arXiv:2301.09078v2 [math.GR] 9 Aug 2024

树上的边界传递作用的刚性稳定子与局部前可解性

Colin D. Reid[1]

纽卡斯尔大学信息与物理科学学院,
卡拉汉，新南威尔士州2308，澳大利亚 电
子邮件：colinreid29@gmail.com

2024年8月12日

摘要

设 G 是一个在局部有限树的边界上双重传递地作用的群，并排除这样的情形（这确实是一个例外）： G 同时以 $\mathrm{P\Gamma L}_3(4)$ 和 $\mathrm{P\Gamma L}_3(5)$ 为局部作用。我们证明，对于每个半树 T_a，T_a 的刚性稳定子在 T_a 的根处的局部作用包含 G 的局部作用的点稳定子的可解剩余。特别地， G 局部前可解，当且仅当其局部作用具有可解点稳定子；若 G 不是局部前可解的，则它在边界上具有微支撑作用。我们还证明了 G 中端稳定子的局部作用受到若干强限制。这些结果部分受到 Radu 对在树上边界 2-传递且局部作用包含交错群的群的分类的启发，部分基于作者近期对有限置换群的分类：这类群保持一个等价关系，在块上忠实作用，并且传递地作用于来自不同块的点对。

1 引言

1.1 背景与动机

设 T 是一棵局部有限树（按组合意义，或指其几何实现；在不会引起混淆时，我们会酌情使用 T 的任一含义）。那么 T 自然带有一个紧空间 ∂T，称为边界或端空间，可用多种等价方式定义：例如，它是T中测地射线的等价类集合，其中两条射线等价，当且仅当删除初始线段并平移指标后，它们重合。（等价地说，两条射线属于同一个端，当且仅当它们之间的距离始终有界。）本文通常假设 T 是厚的，即每个顶点的度至少为 3。我们还将利用 T顶点的自然二分划分，将顶点分为两种类型 $VT = V_0T \sqcup V_1T$，其中每个顶点的邻点都属于另一种类型。 T的一条弧是 T中相邻顶点 $(v、 w)$ 组成的有序对。

给定一个作用于集合 X 上的群 G，我们用 $G(x)$ 表示 $x \in X$ 在 G 中的稳定子，用 $G(x_1, \ldots, x_n) = \bigcap_{i=1}^{n} G(x_i)$ 表示.....。设 G 是 $\mathrm{Aut}(T)$ 的一个闭子群。如果所有由 k 个互异点组成的 k-元组都属于同一个 G 轨道，我们就称 G 是边界-k-传递的。自同构群 $\mathrm{Aut}(T)$ 本身是边界 2-传递的，当且仅当 T 是半正则的；这意味着同一类型 t 的任意两个顶点都有相同数量 d_t 的邻点。出于多种原因，研究 $\mathrm{Aut}(T)$ 的闭边界2-传递子群类 $\mathcal{H}_T$ 很有意义。

[1]本研究部分由 ARC 资助项目 FL170100032 提供支持。

• 给定 Aut(T) 的一个闭子群 G，边界上的 2-传递性是从置换角度刻画 G 较大的一个自然条件，并且可以用若干种等价方式表述；见下文推论 2.10。例如，它等价于以下条件： G 在 ∂T 上传递，且不固定顶点也不反转边。另一种解释是，假设 G 保型，并将这棵树视为类型为 $\tilde{\mathrm{A}}_1$ 的建筑，其中所有直线都是公寓；那么 G 是边界 2-传递的，当且仅当它强传递，即在由一个公寓及其内部一个室（几何边）组成的点对上具传递性。

• 该条件为 $\mathscr{S}$ 非离散、紧生成、拓扑单的全不连通局部紧群 $\mathscr{S}$ 这一类群提供了来源。具体而言，给定 $G \in \mathcal{H}_T$，就存在一个余紧正规子群 $G^{(\infty)} \in \mathcal{H}_T \cap \mathscr{S}$；参见 [4, 命题 3.12]。

• 将边界 2-传递群视为带有 Chabauty 拓扑的 Sub(自同构群(T)) 的子空间时，Caprace–Radu 在 [8]中证明，这些群表现良好：它们构成一个闭子空间，其同构类也是闭的；并且对于每个 $G \in \mathcal{H}_T$，都存在$H \leqslant G$，它是自同构群(T)的闭边界2-传递子群中极小的。以这种方式得到的群 H 是前一要点中 $\mathcal{H}_T \cap \mathscr{S}$ 所述群的一个特例。例如，若 T 是度为 $p+1$ 的正则树，其中 p为某个素数，则单群自同构群$(T)^{(\infty)}$ 是自同构群(T)的保型子群，但自同构群$(T)^{(\infty)}$真包含一个作用在其 Bruhat–Tits 树上的射影特殊线性群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的副本，因此自同构群$(T)^{(\infty)}$ 并非自同构群(T)的闭边界2-传递子群中的极小者。

