arXiv:2301.09061v1 [econ.TH] 22 Jan 2023

重新探讨群体公平切蛋糕

Erel Segal-Halevi 和 Warut Suksompong

摘要。蛋糕切分是经典的公平分配问题，其中蛋糕是异质可分资源的隐喻。近期研究表明，对于偏好任意的任意数量参与者，可以将参与者划分为任意所需规模的群体，并在群体之间分配蛋糕，使每个群体获得一份连续区段，且每位参与者都无嫉妒。对于两个群体，我们刻画了能够通过有限算法计算出此类分配的群体规模，并表明当且仅当其中一个群体为单人组时，这项任务才可行。我们还为任务分配确立了类似的存在性结果，并证明该结果不适用于混合蛋糕。

1. 引言。公司在年度业绩出色后，老板决定奖励20名员工，为他们租一间度假小屋，让他们在年末最后两周入住。由于容量限制，她需要将员工分成两个各有十人的组，将这两周划分为两个连续区间，并为每组分配一个区间。员工对于想在小屋度过的时间各有不同偏好。老板能否确保最终的分配无嫉妒，也就是说，没有员工认为分给另一组的时间段比自己所在组获得的时间段更好?

在《MONTHLY》最近的一篇短文中，Segal-Halevi 和 Suksompong [**15**] 证明，无论员工有何种偏好，总存在一种分配方案，能够满足房主的愿望。事实上，即使有 n 名员工，而房主希望他们按此顺序以 k_1、k_2.....、k_m 人为一组前往小屋度假，对于任意 n、m，以及总和为 n 的任意 k_j，这一结果依然成立。该结果推广了 Stromquist、Su [**19**], 和 Woodall [**22**] 的一项重要定理 [**17**]，（前两位作者的相关成果也发表于这本《MONTHLY》），该定理讨论的是 $k_1 = \cdots = k_m = 1$ 的情形，也就是员工每次一人前往小屋。然而，仍有两个重要问题有待解答:

- 房主如何计算出理想的分配方案？这甚至有可能做到吗?
- 如果我们要分配的不是度假住宿这类物品，而是家务这类任务——它会给所有参与者带来负效用——又会怎样？或者要分配的是物品和任务的混合呢?

本文对这两个问题都给出了全面的解答。

2. 模型。我们转而使用蛋糕切分的语言——这是研究如何公平分配资源的经典框架 [**3, 11**]。在蛋糕切分中，我们有一组 n 参与者，以及一块呈区间形状的蛋糕 $[0, 1]$。蛋糕的划分由非负实数 $x_1,\ldots,x_m$ 指定，满足 $\sum_{j=1}^{m} x_j = 1$，其中 x_j 表示第 j 份额的长度。对于每种划分 $(x_1,\ldots,x_m)$，每位参与者都偏好一份或多份份额。[1] Segal-Halevi 和 Suksompong [**15**] 的结果基于将问题简化为单人组的情形，并应用 Stromquist 的定理

[1] 形式上，每位玩家的偏好由一个函数表示，该函数将标准单纯形 Δ^{m-1} 映射到 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 的一个非空子集。请注意，这个模型允许玩家偏好例如划分 $(0, 0.2, 0.8)$ 中长度为0.8 的份额，以及划分 $(0.2, 0, 0.8)$ 中长度为0.2 的份额，尽管这两个划分在物理上完全相同。我们可以增加一项要求，即每位玩家在这类等价划分中始终偏好相同的物理份额；除第5节外，这不会影响我们的结果。

Stromquist [17] 和 Su [19]。这两个结果都建立在以下两个温和假设之上：

1. 贪婪参与者。参与者从不偏好空份额。2. 闭偏好集。对于一列收敛的划分，如果某个份额受到偏好，那么在极限划分中，该份额也受到偏好。

无嫉妒分配是指将蛋糕划分为 m 连续份额，并将参与者分成 m 个群体，其中第 j 组包含 k_j 名参与者；每位第 j 组的参与者都偏好划分中从左数第 j份。[2]

3. 协议。我们首先关注两个群体的情况。对于这种情况，[15]给出了一种计算无嫉妒分配的协议：每位参与者 i 都标记一个点$x_i \in [0,1]$，使得该参与者同时偏好 $[0,x_i]$和 $[x_i,1]$。然后，协议在从左数第 k_1个标记点与第 (k_1+1)个标记点之间的某个点 y 切割蛋糕，并将标记点最靠左的 k_1 名参与者分配到 $[0,y]$，其余参与者分配到 $[y,1]$。不过，该协议在很大程度上依赖于一个额外假设：参与者的偏好是单调的。这意味着，如果某位参与者偏好份额 $[0,y]$，那么对于任意 $z>y$，他或她也必须偏好份额 $[0,z]$；$[y,1]$的情况也同样如此。在某些情境中，单调性是合理的假设，但与存在性结果所需的两个假设相比，它相对较强。事实上，在我们的引入示例中，有些员工可能不想在小屋待太久，而放弃分配时间的一部分可能会遭到屋主或另一组的不满。那么，当偏好可能是非单调时，我们能怎么办?

