widetilde{a},\widetilde{y}),(a',x'))| = 0$$

当 $\widetilde{a} \neq a'$ 时，对于 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 $\widetilde{a}$ 以及 $F(\widetilde{a})$ 中的对象 $\widetilde{y}$。因此我们得到

$$[G(F)] = [G(L_1(F))]\,[G(L_2(F))]\,.$$

□

设 v_1、v_2、……、v_m 为大小可能不同的列向量。于是，我们将以下列向量记作 $C(v_1, v_2, \ldots, v_m)$

$$C(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

其行数等于 v_1、v_2、……、v_m 的行数之和。注意，如果 v_1、v_2、……、v_m 都是有理数，那么 $C(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ 是一个 $m \times 1$-矩阵。

引理 2.10. 设 μ_1、μ_2、……、μ_m、λ_1、λ_2、……、λ_m 为有理数。假设

$$[\mathcal{A}]C\left(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m\right)=C\left(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\right).$$

于是我们有

$$[G(L_1(F))]\,C\left(\mu_1\mathbf{1}_{n_1},\mu_2\mathbf{1}_{n_2},\ldots,\mu_m\mathbf{1}_{n_m}\right)=C\left(\lambda_1\mathbf{1}_{n_1},\lambda_2\mathbf{1}_{n_2},\ldots,\lambda_m\mathbf{1}_{n_m}\right).$$

证明。给定 $\mathcal{A}$ 中的两个对象 a、a'，以及 $F(a)$ 中的一个对象 x 和 $F(a')$ 中的一个对象 x'，我们有

$$\sum_{x' \text{ object in } F(a')} |G(L_1(F))((a,x),(a',x'))| = |\mathcal{A}(a,a')|.$$

因此结论成立。 □

备注 1. 当 $\mathcal{A}$ 是偏序集时，我们可以在 $\mathcal{A}$ 的对象上选取一个扩展其偏序的全序。因此，只要 $\mathcal{A}$ 是偏序集，不失一般性，我们可以假设：在 $\mathcal{A}$ 中，仅当 $i \le j$ 时，才存在从 a_i 到 a_j 的态射。

引理 2.11. 如果 $\mathcal{A}$ 是偏序集，则存在一个可逆矩阵 M，使得

$$M\,[G(L_2(F))]=[G(L_1(F))][G(L_2(F))].$$

证明。假设 $\mathcal{A}$ 是一个偏序集。根据备注 1，我们可以假设，所选的全序 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 定义在 $\mathcal{A}$ 的对象集合上，并且扩展了由 $\mathcal{A}$ 上的偏序集结构所给出的偏序。对于 $\{1,2\}$中的 i，令 M_i 表示矩阵$[G(L_i(F))]$。因此，要证明该引理，我们需要找到一个可逆矩阵 M，使得$(M-M_1)M_2=0$。将这些矩阵视为从 $\mathrm{Ob}(G(F))\times\mathrm{Ob}(G(F))$ 到 $\mathbb{Z}$的函数。令 M 为如下定义的矩阵：

$$M((a,x),(a',x'))=\begin{cases}M_1((a,x),(a',x')) & \text{if } a\neq a'\\ 1 & \text{if } (a,x)=(a',x')\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

对于 $G(F)$中的对象(a,x)、(a',x')。首先注意到，M是一个上三角矩阵，且其所有对角线元素都等于 1。因此，M 是一个可逆矩阵。其次注意到，对于 $\mathcal{A}$中的每个对象 a，都存在从 $\mathrm{id}_{F(a)}$ 到 $F(\mathrm{id}_a)$的自然同构，因为 F是一个伪函子。特别地，这意味着，对于 $G(F)$中的每个对象(a,x)，都存在一个同构$\sigma_{a,\,x}\colon\ x\to F(\mathrm{id}_a)(x)$，它属于范畴 $F(a)$。因此，我们有

$$M_2((a,x),(a',x'))=M_2((a,F(\mathrm{id}_a)(x)),(a',x'))$$

and

$$(M-M_1)((a,x),(a',x'))=\begin{cases}1 & \text{if } a=a' \text{ and } x=x' \text{ and } x'\neq F(\mathrm{id}_a)(x)\\ -1 & \text{if } a=a' \text{ and } x\neq x' \text{ and } x'=F(\mathrm{id}_a)(x)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