• 群 $G \in \mathcal{H}_T$ 给出了康托尔集上同胚的局部紧 k-传递群的例子，其中 $k \in \{2,3\}$；于是可以定义作用 G 在 ∂T上的拓扑全群 $F(G)$，它由所有满足以下条件的同胚 h 组成：$\partial T \to \partial T$ 对每个 $\xi \in \partial T$，都存在 ξ 的某个邻域 U 和 $g_\xi \in G$，使得 g_ξ 和 h 在 U上的限制是同一个映射。群 $F(G)$ 于是将成为康托尔集上同胚的高度传递群的一个例子。在某些情况下， G 的拓扑可以延拓为 $F(G)$上的局部紧群拓扑，类似于 Neretin 群 [22] 或 Lederle 对其所作的推广 [17]。对于这样的群 $F(G)$，由 [19, 定理 4.16], 可知，其导出群 D 是单群；此外还可以证明 D 是开且紧生成的（准备中的工作），因此可以在 $\mathscr{S}$中得到许多在康托尔集上具有高度传递作用的群的例子。

• 给定 $G \in \mathcal{H}_T$和 $\xi \in \partial T$，我们得到 $G(\xi)$ 的一个作用。按照 Willis 的定义，这是一种尺度群作用，即在局部有限树上的闭作用，该作用固定一个端，并在其余端上传递（等价地说，固定一个端且顶点传递）。具体而言，如果 G 是顶点传递的，我们可以取 $G(\xi)$ 作用于其自身 T；否则，我们有 $G(\xi)$ 在树 $T_{t,\,\xi}$ 上的顶点传递作用，其顶点集为 $V_tT\,(t \in \{0,1\})$，其中若 v、 $w \in V_tT$ 在 $T_{t,\,\xi}$ 中相邻，则它们在表示该固定端的 T 的一条射线上相距 2。尺度群在任意全不连通局部紧群的自同构动力学一般理论中发挥着重要作用；参见 [30]。在这里，由 $\mathcal{H}_T$ 中的群的端稳定子产生的尺度群似乎很可能具有超出任意尺度群性质的特殊性质，但总的来说，人们对此知之甚少。

• 与任意 $G \in \mathcal{H}_T$ 相关联的都有其局部作用，其中类型为 t 的局部作用是由 F_t 诱导的 $\mathrm{Sym}(\Omega_t)$ 的子群； F_t 是某个类型为 t 的顶点的稳定子在该顶点邻点上的作用，而 Ω_t 是一个大小为 d_t的集合。（这里，我们认为局部作用在置换等价意义下确定。）给定 $G \in \mathcal{H}_T$，可见 F_0 和 F_1 都是二重传递的。根据一般性结果， G 是某个“泛群”的余紧子群，该泛群具有相同的局部作用以及顶点上的相同轨道；它要么是 Smith泛群 $\mathrm{U}(F_0, F_1)$ ([27,定理 6(iii)])，要么在 G 顶点传递的情况下，是 Burger–Mozes 泛群

群 U(F_0) ([4, 命题 3.2.2])，它包含 U(F_0, F_0) 作为其唯一的指数为 2 的子群。（我们将在第 5 节回顾 U(F_0, F_1) 的构造，以便构造其变体。）反过来，对于任意一对 (F_0, F_1) 有限二重传递置换群，都有 U(F_0, F_1) $\in \mathcal{H}_T$。Burger–Mozes 或 Smith 意义下的泛群，是目前所知最透彻的非紧致、非离散全不连通局部紧群的例子之一。由于有限二重传递置换群已被分类，因此尝试通过局部到整体的方法对 $\mathcal{H}_T$进行分类是合理的（另见下文注 1.9）。在某些情形下，这种分类已经实现；最著名的例子是 Radu（[23]）在 $d_0, d_1 \geqslant 6$ 且两个局部作用均为对称群或交错群的情形下所做的工作，以及 Burger–Mozes 和 Radu 在两个局部作用都具有非阿贝尔单点稳定子的情形下所做的工作。鉴于全不连通局部紧群种类繁多，对一类由简单置换条件刻画的此类群进行分类，前景令人振奋。