为简洁起见，若在点$x \in [0,1]$处玩家偏好左侧部分（相应地，偏好右侧部分），我们就说该玩家偏好区间 $[0,x]$（相应地，$[x,1]$）。参与者贪食假设意味着，在 0 处，每位玩家只偏好右侧部分；在 1处，每位玩家只偏好左侧部分。一个自然而然的初步想法是询问玩家的全部偏好，以便确定一个合适的切点 x，我们知道这样的切点必定存在。然而，这可能导致无限协议。具体而言，对于任意无限数列 $0<a_1<a_2<\cdots<1$，某位玩家可能在 $[0,a_1]$中的任意一点偏好右侧部分，在 $[a_1,a_2]$中的任意一点偏好左侧部分，在 $[a_2,a_3]$中的任意一点偏好右侧部分，依此类推——这种偏好符合参与者贪食假设和偏好集闭性假设，但无法在有限时间内描述。试图完整了解这种偏好的协议将永远无法终止。

要了解有限协议能够实现什么，我们来回顾最简单的切蛋糕协议：切分-选择。该协议首先向一位参与者提出一个查询，可以表述为：“标记一个点 x，使得你对 x 左侧的蛋糕和 x右侧的蛋糕无差异。”我们稍微修改这个查询，以处理存在多个此类“无差异点”的情况：

第一个无差异点。给定一位玩家 i，返回最小的点 $y \in [0,1]$，使得 i 在 y 处对两份份额都具有偏好。

引理1。对于每一位偏好集闭合的贪婪参与者 i，i 的第一个无差异点都存在；它等于 i 偏好左侧部分的最小点，并且严格位于 0 和1之间。

证明。设 y 为满足 i 在 y处偏好左侧部分的最小点。注意：(i) y 存在，因为 i 在1处偏好左侧部分；(ii) $y>0$，因为 i 只偏好

[2]群体间的公平分配日益受到关注，不仅涉及蛋糕切分 [13, 15]，也涉及不可分物品的分配 [5, 6, 7, 14, 20, 21] 以及租金分配 [4]。

右侧部分0处，而(iii) 由于偏好集闭性假设， y 定义良好。然后，由于 i 在任意点 $z < y$处都偏好右侧部分，闭性假设告诉我们， i 在 y处也偏好右侧部分。因此， y 是第一个无差异点。参与者贪食假设意味着该点 y 严格位于0 和1之间。 ■

当偏好是单调的时，无差异点集合是一个（可能退化的）闭区间，而首次无差异点查询的答案是该区间的最左点。然而，当偏好不单调时，无差异点集合可以是 $(0,1)$ 的任意闭子集。事实上，给定这样一个子集 C，假设其最右点为 $r < 1$；由于 C 是闭集，该点是良定义的。贪婪参与者可能在 $C \cup [r, 1]$ 中的任意一点偏好左侧份额，并在 $[0, r]$ 中的任意一点偏好右侧份额。此时，无差异点集合恰好是 C。

我们证明，首次无差异点查询足以处理第一个组只有一名参与者这一特殊情形。对于任意正整数 t，用 $[t]$ 表示集合 $\{1, 2, \ldots, t\}$。

定理 2. 令 n 为任意正整数，且 $m = 2$。对于具有闭偏好集的 n 名贪婪参与者，存在一种使用首次无差异点查询的有限协议，可以计算出一个无嫉妒分配，其中第一个组包含一名玩家，第二个组包含 $n - 1$ 名参与者。

证明。我们的协议会对每位参与者进行一次首次无差异点查询——假设答案为 $x_1, \ldots, x_n$。

设 $i' \in [n]$ 满足 $x_{i'} = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$。协议在点 $x_{i'}$ 处切割蛋糕，并将左侧部分分配给玩家 i'，其余玩家则分到右侧部分。根据 $x_{i'}$ 的定义，玩家 i' 更喜欢左侧部分。对于任何其他玩家 i，引理1表明， x_i 是 i 更喜欢左侧部分的最小点，因此 i 在任意点 $z_i \leq x_i$处都更喜欢右侧部分，所以在$x_{i'} \leq x_i$处也更喜欢右侧部分。 ■

此时，人们或许会以为，定理 2 中的简单协议可以推广到玩家分布任意的两个组。然而，或许出人意料的是，我们证明了，当两个组都至少各有两名玩家时，不存在能够计算出无嫉妒分配的有限协议。即使允许协议进行更一般类型的查询，这一不可能性仍然成立：[3]

- 下一个无差异点。给定一名玩家和一个点 $x \in [0, 1]$，返回最小的点 $y \geq x$，使得该玩家在 y 处对两份额都无偏好（或者说明不存在这样的 y）。请注意，这是对“第一个无差异点”查询的推广；后者对应于 $x = 0$这一特殊情况。
- 上一个无差异点。给定一名玩家和一个点 $x \in [0, 1]$，返回最大的点 $y \leq x$，使得该玩家在 y 处对两份额都无偏好（或者说明不存在这样的 y）。
- 评估。给定一名玩家和一个点 $x \in [0, 1]$，返回该玩家在 x处偏好左侧部分、右侧部分，还是两者都偏好。

虽然只考虑无差异点似乎有所限制，但我们在此指出，这三种查询结合起来相当强大。例如，假设给定一个点 x，我们想确定最小的点 $y \geq x$，使得玩家在 y 处更喜欢左侧份额。我们可以先在 x 处进行一次评估查询。如果

[3]我们的查询旨在与“Robertson–Webb 模型”中的查询相对应——参见本节末尾的讨论。

玩家更喜欢左侧份额，答案就是 x。否则，我们在 x 处进行一次下一个无差异点查询。通过类似于引理1中的论证，此查询的答案 y 也是我们所需的答案。类似地，我们可以确定最小的点 $y \geq x$，使得玩家在 y 处更喜欢右侧份额；或者确定最大的点 $y \leq x$，使得玩家在 y 处更喜欢左侧（或右侧）份额。

