arXiv:2301.08999v1 [math.AP] 21 Jan 2023

希尔伯特空间上柯西问题的控制：基于符号判据的全局方法

DUVÁN CARDONA、JULIO DELGADO、BRIAN GRAJALES 和 MICHAEL RUZHANSK Y

ABSTRACT. 设 A 和 B 是关于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 在有限维子空间上的分解 $\{H_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的不变线性算子。我们给出柯西问题可控性的充要条件

$$u_t = Au + Bv,\ u(0) = u_0,$$

分别用与分解 $\{H_j\}_{j\in\mathbb{N}}$相关联的 A 和 B的（全局）矩阵值符号 σ_A 和 σ_B 来表述。随后，我们介绍若干应用，包括紧流形上椭圆算子柯西问题的可控性，以及紧李群上 H¨ormander 次拉普拉斯算子的分数阶扩散模型的可控性。我们还给出这些情形下波动方程和 Schr¨odinger 方程可控性的条件。

CONTENTS

1. 引言 21.1. 概述与方法论 21.2. 主要结果 31.3. 应用 41.4. 研究现状 51.5. 文章结构 62. 傅里叶乘子与抽象控制理论 72.1. 希尔伯特空间上的傅里叶乘子 72.2. 抽象控制理论 92.3. 紧李群上的左不变算子 103. 希尔伯特空间上的控制理论：符号判据 154. 应用 194.1. 解耦算法 194.2. 紧流形上柯西问题的控制 204.3. 紧李群上的卡尔曼判据 214.4. 分数阶次椭圆扩散模型的可控性 264.5. 希尔伯特空间上的波动方程与热方程 29

2020 年数学主题分类：35S30，42B20；次级分类：42B37，42B35。关键词与短语：控制理论、扩散模型、精确可控性、分数阶模型、可控性代价。作者获得 FWO Odysseus 1 项目 G.0H94.18N（分析与偏微分方程）以及根特大学特别研究基金（BOF）的 Methusalem 计划（资助编号 01M01021）支持。B. Grajales 获得 Universidad de Pamplona 的部分资助。J. Delgado 还获得 Universidad del Valle 副校长研究办公室资助（项目编号 CI 71329）、Math-AmSud 和 Minciencias-Colombia 项目 MATHAMSUD21-MATH-03 的支持。M. Ruzhansky 还获得 EPSRC 项目 EP/R003025/2 的支持。

4.6. 希尔伯特空间上薛定谔¨方程的控制5. 结论 参考文献 33
35
35

1. Introduction

1.1. 概要与方法。 本文提出一种用于判定希尔伯特空间上柯西问题可控性的方法。尽管已有一种广为人知的判据，用于判定该问题的可控性，该判据基于 J. L. Lions 提出的希尔伯特唯一性方法 [55,56], ，它将系统的可控性归结为相应伴随系统的可观测性不等式成立；本文则提出一种受伪微分算子微局部分析启发的判据（其灵感来自算子的符号这一概念，见 H¨ormander [46]），该判据将系统解耦

$$\frac{du}{dt} = Au + Bv(t),\ u(0) = u_0,\ t \in [0,T], \tag{1.1}$$

（其中， A 和 B 是可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的稠定算子），分解为无穷多个有限维控制系统

$$d\widehat{u}_\ell/dt = A_\ell \widehat{u}_\ell + B_\ell \widehat{v}_\ell(t),\ \widehat{u}_\ell(0) = \widehat{u}_{0,\ell} \in H_\ell,\ t \in [0,T],\ \ell \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2}$$

在这些系统中，可以应用卡尔曼判据，见 [50]。在此背景下，卡尔曼判据指出，秩条件

$$\mathrm{Rank}[B_\ell, A_\ell B_\ell, \cdots, A_\ell^{n_\ell - 1} B_\ell] = n_\ell = \dim(H_\ell), \tag{1.3}$$

为（1.2）的可控性提供了充要条件。我们的方法表明，系统（1.1）的精确可控性蕴含任意系统（1.2）的精确可控性。另一方面，我们的方法还表明，如果每个系统（1.2）均可控，且其可控性代价关于 ℓ 一致有界（也就是说，如果耦合系统（1.2）具有全局有限的可控性代价），那么我们便能够证明（1.1）精确可控。

从（1.1）到（1.2）的解耦过程采用如下方式进行：有限维子空间族 $(H_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ 构成底空间 $\mathcal{H} = \bigoplus_\ell H_\ell$. 的一个正交分解。相对于该分解以及 H_ℓ的任意一个标准正交基 $\mathcal{B}_\ell$ ，存在一个典范的傅里叶变换

$$\textbf{(FT):}\ u \mapsto \widehat{u}(\ell) \in \mathbb{C}^{n_\ell}, \tag{1.4}$$

由正交投影 $P_\ell : \mathcal{H} \to H_\ell$ 给出；鉴于傅里叶反演公式

$$u = \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} P_\ell u, \tag{1.5}$$

由 $\widehat{u}(\ell) = [P_\ell u]_{\mathcal{B}_\ell}$ 给出，也就是说，这是 $P_\ell u$相对于基$\mathcal{B}_\ell$. 显然，可以作如下对应 $\widehat{u}(\ell) \cong P_\ell u$.换言之，将（1.1）解耦为（1.2）的过程，无非就是对以下对象进行傅里叶变换:

系统（1.1）相对于分解 $(H_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}_0}$. 我们用下面的示意图来说明:

$$\boxed{(1.1) \Longrightarrow \mathbf{(FT)} \Longrightarrow (1.2)} \tag{1.6}$$

另一方面，一项对后续分析至关重要的事实是，如何将（1.2）中的所有系统耦合到（1.1）中。按照 量子力学中的标准术语，我们通过使用“符号到算子”的量化过程 *symbol-to-operator*来实现这一点。在我们的情形下（并在识别 $\widehat{u}(\ell) \cong P_\ell u$的条件下），序列 $(A_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$和 $(B_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$分别是算子 的符号 A 和 B的符号。量化过程

$$(A_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \mapsto A = \mathbf{QP}((A_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}),\ (B_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \mapsto B = \mathbf{QP}((B_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}),^{1} \tag{1.7}$$

可以根据算子 A 和 B的性质，分析其符号 $\sigma_A(\ell) := A_\ell$ 和 $\sigma_B(\ell) := B_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$分别进行。换言之，从（1.2）到（1.1）的耦合过程，是通过对（1.2）中的系统进行量化来实现的。我们用下图说明:

$$\boxed{(1.2) \Longrightarrow \mathbf{(QP)} \Longrightarrow (1.1)} \tag{1.8}$$

正如我们将会看到的，耦合与解耦过程是有效的，也就是说，下图中的信息得以保留

$$\boxed{(1.1) \Longrightarrow \mathbf{(FT)} \Longrightarrow (1.2) \Longrightarrow \mathbf{(QP)} \Longrightarrow (1.1)} \tag{1.9}$$

若算子 A和 B 保持正交分解 $(H_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$. 不变。因此，本研究中采用的一项基本几何性质是，每个 H_ℓ 分别都是 A和 B的不变子空间，也就是说，

$$\forall \ell,\ AH_\ell \subset H_\ell \text{ and } BH_\ell \subset H_\ell.$$

在阐明我们的方法后，接下来将介绍主要结果，并给出这一性质的若干一般性示例。

1.2. 主要结果。 根据第二位和第四位作者在 [27, 28]、 A 和 B 上发展起来的希尔伯特空间不变算子理论， $\mathcal{H}$ （与分解 $(H_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$相关联）是傅里叶乘子。在希尔伯特空间 σ_T 上[27,28] 的傅里叶乘子的全局矩阵值符号 T 的构造$\mathcal{H}$ 见第 2.1 定理，位于第 2.5小节。采用第 2.5 小节中的记号，我们在第 3.5 节陈述主要定理 3。当 A 生成一个（强连续半群） C_0-半群时，我们的主要定理实质上表明:

$$\boxed{(1.1) \text{ 是可控的 } \iff \forall \ell, \text{ (1.2) 满足卡尔曼条件 (1.3)}} \tag{1.10}$$

并且我们精确地计算了（1.1）的可控性代价与 全局可控性代价之间的关系；后者针对（1.3）中的系统，见定义3.4。详情请参见第3节。我们注意到，当 M是一个无边界紧流形时，上文讨论的傅里叶分析概念

[1]这里，我们采用记号 A =QP$((A_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}})$ 表示算子 A 是序列 $(A_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$. 的量化。我们用 QP 作为“量化过程”（Quantisation procedure）的缩写。在伪微分算子理论的标准术语中，也会写作 $A = \mathrm{Op}((A_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}})$，表示 A 是与符号 $(A_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$.相关联的算子

可以与 E上的任意椭圆正椭圆伪微分算子 M 相关联，其意义与 Seeley [67, 68]的定义一致。我们的方法涵盖了这一情形，其他应用将在下一小节中介绍，另见第4节。

1.3. 应用。从数学角度看，有许多不同的情境可以得到希尔伯特空间的正交分解 $\mathcal{H}$. 例如，出于本文的目的，我们给出几个例子：

- 在无边界的紧流形 $ML^2(M) = \bigoplus_\ell H_\ell$ 上，可以分解为正椭圆伪微分算子 E 的特征子空间 $H_\ell = \text{Ker}(E - \lambda_\ell I)$ 。 M• 在无边界的紧流形 M 上（特别是在任意紧李群 $M = G$上），$L^2(M) = \bigoplus_\ell H_\ell$ 可以分解为与一组满足 H¨ormander 条件的 H¨ormander 向量场系统$\mathcal{X} = \{X_1、 \cdots、 X_k\}$ 相关的正子拉普拉斯算子的分数次幂 $\mathcal{L} = -\sum_{j=1}^k X_j^2$的特征子空间 $H_\ell = \text{Ker}$ $(\mathcal{L}^{s/2} - \lambda_\ell I)$ 。这意味着， $\mathcal{X}$ 中的向量场及其迭代对易子张成切空间TM。
- 对于 $\mathbb{R}^n$， $L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_\ell H_\ell$ 可以分解为谐振子 $\mathscr{H} = -\Delta_x + |x|^2$（或更一般的非谐振子$\mathscr{H}_{l_1、\ l_2} = (-\Delta_x)^{l_1} + |x|^{2l_2}$、分数阶相对论薛定谔算子，以及当然包括其特殊情形——相对论薛定谔算子$\sqrt{I - \Delta} + |x|^{2l}$）的特征子空间 $H_\ell = \text{Ker}(\mathscr{H} - \lambda_\ell I)$ 。• 在 $\mathbb{R}^n$ 的有界开区域 Ω 上， $L^2(\Omega) = \bigoplus_\ell H_\ell$ 可以分解为谱分数阶拉普拉斯算子$(-\Delta)^s$ 的特征子空间 $H_\ell = \text{Ker}((-\Delta)^s - \lambda_\ell I)$ ，其在 $\partial\Omega$ 上具有齐次狄利克雷数据。•在任何可分复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中，若存在一个具有离散谱的无界自伴算子 E （依据谱定理），则上述情形均可作为例子。

接下来，我们的分析将涵盖形如（1.1）的模型，以及以下具体情形：

- 分数阶椭圆问题的控制。 M 是一个闭流形， $\mathcal{H}$ =$L^2(M)$是椭圆算子 E 在 M上的正次幂，而 B是与 E对易的算子（此条件保证 B 保持 A的特征子空间不变）。• 分数阶次椭圆问题的控制。同样，在闭流形M上， A 可以是正次拉普拉斯算子 $\mathcal{L} = -\sum_{j=1}^k X_j^2$的分数次幂，该算子与由向量场 $\mathcal{X} = \{X_1、$ $\cdots$构成的 H¨ormander 系统相关；这些向量场满足 H¨ormander 条件，而 B 是与 A对易的连续线性算子。• 非谐算子和相对论薛定谔算子的分数阶扩散模型的控制。A 可以是作用于 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的谐振子 $\mathscr{H} = -\Delta_x + |x|^2$（或者， A 可以是形如$\mathscr{H}_{l_1,\ l_2} = (-\Delta_x)^{l_1} + |x|^{2l_2}$的更一般的非谐振子），且 B与 A. 对易。同样， A 可以是形如$\sqrt{I - \Delta} + |x|^{2l}$ 的相对论薛定谔算子¨，且 B 与 A.对易

- 紧李群情形下的控制。 $M = G$ 是一个紧李群， A 和 B 是作用于 $C^\infty(G)$ 上的连续线性算子，且为左不变。这意味着它们与该群对 $C^\infty(G)$.的左作用 $L_x : \ f \mapsto f(x\cdot)$ 对易

尽管本文所概述的方法（见1.10）旨在分析希尔伯特空间上的一般柯西问题，但我们采用如此一般的方法，是由其广泛的应用所证明的（具体背景见前述示例）。该方法允许分析非局部模型，即主项 A为非局部算子的情形，例如开域 Ω 或闭流形 M上的分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^s$ 、分数阶次拉普拉斯算子 $(-\mathcal{L})^s$、椭圆算子 E 的任意正幂 E^s ，或任何满足以下条件的偏微分方程： A 其离散谱的主项包含伪微分项和/或积分项。

1.4. 研究现状。近年来，关于分数阶扩散模型可控性以及涉及非局部算子的其他微分问题的研究日益活跃。下面列出一些与本文相关的参考文献。

1.4.1. 概述。 分数阶扩散模型领域的研究日益活跃，这是由科学与工程不同分支中不断涌现的模型所推动的。例如，非局部方程和分数阶方程可作为湍流问题 [8], 图像处理 [41], 种群动力学 [24], 以及变指数模型中用于图像去噪的分数阶拉普拉斯算子的最优控制等领域的模型 [5, 7]。

此外，近期文献中的多项研究（例如参见 [1–3, 15, 16]）采用了分数阶拉普拉斯算子的数值方法，其技术基于 Glowinski 和 J. L. Lions 的研究成果，例如参见 [42, 43]。从数学角度来看，该领域的研究十分活跃，近期的开创性工作包括延拓方法（参见 Caffarelli 和 Silvestre [17, 18], ），以及涉及反问题和非局部偏微分方程分析的其他模型（例如参见 S. Dipierro、X. Ros-Oton 和 E. Valdinoci [31, 32], 、Fall 和 Felli [37], 、Ghosh、R¨uland、Salo 和 Uhlmann[40]）。关于扩散模型最优控制的近期研究，参见 [4–6] ；关于分数阶双曲问题和色散问题的分析，参见 [11–13, 38]。其他涉及分数阶扩散模型控制与数值方法的近期研究，可见文献 [10, 14, 23] 及其中所列的大量参考文献。

在非局部模型数值分析的广阔领域中，Boyer、Hubert 和 Rousseau 曾在 [16] 中，以及 Glowinski 和 Lions 曾在[42] 中，采用惩罚唯一性方法，在分数阶拉普拉斯算子的分析中数值计算控制函数。如上所述，这些算子值得关注，因为它们出现在大量描述实际情形的模型中。其中包括 [57] ，该文将分数阶 Schr¨ödinger 方程的一种实现应用于光学；[70] ，该文中的分数阶拉普拉斯算子出现在标量亥姆霍兹方程中，该方程用于探测地球内部的电磁信号；以及 Mandelbrot 和 Van Ness 关于分数布朗运动的经典论文 [58] 。