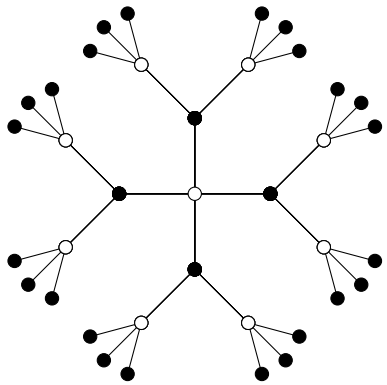
• 从 [9], [10]中发展的局部结构理论的角度来看，已知例子中的局部正规子群呈现出有趣而多样的结构。一方面，这一类包括定义在局部域上的秩 1 半单代数群，其中每个闭局部正规子群都是开子群。另一方面，Burger–Mozes 或 Smith 意义下的普适群 G 具有如下性质：

$$G(a) = \mathrm{rist}_G(T_a) \times \mathrm{rist}_G(T_{\overline{a}}),$$

其中 T_a 是由弧 a指定的半树，由所有满足以下条件的顶点 v 组成：它们到 a 终点的距离小于到 a起点的距离； a 的反向弧记作 $\overline{a}$，而 rist$_G(T_a)$ 表示 T_a的刚性稳定子，也就是补集 T_a的逐点稳定子。因此，类 $\mathcal{H}_T$ 是研究全不连通局部紧群局部结构理论的一个有趣试验对象，尤其是紧生成几乎单的全不连通局部紧群的局部结构。与此密切相关的是康托尔集上的忠实作用具有微支撑这一现象；也就是说，对每个非空开集，都存在一个非平凡元素固定该开集之外的所有点。事实证明，这类作用是构造和理解全不连通局部紧群的有力工具。若一个厚局部有限树上的作用在边界上具有微支撑，或者等价地，当且仅当每个半树的刚性稳定子都非平凡时，就称该作用具有微支撑。Caprace、Marquis 和作者近期在 [7]中研究了一种在树上构造微支撑作用的充分条件（只假设 G 作为拓扑群具有某些性质）。对于 $\mathcal{H}_T$中的已知群，代数群不具有微支撑作用，但大多数其他已知例子都具有微支撑作用。虽然已有若干关于具有微支撑作用的结论，但在此背景下，合理的预期是，不具有微支撑作用会对群$G \in \mathcal{H}_T$施加显著限制。

• 在群作用于局部有限树的背景下，有许多结果和猜想将类 $\mathcal{H}_T$ 与具有良好酉表示理论的非 amenable 局部紧全不连通群类 G 联系起来。从后者的角度来看，可以考虑三个条件，按由强到弱的顺序分别是 CCR、I 型和 amenable 冯·诺依曼代数。这一思路至少可以追溯到 Nebbia [21], ，他证明了：如果一个闭子群$G \leqslant$ 自同构群(T) 既顶点传递又满足 CCR，那么 G 在 ∂T上传递，因此实际上 $G \in \mathcal{H}_T$；Nebbia 还猜想，当 G 顶点传递时，反向结论也成立。Amann [1] 和 Ciobotaru（未发表）证明了 Nebbia 猜想对 $G =$U(F_0) 成立，Semal [25]则证明了该猜想对 Radu 群成立。（非 amenable 局部紧群可能具有良好酉表示理论，这一点可以与 Thoma [28, 的《定理》 4] 形成对照：离散群是 I 型，当且仅当它几乎阿贝尔。）类似地，Caprace–Kalantar–Monod 和 Houdayer–Raum 对一个非 amenable 且不保留任何子树的闭子群 G 自同构群(T) 证明了密切相关的限制条件，并且

图 1： $(4,3)$-半正则树的一部分



不保留任何子树：Caprace–Kalantar–Monod 证明（[6, 推论 D]），若 G 是 I 型，则 $G \in \mathcal{H}_T$；而 Houdayer–Raum（[15, 定理 C]）证明，若 G 的冯·诺依曼代数是 amenable 的，则 G 具有二重传递局部作用。

