arXiv:2301.08976v1 [math.CO] 21 Jan 2023

# 针对 $\mathbb{Z}_2^d$ 的修正 Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数

Alexander Sidorenko

*Rényi Institute, Budapest, Hungary*

摘要

设 $G$ 是一个采用加法记号的有限阿贝尔群，且令 $r$ 为其指数的倍数。修正的 Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数 $\mathsf{s}'_r(G)$ 是满足以下条件的最小整数 $s$： $G$ 上每个长度为 $s$ 的零和序列都含有一个长度为 $r$的零和子序列。我们求出了 $d \le 2k+1$的 $\mathsf{s}'_{2k}(\mathbb{Z}_2^d)$ 的精确值。

关键词：Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数，零和序列 2010 MSC:
05C35，20K01

设 $G$ 是一个用加法记号表示的有限阿贝尔群。我们用 $\exp(G)$ 表示 $G$ 的指数，即其所有元素的阶的最小公倍数。设 $r$ 是 $\exp(G)$ 的倍数。广义 Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数 $\mathsf{s}_r(G)$ 是满足以下条件的最小整数 $s$： $G$ 上任意长度为 $s$ 的序列都含有一个长度为 $r$ 的零和子序列。若 $r = \exp(G)$，则 $\mathsf{s}(G) = \mathsf{s}^{\exp(G)}(G)$ 是经典的 Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数。常数 $\mathsf{s}_r(G)$ 已得到广泛研究，例如参见 [4–10, 12]。这些常数的一种变体于 [1] 中提出，并在 [2, 3, 11] 中进一步研究。修正的 Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数 $\mathsf{s}'_r(G)$ 是满足以下条件的最小整数 $s$： $G$ 上任意长度为 $s$ 的零和序列都含有一个长度为 $r$ 的零和子序列。

根据定义，$\mathsf{s}'_r(G) \le \mathsf{s}_r(G)$。另一方面，若 $g_1, g_2, \dots, g_s$ 是 $G$ 上的一个序列，且不含长度为 $r$的零和子序列，并且 $s$ 与 $\exp(G)$ 互素，则存在 $x \in G$ 使得 $g_1 + x, g_2 + x, \dots, g_s + x$ 是一个零和子序列（见 [1, 11]）。因此，$\mathsf{s}'_r(G) \ge \mathsf{s}_r(G) - (\exp(G) - 1)$，并且若 $\mathsf{s}_r(G) - 1$ 与 $\exp(G)$ 互素，则 $\mathsf{s}'_r(G) = \mathsf{s}_r(G)$。

在本文中，我们考虑 $\exp(G) = 2$ 的情形，因此 $G \cong \mathbb{Z}_2^d$。根据上述论证，

$$\mathsf{s}'_r(\mathbb{Z}_2^d) = \mathsf{s}_r(\mathbb{Z}_2^d) \quad \text{if } \mathsf{s}_r(\mathbb{Z}_2^d) \text{ is even}, \tag{1}$$

and

$$\mathsf{s}_r(\mathbb{Z}_2^d) - 1 \le \mathsf{s}'_r(\mathbb{Z}_2^d) \le \mathsf{s}_r(\mathbb{Z}_2^d). \tag{2}$$

广义 Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数 $\mathsf{s}_{2k}(\mathbb{Z}_2^d)$ 在 $d \le 2k+1$ 的精确值已被求出：

定理 1（[12]）。

$$\mathsf{s}_{2k}(\mathbb{Z}_2^d) = \begin{cases} 2k+d & \text{for } d < 2k; \\ 4k+1 & \text{for } d = 2k; \\ 4k+2 & \text{for } d = 2k+1, \ k \text{ is even}; \\ 4k+5 & \text{for } d = 2k+1, \ k \text{ is odd}. \end{cases}$$

在本文中，我们将这一结果推广到修正的 Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数。

定理2. 设 $d \le 2k+1$。那么，在以下情形中，$\mathsf{s}'_{2k}(\mathbb{Z}_2^d) = \mathsf{s}_{2k}(\mathbb{Z}_2^d) - 1$：

- $d = 2k-1$;
- $d = 2k-3$, $k$ 为偶数;
- $d \le 2k-5$, $d$ 为奇数。

在所有其他情形中，$\mathsf{s}'_{2k}(\mathbb{Z}_2^d) = \mathsf{s}_{2k}(\mathbb{Z}_2^d)$。

证明。我们先考虑满足 $\mathsf{s}'_{2k}(\mathbb{Z}_2^d) = \mathsf{s}_{2k}(\mathbb{Z}_2^d)$ 的情形。其中，$d < 2k$ 为偶数的情形以及 $d = 2k+1$ 为偶数的情形可由定理 1 和 (1) 得出。其余三种情形为 $d = 2k$、$d = 2k+1$ 为奇数的情形以及 $d = 2k-3$ 为奇数的情形。由于 $\mathsf{s}'_{2k}(\mathbb{Z}_2^d) \le \mathsf{s}_{2k}(\mathbb{Z}_2^d)$，只需构造一个长度为 $\mathsf{s}_{2k}(\mathbb{Z}_2^d) - 1$ 的零和序列，使其不含长度为 $2k$的零和子序列。对于 $d = 2k$，我们选取一个长度为 $4k$ 的序列，其中包含 $2k-1$ 个零向量、$2k$ 个基向量 $e_1$、$e_2$、.....、$e_{2k}$，以及向量 $e_1 + e_2 + \ldots + e_{2k}$。对于奇数 $k$ 且 $d = 2k+1$、$2k-3$ 的情形，我们选取一个长度为 $2d+2$ 的序列，其中包含 0、$e_1$、$e_2$、.....、$e_{d-1}$、$e_1 + e_2 + \ldots + e_{d-1}$、$e_d$、$e_d + e_1$、$e_d + e_2$、.....、$e_d + e_{d-1}$、$e_d + e_1 + e_2 + \ldots + e_{d-1}$。