值得一提的是，研究柯西问题可控性，甚至近似可控性的另一种方法

$$du/dt = Au + Bv(t),\ u(0) = u_0,\ t \in [0,T],$$

是为了精确离散化算子 A. 其中一些方法已用于[1, 2, 9, 47] 分数阶拉普拉斯算子，并用于 [61] 狄利克雷分数阶拉普拉斯算子，它定义为拉普拉斯算子的幂，通过对拉普拉斯算子进行谱分解得到。

1.4.2. 紧流形上的控制理论。黎曼流形上的可控性研究由来已久。需要理解的基本模型是热方程和波动方程。Chen 和 Millman 首先证明了波动方程的精确可控性 [22]。Lebeau 和 Robbiano 在其开创性工作中证明了内部控制情形下热方程的精确可控性 [53]。特别是， [53] 中提出的方法改变了该领域的研究视角，将伴随系统的可观测性不等式归结为谱不等式成立的问题，参见 Jerison 和 Lebeau [48] 以及 Lebeau 和 Zuazua [54]。这种谱不等式是对 Donnelly 和 Fefferman [33–36] 所提出谱不等式的推广。

关于一般椭圆伪微分算子正幂的分数阶扩散模型，请参阅 [19, 21]。另一方面，我们注意到，在 [26], 中，Coron 和 Furkisov 纯粹借助分析工具，证明了紧致二维流形上不可压缩流体的纳维–斯托克斯方程在短时间内的可控性。

在开域上的分数阶热方程（满足适当的边界条件）这一框架下，已有若干研究致力于内部控制问题，而相关数值分析则集中于一维情形。为说明这一点，考虑分数阶热方程

$$\frac{du}{dt} = -(\Delta_M)^{s/2}u + 1_\omega v, \tag{1.11}$$

其中 $\omega \subset M$ 是一个开子集。对于 $s = 2$，Lebeau 和 Robbiano 证明了模型（1.11）的零可控性 [53]。Micu 和 Zuazua [59]以及 Biccari 和 Hern´andez-Santamar´ıa 证明，在一维情形下，当且仅当 $v \in L^2(\omega \times (0$ 时，存在控制函数使其可零控制，$T))$；而当 $1 < s < 2$ 时，作者分析了该系统的近似可控性，另见 $0 < s < 1$。另请参见 [9]。在[14], Biccari、Warma 和 Zuazua 证明了使用有界控制函数也能得到相同结果。

1.5. 本文结构。 本文结构安排如下：第 2节介绍希尔伯特空间上的傅里叶分析、不变算子理论及其符号性质的预备知识，这些内容在 [27, 28]中已有阐述。我们还介绍紧李群上连续线性算子的矩阵值符号的构造方法，该方法见 [64] ，以及本文所用的抽象控制理论结果，即希尔伯特空间上柯西问题可控性的卡尔曼条件和可观测性判据。我们的主要结果以定理 3.5 的形式在第 3节给出。第 4 节专门介绍

主要结果的多种应用。其结构安排如下：第 4.2 小节分析紧流形上椭圆算子的扩散模型的可控性。第 4.3小节在紧李群 G 的背景下重新讨论定理 3.5 ，并在定理 4.7 中给出适用于 G. 上一般左不变算子柯西问题的判据。我们根据 G上的群傅里叶变换所构造的算子矩阵值符号来细化该判据；或者等价地，根据 [64]中阐述的群表示论来细化。第 4.4小节专门讨论由紧李群上 H¨ormander 次拉普拉斯算子的幂所确定的分数阶模型的可控性。第 4.5 小节通过对每个表示空间进行 Kalman 型分析，从波算子的可控性推导出热算子的可控性。第 4.6 小节将定理 3.5作为应用，给出控制 Schr¨odinger 方程的卡尔曼条件。最后，第 5 节总结本文提出的符号判据方法。

2. Fourier multipliers and abstract control theory

2.1. 希尔伯特空间上的傅里叶乘子。 我们现在回顾 [28] 中引入的不变算子的概念，该概念基于以下定理:

定理 2.1。设 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间，且 $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}$的一个稠密线性子空间。设 $\{d_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{N}$，且令 $\{e_j^k\}_{j\in\mathbb{N}_0,\ 1\leqslant k\leqslant d_j}$ 为 $\mathcal{H}$的一组标准正交基，使得对于所有 j 和 k，均有 $e_j^k \in \mathcal{H}^\infty$ 。设 $H_j :=$ 张成 $\{e_j^k\}_{k=1}^{d_j}$，并令 $P_j : \mathcal{H} \to H_j$ 为正交投影。对于 $f \in \mathcal{H}$，记 $\widehat{f}(j、k) := (f、e_j^k)_{\mathcal{H}}$，并令 $\widehat{f}(j) \in \mathbb{C}^{d_j\widehat{}}$表示 $f(j、k)$、$1 \leqslant k \leqslant d_j$. 的列。设 $T: \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ 是一个线性算子。则以下条件等价:

(A) 对于每个 $j \in \mathbb{N}_0$，我们有 $T(H_j) \subset H_j$。(B) 对于每个 $\ell \in \mathbb{N}_0$ ，存在一个矩阵 $\sigma_T(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$ ，使得对于所有 e_j^k

$$\widehat{Te_j^k}(\ell, m) = \sigma_T(\ell)_{mk}\delta_{j\ell}.$$

(C) 对于每个 $\ell \in \mathbb{N}_0$ ，存在一个矩阵 $\sigma_T(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$ ，使得

$$\widehat{Tf}(\ell) = \sigma_T(\ell)\widehat{f}(\ell)$$

对于所有 $f \in \mathcal{H}^\infty$.

(B) 和 (C) 中的矩阵 $\sigma_T(\ell)$ 相同。

等价性质 (A)–(C) 可由条件推出

(D) 对于每个 $j \in \mathbb{N}_0$，我们在 $\mathcal{H}^\infty$ 上有 $TP_j = P_jT$。

此外，如果 T 可延拓为有界算子 $T \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ ，那么 (D) 等价于 (A)–(C)。

注 2.2. 在定理 2.1的假设下，我们有如下直和分解

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} H_j, \quad H_j = \operatorname{span}\{e_j^k\}_{k=1}^{d_j}, \tag{2.1}$$

并且我们有 $d_j =$ 维 H_j.

注记 2.3。 按照定理 2.1中的记号，对于 $f \in \mathcal{H}$，傅里叶变换

$$\widehat{f} : \mathbb{N}_0 \to \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}_0} \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}, \ \widehat{f}(j) = ((f, e_j^1)_{\mathcal{H}}, \cdots, (f, e_j^k)_{\mathcal{H}}, \cdots, (f, e_j^{d_j})_{\mathcal{H}})^T, \tag{2.2}$$

相对于子空间分解 $\{H_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$，满足傅里叶反演公式

$$f = \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} (\widehat{f}(\ell), e_\ell)_{\mathbb{C}^{d_\ell}}, \tag{2.3}$$

其中，$(x、\ y) \mapsto (x、\ y)_{\mathbb{C}^{d_\ell}}$表示 $\mathbb{C}^{d_\ell}$上的标准内积，且每个 e_ℓ都是列向量

$$e_\ell = (e_\ell^1, \cdots, e_\ell^k, \cdots, e_\ell^{d_\ell})^T. \tag{2.4}$$

注意，普朗歇尔公式的形式为

$$\forall f \in \mathcal{H}, \ \|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} \|\widehat{f}(\ell)\|_{\mathbb{C}^{d_\ell}}^2. \tag{2.5}$$

注 2.4. 我们将考虑的两种应用分别是：对于紧流形 $\mathcal{H} = L^2(M)$，取 M，其中 H_j 为椭圆经典伪微分算子 E的特征子空间；或者对于紧李群 $\mathcal{H} = L^2(G)$，取 G，其中

$$H_j = \operatorname{span}\{\xi_{km}\}_{1 \leqslant k,m \leqslant d_\xi}$$

$\widehat{}$对应于酉不可约表示 $\xi \in [\xi_j] \in G$。两种情形的区别在于，第一种情形中，E 的特征值（对应于 H_j）两两不同；而在第二种情形中，G 上的拉普拉斯算子的特征值（其特征子空间为 H_j）可能相同。

定义 2.5。 鉴于性质 (A) 和 (C)，分别地，算子 T 满足定理 2.1 中任一等价性质 (A)–(C) 的算子，将称为不变算子，或称为相对于分解 的傅里叶乘子 $\{H_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$（2.1）中的分解。如果集合 $\{H_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ 始终固定不变，我们也可以直接称 T 为不变的或称为傅里叶乘子。矩阵族 σ 将称为 相对于划分 T 以及基 $\{H_j\}$ 的矩阵符号 $\{e_j^k\}$。

注 2.6。 沿用定义 2.5中的记号，根据式（2.3）中的傅里叶反演公式，我们有矩阵值量子化公式

$$Tf = \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} (\sigma_T(\ell) \widehat{f}(\ell), e_\ell)_{\mathbb{C}^{d_\ell}}, \ f \in \mathcal{H}^\infty. \tag{2.6}$$

作为定理 2.1的推论，我们得到如下在无边界紧流形上构造全局矩阵值符号的方法。

定理 2.7（紧流形上的傅里叶乘子）。设 M 是一个闭流形。考虑 $E \in \Psi_{cl,\ +}^{\nu}(M)$ 是 M. 上一个 阶的经典正伪微分算子 $\nu > 0$ 。令

- $H_j = \operatorname{Ker}(E - \lambda_j I)$ 是 E的特征子空间族，• $P_j : \ L^2(M) \to H_j$ 是相应的正交投影，• $\{d_j\}_{j \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{N}$ 是由各 H_j的维数组成的序列，

• 并假设$\mathcal{B} = \{e_j^k\}_{j\in\mathbb{N}_0,\ 1\leqslant k\leqslant d_j}$是 $L^2(M)$的一组标准正交基，其中每个 H_j 都由基张成span$\{e_j^k\}_{k=1}^{d_j}$.

对于 $f \in L^2(M)$，我们将 f 关于基底 $\mathcal{B}$. 的傅里叶系数记为 $\widehat{f}(j,k) := (f, e_j^k)_{\mathcal{H}}$。令

$$\widehat{f}(j) \in \mathbb{C}^{d_j}$$

将 $\widehat{f}(j,k)$, $1 \leqslant k \leqslant d_j$. 的列记为。令 T: $C^\infty(M) \to L^2(M)$ 为线性算子。那么以下条件等价:

(A) 对每个 $j \in \mathbb{N}_0$，都有 $T(H_j) \subset H_j$。(B) 对每个 $\ell \in \mathbb{N}_0$，存在一个矩阵 $\sigma_T(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$，使得对于所有 e_j^k

$$\widehat{Te_j^k}(\ell, m) = \sigma_T(\ell)_{mk}\delta_{j\ell}.$$

(C) 对每个 $\ell \in \mathbb{N}_0$，存在一个矩阵 $\sigma_T(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$，使得

$$\widehat{Tf}(\ell) = \sigma_T(\ell)\widehat{f}(\ell)$$

对于所有 $f \in C^\infty(M)$.

矩阵 $\sigma_T(\ell)$ 在 (B) 和 (C) 中相同。

等价性质 (A)–(C) 可由条件推出

(D) 对每个 $j \in \mathbb{N}_0$，我们都有 $TP_j = P_jT$ 在 $\mathcal{H}^\infty$ 上。

此外，若 T 可扩张为有界算子 $T \in \mathscr{L}(L^2(M))$，则 (D) 等价于 (A)–(C)。

注 2.8. 设 $A, B: \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ 为傅里叶乘子。假设 A 是 C_0-半群 $S(t)$ 的生成元，即

$$\forall v \in \mathcal{H}^\infty,\ Av = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(S(t)v - v\right), \tag{2.7}$$

其中 th 该极限是相对于 $\mathcal{H}$ 上的范数取的。在这种情况下，有

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ \sigma_{S(t)}(\ell) = e^{t\sigma_A(\ell)} \text{ and } \sigma_{B^*}(\ell) = \sigma_B(\ell)^*. \tag{2.8}$$

2.2. 抽象控制理论。本节将介绍关于一般形式控制系统可控性的一些结果

$$\frac{du}{dt} = Au + Bv(t),\ t \in [0, T], \tag{2.9}$$

其中 A 和 B 是定义在希尔伯特空间稠密子空间上的连续线性 $\mathcal{H}$值算子， $\mathcal{H}$ 而 $\mathcal{V}$分别是，且 A 是强连续半群 $S(t)$的生成元， $t > 0$. 对此我们将遵循 J. M. Coron [25, 第四章]。

我们先明确可控性的定义。

定义 2.9。 系统（2.9）在时间 $T > 0$ 内可控， u_0如果对于每个 $u_T \in D(A)$，都存在一个输入（或控制）映射 v： $[0, T] \to D(B)$ 使得柯西问题u 的解

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + Bv, \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

在时间 T 到达 u_T，即 $u(T) = u_T$.

关于系统可控性的研究已有大量文献（2.9）。例如，可参阅 [63] 和 [71]。人们已开发并在不同背景下应用了大量解析和数值方法，例如，R. K´alm´an 提出并证明了一个判据，用于确定有限维线性系统是否可控。该判据将在以下定理中给出。

定理 2.10 (卡尔曼判据 [49])。 若 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{V}$ 的维数均为有限维 n 且m 分别为有限维，则系统 (2.9) 在时间 $T > 0$ 内可控，当且仅当

$$\operatorname{rank}\left[B, AB, \cdots, A^{n-1}B\right] = n. \tag{2.10}$$

等式（2.10）称为卡尔曼秩条件，并且可以看出它不依赖于时间 T，因此特别地，卡尔曼判据意味着，在有限维情形下，若系统在某个时间 $T > 0$可控，则它在任意时间都可控。

下一个定理提供了另一种有用工具，可用于判定系统在时间 $T > 0$ 内是否可控。关于该定理的证明，例如可参见 [25,第 57]页。

定理 2.11 (可观测性判据)。 系统 (2.9) 在时间$T > 0$ 内可控，当且仅当存在常数 $c_T > 0$ 使得

$$\int_0^T ||B^* S(t)^* z||_{\mathcal{V}}^2 dt \geqslant c_T^2 ||z||_{\mathcal{H}}^2, \ \forall z \in D(A^*), \tag{2.11}$$

其中 $D(A^*)$ 表示算子 A.的伴随算子 A^* 的定义域

不等式（2.11）通常称为系统（的可观测性不等式 2.9），我们将在主定理的证明中使用它。

注 2.12。 $c(T) > 0$ 表示满足可观测性不等式（ $c_T > 0$ 的常数的上确界。按照控制理论中的标准术语，该常数

$$\boxed{\mathscr{C}_T := 1/c(T)}$$

称为可控系统（的可控性代价2.9）。

2.3. 紧李群上的左不变算子。为了记录傅里叶乘子与左不变算子之间的等价关系，我们先介绍紧李群傅里叶分析的一些基础知识。

设 dx 为紧李群 G.上的哈尔测度。希尔伯特空间 $L^2(G)$将赋予内积

$$(f, g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx.$$

根据彼得-外尔定理， $L^2(G)$ 的谱分解可以通过紧李群 G上酉表示的矩阵元来实现。为陈述这一类定理，我们先介绍一些预备知识。

定义 2.13（紧李群的酉表示）。 G 在 $\mathbb{C}^\ell$ 上的连续酉表示是任意连续映射 $\xi \in \mathrm{Hom}(G,\ \mathrm{U}(\ell))$，其中 $\mathrm{U}(\ell)$ 是阶为 $\ell \times \ell$. 的酉矩阵李群。整数ℓ =dimξ 称为表示的维数 ξ，因为它就是表示空间 $\mathbb{C}^\ell$.的维数。