对于 $G(F)$ 中的每个对象 (a,x)、(a',x')。因此我们有

$$\begin{aligned}(M-M_1)M_2((a,x),(a',x')) &= \sum_{y\in\{x,F(\mathrm{id}_a)(x))\}}(M-M_1)((a,x),(a,y))M_2((a,y),(a',x'))\\ &= M_2((a,x),(a',x'))-M_2((a,F(\mathrm{id}_a)(x)),(a',x'))\\ &= 0\end{aligned}$$

因此，我们已证明（$M-M_1$）$M_2=0$。 □

下一个引理是前一个引理的直接推论。

引理 2.12. 若 $\mathcal{A}$ 是一个偏序集，则 $\mathrm{Row}([G(L_1(F))][G(L_2(F))]) = \mathrm{Row}([G(L_2(F))])$。

证明。由引理 2.11 可知，存在一个可逆矩阵 M，使得 $M\,[G(L_2(F))] = [G(L_1(F))][G(L_2(F))]$.。由于 M 可逆，我们可以将 M写成初等矩阵的乘积。此外，从左侧乘以一个初等矩阵等同于进行一次行变换。因此，矩阵$[G(L_2(F))]$与 $M\,[G(L_2(F))]$ 行等价。故有

$$\mathrm{Row}([G(L_1(F))][G(L_2(F))]) = \mathrm{Row}([G(L_2(F))]).$$

□

引理 2.13. 设 $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ 是 $[\mathcal{A}]$ 的一个加权，且对于 $\{1, 2, \ldots m\}$中的每个 i，v_i 都是$[F(a_i)]$ 的一个加权。那么 $C(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m)$ 是 $G(F)$ 的一个加权。

证明。设 $C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ 是 $[\mathcal{A}]$ 的一个加权，且 v_i 是 $[F(a_i)]$ 对每个 i 的一个加权，其中 $\{1, 2, \ldots m\}$。由引理 2.8 可得

$$[G(L_2(F))] = \mathrm{diag}\left([F(a_1)], [F(a_2)], \ldots, [F(a_m)]\right).$$

因此

$$[G(L_2(F))]C\left(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m)\right) = C\left(\lambda_1 \mathbf{1}_{n_1}, \lambda_2 \mathbf{1}_{n_2}, \ldots, \lambda_m \mathbf{1}_{n_m}\right).$$

由引理 2.10 可得

$$[G(L_1(F))]\,C\left(\lambda_1 \mathbf{1}_{n_1}, \lambda_2 \mathbf{1}_{n_2}, \ldots, \lambda_m \mathbf{1}_{n_m}\right) = C\left(\mathbf{1}_{n_1}, \mathbf{1}_{n_2}, \ldots, \mathbf{1}_{n_m}\right) = \mathbf{1}_{|\mathbf{G(F)}|}.$$

由引理 2.9 可得

$$[G(F)] = [G(L_1(F))][G(L_2(F))].$$

因此可得

$$[G(F)]C\left(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m\right) = \mathbf{1}_{|\mathbf{G(F)}|}.$$

因此，$C(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m)$ 是 $G(F)$ 的一个加权。 □

设 $\mathcal{A}$ 是一个有限范畴，其对象集为 $\{a_1, a_2, \ldots a_m\}$。对于伪函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathsf{Cat}$，令 $\chi(F)$ 表示 $1 \times m$-矩阵

$$\chi(F) = \left[\ \chi(F(a_1))\ \chi(F(a_2))\ \cdots\ \chi(F(a_m))\ \right].$$

定理 2.14. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限范畴，且 $F\colon \mathcal{A} \to \mathsf{Cat}$ 是一个伪函子，使得对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 a，范畴 $F(a)$ 都是有限的。假设 $[G(F)]$ 有余加权，$[\mathcal{A}]$ 有加权，并且对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 a，$[F(a)]$ 都有加权和余加权。那么我们有

$$\chi(G(F)) = \chi(F)[\mathcal{A}]^{+}\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}.$$

