arXiv:2301.08989v1 [math.CV] 21 Jan 2023

不可约芽的米尔诺数注记

ZBIGNIEW JELONEK

Abstract. 设 (V, 0) $\subset$ ($\mathbb{C}^n$, 0) 是一个复超曲面的芽，且f : ($\mathbb{C}^n$, 0) $\to$ ($\mathbb{C}^n$, 0) 是一个有限全纯映射的芽。若芽 (V, 0) 和 W := (F^{-1}(V)), 0) 不可约且具有孤立奇点，则

$$\mu(F^{-1}(\mathbf{V})) \geq \mu(\mathbf{V}),$$

其中 μ表示米尔诺数。

1. 引言

本文旨在证明以下定理:

定理1.1. 设 (V, 0) $\subset$ ($\mathbb{C}^n$, 0) 是一个复超曲面的芽，且f: ($\mathbb{C}^n$, 0) $\to$ ($\mathbb{C}^n$, 0) 是一个有限全纯映射的芽。若芽 germ (V, 0) 和 W := (F^{-1}(V)), 0) 不可约且具有孤立奇点，则

$$\mu(F^{-1}(\mathbf{V})) \geq \mu(\mathbf{V}),$$

其中 μ 表示米尔诺数。

由此可得 [1]的主要结果作为推论:

推论1.2. 设 (V, 0) $\subset$ ($\mathbb{C}^n$, 0) 是一个复超曲面的芽，且f: ($\mathbb{C}^n$, 0) $\to$ ($\mathbb{C}^n$, 0) 是一个有限全纯映射的芽。若将芽 (F^{-1}(V)), 0) 赋予约化结构后是光滑的，则芽 (V, 0) 也光滑。

2. Main results

我们从

定义 2.1. 设 (V, 0) $\subset$ ($\mathbb{C}^n$, 0) 是一个在 0 处具有孤立奇点的复超曲面芽，且设 f $\in \mathcal{O}_0$ 是理想 I(V, 0) 的一个生成元。那么，米尔诺数 μ(f) = dim $\mathcal{O}_0$/($^{\partial \mathbf{f}}\overline{\partial x_1}$, ..., $^{\partial \mathbf{f}}\overline{\partial x_n}$) 不依赖于 f，而只依赖于 (V, 0)。我们记作 μ(V, 0) := μ(f)。

容易看出，这一定义是良定义的，即数值 μ 不依赖于 f，而只取决于 (V,0)。现在我们可以证明主要结果:

2010年数学主题分类. 14R15,14R99,14P10。

定理 2.2. 设 (V, 0) $\subset$ ($\mathbb{C}^n$, 0) 是一个复超曲面的芽，且令f: ($\mathbb{C}^n$, 0) $\to$ ($\mathbb{C}^n$, 0) 为一个有限全纯映射的芽。如果芽 germ (V, 0) 和 W := (F^{-1}(V)), 0) 不可约且具有孤立奇点，那么

$$\mu(F^{-1}(\mathbf{V})) \geq \mu(\mathbf{V}).$$

证明。我们可以假设 $n > 1.$。取足够小的 $\epsilon > 0$，使得所有球面 $S_\eta = \{z : |z| = \eta\}$ 都与 V 横截，其中 $0 < \eta \leq \epsilon$。设 g 为 $V.$ 的一个约化方程。我们可以假设，对于 $|c| < \delta$，纤维 $\{f(z) = c\}$ 与 S_ϵ 横截，并且它们是 g 在 $B(0, \epsilon)$ 中的米尔诺纤维（见 [3]）。取一个足够小的球 B'，使得 $F(B') \subset B(0, \epsilon)$。存在一个足够小的 $\eta_0 > 0$，使得 $F^{-1}(B(0, \eta_0)) \subset B'.$。我们可以取足够小的 δ_0，使得对每个满足 $|c| \leq \delta_0$ 的 C，纤维 $g = c$ 对所有 $\eta_0 \leq \eta \leq \epsilon.$ 都与球面 S_η 横截。