注 2.14（不可约表示）。若子空间 $W \subset \mathbb{C}^{d_\xi}$ 对任意 $x \in G$、 $\xi(x)(W) \subset W$ 都满足 ξ-不变，其中 $\xi(x)(W) := \{\xi(x)v : v \in W\}.$，则称其为 ξ-不变子空间。如果表示 ξ 的不变子空间只有 $W = \varnothing$ 和 $W = \mathbb{C}^{d_\xi}$（即平凡子空间），则称该表示为不可约表示。另一方面，任意酉表示 ξ 都是酉不可约表示的直和。我们将其记为 $\xi = \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_j$，其中 ξ_i 是定义在因子 $\mathbb{C}^{d_{\xi_i}}$ 上的不可约表示，这些因子将表示空间分解为

$$\mathbb{C}^{d_\xi} = \mathbb{C}^{d_{\xi_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^{d_{\xi_j}}.$$

定义 2.15（等价表示）。两个酉表示 s

$$\xi \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{U}(d_\xi)) \text{ and } \eta \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{U}(d_\eta))$$

若存在一个线性可逆映射 S :$\mathbb{C}^{d_\xi} \to \mathbb{C}^{d_\eta}$，使得对任意 $x \in G$、 $S\xi(x) = \eta(x)S.$ 都有 S，则称它们等价。映射 S 称为 ξ 与 $\eta.$ 之间的交织算子。 ξ 与 η 之间所有交织算子的集合记为 $\mathrm{Hom}(\xi, \eta).$

注 2.16（舒尔引理）。根据舒尔于 1905 年提出的引理，若 $\xi \in$ Hom(G，且 U (d_ξ))不可约，则 $\mathrm{Hom}(\xi, \xi) = \mathbb{C}I_{d_\xi}$ 由单位矩阵的数乘 I_{d_ξ} 构成，其阶为 $d_\xi.$

定义 2.17（酉对偶）。在酉表示集合 $\mathrm{Rep}(G)$ 上定义关系 $\sim$： $\xi \sim \eta$ 当且仅当 ξ 与 η 是等价表示，则该关系是等价关系。商集

$$\widehat{G} := \mathrm{Rep}(G)/\sim$$

称为 $G.$ 的酉对偶

酉对偶编码了群上的所有傅里叶分析。傅里叶变换定义如下。

定义 2.18（群傅里叶变换）。若 $\xi \in \mathrm{Rep}(G)$，则傅里叶变换 $\mathscr{F}_G$ 将任意 $f \in C^\infty(G)$ 关联到一个定义在 $\mathrm{Rep}(G)$ 上的矩阵值函数 $\mathscr{F}_G f$，如下所示

$$(\mathscr{F}_G f)(\xi) \equiv \widehat{f}(\xi) = \int_G f(x)\xi(x)^* dx,\ \xi \in \mathrm{Rep}(G).$$

注 2.19（紧李群上的傅里叶反演公式）。离散^施瓦茨空间 $\mathscr{S}(G)$：
$= \mathscr{F}_G(C^\infty(G))$ 是光滑函数类在傅里叶变换下的像。该算子存在一个从 $L^2(G)$到

$\ell^2(\widehat{G})$，其中

$$\ell^2(\widehat{G})=\left\{\phi:\forall[\xi]\in\widehat{G},\,\phi(\xi)\in\mathbb{C}^{d_\xi\times d_\xi}\text{ and }\|\phi\|_{\ell^2(\widehat{G})}:=\left(\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\|\phi(\xi)\|^2_{\mathrm{HS}}\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\right\}. \tag{2.12}$$

范数 $\|\phi(\xi)\|_{\mathrm{HS}}$ 是矩阵的标准希尔伯特–施密特范数。傅里叶反演公式的形式为

$$f(x)=\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\mathrm{Tr}[\xi(x)\widehat{f}(\xi)],\,f\in L^2(G), \tag{2.13}$$

其中，求和的含义是：对于任意一个等价类 $[\xi]$，我们随机选取一个酉表示。

注 2.20。群傅里叶变换的普朗歇尔定理的形式为

$$\forall f\in L^2(G),\ \|f\|_{L^2(G)}=\left(\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\|\widehat{f}(\xi)\|^2_{\mathrm{HS}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.14}$$

设 $A:\ C^\infty(G)\to C^\infty(G)$ 是关于标准弗雷歇结构的连续线性算子 $C^\infty(G)$. 。有一种方法可以将算子 $\backsim A$ 与定义在非交换相空间 $G\times G$ 上的矩阵值函数 σ_A 关联起来，从而用傅里叶反演公式和傅里叶变换来改写算子 A 。这样的表达式称为去量子化公式。为引入该公式，我们需要以下定义。

定义 2.21（算子的右卷积核）。施瓦茨核定理将一个核 A 与 $K_A\in\mathscr{D}'(G\times G)$ 联系起来，使得

$$Af(x)=\int_G K_A(x,y)f(y)dy,\ f\in C^\infty(G).$$

由 $R_A(x,y):=K_A(x,xy^{-1})$ 定义的分布，给出了卷积恒等式

$$Af(x)=\int_G R_A(x,y^{-1}x)f(y)dy,\ f\in C^\infty(G),$$

称为 A.的右卷积核

注 2.22（去量子化公式）。现在，我们将把一个全局符号$\sigma_A:\ G\times\mathbf{Rep}(G)\to\cup_{\ell\in\mathbb{N}}\mathbb{C}^{\ell\times\ell}$ 与 $A.$ 联系起来。事实上，给定一个 $x_0\in G$，我们可以考虑由下式定义的连续线性算子 $A_{x_0}:$ $C^\infty(G)\to C^\infty(G)$

$$A_{x_0}f(x)=\int_G R_A(x_0,y^{-1}x)f(y)dy=(f*R_A(x_0,\cdot))(x),$$

取傅里叶变换后，我们得到

$$\widehat{A_{x_0}f}(\xi)=\widehat{R_A(x_0,\cdot)}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

于是，傅里叶反演公式给出了算子A_{x_0}关于傅里叶变换的如下表示，

$$A_{x_0}f(x)=\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\mathrm{Tr}[\xi(x)\widehat{R_A(x_0,\cdot)}(\xi)\widehat{f}(\xi)],\ f\in C^\infty(G), \tag{2.15}$$

因此，

$$Af(x)=A_xf(x)=\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\mathrm{Tr}[\xi(x)\widehat{R_A(x,\cdot)}(\xi)\widehat{f}(\xi)],\ f\in C^\infty(G). \tag{2.16}$$

我们将 A 在 $(x,\xi)\in G\times\mathrm{Rep}(G)$ 处的符号定义为

$$\sigma_A(x,\xi):=\widehat{R_A(x,\cdot)}(\xi), \tag{2.17}$$

使得

$$Af(x)=\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\mathrm{Tr}[\xi(x)\sigma_A(x,\xi)\widehat{f}(\xi)],\ f\in C^\infty(G). \tag{2.18}$$

公式（2.18）与表示 ξ 中任意$\widehat{}$等价类 $[\xi]\in G.$ 的选取无关。这是傅里叶反演公式的推论。

在下面的量子化定理中，我们注意到分布 σ_A 在（2.18）中是唯一的，并且可以用算子 A表示，参见 [64, 第 552–553]页的定理 10.4.4 和 10.4.6。

定理 2.23。设 $A:\ C^\infty(G)\to C^\infty(G)$是一个连续线性算子。以下陈述等价。

- 分布 $\sigma_A:\ G\times\widehat{G}\to\cup_{\ell\in\mathbb{N}}\mathbb{C}^{\ell\times\ell}$ 满足量子化公式
$$\forall f\in C^\infty(G),\ \forall x\in G,\ Af(x)=\sum_{[\xi]\in\widehat{G}}d_\xi\mathrm{Tr}[\xi(x)\sigma_A(x,\xi)\widehat{f}(\xi)]. \tag{2.19}$$
- $\forall(x,\xi)\in G\times\mathrm{Rep}(G),\ \sigma_A(x,\xi)=R_A(x,\cdot)(\xi).$
- $\forall(x,\ \xi),\ \ \sigma_A(x,\ \xi)=\xi(x)^*A\xi(x),$ 其中 $A\xi(x):=(A\xi_{ij}(x))_{i,\ j=1}^{d_\xi}.$

例 2.24（拉普拉斯算子的谱）。设

$$\mathbb{X}=\{X_1,\cdots,X_n\}$$

是李代数 $\mathfrak{g}.$ 的一个标准正交基。 G 上的正拉普拉斯算子是二阶微分算子

$$\mathcal{L}_G=-\sum_{j=1}^n X_j^2. \tag{2.20}$$

算子 $\mathcal{L}_G$ 与标准正交基 $\mathbb{X}$ 的选取无关， $\mathfrak{g}.$ 的L^2谱 $\mathcal{L}_G$ 是一个离散集合，可用酉$\widehat{}$对偶 G进行枚举。

$$\mathrm{Spect}(\mathcal{L}_G)=\{\lambda_{[\xi]}:[\xi]\in\widehat{G}\}. \tag{2.21}$$

特别　对我们后续分析尤其重要的是日式括号函数　　n

$$\langle t\rangle:=(1+t)^{\frac{1}{2}},\ t\geqslant-1. \tag{2.22}$$

特别是，算子 $\langle \mathcal{L}_G \rangle = (1+\mathcal{L}_G)^{\frac{1}{2}}$ 的符号为

$$\sigma_{\langle \mathcal{L}_G \rangle}([\xi]) := \langle \xi \rangle I_{d_\xi}, \ \langle \xi \rangle := \langle \lambda_{[\xi]} \rangle. \tag{2.23}$$

考虑群 G 在 $C^\infty(G)$ 上的作用，由 $\rho\colon (x,f) \longmapsto f \circ L_x$ 给出，其中 $L_x(y) := xy.$。连续算子 $A\colon C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ 称为左不变的，如果 A 与 $\rho(x,\cdot)$ 对所有 $x \in G$ 都可交换，即满足以下性质

$$A(f \circ L_x) = (Af) \circ L_x, \ f \in C^\infty(G), \ x \in G.$$

命题 2.25 ([64])。 以下陈述等价:

$i)$ A 是左不变的。$ii)$ $R_A(x,y) = R_A(zx,y), \ \forall x,y,$
$z \in G iii)$ $\sigma_A(x_1,\xi) = \sigma_A(x_2,\xi),$ 对所有 $x_1, x_2 \in G$ 以及
$\xi \in \mathrm{Rep}(G) iv)$ $A_{x_0} = A, \ \forall x_0 \in G.$

特别地，上述命题表明，对于左不变算子 A，其符号 $\sigma_A(x,\xi)$ 不依赖于 x，因此在这种情况下，我们可以对任意 $x \in G$.定义 $\sigma_A(\xi) := \sigma_A(x,\xi)$

注 2.26. 设 $A, B\colon C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ 为连续线性算子。假设 A 是 C_0-半群 $S(t)$的生成元，也就是说

$$\forall f \in C^\infty(G), \ Af = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(S(t)f - f \right), \tag{2.24}$$

其中，极限是相对于 G上的 L^2-范数而言的。若 A 是左不变的，注意到

$$\forall \xi \in \widehat{G}, \ \sigma_{S(t)}(\xi) = e^{t\sigma_A(\xi)} \text{ and } \sigma_{B^*}(\xi) = \sigma_B(\xi)^*. \tag{2.25}$$

注记 2.27（紧流形上的傅里叶乘子与不变算子）。若$A\colon C^\infty(G) \to L^2(G)$ 是一个不变算子（相对于拉普拉斯算子 $\mathcal{L}_G$），那么我们有两种全局符号的概念。一种是根据群 G 的表示论定义的，我们将此符号记为 $(\sigma_A(\xi))_{[\xi] \in \widehat{G}}$；另一种则是在将紧李群视为流形时定义的，此时符号记为 $(\sigma_A(l))_{l \in \mathbb{N}_0}.$。这两种符号之间的关系已在 [28, 第 25]页中确立。现在，我们来描述这种关系。在紧李群的情形下，由于酉对偶是离散的，我们可以将酉对偶枚举为 $[\xi_j]$，其中 $j \in \mathbb{N}_0.$。这样便固定了标准正交基

$$\{e_{jk}\}_{k=1}^{d_j} = \{d_{\xi_j}^{\frac{1}{2}}(\xi_j)_{il}\}_{i,l=1}^{d_{\xi_j}} \tag{2.26}$$

其中 $d_j = d_{\xi_j}^2$.那么，我们有子空间 $H_j =$张成$\{(\xi_j)_{i,\ l}\colon \ i,l = 1, \cdots, d_{\xi_j}\}$.利用上述记号，我们有

$$\sigma_A(l) = \begin{bmatrix} \sigma_A(\xi_l) & 0_{d_{\xi_l} \times d_{\xi_l}} & 0_{d_{\xi_l} \times d_{\xi_l}} & \cdots & 0_{d_{\xi_l} \times d_{\xi_l}} \\ 0_{d_{\xi_l} \times d_{\xi_l}} & \sigma_A(\xi_l) & 0_{d_{\xi_l} \times d_{\xi_l}} & \cdots & 0_{d_{\xi_l} \times d_{\xi_l}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{d_{\xi_l} \times d_{\xi_l}} & 0_{d_{\xi_l} \times d_{\xi_l}} & 0_{d_{\xi_l} \times d_{\xi_l}} & \cdots & \sigma_A(\xi_l) \end{bmatrix}_{d_l \times d_l}.$$

3. Control theory on Hilbert spaces: symbol criteria

本节给出希尔伯特空间上与傅里叶乘子相关的柯西问题的一个可控性判据。正如上一节所示，这些算子保持希尔伯特空间的一个固定分解不变，该分解由有限维子空间构成。下面以定理 3.5 的形式给出这一结果，并用算子的全局矩阵值符号来表述。为了进一步分析，我们需要以下定义。

定义 3.1（柯西问题在傅里叶变换下的像）。设 $\mathcal{H}$是一个复希尔伯特空间，$\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}$的一个稠密线性子空间。设$\mathcal{H} = \bigoplus_j H_j$ 是 $\mathcal{H}$ 在正交子空间 H_j 上的一个分解，每个子空间的维数为 $d_j \in \mathbb{N}$.设 A、B：$\mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ 是相对于分解 $\{H_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$.的傅里叶乘子。考虑柯西问题

$$(\mathrm{CP}):\begin{cases}\dfrac{du}{dt} = Au + Bv,\\[2ex] u(0) = u_0 \in \mathcal{H}^\infty.\end{cases} \tag{3.1}$$

我们将 (CP) 在傅里叶变换下相对于分解 $\{H_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ 的像定义为以下有限维动力系统的无穷族

$$((\mathrm{CP}),\ell):\begin{cases}\dfrac{d\widehat{u}(\ell)}{dt} = \sigma_A(\ell)\widehat{u}(\ell) + \sigma_B(\ell)\widehat{v}(\ell),\\[2ex] \widehat{u(0)}(\ell) = \widehat{u}_0(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell}.\end{cases}, \ell \in \mathbb{N}_0. \tag{3.2}$$

前述定义的动机在于将系统 (3.1) 的可控性归约

引理 3.2。以下陈述等价。

(1) 对于所有 $\ell \in \mathbb{N}$，柯西问题 $((\mathrm{CP})\ \ell)$ 在 (4.6) 在时刻 $T > 0$ 是一个可控动力系统。(2) $\forall \ell \in \mathbb{N}_0$，卡尔曼条件

$$\operatorname{rank}\left[\sigma_B(\ell),\ \sigma_A(\ell)\sigma_B(\ell),\ \cdots,\ \sigma_A(\ell)^{d_\ell-1}\sigma_B(\ell)\right] = d_\ell \tag{3.3}$$