定理 3. 设 n 为任意正整数，$m = 2$，且 k_1, k_2 为正整数，使得 $k_1 + k_2 = n$ 且 $\min\{k_1, k_2\} \geq 2$。不存在一种有限协议，使用下一个无差异点、上一个无差异点和评估查询，对任意 n 名具有闭偏好集的贪婪参与者，计算出一个组为 j、包含 k_j 名参与者的无嫉妒分配。

证明。为反证起见，假设存在这样一种协议。我们将说明，对手如何回答该协议的查询，使得无论查询次数有限到何种程度，对于协议可能输出的任意分配，都存在与这些回答相符、且使该分配不满足无嫉妒条件的玩家偏好。这足以得出所需的矛盾。

在协议运行期间，对手维护一组“已知区间”——协议知道所有玩家在这些区间内每一点的偏好。所有这些区间都是闭区间。初始时，只有退化区间 $[0, 0]$ 和 $[1, 1]$ 是已知的。每当协议提出查询，对手都会以某种方式修改已知区间，使得：(a) 可以利用已知区间所包含的信息回答该查询；(b) 已知区间并未覆盖整块蛋糕；(c) 若在某个已知区间内任意一点切蛋糕，则至少有 $n - 1$ 名玩家想要同一份蛋糕。下面我们将详细说明对手如何修改已知区间。

假设协议要求玩家 i 在点 x进行一次查询。如果 x 属于一个已知区间，对手就向两侧扩展该区间（除非该区间包含0 或 1，这种情况下协议只向一侧扩展），使其与下一个已知区间之间的间隔缩短一半。例如，如果一开始在点0进行查询，对手就将已知区间 $[0, 0]$ 扩展到 $[0, 0.5]$。另一方面，如果x 不在任何已知区间内，对手就添加一个包含 x的新已知区间，使其与两侧相邻已知区间之间的间隔都缩短一半。例如，如果一开始在点 0.4进行查询，对手就添加一个新的已知区间 $[0.2, 0.7]$。

现在，对手按如下方式确定参与者在新添加（或扩展的）已知区间中的偏好。所有参与者 $i' \neq i$ 在已知区间内添加的任意点，都只偏好右侧份额。对于玩家 i，针对已知区间的每个最大新增部分 $[a, b]$，对手选择 $a < a' < b' < b$，并令玩家 i 在 $[a, a')$ ∪ (b′,b]内的任何位置都只偏好右侧份额，在 (a', b') 内的任何位置都只偏好左侧份额，并在 a' 和 b'处同时偏好两侧份额。例如，如果一开始协议要求玩家 i 在点 0.4 进行查询，那么除 i 之外的所有参与者在 $[0.2, 0.7]$ 内的任何点都只偏好右侧份额，而玩家 i 只偏好右侧份额，例如在任何$y \in [0.2, 0.4)$ ∪ (0.5, 0.7]处；在任何 $y \in$ (0.4, 0.5) 处只偏好左侧份额，并在 0.4 和 0.5 处同时偏好两侧份额。

上一段规则的唯一例外是：如果查询是在最右侧已知区间内的某一点进行的，那么“右”和“左”的角色就会颠倒。因此，如果一开始在点1 为玩家 i进行查询，那么其他所有参与者在任何 $y \in [0.5, 1]$处都只偏好左侧部分；而玩家 i 例如在任何 $y \in [0.5, 0.7)$ ∪ (0.8,1]处只偏好左侧部分，在任何 $y \in (0.7, 0.8)$处只偏好右侧部分，并在0.7 和0.8处同时偏好两份额。

注意，经过修改后，玩家 i 在 x 的左侧和右侧都有无差异点（若 $x = 0$ 或 $x = 1$，则只在一侧有无差异点），并且 i 在 x 处的偏好是

已知的，因此对手掌握了充分信息，可以根据新指定的偏好回答任何查询。

由于协议是有限的，它最终必定会返回蛋糕的一个划分，其中包含某个切点 y。如果 y 不在已知区间内，那么对手会主动按照上述相同规则，回答某个玩家 i 在点 y处的查询，因此现在 y 就在一个已知区间内。

对手的回答保证，在已知区间中的任意点（包括 y），至少有 $n-1$ 个参与者只偏好左侧部分，或者至少有 $n-1$ 个参与者只偏好右侧部分。由于 $\min\{k_1, k_2\} \geq 2$，因此可以得出，协议返回的分配不可能是无嫉妒的。

最后，为了证明存在与其回答相一致的完整偏好，对手会补全所有玩家在所有未知区间内的偏好：在每个区间中的任意点，都让所有玩家只偏好右侧部分。唯一的例外是与最右侧已知区间相邻的未知区间——对于这个未知区间，对手会在其中选取一点 z，并让所有玩家在 z左侧的点只偏好右侧部分，在 z 右侧的点只偏好左侧部分，而在 z处同时偏好两侧。很容易验证，由此得到的偏好同时满足参与者贪食假设和偏好集闭性假设。 ■

定理2和定理3，再加上这样的观察：对于情形 $k_2 = 1$，定理2的类似结果可以给出一种使用上一个无差异点查询的有限协议；这些结果共同完整刻画了在两个群体的情形下存在有限协议的组规模。