设 h 是 $W = F^{-1}(V)$ 的一个约化（局部）方程。根据全纯 Nullstellensatz，我们有 $g \circ F = h^r$，其中 $r > 0$ 是一个自然数。因此，$(g - c)(F) = \prod_{i=1}^{r}(h - \alpha_i c^{1/r})$，其中 α_i 是从 1 开始的 r 次单位根。特别地，我们看到纤维 $\{h = \alpha_i c^{1/r}\}$ 被映射到纤维 $\{g = c\}.$。设 A_c 是 Milnor 纤维 $\{g = c\} \cap B(0, \eta_0)$，并设 $B_c = F^{-1}(A_c) \cap \{h = c^{1/r}\}.$。由于映射$F$: $B_c \to A_c$ 是有限的，因此对每个 k，映射 $F_* : H_k(B_c) \to H_k(A_c)$ 都是满射（见 [4]）。

根据米尔诺定理，秩 $H_{n-1}(A_c) = \mu(\mathbf{V}) = s \geq 1$，其中 μ(V) 是 $g.$ 的米尔诺数。特别地，存在 $n - 1$ 个圈 $\alpha_1, ..., \alpha_s \subset A_c$，使得 $[\alpha_i]$ 是 $H_{n-1}(A_c)$ 的生成元。设 β_i; $i = 1, ..., s$ 是 B_c 中的圈，满足 $F(\beta_i) = \alpha_i$。设 $A'_c = \{g = c\} \cap B(0, \epsilon)$。根据我们的假设，纤维 A_c 是 $A'_c.$ 的变形收缩。因此，圈 α_i; $i = 1, ..., s$ 也是 $H_{n-1}(A'_c)$ 的生成元。设$B'_c = \{h = c^{1/r})\} \cap B'$ 是 $B'.$ 中 h 的一个米尔诺纤维。考虑映射

$$F_* : H_{n-1}(B'_c) \to H_{n-1}(A'_c).$$

我们有 $F_*([\beta_i]) = [\alpha_i]$。因此，秩 $H_{n-1}(B'_c) \geq$ 秩 $H_{n-1}(A'_c)$，即，

$$\mu(F^{-1}(\mathbf{V})) \geq \mu(\mathbf{V}).$$

□

推论 2.3. 设 (V, 0) $\subset$ ($\mathbb{C}^n$, 0) 是一个复超曲面的芽，并设 f: ($\mathbb{C}^n$, 0) $\to$ ($\mathbb{C}^n$, 0) 是一个有限全纯映射的芽。那么，如果取约化结构后的芽 (F^{-1}(V)), 0) 是光滑的，则芽 (V, 0) 也光滑。

证明。我们采用归纳法。注意，若 V 有一个孤立奇点，则 V 光滑当且仅当 μ(V) = 0。特别地，在这种情况下，我们的推论可直接由定理 2.2 得出。特别地，若 $n = 2.$，则结论成立

现在假设 $n > 2$ 且 S := $Sing$(V, 0) 的维数大于 0。令$\mathcal{L}$ 为 $\mathbb{C}^n.$中的一个超平面线性系。在 V 上，我们考虑诱导的线性

系 $\mathcal{L}_V$。那么， $\mathcal{L}_V$ 中的一般成员 L_V 是奇异的，因为 $S \cap L \neq \emptyset$ （见 [2]中的引理 2.5）。此外， $F^*(L_V)$（以及 $F^{-1}(L)$）是光滑的，因为系统$F^*(\mathcal{L}_V)$在光滑的 $W = F^{-1}(V) \subset F^{-1}(L)$上没有基点（系统 $F^*(\mathcal{L})$在 $\mathbb{C}^n$上没有基点）。由于 $\dim\ L \cap V < \dim\ V$，这就产生了矛盾。□

致谢。作者感谢 Maciej Denkowski 教授和 Karolina Zaj,ac 教授的友好交流。

References

[1] L. Giraldo, R. K. W. Roeder, 《余维一对象奇点的拉回》，美国数学会会刊，148，1207—1217，（2020年）。[2] Jelonek, Z., Tibar, M. 多项式的分歧集与无穷远处分支 $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, 数学年刊，361，第3–4期，1049-1054，（2015年）。[3] Milnor, J.《复超曲面的奇点》，丛书: 数学年鉴研究丛书（1968年），普林斯顿大学出版社。[4] Wells, R. O. 适当满射映射的 de Rham 上同调与 Dolbeault 上同调之比较，太平洋数学杂志 53，281-300（1974年）。

Zbigniew Jelonek - Instytut Matematyczny, Polska Akademia Nauk, Sniadeckich8, 00-656 Warszawa, Poland.电子邮箱地址：najelone@cyf-kr.edu.pl