成立。

(3) $\forall \ell \in \mathbb{N}_0$, $\exists c = c(\ell, T) > 0$ 使得

$$\int_0^T ||\sigma_B(\ell)^* \exp\left(t\sigma_A(\ell)^*\right)z||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}} dt \geqslant c(\ell,T)^2||z||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}},\ \forall z \in \mathbb{C}^\ell. \tag{3.4}$$

证明。 注意，等价关系（1） $\iff$ （2）由卡尔曼判据推出（参见定理 2.10）。另一方面，等价关系（1） $\iff$ （3）正是定理 2.11中的可观测性判据。因此，显然等价关系（2） $\iff$ （3）成立。 引理 4.4 的证明完成。 □

注记 3.3。 设 $c_{\ell,\ T}$为满足可观测性不等式（4.8）的常数 $c = c(\ell,\ T) > 0$ 的上确界。按照控制理论中的通常术语，该常数

$$\boxed{\mathscr{C}_{\ell,T} := 1/c_{\ell,T}}$$

称为柯西问题（3.2）的可控性代价。

定义 3.4。 我们称柯西问题（3.1）在与分解 $\{H_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 相关的傅里叶变换下的像具有有限的全局可控性代价，当且仅当

$$\mathscr{C}_T := \sup_{\ell\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_{\ell,T} < \infty. \tag{3.5}$$

现在，我们给出以下判据，用于判断希尔伯特空间上傅里叶乘子的柯西问题的可控性。

定理 3.5。设 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间， $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}$的稠密线性子空间。设 $\mathcal{H} = \bigoplus_j H_j$ 是 $\mathcal{H}$ 在维数为 $d_j \in \mathbb{N}.$ 的正交子空间H_j 上的一个分解。设 A、 B : $\mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ 是相对于分解 $\{H_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}.$ 的傅里叶乘子

(1) 如果柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + Bv, \\ \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{H}^\infty, \end{cases} \tag{3.6}$$

是可控的，那么对于任意 $\ell \in \mathbb{N}_0$， A和 B的全局符号 $\sigma_A(\ell)$ 和 $\sigma_B(\ell)$ 分别满足卡尔曼条件:

$$\operatorname{rank}\left[\sigma_B(\ell),\ \sigma_A(\ell)\sigma_B(\ell),\ \cdots,\ \sigma_A(\ell)^{d_\ell-1}\sigma_B(\ell)\right] = d_\ell. \tag{3.7}$$

此外，如果 A 在 $\mathcal{H}$上生成强连续半群，柯西问题 (3.6) 相对于分解 $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 的傅里叶变换像，在时间 $T > 0$ 上具有有限的全局可控性代价，即

$$\mathscr{C}_T := \sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \mathscr{C}_{\ell,T} < \infty.$$

此外，

$$\mathscr{C}_T \leqslant \tilde{\mathscr{C}}_T,$$

其中 $\mathscr{C}_T$ 是柯西问题 (3.6) 的可控性代价。

(2) 反过来，假设 A 是 $\mathcal{H}$ 上强连续半群的生成元，并且对每个 (3.7)，卡尔曼条件均成立 $\ell \in \mathbb{N}_0$。假设柯西问题 (3.6) 相对于分解 $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 的傅里叶变换像，在时间 $T > 0$ 内具有有限的全局可控性代价，即，

$$\mathscr{C}_T := \sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \mathscr{C}_{\ell,T} < \infty.$$

于是，柯西问题 (3.6) 在时刻 $T > 0$ 可控，且其可控成本 $\mathscr{C}_T$ 满足不等式

$$\mathscr{C}_T \geqslant \tilde{\mathscr{C}}_T. \tag{3.8}$$

证明。 为证明 (1)，我们分析 (3.6) 在与分解 H_j、 $j \in \mathbb{N}$ 相关的傅里叶变换下的像，以推导出 (3.7)。为证明 (2)，按照控制理论的标准策略，我们将把系统 (3.6) 的可控性归结为定理 2.11 中可观测性不等式 (2.11) 的成立。

- 假设柯西问题 (3.6) 是可控的。固定 $\ell \in \mathbb{N}_0$，并对分解 $\{H_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$，取傅里叶变换，我们得到

$$\frac{d\widehat{u}(\ell)}{dt} + \widehat{Au}(\ell) = \widehat{Bv}(\ell)$$

并且，由于 A、 B 是傅里叶乘子，我们有如下恒等式，它用 A 和 B 的符号 σ_A 和 σ_B 表示:

$$\frac{d\widehat{u}(\ell)}{dt} + \sigma_A(\ell)\widehat{u}(\ell) = \sigma_B(\ell)\widehat{v}(\ell). \tag{3.9}$$

这是一个定义在 d_ℓ. 阶方阵集合上的动力系统

为了证明 (3.9) 的可控性，令

$$\zeta_0, \zeta_T \in \mathbb{C}^{d_\ell}.$$

对任意 $\ell' \in \mathbb{N}_0$，定义

$$u_0 = (e_{\ell'}, \zeta_0)\delta_{\ell,\ell'} \text{ and } u_T := (e_\ell, \zeta_T)\delta_{\ell,\ell'}.$$

注意到， u_0 和 u_T 的傅里叶系数满足

$$\forall \ell \neq \ell', \ \widehat{u}_0(\ell') = 0_{\mathbb{C}^{d_{\ell'}}} = \widehat{u}_T(\ell').$$

由于每个 $H_j \subset \mathcal{H}^\infty$，向量 u_0、u_T 属于 $\mathcal{H}^\infty$，并且满足$\widehat{u_0}(\ell) = \zeta_0$ 以及 $\widehat{u_T}(\ell) = \zeta_T$. 由于（3.6）是可控的，因此存在一个输入函数 v，使得方程（ u 3.6）的解满足 $u(T) = u_T$，因此 $\widehat{u}(\ell)$ 是方程（3.9）的一个解，且 $\widehat{u}(\ell)(0) = \zeta_0$ 并且 $\widehat{u}(\ell)(T) = \zeta_T$，即（3.9）是可控的。根据卡尔曼判据（见定理2.10），我们得出

$$\operatorname{rank}\left[\sigma_B(\ell),\ \sigma_A(\ell)\sigma_B(\ell),\ \cdots,\ \sigma_A(\ell)^{d_\ell-1}\sigma_B(\ell)\right] = d_\ell. \tag{3.10}$$

为完成（1）的证明，我们还需要证明系统（3.9）的全局有限可控性代价估计。根据定理2.11，我们有可观测性不等式

$$\int_0^T ||B^*S(t)^*f||_{\mathcal{H}}^2 dt \geqslant \left(\frac{1}{\tilde{\mathscr{C}}_T}\right)^2 ||f||_{\mathcal{H}}^2, \ \forall f \in \mathcal{H}^\infty, \tag{3.11}$$

其中， $S(t)$是由 A生成的 C_0-半群。根据普朗歇尔定理，这等价于不等式

$$\int_0^T \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} ||\sigma_B(\ell)^* \exp\left(t\sigma_A(\ell)^*\right)\widehat{f}(\ell)||_{\mathbb{C}^{d_\ell}}^2 dt \geqslant \left(\frac{1}{\tilde{\mathscr{C}}_T}\right)^2 \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} ||\widehat{f}(\ell)||_{\mathbb{C}^{d_\ell}}^2 \ \forall f \in \mathcal{H}^\infty. \tag{3.12}$$

现在，若 ℓ_0 固定，而 $z \in \mathbb{C}^{d_{\ell_0}}\backslash\{0\}$ 是任意坐标向量，让我们考虑由以下傅里叶系数确定的向量 $v_z \in \mathcal{H}^\infty$

$$\widehat{v}_z(\ell) = z\delta_{\ell,\ell_0}, \ \ell \in \mathbb{N}_0. \tag{3.13}$$

将（3.13）代入（3.12），可得

$$\int_0^T ||\sigma_B(\ell_0)^* \exp\left(t\sigma_A(\ell_0)^*\right)z||^2_{\mathbb{C}^{d_{\ell_0}}} dt \geqslant \left(\frac{1}{\tilde{\mathscr{C}}_T}\right)^2 ||z||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}}.$$

该不等式是系统（3.9）在 $\ell = \ell_0$.时的可观测性不等式。注意，如果 $\mathscr{C}_{\ell,\ T}$ 是（3.9）在 $\ell = \ell_0$时的可控性代价，那么我们有如下不等式

$$\left(\frac{1}{\mathscr{C}_{\ell_0,T}}\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{\tilde{\mathscr{C}}_T}\right)^2$$

由此我们推得

$$\mathscr{C}_T = \sup_{\ell_0} \mathscr{C}_{T,\ell_0} \leqslant \tilde{\mathscr{C}}_T,$$

正如所需。（1）的证明完成。

- 现在，让我们证明（2）。反过来，假设

$$\forall \ell \in \mathbb{N}_0,\ \operatorname{rank}\left[\sigma_B(\ell),\ \sigma_A(\ell)\sigma_B(\ell),\ \cdots,\ \sigma_A(\ell)^{d_\ell - 1}\sigma_B(\ell)\right] = d_\ell.$$

我们要证明柯西问题（3.6）在任意时刻$T > 0$下的可控性。根据定理 2.11，只需证明存在$c_T > 0$ 使得

$$\int_0^T ||B^* S(t)^* f||^2_{\mathcal{H}} dt \geqslant c_T^2 ||f||^2_{\mathcal{H}},\ \forall f \in \mathcal{H}^\infty, \tag{3.14}$$

其中，$S(t)$ 是由 A生成的 C_0-半群。根据卡尔曼判据，我们知道该系统

$$\frac{d\gamma_\ell}{dt} + \sigma_A(\ell)\gamma_\ell = \sigma_B(\ell)v_\ell \tag{3.15}$$

对每个 $\ell \in \mathbb{N}_0$. 都是可控的。因此，不等式

$$\int_0^T ||\sigma_B(\ell)^* \exp\left(t\sigma_A(\ell)^*\right)z||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}} dt \geqslant c^2_{\ell,T} ||z||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}},\ \forall z \in \mathbb{C}^{d_\ell},$$

成立，并记$c_{\ell,\ T} > 0$ 为满足该$\widehat{\ }$不等式的最大常数。特别地，对于 $z = f(\ell)$ ，我们得到

$$\int_0^T ||\sigma_B(\ell)^* \exp\left(t\sigma_A(\ell)^*\right)\widehat{f}(\ell)||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}} dt \geqslant c^2_{\ell,T} ||\widehat{f}(\ell)||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}}.$$

对 $\ell \in \mathbb{N}_0$ 求和，得到

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} \int_0^T ||\sigma_B(\ell)^* \exp\left(t\sigma_A(\ell)^*\right)\widehat{f}(\ell)||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}} dt \geqslant \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} c^2_{\ell,T} ||\widehat{f}(\ell)||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}}.$$

因此，

$$\int_0^T \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} ||\sigma_B(\ell)^* \exp\left(t\sigma_A(\ell)^*\right)\widehat{f}(\ell)||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}} dt \geqslant \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} c^2_{\ell,T}||\widehat{f}(\ell)||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}}.$$

利用（2.8）中的半群性质，可得

$$\sigma_B(\ell)^* \exp\left(t\sigma_A(\ell)^*\right)\widehat{f}(\ell) = \sigma_{B^*S(t)^*}(\ell)\widehat{f}(\ell)$$

可得

$$\int_0^T \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} ||\sigma_{B^*S(t)^*}(\ell)\widehat{f}(\ell)||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}} dt \geqslant c_T^2 \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} ||\widehat{f}(\ell)||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}},$$

其中

$$c_T := \inf_{\ell\in\mathbb{N}_0} c_{\ell,T}.$$

由普朗歇尔公式（见（2.5）），可得

$$\int_0^T ||B^*S(t)^*f||^2_{\mathcal{H}} dt = \int_0^T \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} ||\sigma_{B^*S(t)^*}(\ell)\widehat{f}(\ell)||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}} dt$$

并且由于

$$||f||^2_{\mathcal{H}} = \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0} ||\widehat{f}(\ell)||^2_{\mathbb{C}^{d_\ell}},$$

等式（3.14）成立，其中

$$c_T := \inf_{\ell\in\mathbb{N}_0} c_{\ell,T} = \inf_{\ell\in\mathbb{N}_0} 1/\mathscr{C}_{\ell,T} = 1/\sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \mathscr{C}_{\ell,T} < \infty.$$

˜（2）的证明至此完成。事实上，注意到（ $\mathscr{C}_T$ 3.6）的可控性代价是满足（ $c_T > 0$ 3.14）的常数的下确界，由此可得

$$\mathscr{C}_T \geqslant \tilde{\mathscr{C}}_T. \tag{3.16}$$

证明了（1）和（2）之后，定理 3.5 的证明即告完成。 □

4. Applications

4.1. 解耦算法。 本节将介绍定理 3.6 中的可控性判据和/或其证明过程中提出的以下算法的若干应用。

算法 4.1。 首先，固定两个稠定算子 A 和 B，它们作用于可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上，并满足定理 3.5的假设。

• `Algorithm`: 柯西问题可控性判据（3.6）。• `Input`: 给出下文（4.1）定义的系统的（全局）可控性代价。• `Output`: 从上方估计该控制系统的可控性代价。• `Instructions`:

(3.6)

Step 1. 计算系统（3.6）的群傅里叶变换。由此可得到无穷多个控制系统

$$\begin{cases} \dfrac{d\widehat{u}(\ell)}{dt} = \sigma_A(\ell)\widehat{u}(\ell) + \sigma_B(\ell)\widehat{v}(\xi), \\ \widehat{u(0)}(\ell) = \widehat{u}_0(\ell), \end{cases} , \ell \in \mathbb{N}_0, \tag{4.1}$$

此时，我们可以确定算法的输入：
Step 2. 将系统（3.6）的可控性问题化为一个可观测性不等式，该不等式涉及系统（4.1）的（全局）可控性代价。Step 3. 根据系统（4.1）的（全局）可控性代价，估计系统（3.6）的可控性代价。

Step 4. 如果系统（4.1）的估计（全局）可控性代价有限，我们就能推出（4.1）的可控性。

4.2. 紧流形上的柯西问题可控性。 设 M 为一个闭流形（紧致且无边界）。考虑 $E \in \Psi^{\nu}_{cl,\ +}(M)$ 为一个阶数为 $\nu > 0$ 的经典正伪微分算子，作用于 M，参见 H¨ormander[46]。设

- $H_j =$ 设 $\mathbf{Ker}(E - \lambda_j I)$ 为 E 的特征子空间族，
- $P_j : L^2(M) \to H_j$ 为相应的正交投影，
- $\{d_j\}_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{N}$ 为由各个 H_j 的维数组成的序列

.