如果我们希望将蛋糕划分为三个或更多群体，会发生什么？事实证明，即使是三个或更多单人组（也就是说，$m \geq 3$ 和 $k_j = 1$，对所有 $j \in [m]$而言），也不存在有限协议。这可由 Stromquist [**18**]针对可加模型证明的不可能性结果推出。在这个模型中，每个参与者 i 都有一个效用函数 u_i，它是蛋糕上的非负无原子测度，并且满足 $u_i([0,1]) > 0$。在对蛋糕的每一种划分中，当且仅当份额 $[x, y]$ 上的 $u_i([x, y])$ 在该划分的各份额中取最大值时，参与者 i 才偏好份额 $[x, y]$。函数 u_i 非负这一假设意味着参与者贪食假设；它们无原子这一假设意味着偏好集闭性假设。因此，可加模型是我们所研究模型的一种特殊情形。

在可加模型中，协议可以进行两种类型的查询（两者共同构成 Robertson–Webb 模型 [**11**]）：评估查询，返回某位玩家对给定蛋糕份额的效用；以及切割查询，返回从给定点开始、使某位玩家获得特定效用的蛋糕份额。与我们的证明类似，Stromquist 的证明采用了对手论证：对手以一种方式回答协议的查询，使得无论经过多少次有限查询，协议都无法确定地产生无嫉妒分配。在不涉及基数效用的一般偏好下，对于三个或更多群体，应允许哪些查询尚不明确；此外，鉴于在更具体的模型中存在不可能性结果，对于任何一组合理的允许查询，似乎都不太可能存在有限算法。因此，我们不会在这一方向上继续探讨。[4]

[4]如上所述，即使所有参与者的偏好都基于可加效用函数，Stromquist 的不可能性结果依然成立。定理 3 也同样如此：证明中使用的偏好可以用可加效用函数表示（不过，与 Stromquist 的结果不同，我们的结果要求偏好是非单调的）。为此，对于每位玩家 i，在$(0,\ 0)$ 和$(1,\ 1)$之间绘制一个连续函数，使其在 i 的每个无差异点处与 $1/2$ 相交；在 i 偏好右侧部分的任一区间内，该函数低于 $1/2$；在 i 偏好左侧部分的任一区间内，该函数高于 $1/2$。由于在我们的构造中，每位玩家的无差异点数量有限，这样的函数 U_i：$[0,1] \to [0,1]$ 可表示一个可加效用函数，它为每个区间 $[x, y]$ 赋予效用 $U_i(y) - U_i(x)$。

下表将本节中的结果与先前的结果进行了比较。即使在非可加偏好下，正面结果仍然成立；而即使在可加偏好下，否定结果也仍然成立。

单调性	m	k_i	协议?
单调	≥ 3	任意	没有 [**18**]
单调	2	任意	是的 [**15**]
任意	2	$k_1 = 1$或 $k_2 = 1$	是的 [定理 2]
非单调	2	$k_1,\ k_2 \geq 2$	无 [定理 3]

4. 不受欢迎任务分配问题。现在假设这里不是度假小屋，而是一座夜间必须确保安全的敏感公共建筑。因此，我们希望将夜晚划分为 m 个轮班。在每个轮班 $j \in [m]$中，建筑都应由 k_j 名警卫负责守卫。

当 $k_j = 1$ 对所有 $j \in [m]$时，这个问题就是一个著名的不受欢迎任务分配问题实例：按照参与者各自的偏好，将一项不受欢迎的任务分配给他们，而他们都希望尽可能少地承担这项任务。任务分配问题与蛋糕切分问题的区别，体现在以懒惰参与者假设取代参与者贪食假设：

1.* 懒惰参与者。只要有空份额可选，参与者就绝不会偏好非空份额。

引理 4. 在至少有一份空份额时，具有闭偏好集的懒惰玩家偏好所有（且仅偏好）空份额。

证明。如果恰好有一份额为空，那么根据定义，懒惰玩家只偏好这一份额。现在考虑一个划分 $\mathbf{x}$，其中份额 $j_1,\ldots,j_t$ 对某个 $t > 1$ 为空。这个划分 $\mathbf{x}$ 是 t 个划分序列的极限，在每个序列$\ell \in [t]$中，只有份额 j_ℓ 为空，而份额$j_{\ell'}$ 的大小收敛于 0。懒惰玩家在序列 ℓ的所有划分中都偏好份额 j_ℓ；因此，具有闭偏好集的懒惰玩家在极限划分 $\mathbf{x}$ 中也偏好份额 j_ℓ。这对每一份空份额 j_ℓ都成立。■

对于个体（即单人组），无嫉妒不受欢迎任务分配的存在性已由 Su [**19**] 在《MONTHLY》中证明。接下来我们说明，Segal-Halevi 和 Suksompong [**15**], 关于一般群体结果的结论同样适用于不受欢迎任务分配。证明使用了从群体不受欢迎任务分配到群体蛋糕分配的归约，这一方法在群体分配以外的其他情境中也可能有用。[5]

定理5。令 $n \geq m$ 为任意正整数，并令 k_1，k_2，.....，k_m 为满足 $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$ 的正整数。对于任意 n 名拥有闭偏好集的懒惰参与者，都存在对家务的 m 划分，以及将各份额无嫉妒地分配给 m 个群体的方案，其中群体 j 包含 k_j 名参与者。