证明。由于 $[\mathcal{A}]$ 有加权，根据引理 2.3，我们知道 $[\mathcal{A}]^{+}\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}$ 是 $[\mathcal{A}]$的一个加权。对于某些有理数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$，我们有

$$[\mathcal{A}]^{+}\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|} = C(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m).$$

假设对于每个 i，v_i 都是 $\{1, 2, \ldots m\}$ 中 $[F(a_i)]$ 的一个加权。由引理 2.13，$C(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m)$ 是 $G(F)$ 的一个加权。因此，由引理 2.5，我们有

$$\chi(G(F)) = \mathbf{1}^{*}_{|G(F)|}C(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \ldots, \lambda_m v_m).$$

由于对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 a， $[F(a)]$ 都有一个加权和一个余加权，因此我们有

$$\chi(F(a_i)) = \mathbf{1}^*_{n_i} v_i$$

由引理 2.5。由于 $\mathbf{1}^*_{|G(F)|} = [\ \mathbf{1}^*_{n_1}\ \mathbf{1}^*_{n_2}\ \dots\ \mathbf{1}^*_{n_m}\ ]$，我们有

$$\chi(G(F)) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{1}^*_{|F(a_i)|} v_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi(F(a_i)) = \chi(F)[\mathcal{A}]^+ \mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}.$$

□

定理 2.15. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限偏序集，且 $F\colon \mathcal{A} \to$Cat 是一个伪函子，使得对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 a，范畴 $F(a)$ 都是有限的。假设对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 a， $[F(a)]$ 都有一个加权。那么我们有

$$\chi(G(F)) = \chi(F)[\mathcal{A}]^+ \mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}.$$

证明。由于 $\mathcal{A}$ 是一个有限偏序集，矩阵 $[\mathcal{A}]$ 可逆，因此它有加权。因此，由引理 2.3， $[\mathcal{A}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}$ 是 $[\mathcal{A}]$ 的一个加权。对于某些有理数 λ_1、 λ_2、.....、 λ_m，我们有

$$[\mathcal{A}]^+ \mathbf{1}_{|\mathcal{A}|} = C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m).$$

对于 $\mathcal{A}$ 中的每个对象 a，由引理 2.3 可知， $[F(a)]^+\mathbf{1}_{|F(a)|}$ 是 $[F(a)]$ 的一个加权，因为 $[F(a)]$ 有一个加权。定义 $v_i = [F(a_i)]^+\mathbf{1}_{|F(a_i)|}$，其中 i 属于 $\{1, 2, \dots, m\}$。于是由引理 2.13， $C(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m)$ 是 $G(F)$ 的一个加权。注意，由引理 2.8 以及对每个 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$， v_i^* 都属于 Row($[F(a_i)]$ 这一事实， $C(0, \dots, 0, v_i, 0, \dots 0)^*$ 是 Row($G(L_2(F))$) 中的向量。现在由引理 2.12，我们知道

$$\mathrm{Row}([G(L_1(F))][G(L_2(F))]) = \mathrm{Row}([G(L_2(F))])$$

并且由引理 2.9 可知

$$[G(F)] = [G(L_1(F))][G(L_2(F))].$$

因此， $C(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m)^*$ 属于行空间 Row($G(F)$)。因此，由引理 2.1 可得

$$[G(F)]^+ \mathbf{1}_{G(F)} = C(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m).$$

因此，与前面的证明一样，我们再次得到

$$\chi(G(F)) = \mathbf{1}^*_{|G(F)|} C(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m).$$

由同样的论证即可得证。 □

例 1. 注意，范畴

$$\mathcal{P} = \{b \leftarrow a \rightarrow c\}$$

是一个偏序集，并且

$$[\mathcal{P}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$[\mathcal{P}]^+ = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

现在考虑任意一个伪函子 $F : \mathcal{P} \to \mathsf{Cat}$，使得对于每个对象 x in $\mathcal{P}$，范畴 $F(x)$ 都是有限的，并且 $[F(x)]$ 具有一个加权。那么我们有

$$\chi(G(F)) = \chi(F)[\mathcal{P}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{P}|}$$