以下推论给出了与 E-不变算子相关的柯西问题的可控性。

推论 4.2. 设 M 为无边界紧流形。设 E 为 M 上的正经典伪微分算子，并考虑算子 A、$B : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$，其中 E 为不变算子。

(1) 若柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + Bv, \\ u(0) = u_0 \in C^\infty(M) \end{cases} \tag{4.2}$$

可控，则对于任意 $\ell \in \mathbb{N}_0$，与 E 的谱分解相对应的 A 和 B 的全局符号 $\sigma_A(\ell)$ 和 $\sigma_B(\ell)$ 分别满足卡尔曼条件：

$$\operatorname{rank}\left[\sigma_B(\ell),\ \sigma_A(\ell)\sigma_B(\ell),\ \cdots,\ \sigma_A(\ell)^{d_\ell - 1}\sigma_B(\ell)\right] = d_\ell. \tag{4.3}$$

此外，若 A 在 $L^2(M)$ 上生成强连续半群，则柯西问题 (4.2) 在相对于分解 $(H_j = \operatorname{Ker}(E - \lambda_j I))_{j\in\mathbb{N}}$ 的傅里叶变换下的像，在时间 $T > 0$ 时具有有限的全局可控性代价，即

$$\mathscr{C}_T := \sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \mathscr{C}_{\ell,T} < \infty.$$

此外，

$$\mathscr{C}_T \leqslant \tilde{\mathscr{C}}_T,$$

˜其中 $\mathscr{C}_T$ 是(4.2)的可控性代价。

(2) 反之，假设 A 是 $\mathcal{H}$ 上的强连续半群的生成元，且对每个 (4.3) 均满足卡尔曼条件 $\ell \in \mathbb{N}_0$。假设柯西问题 (4.2) 在相对于谱分解 $(H_j = \mathrm{Ker}(E - \lambda_j I))_{j\in\mathbb{N}}$ 的傅里叶变换下的像，在时刻 $T > 0$ 具有有限的全局可控性代价，即，

$$\mathscr{C}_T := \sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \mathscr{C}_{\ell,T} < \infty.$$

那么，柯西问题 (4.2) 在时刻 $T > 0$ 可控，且其可控性代价˜ $\mathscr{C}_T$ 满足不等式

$$\mathscr{C}_T \geqslant \tilde{\mathscr{C}}_T. \tag{4.4}$$

证明。该推论的结论可由定理 3.5 应用于 E-不变算子 A 以及 B 得出；等价地，它们是相对于谱分解 $H_j = \mathrm{Ker}(E - \lambda_j I)$. 的傅里叶乘子。注意，在这种情况下 $\mathcal{H}^\infty = C^\infty(M)$且 $\mathcal{H} = L^2(M)$. □

4.3. 紧李群上的卡尔曼判据。本小节将在紧李群的背景下证明我们的可控性判据。首先，我们根据群的群傅里叶变换改写定义 3.1 。

定义 4.3. 设 $A, B : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ 为连续左不变线性算子。考虑柯西问题

$$(\mathrm{CP}) : \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + Bv, \\ \\ u(0) = u_0 \in C^\infty(G). \end{cases} \tag{4.5}$$

我们将 (CP) 在群傅里叶变换下的像定义为以下无限族有限维动力系统

$$((\mathrm{CP}), [\xi]) : \begin{cases} \dfrac{d\widehat{u}(\xi)}{dt} = \sigma_A(\xi)\widehat{u}(\xi) + \sigma_B(\xi)\widehat{v}(\xi), \\ \\ \widehat{u(0)}(\xi) = \widehat{u}_0(\xi) \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}. \end{cases} \qquad [\xi] \in \widehat{G}. \tag{4.6}$$

我们给出引理 3.2 的以下版本，该版本针对定义 4.3中的左不变算子作了相应调整。

引理 4.4. 以下陈述等价。

(1) 对于所有 $\xi \in \mathrm{Rep}(G)$，柯西问题 $((\mathrm{CP})\ [\xi])$ 在 (4.6) 都是时刻 $T > 0$可控的动力系统。(2) $\forall \xi \in \mathrm{Rep}(G)$满足卡尔曼条件

$$\mathrm{rank}\left[\sigma_B(\xi),\ \sigma_A(\xi)\sigma_B(\xi),\ \cdots,\ \sigma_A(\xi)^{d_\xi - 1}\sigma_B(\xi)\right] = d_\xi \tag{4.7}$$

得到满足。

(3) $\forall \xi \in \mathrm{Rep}(G)$, $\exists c = c(\xi, T) > 0$ 使得

$$\int_0^T ||\sigma_B(\xi)^* \exp\left(t\sigma_A(\xi)^*\right) z||_{\mathrm{HS}}^2 dt \geqslant c(\xi, T)^2 ||z||_{\mathrm{HS}}^2, \ \forall z \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}. \tag{4.8}$$

证明。 证明完全沿用了上面对引理 3.2 所采用的步骤。事实上，等价性（1）$\iff$（2）由卡尔曼判据（见定理2.10）得到。另一方面，等价性（1）$\iff$（3）正是定理 2.11 中的可观测性判据。于是，等价性（2）$\iff$（3）显然成立。引理 4.4 的证明完成。□

注 4.5。 设 $c_{\xi,\ T}$为满足可观测性不等式（4.8）的常数 $c = c(\xi,\ T) > 0$ 的上确界。根据控制理论中的通常术语，该常数

$$\boxed{\mathscr{C}_{\xi,T} := 1/c_{\xi,T}}$$

被称为柯西问题（4.6）的可控性代价。

定义 4.6. 如果柯西问题 (4.5) 在群傅里叶变换下的像具有有限的全局可控性代价，我们就称

$$\mathscr{C}_T := \sup_{[\xi]\in\widehat{G}} \mathscr{C}_{\xi,T} < \infty. \tag{4.9}$$

以下是本小节的主要定理。

定理 4.7. 设 G 是一个紧李群，且 A、$B: C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ 是连续左不变线性算子。

(1) 如果柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + Bv, \\ \\ u(0) = u_0 \in C^\infty(G) \end{cases} \tag{4.10}$$

在时间 $T > 0$ 内可控。那么，对于每个表示空间，A 和 B 的全局符号 σ_A 和 σ_B 分别满足卡尔曼条件：

$$\mathrm{rank}\left[\sigma_B(\xi),\ \sigma_A(\xi)\sigma_B(\xi),\ \cdots,\ \sigma_A(\xi)^{d_\xi - 1}\sigma_B(\xi)\right] = d_\xi. \tag{4.11}$$

此外，如果 A 是 $L^2(G)$ 上强连续半群的生成元，那么柯西问题 (4.5) 在群傅里叶变换下的像在时间 $T > 0$ 内具有有限的全局可控性代价，即，

$$\mathscr{C}_T := \sup_{[\xi]\in\widehat{G}} \mathscr{C}_{\xi,T} < \infty.$$

˜此外，如果 $\mathscr{C}_T$ 是 (4.5)的可控性代价，那么

$$\mathscr{C}_T \leqslant \tilde{\mathscr{C}}_T. \tag{4.12}$$

(2) 反之，假设 A 是作用于 $L^2(G)$ 上的强连续半群的生成元，且 卡尔曼条件 (4.11) 对每个 $\xi \in \mathrm{Rep}(G)$ 都成立。假设柯西问题 (4.5) 在群下的像

傅里叶变换在时间 $T>0$ 具有有限的全局可控性代价，也就是说，

$$\mathscr{C}_T := \sup_{[\xi]\in\widehat{G}} \mathscr{C}_{\xi,T} < \infty.$$

于是，柯西问题 (4.5) 在时刻 $T>0$，且其可˜控性代价 $\mathscr{C}_T$ 满足不等式

$$\mathscr{C}_T \geqslant \tilde{\mathscr{C}}_T. \tag{4.13}$$

证明。对于 (1) 的证明，注意到直接应用定理 3.6 可在任意表示空间中得到维数为 d_ξ^2 的卡尔曼条件（见注2.27）。为了降低维数，我们将在每个表示空间中使用凯莱-哈密顿定理。具体如下。

- (1) 的证明。假设柯西问题（4.10）是可控的。固定 $\xi\in\mathrm{Rep}(G)$ 并对等式两边取群傅里叶变换，得到

$$\frac{d\widehat{u}(\xi)}{dt} = \widehat{Au}(\xi) + \widehat{Bv}(\xi).$$

由于 A、B 是左不变的，我们有

$$\frac{d\widehat{u}(\xi)}{dt} = \sigma_A(\xi)\widehat{u}(\xi) + \sigma_B(\xi)\widehat{v}(\xi). \tag{4.14}$$

这是一个定义在 d_ξ 阶方阵集合上的动力系统，该集合可通过下式与 $\mathbb{C}^{d_\xi^2}$ 相识别:

$$\mathbf{Z} = (z_{ij})_{d_\xi\times d_\xi} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}^{d_\xi} \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

其中 $\mathbf{Z}^j$ 表示 j 阶矩阵 $\mathbf{Z}$的第 4.25 列向量；因此，方程（4.25）变为

$$\frac{d\widehat{U}(\xi)}{dt} = \Sigma_A(\xi)\widehat{U}(\xi) + \Sigma_B(\xi)\widehat{V}(\xi), \tag{4.16}$$

with

$$\Sigma_C(\xi) := \begin{pmatrix} \sigma_C(\xi) & \mathbf{0}_{d_\xi\times d_\xi} & \cdots & \mathbf{0}_{d_\xi\times d_\xi} \\ \mathbf{0}_{d_\xi\times d_\xi} & \sigma_C(\xi) & \cdots & \mathbf{0}_{d_\xi\times d_\xi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{d_\xi\times d_\xi} & \mathbf{0}_{d_\xi\times d_\xi} & \cdots & \sigma_C(\xi) \end{pmatrix},\ C\in\{A,B\},$$

$$\widehat{U}(\xi) := \begin{pmatrix} \widehat{u}(\xi)^1 \\ \vdots \\ \widehat{u}(\xi)^{d_\xi} \end{pmatrix} \text{ and } \widehat{V}(\xi) := \begin{pmatrix} \widehat{v}(\xi)^1 \\ \vdots \\ \widehat{v}(\xi)^{d_\xi} \end{pmatrix}.$$

根据上述记号，我们已经证明这两个系统

$$\frac{d\widehat{u}(\xi)}{dt} = \sigma_A(\xi)\widehat{u}(\xi) + \sigma_B(\xi)\widehat{v}(\xi),\ \frac{d\widehat{U}(\xi)}{dt} = \Sigma_A(\xi)\widehat{U}(\xi) + \Sigma_B(\xi)\widehat{V}(\xi), \tag{4.17}$$

等价，也就是说，方程（4.25）的任意解都会导出系统（4.16）的一个解，反之亦然。另请注意，我们可以将$\widehat{}$酉对偶 G 枚举为 $[\xi_j]$，其中 对于 $j \in \mathbb{N}_0.$，这样我们就固定了标准正交基

$$\{e_{jk}\}_{k=1}^{d_j} = \{d_{\xi_j}^{\frac{1}{2}}(\xi_j)_{il}\}_{i,l=1}^{d_{\xi_j}} \tag{4.18}$$

其中 $d_j = d_{\xi_j}^2$. 那么，我们有以下子空间

$$H_j = \text{span}\{(\xi_j)_{i,l} : i,l = 1,\cdots,d_{\xi_j}\}.$$

根据注记 2.27，注意到相对于分解 $H_j = \textsf{span}\{(\xi_j)_{i,l}$， A 和 B的符号 $\sigma_A(\ell)$ 和 $\sigma_B(\ell)$ 为： $i,l = 1,\cdots,d_{\xi_j}\}$

$$\sigma_A(\ell) \equiv \Sigma_A(\xi_\ell) \text{ and } \sigma_B(\ell) \equiv \Sigma_B(\xi_\ell),\ \ell \in \mathbb{N}_0, \tag{4.19}$$

分别。现在，应用定理 3.5，我们推导出假设 **(1)** 蕴含卡尔曼条件

$$\text{rank}\left[\Sigma_B(\xi_\ell),\ \Sigma_A(\xi_\ell)\Sigma_B(\xi_\ell),\ \cdots,\ \Sigma_A(\xi_\ell)^{d_{\xi_\ell}^2-1}\Sigma_B(\xi_\ell)\right] = d_{\xi_\ell}^2,$$

其中我们用到了，对于任意 ℓ, $d_\ell = d_{\xi_\ell}^2$.由于映射 $\ell \mapsto [\xi_\ell]$ 是双射，我们将省略 ξ_ℓ 中的下标 ℓ，并将对酉表示 $\xi \in \textsf{Rep}(G)$. 恢复使用一般记号 ξ。现在，让我们对卡尔曼条件作进一步细化

$$\text{rank}\left[\Sigma_B(\xi),\ \Sigma_A(\xi)\Sigma_B(\xi),\ \cdots,\ \Sigma_A(\xi)^{d_\xi^2-1}\Sigma_B(\xi)\right] = d_\xi^2.$$

例如，注意到

$$\Sigma_A(\xi)^j\Sigma_B(\xi) = \begin{pmatrix} \sigma_A(\xi)^j\sigma_B(\xi) & \mathbf{0}_{d_\xi\times d_\xi} & \cdots & \mathbf{0}_{d_\xi\times d_\xi} \\ \mathbf{0}_{d_\xi\times d_\xi} & \sigma_A(\xi)^j\sigma_B(\xi) & \cdots & \mathbf{0}_{d_\xi\times d_\xi} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{d_\xi\times d_\xi} & \mathbf{0}_{d_\xi\times d_\xi} & \cdots & \sigma_A(\xi)^j\sigma_B(\xi) \end{pmatrix},\ j = 0,...,d_\xi^2-1.$$

Thus

$$\text{rank}\left[\Sigma_B(\xi),\ \Sigma_A(\xi)\Sigma_B(\xi),\ \cdots,\ \Sigma_A(\xi)^{d_\xi^2-1}\Sigma_B(\xi)\right] =$$
$$d_\xi \cdot \text{rank}\left[\sigma_B(\xi),\ \sigma_A(\xi)\sigma_B(\xi),\ \cdots,\ \sigma_A(\xi)^{d_\xi{}^2-1}\sigma_B(\xi)\right],$$

因此

$$\text{rank}\left[\sigma_B(\xi),\ \sigma_A(\xi)\sigma_B(\xi),\ \cdots,\ \sigma_A(\xi)^{d_\xi{}^2-1}\sigma_B(\xi)\right] = d_\xi.$$

现在，根据凯莱–哈密顿定理，我们知道如果

$$P_{\sigma_A(\xi)}(\lambda) = \det(\lambda I_{d_\xi\times d_\xi} - \sigma_A(\xi)) = \lambda^{d_\xi} - \sum_{j=0}^{d_\xi-1}\alpha_{\xi,j}\lambda^j,$$

是符号 $\sigma_A(\xi)$ 的特征多项式，那么

$$P_{\sigma_A(\xi)}(\sigma_A(\xi)) = 0,$$

这等价于说

$$\sigma_A(\xi)^{d_\xi} = \sum_{j=0}^{d_\xi-1} \alpha_{\xi,j}\sigma_A(\xi)^j. \tag{4.20}$$

因此，对于每个 $j \in \{d_\xi、...、 d_\xi^2 - 1\}$，都存在 $c_j^0、 c_j^1、 \cdots、 c_j^j \in \mathbb{C}$，其中每个 $c_k^j = c_k^j(\xi)$ 都取决于 ξ，使得

$$\sigma_A(\xi)^j = \sum_{k=0}^{j} c_j^k \sigma_A(\xi)^k.$$

因此，在矩阵中

$$\left[\sigma_B(\xi),\ \sigma_A(\xi)\sigma_B(\xi),\ \cdots,\ \sigma_A(\xi)^{d_\xi-1}\sigma_B(\xi)\right],$$

项 $\sigma_A(\xi)^j\sigma_B(\xi)、\ d_\xi \leqslant j \leqslant d_\xi^2-1$ 可以写成前 $d_\xi - 1$ 个矩阵块 $\sigma_A(\xi)^{j'}\sigma_B(\xi)、 1 \leqslant j' \leqslant d_\xi - 1.$ 的线性组合。进行高斯消元后，我们得到