[5]Segal-Halevi 和 Suksompong [**15**] 将群体蛋糕切分归约为个体蛋糕切分。为什么我们不能用同样的方法，将群体不受欢迎任务分配归约为个体不受欢迎任务分配？原因在于，他们的归约虽然保留了“贪食性”，却没有保留“懒惰性”。更具体地说，给定一个群体蛋糕切分实例中的玩家，该归约会在一个个体蛋糕切分实例中构造出一个玩家。为了确定该个体实例中的玩家对一个 n划分 $\mathbf{x}$的偏好，归约会通过合并一连串相邻的份额，构造一个 m划分 $\hat{}\mathbf{x}$：$1,\ldots k_1$ 在 $\mathbf{x}$ 中的份额合并后，成为 $\hat{}\mathbf{x}$中的第一份；$k_1+1,\ldots k_2$ 在 $\mathbf{x}$ 中的份额合并后，成为 $\hat{}\mathbf{x}$中的第二份；依此类推。现在，如果 $\mathbf{x}$ 中的某一份额非空，那么 $\hat{}\mathbf{x}$ 中与之对应的份额也非空；因此，组实例中玩家的贪食性意味着个体实例中玩家的贪食性。然而，如果 $\mathbf{x}$ 中的某一份额为空，就没有理由认为 $\hat{}\mathbf{x}$ 中与之对应的份额（或任何其他份额）也会为空；因此，组实例中玩家的懒惰性并不意味着个体实例中玩家的懒惰性。

在证明定理之前，我们先引入一些形式化记号。我们用向量$\mathbf{x} \in \Delta^{m-1}$表示蛋糕或家务的每一种$m$划分，其中 Δ^{m-1} 是 $\mathbb{R}^m$ 中的标准单纯形（即对于所有 $j \in [m]$、$x_j \geq 0$ 和 $\sum_{j=1}^{m} x_j = 1$）。 x_j的值表示第 j 份额的长度（份额编号从左侧开始）。

玩家的偏好由需求函数 $h\colon \Delta^{m-1} \to 2^{[m]}$表示，该函数为每种划分指定一个非空的偏好份额子集。给定 $j \in [m]$和需求函数 h，我们将 $P_{h,\,j} := \{\mathbf{x} \in \Delta^{m-1} \mid j \in h(\mathbf{x})\}$ 定义为这样一组划分：在这些划分中，根据 h，份额 j 是受偏好的。如果 h 满足偏好集闭性假设，那么对于每个 j，$P_{h,\,j}$ 都是 Δ^{m-1} 的闭子集。

证明思路是将任意家务分配实例转换为一个蛋糕分配实例。我们不再将家务 $[0,1]$ 中的每个点分配给单个组，而是豁免 $m-1$ 个组承担这项家务。我们证明，如果家务实例中玩家的偏好满足懒惰参与者假设和偏好集闭性假设，那么他们在豁免实例中的偏好就满足贪婪参与者假设和偏好集闭性假设，因此蛋糕切分的存在性结果也适用。详情如下。

定理5的证明。对于每个 m-划分$\mathbf{x} \in \Delta^{m-1}$，定义向量 $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$ 如下：

$$\widehat{\mathbf{x}} := \mathbf{1}_m - (m-1) \cdot \mathbf{x},$$

其中 $\mathbf{1}_m$ 是一个全为 m 1 的向量，即对所有 $j \in [m]$，$\widehat{x}_j := 1 - (m-1) \cdot x_j$。注意，$\sum_{j=1}^{m} \widehat{x}_j = m - (m-1) = 1$，且当且仅当对所有 $j \in [m]$，$\widehat{\mathbf{x}} \in \Delta^{m-1}$。令 $\delta^{m-1} := \{\mathbf{x} \in \Delta^{m-1} \mid \forall j \in [m] : x_j \leq \frac{1}{m-1}\}$。直观地说，对于任意点$\mathbf{x} \in \delta^{m-1}$，向量$(m-1) \cdot \mathbf{x}$ 表示一种豁免分配，而 $\widehat{\mathbf{x}}$表示相应的家务分配。

给定 n 个懒惰参与者，其中每个懒惰参与者 $i \in [n]$ 都有一个需求函数 $\ell_i\colon \Delta^{m-1} \to 2^{[m]}$。由这些参与者构造出 n 个贪婪参与者，其需求函数 $h_i\colon \Delta^{m-1} \to 2^{[m]}$ 定义如下：

$$h_i(\mathbf{x}) := \begin{cases} \ell_i(\widehat{\mathbf{x}}) & \text{if } \mathbf{x} \in \delta^{m-1}; \\ \left\{ j \,\middle|\, x_j \geq \frac{1}{m-1} \right\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，$h_i(\mathbf{x})$ 在两种情况下都非空。在第一种情况下，$(m-1) \cdot \mathbf{x}$ 对应于有效的豁免分配；在第二种情况下，$(m-1) \cdot \mathbf{x}$ 对应于豁免的“过度分配”，也就是说，这种分配中的某些豁免（那些带有 $x_j > \frac{1}{m-1}$的豁免）覆盖的范围超过了整个蛋糕。