根据定理 2.15。此外，我们有

$$\chi(F) = [\ \chi(F(a))\ \chi(F(b))\ \chi(F(c))\ ]$$

and

$$[\mathcal{P}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{P}|} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\chi(F) = [\ \chi(F(a))\ \chi(F(b))\ \chi(F(c))\ ] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \chi(F(b)) + \chi(F(c)) - \chi(F(a)).$$

定理 2.15 并未表明欧拉测度保持乘积，因此我们单独证明这一点。

定理 2.16. 设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 是两个有限范畴。那么我们有

$$\chi(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \chi(\mathcal{A})\chi(\mathcal{B}).$$

证明. 设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 是两个有限范畴。那么

$$[\mathcal{A} \times \mathcal{B}] = [\mathcal{A}] \otimes [\mathcal{B}]$$

其中 $\otimes$ 表示克罗内克积。因此

$$[\mathcal{A} \times \mathcal{B}]^+ = [\mathcal{A}]^+ \otimes [\mathcal{B}]^+.$$

另请注意

$$\mathbf{1}_{|\mathcal{A}\times\mathcal{B}|} = \mathbf{1}_{|\mathcal{A}|} \otimes \mathbf{1}_{|\mathcal{B}|}.$$

由于一般而言我们知道 $(M \otimes N)(L \otimes K) = (ML) \otimes (NK)$，所以有

$$\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}\times\mathcal{B}|}[\mathcal{A} \times \mathcal{B}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{A}\times\mathcal{B}|} = \mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[\mathcal{A}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|} \otimes \mathbf{1}^*_{|\mathcal{B}|}[\mathcal{B}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{B}|}.$$

这里，上述等式右侧的运算 $\otimes$ 位于两个 1×1-矩阵之间。因此，它仅对应于有理数的乘法。□

现在我们证明欧拉测度在不交并下具有可加性。

定理 2.17. 设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 是两个有限范畴。那么有

$$\chi(\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}) = \chi(\mathcal{A}) + \chi(\mathcal{B}).$$

证明。设 $\mathcal{A}$、 $\mathcal{B}$ 是两个有限范畴。那么

$$[\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}] = \mathrm{diag}([\mathcal{A}], [\mathcal{B}]).$$

因此

$$[\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}]^+ = \mathrm{diag}([\mathcal{A}]^+, [\mathcal{B}]^+).$$

另请注意

$$\mathbf{1}_{|\mathcal{A}\sqcup\mathcal{B}|} = C(\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|}, \mathbf{1}_{|\mathcal{B}|}).$$

So

$$\mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}\sqcup\mathcal{B}|}[\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{A}\sqcup\mathcal{B}|} = \mathbf{1}^*_{|\mathcal{A}|}[\mathcal{A}]^+\mathbf{1}_{|\mathcal{A}|} + \mathbf{1}^*_{|\mathcal{B}|}[\mathcal{B}]^+\mathbf{1}_{\mathcal{B}|}.$$

□

有许多人工构造的例子，其中范畴的邻接矩阵存在加权而不存在余加权。在下面的例子中，我们将使用 [3] 中的推论 4.2。

例 2。设 $\mathcal{C}_1$ 是一个具有如下邻接矩阵的范畴

$$[\mathcal{C}_1] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

显然，$[\mathcal{C}_1]$ 有加权，但没有余加权。使用附录中的算法，我们得到其摩尔－彭若斯广义逆为

$$[\mathcal{C}_1]^+ = \begin{bmatrix} 3/26 & 3/26 \\ 1/13 & 1/13 \end{bmatrix}.$$

因此，其欧拉测度为 $\chi(\mathcal{C}_1) = 5/13.$

例 3。考虑例 2 中的范畴 $\mathcal{C}_1$ 。设 $\mathcal{C}_2$ 是通过将 $\mathcal{C}_1$ 的第二个对象的一个同构副本作为第三个对象添加到该范畴中而得到的范畴。那么

$$[\mathcal{C}_2] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

注意，$[\mathcal{C}_2]$ 有加权，但没有余加权。然后使用求摩尔－彭若斯广义逆的算法，我们得到

$$[\mathcal{C}_2]^+ = \begin{bmatrix} 1/17 & 1/17 & 1/17 \\ 2/51 & 2/51 & 2/51 \\ 2/51 & 2/51 & 2/51 \end{bmatrix}.$$