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}\left[\sigma_B(\xi),\ \sigma_A(\xi)\sigma_B(\xi),\ \cdots,\ \sigma_A(\xi)^{d_\xi-1}\sigma_B(\xi)\right] = \\ &\operatorname{rank}\left[\sigma_B(\xi),\ \sigma_A(\xi)\sigma_B(\xi),\ \cdots,\ \sigma_A(\xi)^{{d_\xi}^2-1}\sigma_B(\xi)\right] = d_\xi.\end{aligned}$$

(1) 的证明至此完成。

- 现在，我们来证明 **(2)**。反过来，假设

$$\forall \xi \in \operatorname{Rep}(G),\ \operatorname{rank}\left[\sigma_B(\xi),\ \sigma_A(\xi)\sigma_B(\xi),\ \cdots,\ \sigma_A(\xi)^{d_\xi-1}\sigma_B(\xi)\right] = d_\xi.$$

我们希望证明柯西问题（4.10）在任意时刻的可控性$T > 0$。根据定理 2.11，只需证明存在$c_T > 0$ 使得

$$\int_0^T ||B^*S(t)^*f||^2_{L^2(G)}dt \geqslant c_T^2||f||^2_{L^2(G)},\ \forall f \in L^2(G), \tag{4.21}$$

其中 $S(t)$ 是由 A生成的 C_0-半群。根据卡尔曼判据，我们知道该系统

$$\frac{d\gamma_\xi}{dt} + \sigma_A(\xi)\gamma_\xi = \sigma_B(\xi)v_\xi \tag{4.22}$$

对每个 $\xi \in$**Rep**(G). 都是可控的。因此，不等式

$$\int_0^T ||\sigma_B(\xi)^* \exp\left(t\sigma_A(\xi)^*\right)z||^2_{\mathrm{HS}}dt \geqslant c_{\xi,T}^2||z||^2_{\mathrm{HS}},\ \forall z \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}, \tag{4.23}$$

成立，并令$c_{\xi,\ T} > 0$ 表示满足该不等式的最大常数。现在，利用式（4.15）中的对应关系，我们可以看到

式（4.23）中的可观测性不等式等价于以下可观测性不等式

$$\int_0^T ||\Sigma_B(\xi)^* \exp\left(t\Sigma_A(\xi)^*\right)z||^2_{\mathbb{C}^{d_\xi^2}} dt \geqslant c^2_{\xi,T}||z||^2_{\mathbb{C}^{d_\xi^2}}, \ \forall z \in \mathbb{C}^{d_\xi^2}. \tag{4.24}$$

此分析表明，这些系统的可控性代价

$$\frac{d\widehat{u}(\xi)}{dt} = \sigma_A(\xi)\widehat{u}(\xi) + \sigma_B(\xi)\widehat{v}(\xi), \ \frac{d\widehat{U}(\xi)}{dt} = \Sigma_A(\xi)\widehat{U}(\xi) + \Sigma_B(\xi)\widehat{V}(\xi), \tag{4.25}$$

相同。换言之，沿着定理 3.6 中证明 (2) 的思路，我们可得以下可观测性不等式

$$\int_0^T ||B^*S(t)^*f||^2_{L^2(G)} dt \geqslant c_T^2||f||^2_{L^2(G)}, \ \forall f \in L^2(G),$$

成立，其中

$$c_T := \inf_{[\xi]\in\widehat{G}} c_{\xi,T}.$$

因此，(4.21) 中的等式成立，其中

$$c_T := \inf_{[\xi]\in\widehat{G}} c_{\xi,T} = \inf_{[\xi]\in\widehat{G}} 1/\mathscr{C}_{\xi,T} = 1/\sup_{[\xi]\in\widehat{G}} \mathscr{C}_{\xi,T} < \infty.$$

˜证明 (2) 已完成。事实上，注意到 ($\mathscr{C}_T$ 4.10) 的可控性代价是满足 ($c_T > 0$ 4.21) 的常数的下确界，由此我们可推得

$$\mathscr{C}_T \geqslant \tilde{\mathscr{C}}_T. \tag{4.26}$$

证明了 (1) 和 (2) 后，定理 4.7 的证明即告完成。 □

4.4. 分数阶次椭圆扩散模型的可控性。设 G 是一个紧李群，$\mathbb{X} = \{X_1, ..., X_k\}$ 是一组正交归一的实左不变向量场，满足步长为 r 的 H¨ormander 条件，并设 $s > 0$. 上与 $\mathbb{X}$ 相关、阶为 s 的正分数阶次拉普拉斯算子为算子

$$\mathcal{L}_s := \left(-\sum_{j=1}^k X_j^2\right)^{s/2}.$$

$\mathcal{L}_s$ 的符号可根据次拉普拉斯算子的符号计算

$\mathcal{L} = -\sum_{j=1}^k X_j^2$,

$$\sigma_{\mathcal{L}}(\xi) \equiv \mathrm{diag}(\lambda_{1,[\xi]}, ..., \lambda_{d_\xi,[\xi]}), \ \xi \in \mathrm{Rep}(G),$$

如下

$$\sigma_{\mathcal{L}_s}(\xi) = \mathrm{diag}(\lambda^{s/2}_{1,[\xi]}, ..., \lambda^{s/2}_{d_\xi,[\xi]}), \ \xi \in \mathrm{Rep}(G). \tag{4.27}$$

回想一下，存在常数 c，$C > 0$ 使得这些值$\lambda_{j,\ [\xi]}$ 满足不等式（参见 [39]）

$$c\langle\xi\rangle^{1/r} \leqslant \lambda^{1/2}_{j,[\xi]} \leqslant C\langle\xi\rangle, \ \forall \xi \in \mathrm{Rep}(G), \ \forall j \in \{1, ..., d_\xi\}. \tag{4.28}$$

我们有， $\sigma_{\mathcal{L}_s}(\xi)$ 不依赖于 $x \in G$，且 $\mathcal{L}_s$ 是左不变的。现在考虑次椭圆扩散模型

$$\frac{du}{dt} = -\mathcal{L}_s u + Bv. \tag{4.29}$$

我们将证明以下结论：

(1) 若 **(4.29)** 可控，则 $B: C^\infty(G) \to \mathrm{Im}(B) \subset C^\infty(G)$ 可逆。**(2)** 若 $B: C^\infty(G) \to \mathrm{Im}(B) \subset C^\infty(G)$ 在其像子空间上可逆，且其矩阵值符号满足下界

$$\forall z \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi},\ \|\sigma_B(\xi)^* z\|_{\mathrm{HS}} \geqslant C_B \langle \xi \rangle^\kappa \|z\|_{\mathrm{HS}}, \tag{4.30}$$

对某个 $\kappa \geqslant s/2,$ ，则 **(4.29)** 是一个可控系统。

为证明 **(1)**，我们按如下步骤进行。若 **(4.29)** 在任意时间$T > 0$ 内可控，则根据定理 4.7，

$$\mathrm{rank}[\sigma_B(\xi), \sigma_{-\mathcal{L}_s}(\xi)\sigma_B(\xi), \cdots, \sigma_{-\mathcal{L}_s}(\xi)^{d_\xi - 1}\sigma_B(\xi)] = d_\xi,\ \forall \xi \in \mathrm{Rep}(G).$$

But

$$\sigma_{-\mathcal{L}_s}(\xi) = \sigma_{-\mathcal{L}_s}(x,\xi) = \xi(x)^*(-\mathcal{L}_s \xi(x)) = -(\xi(x)^* \mathcal{L}_s \xi(x)) = -\sigma_{\mathcal{L}_s}(x,\xi) = -\sigma_{\mathcal{L}_s}(\xi)$$

(参见定理 2.23**)**，因此

$$\mathrm{rank}[\sigma_B(\xi), -\sigma_{\mathcal{L}_s}(\xi)\sigma_B(\xi), \cdots, [-\sigma_{\mathcal{L}_s}(\xi)]^{d_\xi - 1}\sigma_B(\xi)] = d_\xi,\ \forall \xi \in \mathrm{Rep}(G).$$

由于 $\sigma_{\mathcal{L}_s}(\xi)$ 是一个对角矩阵，我们可以通过高斯消元得到

$$\mathrm{rank}[\sigma_B(\xi), -\sigma_{\mathcal{L}_s}(\xi)\sigma_B(\xi), \cdots, [-\sigma_{\mathcal{L}_s}(\xi)]^{d_\xi - 1}\sigma_B(\xi)] = \mathrm{rank}[\sigma_B(\xi)],$$

因此，$\mathbf{rank}[\sigma_B(\xi)] = d_\xi$, $\forall \xi \in \mathbf{Rep}(G)$，即对于所有 $\xi \in \mathbf{Rep}(G).$ ， $\sigma_B(\xi)$ 都可逆。公式

$$B^{-1} f(x) = \sum_{[\xi] \in \widehat{G}} d_\xi \mathrm{Tr}[\xi(x)\sigma_B(\xi)^{-1} \widehat{f}(\xi)]$$

定义了 $B: C^\infty(G) \to \mathbf{Im}(B) \subset C^\infty(G).$ 的逆算子 $B^{-1}: \mathbf{Im}(B) \to C^\infty(G)$ 。证明 **(2)** 时，我们按以下步骤进行。注意，常数

$$\mathscr{X}^2_{\xi,T} = \inf_{z \neq 0} \frac{\int_0^T ||\sigma_B(\xi)^* \exp\left(t\sigma_{-\mathcal{L}_s}(\xi)^*\right) z||^2_{\mathrm{HS}} dt}{||z||^2_{\mathrm{HS}}}, \tag{4.31}$$

满足不等式

$$\int_0^T ||\sigma_B(\xi)^* \exp\left(t\sigma_{-\mathcal{L}_s}(\xi)^*\right) z||^2_{\mathrm{HS}} dt \geqslant \mathscr{X}^2_{\xi,T} ||z||^2_{\mathrm{HS}},\ \forall z \neq 0. \tag{4.32}$$

设$c^2_{\xi,\ T} \geqslant \mathscr{X}^2_{\xi,\ T}$为满足不等式（4.32）的最大常数。注意，

$$c^2_{\xi,T} \geqslant \mathscr{X}^2_{\xi,T} = \inf_{z \neq 0} \frac{\int_0^T ||\sigma_B(\xi)^* \exp\left(-t\sigma_{\mathcal{L}_s}(\xi)^*\right) z||^2_{\mathrm{HS}} dt}{||z||^2_{\mathrm{HS}}}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \inf_{z\neq 0} \frac{\displaystyle\int_0^T C_B^2\langle\xi\rangle^{2\kappa}\left|\left|\exp\left[-t\cdot\operatorname{diag}\left(\lambda_{1,[\xi]}^{s/2},...,\lambda_{d_\xi,[\xi]}^{s/2}\right)\right]z\right|\right|_{\mathrm{HS}}^2 dt}{||z||_{\mathrm{HS}}^2} \text{ (by (4.30))},\\
&= \inf_{z\neq 0} \frac{\displaystyle\int_0^T C_B^2\langle\xi\rangle^{2\kappa}\left|\left|\operatorname{diag}\left(\exp\left(-t\lambda_{1,[\xi]}^{s/2}\right),...,\exp\left(-t\lambda_{d_\xi,[\xi]}^{s/2}\right)\right)z\right|\right|_{\mathrm{HS}}^2 dt}{||z||_{\mathrm{HS}}^2}\\
&\geqslant \inf_{z\neq 0} \frac{\displaystyle\int_0^T C_B^2\langle\xi\rangle^{2\kappa}\exp\left(-2t\gamma_{[\xi]}^{s/2}\right)||z||_{\mathrm{HS}}^2 dt}{||z||_{\mathrm{HS}}^2} \text{ (where } \gamma_{[\xi]}:=\max_{1\leqslant j\leqslant d_\xi}\lambda_{j,[\xi]}),\\
&\geqslant \inf_{z\neq 0} \frac{\displaystyle\int_0^T C_B^2\langle\xi\rangle^{2\kappa}\exp\left(-2tC\langle\xi\rangle^{s}\right)||z||_{\mathrm{HS}}^2 dt}{||z||_{\mathrm{HS}}^2} \text{ (by (4.28))},\\
&= C_B^2\langle\xi\rangle^{2\kappa}\times\frac{\left(1-e^{-2TC\langle\xi\rangle^s}\right)}{2C\langle\xi\rangle^s}\\
&= C_B^2\langle\xi\rangle^{2\kappa-s}\left(1-e^{-2TC\langle\xi\rangle^s}\right)
\end{aligned}
$$

因此，由于 $\langle\xi\rangle\geqslant 1$ 和 $\kappa\geqslant s/2,$，我们有

$$c_{\xi,T}^2\geqslant C_B^2\langle\xi\rangle^{2\kappa-s}\left(1-e^{-2TC\langle\xi\rangle^s}\right)\geqslant C_B^2\left(1-e^{-2TC}\right)\neq 0. \tag{4.33}$$

以上分析表明，

$$\inf_{[\xi]\in\widehat{G}} c_{\xi,T}^2\geqslant C_B^2\left(1-e^{-2TC}\right)\neq 0. \tag{4.34}$$

根据定理 4.7 证明中的记号，我们有

$$c_T:=\inf_{[\xi]\in\widehat{G}} c_{\xi,T}=\inf_{[\xi]\in\widehat{G}} 1/\mathscr{C}_{\xi,T}=1/\sup_{[\xi]\in\widehat{G}}\mathscr{C}_{\xi,T}<\infty.$$

于是，我们证明了（4.29）是一个可控系统。注意，在这种情况下，（~4.29 $\mathscr{C}_T$）的可控性代价为可以估计为

$$\tilde{\mathscr{C}}_T^2\leqslant\mathscr{C}_T^2=\sup_{[\xi]\in\widehat{G}}\mathscr{C}_{\xi,T}^2=\inf_{[\xi]\in\widehat{G}} 1/c_{\xi,T}^2\leqslant\frac{1}{C_B^2\left(1-e^{-2TC}\right)}.$$

因此，

$$\tilde{\mathscr{C}}_T\leqslant\frac{1}{C_B\sqrt{\left(1-e^{-2TC}\right)}}.$$

综上所述，我们证明了以下关于 G.上次椭圆扩散模型的可控性判据

定理 4.8. 设 G 是一个紧李群，且 $B:C^\infty(G)\to C^\infty(G)$ 是一个连续的左不变线性算子。

(1) 如果柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\mathcal{L}_s u + Bv, \\ \\ u(0) = u_0 \in C^\infty(G) \end{cases} \tag{4.35}$$

在时间 $T > 0$ 内可控，则 $B: \ C^\infty(G) \to \mathrm{Im}(B) \subset C^\infty(G)$ 是其像上的可逆连续线性算子。

（2）反过来，假设 $B: \ C^\infty(G) \to \mathrm{Im}(B) \subset C^\infty(G)$ 在其像子空间上可逆，且其矩阵值符号满足下界

$$\forall z \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}, \ \|\sigma_B(\xi)^* z\|_{\mathrm{HS}} \geqslant C_B \langle \xi \rangle^\kappa \|z\|_{\mathrm{HS}}, \tag{4.36}$$

对于某个 $\kappa \geqslant s/2$. 那么(4.35) 是一个可控系统，其可控性˜代价 $\mathscr{C}_T$ 满足估计

$$\tilde{\mathscr{C}_T} \leqslant \frac{1}{C_B \sqrt{(1 - e^{-2TC})}}, \tag{4.37}$$