为了应用 [**15**], 中的切蛋糕定理，我们现在证明 h_i 满足贪婪参与者假设和偏好集闭性假设。

贪婪参与者。考虑一个 m-划分 $\mathbf{x}$，其中 $x_j = 0$ 对某个 $j \in [m]$ 成立。我们必须证明 $j \notin h_i(\mathbf{x})$。如果 $\mathbf{x} \notin \delta^{m-1}$，那么根据定义，$h_i(\mathbf{x})$ 只包含长度至少为$\frac{1}{m-1}$的份额，因此 $j \notin h_i(\mathbf{x})$。现在假设 $\mathbf{x} \in \delta^{m-1}$。由于$\sum_{j=1}^{m} x_j = 1$，根据 δ^{m-1} 的定义可知，对于所有 $j' \neq j$，$x_{j'} = \frac{1}{m-1}$。因此，$\widehat{x}_j = 1$，并且对于所有 $j' \neq j$，$\widehat{x}_{j'} = 0$。由于 ℓ_i 表示一个懒惰玩家，他在有空份额可选时绝不会偏好正值份额，所以 $j \notin \ell_i(\widehat{\mathbf{x}}) = h_i(\mathbf{x})$。

闭偏好集。固定某些 $i \in [n]$ 和 $j \in [m]$。根据 h_i 的定义可知，$P_{h_i,\,j} = Q_{h_i,\,j} \cup R_{h_i,\,j}$，其中

$$Q_{h_i,j} := \{\mathbf{x} \in \delta^{m-1} \mid j \in \ell_i(\widehat{\mathbf{x}})\};$$

$$R_{h_i,j} := \left\{ \mathbf{x} \notin \delta^{m-1} \,\middle|\, x_j \geq \tfrac{1}{m-1} \right\}.$$

集合 $Q_{h_i,\ j}$ 是闭集，因为它是 $P_{\ell_i,\ j}$的线性变换，而根据原始懒惰型玩家实例上的偏好集闭性假设，该集合是闭集。具体来说，回想一下 $P_{\ell_i,\ j} = \{\mathbf{x} \ \in \Delta^{m-1} \mid j \in \ell_i(\mathbf{x})\}$。如果我们将 $P_{\ell_i,\ j}$关于原点反射，再平移 $\mathbf{1}_m$，并将其放大 $\frac{1}{m-1}$，就会得到另一个闭集：

$$\begin{aligned}
&\left\{ \tfrac{1}{m-1} \cdot (\mathbf{1}_m - \mathbf{x}) \,\middle|\, \mathbf{x} \in P_{\ell_i,j} \right\} \\
&= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{1}_m - (m-1) \cdot \mathbf{y} \in P_{\ell_i,j}\} \\
&= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \widehat{\mathbf{y}} \in P_{\ell_i,j}\} \\
&= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \widehat{\mathbf{y}} \in \Delta^{m-1},\ j \in \ell_i(\widehat{\mathbf{y}})\} \\
&= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{y} \in \delta^{m-1},\ j \in \ell_i(\widehat{\mathbf{y}})\} \qquad \text{(since } \widehat{\mathbf{y}} \in \Delta^{m-1} \text{ iff } \mathbf{y} \in \delta^{m-1}\text{)} \\
&= Q_{h_i,j}.
\end{aligned}$$

因此，$Q_{h_i,\ j}$ 是闭集。

集合 $R_{h_i,\ j}$ 本身不是闭集，但其边界包含于 $Q_{h_i,\ j}$中。具体来说，由引理 **4**，对于任意 $\mathbf{x} \in \delta^{m-1}$ （即 $\widehat{\mathbf{x}} \in \Delta^{m-1}$），$\ell_i(\widehat{\mathbf{x}})$ 包含所有满足 $\widehat{x}_j = 0$ 的 j，因此它包含所有满足 $x_j = \frac{1}{m-1}$的 j。因此，

$$\begin{aligned}
&Q_{h_i,j} \supseteq \left\{ \mathbf{x} \in \delta^{m-1} \,\middle|\, x_j = \tfrac{1}{m-1} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \delta^{m-1} \,\middle|\, x_j \geq \tfrac{1}{m-1} \right\} \\
\implies &Q_{h_i,j} \cup R_{h_i,j} = Q_{h_i,j} \cup \left\{ \mathbf{x} \in \Delta^{m-1} \,\middle|\, x_j \geq \tfrac{1}{m-1} \right\},
\end{aligned}$$

所以 $P_{h_i,\ j}$ 是两个闭集的并，因此自身也是闭集。

现在我们可以完成证明了。由 **[15]**，中的定理 2，存在一个划分 $\mathbf{y} \ \in \Delta^{m-1}$，以及对贪婪参与者（由需求函数 h_i 表示）的一种划分，将他们分成若干组，每组 j 含有 k_j 个参与者，使得该划分对贪婪参与者而言是无嫉妒的。如果 $\mathbf{y} \notin \delta^{m-1}$，那么所有贪婪参与者只偏好长度至少为 $\frac{1}{m-1}$的份额，而这样的份额至多有 $m-1$ 份，因此至少有一组被分配到非偏好的份额，这与无嫉妒性矛盾。因此，$\mathbf{y} \in \delta^{m-1}$。根据构造，划分 $\widehat{\mathbf{y}}$ 连同将懒惰参与者划分为组的同一方式，对懒惰参与者而言是无嫉妒的。

■

5. 混合蛋糕。蛋糕切分假设所有参与者都饿了，而且绝不会偏好空份额；而任务分配则假设他们全都懒惰，而且绝不会偏好非空份额而非空份额。要是这两种假设都并非普遍成立呢？或许有些员工宁愿待在家里，也不愿在某些时段待在小屋里；而有些警卫则乐于确保公共建筑得到妥善守卫。近几年，已有多位作者研究了如何在各个参与者之间分配所谓的“混合蛋糕” **[1, 2, 8, 12]**。