为了解决我们声称 $\mathsf{s}'_{2k}(\mathbb{Z}_2^d) = \mathsf{s}_{2k}(\mathbb{Z}_2^d) - 1$ 的三种情形，根据 (2)，只需证明：任意一个长度为 $\mathsf{s}_{2k}(\mathbb{Z}_2^d) - 1$over $\mathbb{Z}_2^d$ 的零和序列都包含一个长度为 $2k$ 的零和子序列。首先考虑情形 $d = 2k-1$。令 $x_2, x_3, \ldots, x_{4k-1} \in \mathbb{Z}_2^{2k-1}$where $x_2 + x_3 + \ldots + x_{4k-1} = 0$。设 $x_1 = x_2$。由于 $\mathsf{s}_{2k}(\mathbb{Z}_2^{2k-1}) = 4k-1$，存在 $A \subset \{1, 2, \ldots, 4k-1\}$，使得 $|A| = 2k$ 且 $\sum_{i \in A} x_i = 0$。若 $1 \notin A$，则我们已在 $x_2, x_3, \ldots, x_{4k-1}$ 中找到了一个长度为 $2k$ 的零和子序列。假设 $1 \in A$。若 $2 \notin A$，则 $(A \backslash \{1\}) \cup \{2\}$ 指出一个长度为 $2k$ 的零和子序列。假设 $1, 2 \in A$。设 $B := (\{1, 2, \ldots, 4k-1\} \backslash A) \cup \{2\}$。则 $|B| = 2k$ 且

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B} x_i &= x_1 + x_2 + \ldots + x_{4k-1} - \sum_{i \in A} x_i + x_2 \\ &= x_1 + x_2 + (x_2 + \ldots + x_{4k-1}) - \sum_{i \in A} x_i = x_1 + x_2 = 0. \end{aligned}$$

最后，令 $d$ 为奇数，且若 $k$ 为偶数，则 $d \le 2k-3$；若 $k$ 为奇数，则 $d \le 2k-5$。我们将证明，$\mathbb{Z}_2^d$ 上每个长度为 $2k+d-1$ 的零和序列都包含一个长度为 $2k$ 的零和子序列。令 $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+d-1} \in \mathbb{Z}_2^d$

其中 $x_1+x_2+\ldots+x_{2k+d-1}=0$。由定理 1，若 $d\equiv 1$ 模 4，则 $s_{d-1}(\mathbb{Z}_2^d)=2d$；若 $d\equiv 3$ 模 4，则 $s_{d-1}(\mathbb{Z}_2^d)=2d+3$。在这两种情况下，$s_{d-1}(\mathbb{Z}_2^d)\le 2k+d-1$。因此，存在 $A\subset\{1,2,\ldots,2k+d-1\}$ 使得 $|A|=d-1$ 且 $\sum_{i\in A}x_i=0$。令 $B:=\{1,2,\ldots,2k+d-1\}\backslash A$。于是 $|B|=2k$ 且 $\sum_{i\in B}x_i=\sum_{i=1}^{2k+d-1}x_i-\sum_{i\in A}x_i=0-0=0$，因此 $B$ 指向 $x_1,\ldots,x_{2k+d-1}$ 中一个长度为 $2k$ 的零和子序列。□

参考文献


[1] C. Augspurger, M. Minter, K. Shoukry, P. Sissokho, K. Voss，整数上避免指定长度零和序列，Integers 17 (2018)，文章 A17。

[2] A. Berger，Erd˝os–Ginzburg–Ziv 定理在 $\mathbb{Z}$ 上的一个类似结果，离散数学 342 (2019) 815–820，doi:10.1016/j.disc.2018.11.018。

[3]A. Berger, D. Wang，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 和 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$，的修正 Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数，离散数学 342 (2019) 1113–1116，doi:10.1016/j.disc.2018.12.024。[4] J. Bitz, C. Griffith, X. He，广义 Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数的指数下界，离散数学 343 (2020)，文章 112083，doi:10.1016/j.disc.2020.112083。[5] W. D. Gao，关于受限长度的零和子序列，II，离散数学 271 (2003) 51–59，doi:10.1016/S0012-365X(03)00038-4。[6] W. Gao, D. Han, J. Peng, F. Sun，关于长度为 $k$exp($G$) 的零和子序列，组合理论杂志 A辑 125 (2014) 240–253，doi:10.1016/j.jcta.2014.03.006。[7] W. Gao, R. Thangadurai，关于指定长度的零和序列，Aequ. Math. 72 (2006) 201–212，doi:10.1007/s00010-006-2841-y。[8] D. Han, H. Zhang，关于指定长度的零和子序列，国际数论杂志 14 (2018) 167–191，doi:10.1142/S1793042118500112。[9] D. Han, H. Zhang，关于 $C_n^r$ 的广义 Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数，离散数学 342 (2019) 1117–1127，doi:10.1016/j.disc.2018.12.018。[10] X. He，有限阿贝尔 $p$-群上长度为 $kq$ 的零和子序列，离散数学 339 (2016) 399–407，doi:10.1016/j.disc.2015.09.005。[11]Y.Hu, J. Peng, M. Wang，有限阿贝尔群的修正 Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数，AIMS Mathematics 8 (2023) 6697–6704，doi:10.3934/math.2023339。[12]A. Sidorenko，关于 $\mathbb{Z}_2^d$ 的广义 Erd˝os–Ginzburg–Ziv 常数，J. Combin. Theory Ser. A 174 (2020)，文章 105254，doi:10.1016/j.jcta.2020.105254。