对于某个 $C > 0$。

4.5. 希尔伯特空间上的波动方程与热方程。设 $\mathcal{H}$ 是一个复希尔伯特空间，且 $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}$ 的稠密线性子空间。设 $\mathcal{H} = \bigoplus_j H_j$ 是 $\mathcal{H}$ 在正交子空间 H_j 上的分解，每个子空间的维数为 $d_j \in \mathbb{N}.$。设 A、$B: \ \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ 是相对于分解 $\{H_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}.$ 的傅里叶乘子。考虑二阶柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = Au + Bv; \\ \\ u(0) = u_0, \ u_t(0) = \tilde{u}_0, \end{cases} \tag{4.38}$$

其中 $u: \ [0, \ T] \to \mathcal{H}^\infty$ 关于时间是 C^2-类的。(4.38) 中的微分方程是一个 波动方程，与一阶控制系统的情形类似，我们称其在时间 $T > 0$ 内可控，如果对于任意 $u_T, \ \tilde{u}_T \in \mathcal{H}^\infty$ 都存在一个控制$v: \ [0, \ T] \to \mathcal{H}^\infty$ 使得方程 (4.38) 的解满足 $u(T) = u_T$且 $u_t(T) = \tilde{u}_T.$

(3.6) 中的一阶微分方程是一个 热方程。众所周知，在内部控制的情形下（即当 B 由乘法算子 $Bv = 1_\omega v$ 给出，其中 ω 是 G的一个开子集），方程 (4.38) 的可控性意味着方程 (4.10) 的可控性。详情请参阅 Kannai [51], 、Russell [62], 和 Miller [60] 。我们将证明，对于满足某些条件的任意左不变算子B，同样的结论也成立。更确切地说，有以下定理。

定理 4.9. 设 A、$B: \ \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ 是相对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}.$ 的分解 $\{H_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ 的傅里叶乘子。假设 A 是强连续半群的生成元。如果二阶柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = Au + Bv; \\ \\ u(0) = u_0, \ u_t(0) = \tilde{u}_0; \ u_0, \tilde{u}_0 \in \mathcal{H}^\infty, \end{cases} \tag{4.39}$$

在时间 $T>0$ 内可控，那么一阶柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + Bv, \\ \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{H}^\infty \end{cases} \tag{4.40}$$

在时间 $T>0$ 内可控，前提是柯西问题 (4.40)在分解 $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$下的傅里叶变换像，在时间 $T>0$具有有限的全局可控性代价。

证明。首先，我们通过设定 $u_1 := u$ 以及 $u_2 := u_t$ 来降阶，这样柯西问题（4.39）就变为

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{Id} \\ A & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, \\ \\ \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \tilde{u}_0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{4.41}$$

显然，我们为（4.39）定义的可控性概念，与一阶系统（4.41）的可控性定义等价。假设（4.41）在时间 $T>0$.内可控。我们将证明有限维控制系统

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} \widehat{u}_1(\ell) \\ \widehat{u}_2(\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \sigma_A(\ell) & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{u}_1(\ell) \\ \widehat{u}_2(\ell) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_B(\ell) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widehat{w}(\ell) \\ \widehat{v}(\ell) \end{pmatrix}, \\ \\ \begin{pmatrix} \widehat{u}_1(\ell)(0) \\ \widehat{u}_2(\ell)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{u_0}(\ell) \\ \widehat{\tilde{u}_0}(\ell) \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{4.42}$$

其中 $\widehat{u}_j(\ell)$、$\sigma_A(\ell)$、$\sigma_B(\ell)$、$\widehat{w}(\ell)$、$\widehat{v}(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell\times d_\ell}$，在时间 T. 内也可控。事实上，设 $\begin{pmatrix} \zeta_1, & \zeta_2 & , T \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2d_\ell\times d_\ell}$，则傅里叶反演公式意味着函数

$$u_T := (e_\ell, \zeta_{1,T})_{\mathbb{C}^{d_\ell}} \text{ and } \tilde{u}_T := (e_\ell, \zeta_{2,T})_{\mathbb{C}^{d_\ell}}$$

^属于 $\mathcal{H}^\infty$和$\widehat{u_T}(\ell) = \zeta_1$、$_T$、 $\tilde{u}_T(\ell) = \zeta_2$、$_T$·。由于(4.41)是可控的，存在$w$、$v$： $[0$、 $T] \to \mathcal{H}^\infty$，使得(4.41)的解 $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ 满足 $u_1(T) = u_T$和 $u_2(T) = \tilde{u}_T$.。在 $\ell \in \mathbb{N}$处对(4.41)进行傅里叶变换，可得$\begin{pmatrix} \widehat{u}_1(\ell) \\ \widehat{u}_2(\ell) \end{pmatrix}$ 是(4.42)的解，且 $\begin{pmatrix} \widehat{u}_1(\ell)(T) \\ \widehat{u}_2(\ell)(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2{}^T & , T \end{pmatrix}$。这一论证对任意 $\begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_2{}^T & , T \end{pmatrix}$均成立，因此(4.42)在时间 T. 内可控。现在，我们可以应用卡尔曼秩条件，得出

$$\operatorname{rank}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \sigma_A(\ell) & \mathbf{0} \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_B(\ell) \end{pmatrix}\right]_{0\leqslant j\leqslant 2d_\ell-1} = 2d_\ell,$$

but

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \sigma_A(\ell) & \mathbf{0} \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_B(\ell) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_A(\ell)^{\frac{j}{2}}\sigma_B(\ell) \end{pmatrix}, & \text{if } j \text{ is even}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_A(\ell)^{\frac{j-1}{2}}\sigma_B(\ell) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, & \text{if } j \text{ is odd}, \end{cases}$$

thus

$$\begin{aligned} 2d_\ell &= \operatorname{rank}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \sigma_A(\ell) & \mathbf{0} \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_B(\ell) \end{pmatrix}\right]_{0\leqslant j\leqslant 2d_\ell-1} \\ &= \operatorname{rank}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_A(\ell)^i\sigma_B(\ell) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_A(\ell)^i\sigma_B(\ell) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right]_{0\leqslant i\leqslant d_\ell-1} \\ &= 2\cdot\operatorname{rank}[\sigma_B(\ell), \sigma_A(\ell)\sigma_B(\ell), \cdots, \sigma_A(\ell)^{d_\ell-1}\sigma_B(\ell)] \\ \Longrightarrow\ & \operatorname{rank}[\sigma_B(\ell), \sigma_A(\ell)\sigma_B(\ell), \cdots, \sigma_A(\ell)^{d_\ell-1}\sigma_B(\ell)] = d_\ell. \end{aligned}$$

这意味着，对每个，卡尔曼秩条件（4.11）均成立。另 $\ell \in \mathbb{N}_0$外，如果 A 是强连续半群的生成元，且柯西问题（4.40）经群傅里叶变换后的像具有有限的全局可控性代价，那么根据定理4.7 （2），系统（4.40）是可控的。证明完毕。□

作为定理 4.9的推论，我们考虑其在紧李群情形下的以下应用。

推论 4.10. 设 G 为紧李群，且 A、B： $C^\infty(G) \longrightarrow C^\infty(G)$ 为连续左不变线性算子，使得 A 是强连续半群的生成元。若二阶柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = Au + Bv; \\ u(0) = u_0,\ u_t(0) = \tilde{u}_0;\ u_0, \tilde{u}_0 \in C^\infty(G), \end{cases} \tag{4.43}$$

在时间 $T > 0$ 内可控。那么，一阶柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + Bv, \\ u(0) = u_0 \in C^\infty(G) \end{cases} \tag{4.44}$$

在时间 $T > 0$ 内可控，前提是其群傅里叶变换的像具有有限的全局可控性代价。

证明。 证明中，我们采用注记 2.27中的记号。我们可以将$\widehat{}$酉对偶 G 枚举为 $[\xi_j]$, 其中 $j \in \mathbb{N}_0$. 由此固定标准正交基

$$\{e_{jk}\}_{k=1}^{d_j} = \{d_{\xi_j}^{\frac{1}{2}}(\xi_j)_{il}\}_{i,l=1}^{d_{\xi_j}}, \tag{4.45}$$

其中 $d_j = d_{\xi_j}^2$. 那么，我们有如下子空间

$$H_j = \text{span}\{(\xi_j)_{i,l} : i, l = 1, \cdots, d_{\xi_j}\}.$$

鉴于注记 2.27，注意到相对于分解 $H_j = \text{span}\{(\xi_j)_{i,l} : i, l = 1, \cdots, d_{\xi_j}\}$， A 和 B 的符号 $\sigma_A(\ell)$ 和 $\sigma_B(\ell)$ 分别为

$$\sigma_A(\ell) \equiv \Sigma_A(\xi_\ell) \text{ and } \sigma_B(\ell) \equiv \Sigma_B(\xi_\ell), \ \ell \in \mathbb{N}_0, \tag{4.46}$$

推论 4.10 由定理 4.9 可得。 □

推论 4.11. 在定理4.9的背景下，假设算子

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \text{Id} \\ A & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

是一个 C_0-半群的无穷小生成元，并且满足卡尔曼秩条件

$$rank[\sigma_B(\ell), \sigma_A(\ell)\sigma_B(\ell), \cdots, \sigma_A(\ell)^{d_\ell - 1}\sigma_B(\ell)] = d_\ell, \tag{4.47}$$

对每个 $\ell \in \mathbb{N}_0$ 均成立。则波动方程 $d^2u/dt^2 = Au + Bv$ 在任意时间 $T > 0$ 内都是可控的，条件是

$$\inf_{\ell \in \mathbb{N}_0} \sup_{(z_1, z_2) \neq (0,0)} \frac{\int_0^T ||\sigma_B(\ell)^* S_1(t)\sigma_A(\ell)^* z_1 + \sigma_B(\ell)^* S_2(t) z_2||_{\text{HS}}^2 \, dt}{||z_1||_{\text{HS}}^2 + ||z_2||_{\text{HS}}^2} > 0, \tag{4.48}$$

其中 z_1、 $z_2 \in \mathbb{C}^{d_\ell}$，以及

$$S_1(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} (\sigma_A(\ell)^*)^n, \text{ and } S_2(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} (\sigma_A(\ell)^*)^n, \ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

证明。请注意，卡尔曼秩条件（4.47）等价于以下卡尔曼条件（正如我们在定理 4.9 的证明中所确立的）

$$\begin{aligned} &\text{rank} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \text{I} \\ \sigma_A(\ell) & \mathbf{0} \end{pmatrix}^j \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_B(\ell) \end{pmatrix} \right]_{0 \leqslant j \leqslant 2d_\ell - 1} \\ &= 2d_\ell \\ &= 2\text{rank}[\sigma_B(\ell), \sigma_A(\ell)\sigma_B(\ell), \cdots, \sigma_A(\ell)^{d_\ell - 1}\sigma_B(\ell)] \end{aligned}$$

a并注意到，系统（4.42）的可观测性不等式化为

$$\int_0^T \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_B(\ell)^* \end{pmatrix} \exp\left[t \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \text{I} \\ \sigma_A(\ell)^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\|_{\text{HS}}^2 dt \geqslant c_{\ell,T}^2 \left\| \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\|_{\text{HS}}^2.$$

由于

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \sigma_A(\ell)^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}^j = \begin{cases} \begin{pmatrix} (\sigma_A(\ell)^*)^{\frac{j}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\sigma_A(\ell)^*)^{\frac{j}{2}} \end{pmatrix}, & \text{if } j \text{ is even}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (\sigma_A(\ell)^*)^{\frac{j-1}{2}} \\ (\sigma_A(\ell)^*)^{\frac{j+1}{2}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, & \text{if } j \text{ is odd}, \end{cases}$$

那么我们有

$$\exp\left[t\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{I} \\ \sigma_A(\ell)^* & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} S_2(t) & S_1(t) \\ S_1(t)\sigma_A(\ell)^* & S_2(t) \end{pmatrix}$$

因此，上述可观测性不等式变为

$$\int_0^T \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_B(\ell)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_2(t) & S_1(t) \\ S_1(t)\sigma_A(\ell)^* & S_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathrm{HS}}^2 dt \geqslant c_{\ell,T}^2 \left(||z_1||_{\mathrm{HS}}^2 + ||z_2||_{\mathrm{HS}}^2 \right),$$

or equivalently,

$$\int_0^T ||\sigma_B(\ell)^* S_1(t)\sigma_A(\ell)^* z_1 + \sigma_B(\ell)^* S_2(t) z_2||_{\mathrm{HS}}^2 \, dt \geqslant c_{\ell,T}^2 \left(||z_1||_{\mathrm{HS}}^2 + ||z_2||_{\mathrm{HS}}^2 \right).$$

由此可见，条件（4.48）无非是指，系统（4.41）相对于分解 $(H_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ 的傅里叶变换具有有限的全局可控性代价。因此，由定理 3.5，系统（4.41）是可控的，系统（4.38）也因此可控。□

注 4.12. 已知，对于紧黎曼流形 (M, g)，若 $A = \Delta$，其中 Δ 是度量 g对应的负拉普拉斯算子，则算子

$$\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathrm{Id} \\ \Delta & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

是一个强连续半群的无穷小生成元。这是因为相对于一个根据流形的度量和梯度定义的特定内积，它是耗散的（详情参见 Chen 和 Millman 的经典著作 [22] ）。

4.6. 希尔伯特空间上的薛定谔方程控制。考虑薛定谔方程

$$\begin{cases} i\dfrac{du}{dt} = Au + Bv; \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{4.49}$$

其中 $u:\ [0,\ T] \to \mathcal{H}^\infty$ 在时间上属于 C^2类，且 $A,\ B:\ \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ 是相对于希尔伯特空间 $\{H_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ 的分解 $\mathcal{H}.$ 的傅里叶乘子。显然，（4.49）等价于以下柯西问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -iAu - iBv; \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.50}$$

此外，由于 $\sigma_{-iA}(\ell) = -i\sigma_A(\ell)$ 和 $\sigma_{-iB}(\ell) = -i\sigma_B(\ell)$对所有 $\ell \in \mathbb{N}$均成立，卡尔曼条件

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \operatorname{rank}\left[\sigma_{-iB}(\ell),\ \sigma_{-iA}(\ell)(\ell)\sigma_{-iB}(\ell),\ \cdots,\ \sigma_{-iA}(\ell)(\ell)^{d_\ell - 1}\sigma_{-iB}(\ell)\right] = d_\ell, \quad (4.51)$$

成立，当且仅当满足卡尔曼条件

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \operatorname{rank}\left[\sigma_{B}(\ell),\ \sigma_{A}(\ell)\sigma_{B}(\ell),\ \cdots,\ \sigma_{A}(\ell)^{d_\ell - 1}\sigma_{B}(\ell)\right] = d_\ell, \quad (4.52)$$

。结合上述讨论，我们得到定理 3.5关于薛定谔¨型模型的以下推论。注意，自然的假设是算子 $-iA$ 生成一个 C_0-半群，例如，当算子A： $\mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ 是无界自伴算子时，该条件成立，参见例如 [69]。

推论 4.13. 设 $\mathcal{H}$ 为复希尔伯特空间， $\mathcal{H}^\infty \subset \mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}$的稠密线性子空间。设 $\mathcal{H} = \bigoplus_j H_j$ 为 $\mathcal{H}$ 在正交子空间H_j 上的一个分解，每个子空间的维数为 $d_j \in \mathbb{N}$. 设 A、B： $\mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}$ 为相对于分解 $\{H_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$.的傅里叶乘子