混合蛋糕模型既不假设存在贪婪参与者，也不假设存在懒惰参与者，同时保留偏好集闭性假设。若没有额外假设，即使是两个单人组，也可能不存在无嫉妒分配——例如，无论切点在哪里，两位玩家都始终只偏好右侧部分。虽然这种偏好满足偏好集闭性假设，却意味着玩家既偏好整块蛋糕而非空蛋糕（切点为0时），也偏好空蛋糕而非整块蛋糕（切点为1时）！为避免这种

不现实的情况，我们增加一项要求：如果两个划分（$x_1, \ldots, x_m$）和（$x'_1, \ldots, x'_m$）产生相同的蛋糕切分，那么每位玩家在这两个划分中的偏好应当一致。例如，在划分（0, 0.2, 0.8）中，如果某位玩家只偏好长度为 0.8 的份额，那么在划分（0.2, 0, 0.8）和（0.2, 0.8, 0）中，该玩家也应只偏好长度为 0.8 的份额。然而，即便有了这项要求，仍无法保证存在无嫉妒分配。事实上，考虑五位玩家，他们的偏好由图1所示的可加基数效用函数表示。每个标记份额内的效用均匀分布。给定对混合蛋糕的任意二分划分，每位玩家都偏好对自己效用更高的那一份（若两份效用相同，则两份都偏好）。显然，所有玩家都满足偏好集闭性假设，前述不现实的情况也不再发生。另一方面，可以验证，在任何二分划分中，每一份最多只被三位玩家偏好，这意味着，对于人数分别为四人和一人的两个组，不存在无嫉妒分配。

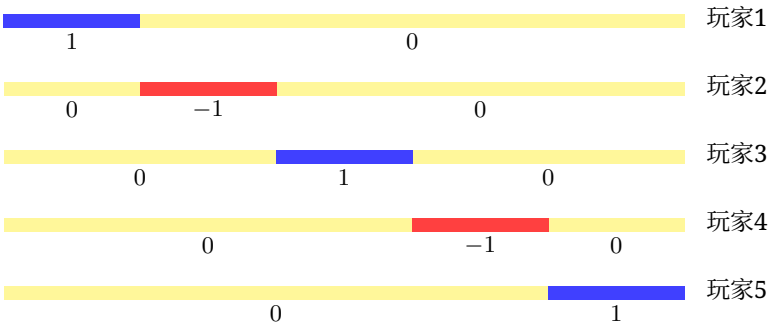


图1. 一个例子说明定理5不适用于混合蛋糕。

这个反例表明，为了恢复无嫉妒分配必然存在这一保证，可能有必要为每个群体分配多于一个连续片段的混合蛋糕。因此，迄今为止，我们的模型只为划分成 m 个连续片段的情形定义偏好，其中 m 是群体数。为此，我们将偏好扩展到由 m 个份额集合构成的划分，其中每个集合由有限个连续片段组成。与之前一样，对于任何此类划分，每位参与者都偏好一个或多个集合，且相应的偏好集是闭集。在若干分配问题中，为每个群体分配较少份额是理想的。然而，图1中的例子可以推广，表明即使只有两个群体，切割次数也可能不可避免地与参与者人数成线性关系。

定理6。设 $n \geq 4$ 为任意整数， $m = 2$，且 k_1， k_2 为正整数，并满足$k_1 + k_2 = n$ 且 $\min\{k_1, k_2\} = 1$。存在 n 位参与者，其偏好由可加基数效用函数表示，使得对于混合蛋糕的任何无嫉妒分配，包含 k_j 位参与者的群体 j 至少需要 $n - 3$ 次切割。

证明。不失一般性，假设 $k_1 = n - 1$ 和 $k_2 = 1$。考虑n 名偏好由可加基数效用函数表示的参与者。对于奇数 $i \in [n]$，玩家 i对区间 $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$的效用为 1，对其他区间的效用为 0；效用在每个区间内均匀分布。类似地，对于偶数

$i \in [n]$，玩家 i对区间 $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$的效用为 -1，对其他区间的效用为 0。情形 $n = 5$ 如图1所示。

考虑一个无嫉妒分配，令 C 为 $n-1$ 个参与者偏好的份额（区间的并集）。若一对索引相邻的参与者 i 和 $i+1$ 都偏好 C，则称这对参与者是一致的。注意，在 $n-1$ 对相邻参与者中，至少有 $n-3$ 对是一致的。对于每一对一致的参与者 $\{i, i+1\}$，如果 i 对区间 $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$的效用为1，那么该区间 $(\frac{i-1}{n}, \frac{i+1}{n})$内必有一个切点，使切点左侧的份额属于 C，而右侧的份额不属于 C。类似地，如果参与者 i 对区间 $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$的效用为 -1，那么区间 $(\frac{i-1}{n}, \frac{i+1}{n})$ 内必有一个切点，使切点左侧的份额不属于 C，而右侧的份额属于 C。由于不同的一致参与者对所对应的切点不会重合，因此切点数至少为 $n-3$。 ■

从积极的一面来看，借助关于“共识二分”的经典结果，我们可以发现，即使参与者被任意分配到两个群体中，定理6所需的 $n-3$ 切割也几乎已是最糟的情况。具体而言，对于任意正整数k_1， k_2，只要满足 $k_1 + k_2 = n$，对于偏好由连续基数效用函数表示的 n 名参与者（不一定具有可加性或单调性），都存在一种对混合蛋糕的无嫉妒分配，其中包含 k_j 名参与者的群体 j 至多需要 n 个切点。事实上，Simmons 和 Su 的一项结果 [**16**] 表明，对于具有此类效用函数的 n 名参与者，存在一种将混合蛋糕划分为两部分的方式，至多使用 n 个切点，使每位参与者对两部分的效用相等。利用这种划分，我们可以任意将参与者分成两个群体，使群体 j 包含 k_j 名参与者。[6]