因此，其欧拉测度 $\chi(\mathcal{C}_2) = 7/17.$

显然，$\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是等价范畴。然而，$\chi(\mathcal{C}_1) \neq \chi(\mathcal{C}_2)$。因此，欧拉测度 χ 不是范畴等价下的不变量。

例 4. 考虑例 3 中的范畴 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 。设 $F : \mathcal{C}_1 \to \mathsf{Cat}$ 是一个函子，它将第一个对象映射到终端范畴 $*$ ，将第二个对象映射到范畴 $\mathcal{B}$ ，其邻接矩阵为

$$[\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意到

$$[G(F)] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

并且它与范畴$\mathcal{C}_1$ 在 F下的态射像的选择无关。因此，$\chi(G(F)) = 7/17$ ，与例 3 中一样。另一方面

$$\chi(F) = [\ \chi(*)\ \chi(\mathcal{B})\ ] = [\ 1\ 1\ ]$$

and

$$[\mathcal{C}_1]^+ = \begin{bmatrix} 3/26 & 3/26 \\ 1/13 & 1/13 \end{bmatrix}.$$

应用定理 2.15 中的公式，我们得到

$$\chi(F)[\mathcal{C}_1]^+ \mathbf{1}_{|\mathcal{C}_1|} = [\ 1\ 1\ ] \begin{bmatrix} 3/26 & 3/26 \\ 1/13 & 1/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{13} \neq \frac{7}{17} = \chi(G(F)).$$

因此，若不假设指标范畴 $\mathcal{A}$是偏序集，定理 2.15 就不成立。

3. Appendix

本附录旨在解释为什么对于每个范畴 $\mathcal{A}$， $\chi(\mathcal{A})$ 都是有理数。为此，我们给出一种计算方阵的摩尔－彭若斯广义逆（也称为伪逆）的算法。

文献中有许多不同的算法可用于计算摩尔－彭若斯广义逆。一些最流行的计算摩尔－彭若斯广义逆的方法基于矩阵的奇异值分解（SVD），例如彭若斯在 [1] 中使用的方法。然而，使用这种方法，我们无法证明范畴的关联矩阵的摩尔－彭若斯广义逆的元素都是有理数。

另一种常用于此目的的工具是矩阵的满秩分解（参见 [11]中的定理 5，第 48 页）。使用这种方法可以看出，范畴的关联矩阵的摩尔－彭若斯广义逆的元素都是有理数。

还有几种通过推广正规方程法来计算摩尔－彭若斯广义逆的算法（参见 [12], [13], [14] 和 [15]）。我们在这里也给出一种推广正规方程法的算法。虽然这并非新方法，但我们在此介绍它，是为了强调计算过程中出现的矩阵的各项为何全都是有理数。

令 C_m 表示所有具有有理数项的 $m \times 1$ 矩阵所构成的向量空间。设M 是一个具有有理数项的 $m \times m$ 矩阵。那么，向量空间 Null(M) $=\{\, x \in C_m \,|\, Mx = 0 \,\}$、im($M$) $= \{\, Mx \,|\, x \in C_m \,\}$、行空间 Row($M$) $= \{\, x^* \,|\, x \in$im(M^*) $\}$以及 im(M)$^\perp$ $=$ Null(M^*) 都有由具有有理数项的矩阵构成的基。这里我们将讨论一种计算矩阵 M的摩尔－彭若斯广义逆M^+ 的算法。本小节的主要定理如下。

定理 3.1. 设 M 是一个 $m \times m$-矩阵。假设 $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ 是 Row(M) 的一个基，且 $\{s_1, s_2, \ldots, s_{m-k}\}$ 是 im(M)$^\perp$ 的一个基。那么矩阵

$$[\; Mr_1^* \; Mr_2^* \cdots Mr_k^* \; s_1 \; s_2 \cdots s_{m-k} \;]$$

可逆，并且有

$$M^+ = [\; r_1^* \, r_2^* \cdots r_k^* \; \mathbf{0} \;] \, [\; Mr_1^* \; Mr_2^* \cdots Mr_k^* \; s_1 \; s_2 \cdots s_{m-k} \;]^{-1}$$