(1) 假设薛¨定谔方程

$$\begin{cases} i\dfrac{du}{dt} = Au + Bv, \\ \\ u(0) = u_0 \in \mathcal{H}^\infty, \end{cases} \quad (4.53)$$

是可控的，那么对任意 $\ell \in \mathbb{N}_0$， A和 B的全局符号 $\sigma_A(\ell)$ 和 $\sigma_B(\ell)$ 分别满足卡尔曼条件:

$$\operatorname{rank}\left[\sigma_{B}(\ell),\ \sigma_{A}(\ell)\sigma_{B}(\ell),\ \cdots,\ \sigma_{A}(\ell)^{d_\ell - 1}\sigma_{B}(\ell)\right] = d_\ell. \quad (4.54)$$

此外，如果 $-iA$ 在 $\mathcal{H}$上生成一个强连续半群，那么柯西问题(4.50) 关于分解 $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$的傅里叶变换像，在时刻 $T > 0$具有有限的全局可控性代价，即

$$\mathscr{C}_T := \sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \mathscr{C}_{\ell,T} < \infty.$$

此外，

$$\mathscr{C}_T \leqslant \tilde{\mathscr{C}}_T,$$

˜其中 $\mathscr{C}_T$ 是(4.50)的可控性代价。

(2) 反之，假设 $-iA$ 是 $\mathcal{H}$上的强连续半群生成元，并且对每个 $\ell \in \mathbb{N}_0$，卡尔曼条件(4.54) 均成立。假设柯西问题(4.50) 关于分解 $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$的傅里叶变换像，在时间 $T > 0$具有有限的全局可控性代价，即，

$$\mathscr{C}_T := \sup_{\ell\in\mathbb{N}_0} \mathscr{C}_{\ell,T} < \infty.$$

那么，柯西问题 (4.53) 在时刻 $T > 0$ 可控，且其可˜控性代价 $\mathscr{C}_T$ 满足以下不等式

$$\mathscr{C}_T \geqslant \tilde{\mathscr{C}}_T. \quad (4.55)$$

5. Conclusions

本文研究了复希尔伯特空间上柯西问题的可控性。我们的方法将系统的可控性归结为无穷多个有限维可控系统满足卡尔曼条件。这一归结通过傅里叶分析实现，该分析由底层希尔伯特空间在有限维子空间上的一个固定正交分解所诱导；相关判据则以相对于这类分解的矩阵值符号表示，详见 [27,28]。提出主要定理 3.6 后，我们在算法 4.1 中确定了分析满足定理 3.6中不变性要求的各类问题之可控性所需的步骤。特别地，我们引入了系统在傅里叶变换下的像相对于希尔伯特空间分解 的全局可控性代价这一概念 $(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{H}$。根据这一概念，我们以精确的方式估计了系统的 可控性代价。第 4 节对所研究模型的原型及其可控性进行了全面分析。我们研究了与左不变算子相关的紧李群上的次椭圆扩散模型的控制、紧流形上椭圆算子的分数阶扩散模型的控制，并推导了波动方程和薛定谔方程控制的一些性质，还阐释并举例说明了这些性质与卡尔曼型判据之间的关系。¨

References

1. Acosta, G. Bersetche, F. M. Borthagaray, J. P. 分数阶拉普拉斯算子二维齐次狄利克雷问题的简短有限元实现。《计算数学与应用》，74(4)，784–816，2017。 2. Acosta, G. Borthagaray, J. P. 分数阶拉普拉斯方程：解的正则性与有限元逼近。《SIAM 数值分析杂志》，55(2)，472–495，2017。 3. Andersson, J. A. Gillis, J. Horn, G. Rawlings, J. B. Diehl, M. CasADi：用于非线性优化与最优控制的软件框架。《数学规划计算》，11(1)，1–36，2019。 4. Antil, H. Khatri, R. Warma, M. 非局部偏微分方程的外部最优控制。《逆问题》，35(8)，084003，35，2019。 5. Antil, H. Rautenberg, C. 非穆肯霍普权下的索博列夫空间、分数阶椭圆算子及其应用。《SIAM 数学分析杂志》，51(3)，2479–2503，2019。 6. Antil, H. Verma, D. Warma, M. 分数阶抛物型偏微分方程的外部最优控制。《ESAIM：控制、优化与变分法》，26(20)，2020。˘7. Bahrouni, A. RAdulescu, V. D. 一种新的分数阶索博列夫空间及其在变指数非局部变分问题中的应用。《离散连续动力系统》，11(3)，379，2018。 8. Bakunin, O. G. 湍流与扩散：标度与方程。Springer Science & Business Media，2008。 9. Biccari, U. Hern´andez-Santamar´ıa, V. 一维分数阶热方程的可控性：理论与数值方面。《IMA 数学控制与信息杂志》，36(4)，1199–1235，（2019）。 10. Biccari, U. Hern´andez-Santamar´ıa, V. 具有加性积分核的线性与半线性非局部热方程的零可控性。《SIAM 控制与优化杂志》，57(4)，2924–2938，2019。 11. Biccari, U. Micu, S. 带二阶记忆项的波动方程的零可控性。《微分方程杂志》，267(2)，1376–1422，2019。 12. Biccari, U. Marica, A. Zuazua, E. 有限差分逼近下的一维和二维离散波传播。《计算数学基础》，20(6)，1401–1438，2020。 13. Biccari, U. Warma, M. 带记忆项的分数阶波动方程的零可控性。《演化方程与控制理论》，9(2)，399–430，2020。

14. Biccari, U. Warma, M. Zuazua, E. 正性约束下的一维分数阶热方程的可控性。《纯粹与应用分析通讯》，19(4)，1949–1978，2020。 15. Bonito, A. Lei, W. Pasciak, J. E. 积分分数阶拉普拉斯算子的数值近似。《数值数学》，142(2)，235–278，2019。 16. Boyer, F. Hubert, F. Rousseau, J. L. 空间/时间离散化抛物方程的一致可控性。《数值数学》，118(4)，601–661，2011。 17. Caffarelli, L. Silvestre, L. 与分数阶拉普拉斯算子相关的延拓问题。《偏微分方程通讯》，32(8)，1245–1260，2007。 18. Caffarelli, L. Silvestre, L. 完全非线性积分微分方程的正则性理论。《纯粹与应用数学通讯》，62(5)，597–638，2009。 19. Cardona, D. 闭流形上椭圆伪微分算子的谱不等式，已投稿，arXiv:2209.10690。 20. Cardona, D. Ruzhansky, M. 紧李群上的次椭圆伪微分算子与傅里叶积分算子，已投稿。arXiv:2008.09651。 21. Cardona, D. Delgado, J. Ruzhansky, M. 紧李群上椭圆伪微分算子的特征函数和估计，已投稿，arXiv:2209.12092。 22. Chen, G. Millman, R. S. 紧黎曼流形上波动方程的控制理论。《泛函方程》，23(1)，39–61，1980。 23. Claus, B. Warma, M. 通过形式方法实现带非局部外部条件的分数阶拉普拉斯算子。《演化方程杂志》，20，1597–1631，2020。 24. De Roos, A. M. Persson, L. 与体型相关的生活史性状促使顶级捕食者发生灾难性崩溃。《美国国家科学院院刊》，99(20)，12907–12912，2002。 25. Coron, J. M.《控制与非线性》，《数学调查与专著》第136卷，美国数学会，2007。 26. Coron, J. M. Fursikov, A.V. 无边界流形上二维纳维–斯托克斯方程的全局精确可控性。《俄罗斯数学物理杂志》，4(4)，429–448，（1996）。 27. Delgado J. Ruzhansky M. 希尔伯特空间中的傅里叶乘子，载于《积分傅里叶算子：暑期学校论文集》，瓦加杜古，2015年9月14日至25日/ Sylvie Paycha；Pierre Clavier（编）。波茨坦：波茨坦大学出版社，2018。 28. Delgado, J. Ruzhansky, M. 紧流形上的傅里叶乘子、符号与核性。《分析数学杂志》，135(2)，757–800，2018。 29. Delgado, J. Ruzhansky, M. 紧群上的Schatten类与迹。《数学研究快报》，24(4)，979–1003，2017。 30. Delgado, J. Ruzhansky, M. 紧流形上Schatten类与r-核性的核和符号判据。《巴黎科学院数学报告》，352(10)，779–784，2014。 31. Dipierro, S. Ros-Oton, X. Valdinoci, E. 带诺伊曼边界条件的非局部问题。《伊比利亚美洲数学杂志》，33(2)，377–416，2017。 32. Dipierro, S. Ros-Oton, X. Valdinoci, E. 带诺伊曼边界条件的非局部问题。《伊比利亚美洲数学杂志》，33(2)，377–416，2017。 33. Donnelly, H. Fefferman, C. 伯格曼度量的 L^2 上同调。《美国国家科学院院刊》，80(10-i)，3136–3137，1983。 34. Donnelly, H. Fefferman, C. 黎曼流形上特征函数的节点集。《数学发明》，93，161–183，1988。 35. Donnelly, H. Fefferman, C. 曲面上拉普拉斯算子特征函数的节点集。《美国数学会杂志》，3(2)，333–353，1990。 36. Donnelly, H. Fefferman, C. 非紧流形上调和函数的节点域与增长。《几何分析杂志》，2(1)，79–93，1992。 37. Fall, M. M. Felli, V. 分数阶椭圆方程解的唯一延拓性质与局部渐近行为。《偏微分方程通讯》，39(2)，354–397，2014。 38. Fern´andez-Cara, E. L¨u, Q. Zuazua, E. 带非局部空间项的线性热方程与波动方程的零可控性。《SIAM 控制与优化杂志》，54(4)，2009–2019，2016。 39. Garetto, C. Ruzhansky, M. 紧李群上平方和的波动方程。《微分方程杂志》，258，4324–4347，2015。

40. Ghosh, T. R¨uland, A. Salo, M. Uhlmann, G. 单次测量下分数阶 Calder´on 问题的唯一性与重建。《函数分析杂志》, 279(1), 108505, 42, 2020. 41. Gilboa, G. Osher, S. 用于图像处理的非局部算子。《多尺度建模与仿真》, 7(3), 1005–1028, 2008. 42. Glowinski, R. Lions, J.-L. 分布参数系统的精确可控性与近似可控性。《数值学报》, 3, 269–378, 1994. 43. Glowinski, R. Lions, J.-L. He, J. 分布参数系统的精确可控性与近似可控性：一种数值方法。剑桥大学出版社, 2008. 44. Delgado, J. Ruzhansky, M. 紧李群上的 L^p-核性、迹与 Grothendieck-Lidskii 公式。《纯粹与应用数学杂志》 102(1), 153–172, 2014. 45. Glowinski, Lions J. L. 分布参数系统的精确可控性与近似可控性, 《数值学报》, 3, 269–378, 1994. 46. H¨ormander, L. 线性偏微分算子分析（第三卷）。施普林格出版社, 1985. 47. Huang, Y. Oberman, A. 分数阶拉普拉斯算子的数值方法：有限差分-求积方法。《SIAM 数值分析杂志》 52(6), 3056–3084, 2014. 48. D. Jerison, G. Lebeau. 特征函数和的节点集。调和分析与偏微分方程（芝加哥，IL，1996），芝加哥数学讲座，223–239, 1999. 49. K´alm´an R. E. 最优控制理论的贡献。《墨西哥数学学会公报》5, 102–119, 1960. 50. K´alm´an, R. E. Falb, P. L. Arbib, M. A. 数学控制理论专题，麦格劳-希尔图书公司，纽约，1969. 51. Kannai, Y. 扩散方程基本解的非对角短时渐近。《偏微分方程通讯》, 2(8), 781–830, 1977. 52. Komornik, V. Loreti, P. 控制理论中的傅里叶级数。施普林格数学专著，施普林格出版社，纽约, 2005. 53. Lebeau, G. Robbiano, L. 热方程的精确可控性, 《偏微分方程通讯》, 20, 335–356, 1995. 54. Lebeau, G. Zuazua, E. 线性热弹性系统的零可控性。《理性力学与分析档案》141(4), 297–329, 1998. 55. Lions, J. L. 分布系统的精确可控性、扰动与稳定化（第一卷：精确可控性；第二卷：扰动），应用数学研究丛书，Masson, 1988. 56. Lions, J. L. 分布系统的精确可控性、稳定化与扰动, 《SIAM 评论》, 30, 1–68, 1988. 57. Longhi, S. 光学中的分数阶薛定谔方程。《光学快报》, 40(6), 1117–1120, 2015. 58. Mandelbrot, B. B. Van Ness, J. W. 分数布朗运动、分数噪声及其应用。《SIAM 评论》10, 422–437, 1968. 59. Micu, S. Zuazua, E. 关于分数阶抛物方程的可控性。《SIAM 控制与优化杂志》, 44(6), 1950–1972, 2006. 60. Miller, L. 热方程零可控性代价增长率的几何界（小时间情形），《微分方程杂志》, 204(1), 202–226, 2004. 61. Nochetto, R. H. Ot´alora, E. Salgado, A. J. 一般区域中分数阶扩散的偏微分方程方法：先验误差分析。《计算数学基础》15(3), 733–791, 2015. 62. Russell, D. L. 双曲型与抛物型偏微分方程的统一边界能控性理论。《应用数学研究》, 52, 189–221, 1973. 63. Russell, D. L. 线性偏微分方程的可控性与可稳定性理论：近期进展与未解决的问题。《SIAM 评论》20(4), 639–739, 1978. 64. Ruzhansky, M. Turunen, V. 伪微分算子与对称性：背景分析与高级专题。Birkh¨auser-Verlag，巴塞尔，2010. 65. Ruzhansky, M. Turunen, V. 紧李群上的尖锐 G ̊arding 不等式, 《函数分析杂志》260, 2881–2901, 2011.

66. Ruzhansky, M. Turunen, V. Wirth, J. 紧李群上的 H¨ormander 类伪微分算子与整体拟椭圆性，《傅里叶分析与应用杂志》20, 476–499, 2014. 67. Seeley, R. T. 椭圆算子的复幂。1967 奇异积分（纯粹数学专题讨论会论文集，芝加哥，伊利诺伊州，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，288–307, 1966. 68. Seeley, R. T. 解析函数的特征函数展开。《美国数学会会刊》, 21, 734–738, 1969. 69. Weidmann, J. 希尔伯特空间中的线性算子。Joseph Sz¨ucs 德译英。数学研究生教材，68。施普林格出版社，纽约-柏林，1980. 70. Weiss, C. van Bloemen Waanders, B. Antil, H. 应用于地球物理电磁学的分数阶算子。《国际地球物理学杂志》, 220(2), 1242–1259, 2020. 71. Zuazua, E. 第7章——偏微分方程的可控性与可观测性：一些结果与开放问题。《微分方程手册：演化方程》3, 527–6021, 北荷兰出版社，2007.

Duván Cardona:Department of Mathematics: Analysis,
Logic and Discrete MathematicsGhent University, Belgium电子邮件地址
duvan.cardonasanchez@ugent.be

Julio Delgado:
Departamento de Matemáticas
Universidad del ValleCali-Colombia电子邮
件地址 delgado.julio@correounivalle.edu.co

Brian Grajales:Department of Mathematics
Universidad de Pamplona, Colombia电子邮件地
址 brian.grajales@unipamplona.edu.co

Michael Ruzhansky:Department of Mathematics: Analysis,
Logic and Discrete MathematicsGhent University, Belgiumand
School of MathematicsQueen Mary University of London
United Kingdom电子邮件地址 michael.ruzhansky@ugent.be