最后我们指出，绝大多数切蛋糕文献都假设参与者的偏好可由可加效用函数表示——事实上，相关综述甚至将可加性描绘为模型的固有组成部分 [**9, 10**]。然而，在许多蛋糕切分应用中，偏好既不可加也不单调。正如我们的研究所展示的那样，允许一般偏好会引出若干新的问题，而这些问题的答案颇为引人入胜。因此，在更一般的偏好模型中探讨其他问题，是未来研究一个很有吸引力的方向。

致谢。 本研究部分由以色列科学基金会（资助编号 712/20）、新加坡教育部（资助编号 MOE-T2EP20221-0001）以及新加坡国立大学初创基金资助。作者谨向编辑和匿名审稿人致谢，感谢他们提出的若干建设性意见。

参考文献

1. Avvakumov, S., Karasev, R. (2021). 利用映射度实现无嫉妒分配。Mathematika. 67(1): 36–53. 2. Bogomolnaia, A., Moulin, H., Sandomirskiy, F., Yanovskaya, E. (2017). 混合 manna 的竞争性分配。Econometrica. 85(6): 1847–1871. 3. Brams, S. J., Taylor, A. D. (1996). 公平分配：从切蛋糕到争议解决。英国剑桥：剑桥大学出版社。4. Ghodsi, M., Latifian, M., Mohammadi, A., Moradian, S., Seddighin, M. (2018). 群体间的租金分配。载于：Kim, D., Uma, R. N., Zelikovsky, A.，编。《第12届组合优化与应用国际会议论文集》。Cham：施普林格，第577–591页。5. Kyropoulou, M., Suksompong, W., Voudouris, A. A. (2020). 群体资源分配中的近似无嫉妒性。Theor. Comput. Sci. 841: 110–123. 6. Manurangsi, P., Suksompong, W. (2017). 群体公平分配的渐近存在性。Math. Soc. Sci. 89: 100–108.

[6]事实上， $n-1$ 次切割就足够了，因为我们可以为 $n-1$ 位参与者计算共识二分，并让第 n位参与者为其所在的组挑选一份偏好的份额。

7. Manurangsi, P., Suksompong, W. (2022). 群体近似无嫉妒：通过不一致理论改进界限。Theor. Comput. Sci. 930: 179–195. 8. Meunier, F., Zerbib, S. (2019). 无需假设参与者偏好非空份额的无嫉妒蛋糕分配。Israel J. Math. 234(2): 907–925. 9. Procaccia, A. D. (2013). 蛋糕切分：不只是儿戏。Commun. ACM. 56(7): 78–87. 10. Procaccia, A. D. (2016). 蛋糕切分算法。载于：Brandt, F., Conitzer, V., Endriss, U., Lang, J., Pro- caccia, A. D.，编。《计算社会选择手册》。英国剑桥：剑桥大学出版社，第311–329页。11. Robertson, J., Webb, W. (1998). 蛋糕切分算法：力所能及地做到公平。美国佛罗里达州博卡拉顿：Peters/CRC出版社。12. Segal-Halevi, E. (2018). 烤箱中部分蛋糕烤焦后如何公平地分配蛋糕。载于：Andr´e, E., Koenig, S., Dastani, M., Sukthankar, G.，编。《第17届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集》。南卡罗来纳州里奇兰：自主智能体与多智能体系统国际基金会，第1276–1284页。13. Segal-Halevi, E., Nitzan, S. (2019). 家庭间的公平蛋糕切分。Soc. Choice Welf. 53(4): 709–740. 14. Segal-Halevi, E., Suksompong W. (2019). 不可分物品的民主公平分配。Artif. Intell. 277: 103167. 15. Segal-Halevi, E., Suksompong W. (2021). 如何公平地切分蛋糕：推广至群体。Amer. Math. Monthly. 128(1): 79–83. 16. Simmons, F. W., Su, F. E. (2003). 通过博尔苏克–乌拉姆定理和塔克定理实现共识二分。Math. Soc. Sci. 45(1): 15–25. 17. Stromquist, W. (1980). 如何公平地切分蛋糕。Amer. Math. Monthly. 87(8): 640–644.《Amer. Math. Monthly》88(8): 613–614刊有补遗。18. Stromquist, W. (2008). 无法通过有限协议找到无嫉妒蛋糕分配。Electron. J. Comb. 15: #R11. 19. Su, F. E. (1999). 租房和谐：斯佩纳引理在公平分配中的应用。Amer. Math. Monthly. 106(10): 936– 942. 20. Suksompong, W. (2018). 代理人群体的近似极大极小份额。Math. Soc. Sci. 92: 40–47. 21. Suksompong, W. (2018). 群体的资源分配与决策。博士论文。美国斯坦福州斯坦福：斯坦福大学。22. Woodall, D. R. (1980). 公平地分配蛋糕。J. Math. Anal. Appl. 78(1): 233–247.

以色列阿里埃勒大学计算机科学系
erelsgl@gmail.com

新加坡新加坡国立大学计算学院 warut@comp.nus.edu.sg