其中，0 是一个大小为 $m \times (m-k)$ 的零矩阵。

首先，矩阵 $[\; Mr_1^* \; Mr_2^* \cdots Mr_k^* \; s_1 \; s_2 \cdots s_{m-k} \;]$ 可逆，因为 $\{Mr_1^*, Mr_2^*, \ldots, Mr_k^*\}$ 是 im(M) 的一个基，且 $\{s_1, s_2, \ldots, s_{m-k}\}$ 是 im(M)$^\perp$ 的一个基。上述定理的其余证明直接由接下来的四个引理得出。首先，我们固定本小节余下部分将使用的一些记号。假设 M 是一个 $m \times m$-矩阵， $\{s_1, s_2, \ldots, s_{m-k}\}$ 是 im(M)$^\perp$ 的一个基，且 $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ 是 Row(M) 的一个基。令 A_M 为 $m \times m$-矩阵

$$A_M = [\; r_1^* \, r_2^* \cdots r_k^* \; \mathbf{0} \;]$$

其中，0 是大小为 $m \times (m-k)$ 的零矩阵。另设 B_M 为 $m \times m$ 矩阵

$$B_M = [\; Mr_1^* \; Mr_2^* \cdots Mr_k^* \; s_1 \; s_2 \cdots s_{m-k} \;]^{-1}.$$

现在请注意，上述定理说明了 $M^+ = A_M B_M$。因此，接下来的四个引理就完成了上述定理的证明。

请注意，如果将两个 $n \times m$ 矩阵视为定义域为 C_m 且在 C_m的一组基上取值相同的线性函数，那么它们彼此相等。令$\{e_1, e_2, \dots e_m\}$为向量空间 C_m的标准基， $\{t_1, t_2, \dots, t_{m-k}\}$为 Null($M$) 的一组基。那么

$$\beta_1 = \{r_1^*, r_2^*, \dots, r_k^*, t_1, t_2, \dots, t_{m-k}\}$$

是 C_m 的基。

引理 3.2. $MA_MB_MM = M.$

证明。我们知道 β_1 是 C_m 的基，并且有

$$MA_MB_Mr_i^* = MA_Me_i = Mr_i^*$$

对于 $1 \le i \le k$ 和

$$MA_MB_Mt_i = MA_Me_{k+i} = M0 = 0 = Mt_i$$

对于 $1 \le i \le m-k$。 □

现在注意到集合

$$\beta_2 = \{Mr_1^*, Mr_2^*, \dots, Mr_k^*, s_1, s_2, \dots, s_{m-k}\}$$

是 C_m 的另一个基。

引理 3.3. $A_MB_MMA_MB_M = A_MB_M$。

证明。我们知道 β_2 是 C_m 的一个基，并且我们有

$$A_MB_MMA_MB_MMr_i^* = A_MB_MMA_Me_i = A_MB_Mr_i^* = A_MB_Mr_i^*$$

$1 \le i \le k$ 的

$$A_MB_MMA_MB_Ms_i = A_MB_MMA_Me_{k+i} = A_MB_MM0 = 0 = A_Me_{k+i} = A_MB_Ms_i$$

$1 \le i \le m-k$ 的。 □

上述两个引理证明了 A_MB_M 满足前两个方程。我们知道，如果 Z 是可逆矩阵，且 X 是满足 $Z^*XZ = Z^*X^*Z$ 的矩阵，那么 $X = X^*$。现在我们来证明第三个方程。

引理 3.4. $(A_MB_MM)^* = A_MB_MM$。

证明。我们知道 β_1 是 C_m 的一组基，并且有

$$r_jA_MB_Mr_i^* = r_jA_Me_i = r_jr_i^*$$

and

$$r_j(A_MB_MM)^*r_i^* = (A_MB_Mr_j^*)^*r_i^* = (A_Me_j)^*r_i^* = (r_j^*)^*r_i^* = r_jr_i^*$$

对于 $1 \le i \le k$，以及

$$Mt_i = 0 \quad \text{and} \quad t_i^*A_M = 0$$

对于 $1 \le i \le m-k$。 □

最后我们证明最后一个方程

引理 3.5. $(MA_MB_M)^* = MA_MB_M$

证明。我们知道 β_2 是 C_m 的一个基，并且有

$$(Mr_j^*)^* M A_M B_M (Mr_i^*) = (Mr_j^*)^* Mr_i^*$$

and

$$(Mr_j^*)^* (MA_M B_M)^* (Mr_i^*) = (MA_M B_M Mr_j^*)^* r_i M^* = (Mr_j^*)^* Mr_i^*$$

对于 $1 \leq i \leq k$ 和

$$A_M B_M s_i = A_M e_{k+i} = 0 \quad \text{and} \quad s_i^* M = 0$$

对于 $1 \leq i \leq m-k$。 □

Acknowledgements

作者谨向审稿人致以谢意，感谢其提出的宝贵意见和建议，这些意见和建议显著提升了本文的质量。第一作者感谢 Matthew Gelvin 进行的有益讨论，并激励其研究这一主题。

References

[1] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, 《剑桥哲学学会会刊》51（1955），406–413。MR0069793[2] Michael Barr、John F. Kennison 和 Robert Raphael, *Contractible simplicial objects*, 《卡罗林大学数学评论》60（2019），第4期，473–495。MR4061357[3] Clemens Berger 和 Tom Leinster, *The Euler characteristic of a category as the sum of a divergent series* **10** 2008 1, 41 51 , 《同调、同伦与应用》 2369022 （），第–期。MR[4] Thomas M. Fiore、Wolfgang Luck 和 Roman Sauer, *Euler characteristics of categories and homotopy colimits* **16** 2011 301 354 , 《文献数学》（），–。 2804514 MR[5] Thomas M. Fiore、Wolfgang Luck 和 Roman Sauer, *Euler characteristics of categories* **226** 2011 3, 2371 2469, , 《数学进展》（），第–期，DOI 10 1016 2010 09 013 2739781 。/j.aim. . . . MR Tom Leinster, *The Euler characteristic of a category*, 《文献数学》13（2008），21–49。MR2393085[6] Eliakim Hastings Moore, *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, 《美国数学学会公报》26（1920），第9期，394–395。[7] James Propp, *Euler measure as generalized cardinality*, arXiv 预印本 math/0203289（2002）。[8] Stephanie Chen 和 Juan Pablo Vigneaux, *A formula for the categorical magnitude in terms of the Moore-Penrose pseudoinverse* 2303 12176 1 2023 , arXiv 预印本 math/ . v（）。[9] James Propp, *Exponentiation and Euler measure* **49** 2003 4, , 《代数 universalis》 459 471, 10 1007 00012 003 1817 1 （），第–期，DOI . /s - - - . 谨以此文纪念 Gian-Carlo Rota。MR2022349[10] Adi Ben-Israel 和 Thomas N. E. Greville, *Generalized inverses*, 第2版，CMS 数学丛书/Ouvrages de Math´ematiques de la SMC，第15卷，Springer-Verlag，纽约，2003。理论与应用。MR1987382[11] Xingping Sheng 和 Guoliang Chen, *A note of computation for M-P inverse $A^{\dagger}$*, 《国际计算数学杂志》87（2010），第10期，2235–2241，DOI 10.1080/00207160802624117。MR2680143[12] Marco Murray-Lasso, *Alternative methods of calculation of the pseudo inverse of a non full-rank matrix* **6** 2008 3, , 《应用研究与技术杂志》（），DOI 10.22201/icat.16656423.2008.6.03.517。[13] Philip J. Davis, *Interpolation and approximation*, Dover Publications, Inc.，纽约，1975。重印自1963年原版，作了少量更正，并新增序言和书目。MR0380189[14] Jun Ji, *Gauss-Jordan elimination methods for the Moore-Penrose inverse of a matrix*, 《线性代数及其应用》437（2012），第7期，1835–1844，DOI 10.1016/j.laa.2012.05.017。MR2946363

Department of Mathematics, Bilkent University Çankaya, Ankara, Turkey*Email address*: mustafa.akkaya@bilkent.edu.tr

Department of Mathematics, Bilkent UniversityÇankaya, Ankara, Turkey*Email address*: unluo@fen.bilkent.edu.tr