1.2 主要结果

在本文中，对于 $t \in \{0,1\}$，令 F_t 为 $\mathrm{Sym}(\Omega_t)$ 的一个二重传递子群，其中 Ω_t 是大小为 $d_t \geqslant 3$ 的有限集。记 $\mathcal{H}_{F_0,F_1}$ 为作用在 (d_0,d_1)-半正则树 T 上的闭边界二重传递群类，其在类型 t 顶点处的局部作用为 F_t。半正则树的示意图见图 1，其中类型 0 的顶点以白点标记，类型 1 的顶点以黑点标记。记 $F_t(\omega)$ 为 F_t 中的一个点稳定子，我们将其视为作用在由 d_t-1 个点组成的集合 $\Omega_t\backslash\{\omega\}$ 上的传递置换群。

在本文中，我们证明了 $G \in \mathcal{H}_{F_0,F_1}$ 的某些重要子群的局部作用所满足的限制，即：T 的一个端 ξ 处，类型为 t 的顶点处 $G(\xi)$ 的局部作用 $\Lambda_t(G)$；以及半树刚性稳定子（等价地，另一半树的逐点稳定子）根处的局部作用 $\Theta_t(G)$，其中根是类型为 t 的顶点。由于每种情况下的局部作用都有一个自然的不动点，因此这两个群都可自然地视为 $F_t(\omega)$ 的子群：对于 $G(\xi)$，顶点稳定子还固定了沿 ξ 方向的相邻顶点；对于刚性稳定子 $\mathrm{rist}_G(T_a)$，我们考察的是 $\mathrm{rist}_G(T_a)$ 在弧 a 终点处的局部作用，而该作用以 a 的起点为不动点。利用 G 包含于 $\mathrm{U}(F_0,F_1)$ 或 $\mathrm{U}(F_0)$（取决于 G 是否顶点传递）这一事实，容易看出，对于 $t \in \{0,1\}$ 两者，$G \in \{\mathrm{U}(F_0,F_1),\mathrm{U}(F_0)\}$ 当且仅当 $\Theta_t(G)=F_t(\omega)$。

以往的研究表明，对于 $\mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$ 中的群而言，其复杂性的一个重要来源是 $F_t(\omega)$的商群集合，尤其是可解商群。例如，我们有 [23, 定理 F]：如果对于两个 $t=0$，$F_t(\omega)$ 都是非阿贝尔单群，那么在共轭意义下，类 $\mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$仅由 $\mathrm{U}(F_0$、$F_1)$以及在 $F_0=F_1$时的 $\mathrm{U}(F_0)$ 构成。

我们称一个拓扑群为局部前可解的，如果它有一个前可解开子群。在当前语境下，给定 $G \leqslant$自同构群(T) 闭且 v_1、……、$v_n \in VT$，则 G 的开子群$G(v_1$、……、$v_n)$ 是原有限群，因此它残余可解当且仅当前可解，当且仅当它是有限可解群的逆极限。

我们作出以下基本观察，并与下文的推论 1.3 进行比较 .

引理 1.1。设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$。

(i) 给定树的一条弧 a，则 $G(a)$ 是前可解的，当且仅当 $F_0(\omega)$ 和 $F_1(\omega)$ 都是可解的。

(ii) 若 G 有一个残余可解开子群，则 $\Theta_0(G)$ 和 $\Theta_1(G)$ 可解。

我们感兴趣的主要情形是 $F_0(\omega)$ 和 $F_1(\omega)$ 中至少有一个不可解。注意，任意有限群 F 都有一个最小正规子群 N，使得 F/N 可解；这个子群称为 F的可解剩余 $N = O^\infty(F)$。可解剩余总是完美的，并且当且仅当 F 可解时才是平凡的。类似地，F有一个最大的可解正规子群，称为 $O_\infty(F)$的可解根；当且仅当 F 可解时，它等于 F。

我们的首要定理是，除一种非常特殊的情形外，$\Theta_t(G)$ 总是包含相应的可解剩余 $O^\infty(F_t(\omega))$。

定理 1.2。设$G \in \mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$。以下情形恰有一种成立。

(i) 对所有 $t \in \{0、1\}$，都有 $\Theta_t(G) \geqslant O^\infty(F_t(\omega))$。

(ii) 局部作用为 $F_t = \mathrm{P\Gamma L}_3(q_t)$，作用于阶为 $q_t^2+q_t+1$ 的射影平面，且满足 $\{q_0, q_1\} = \{4, 5\}$。记 W_t 为 $F_t(\omega)$ 的底，则 $\Lambda_t(G)$ 是一个形如 $W_t \rtimes A(q_t)$ 的可解群，其中

$$A(4) = \Gamma\mathrm{L}_1(16) \ \ and\ A(5) \in \{\mathrm{SL}_2(3) \rtimes C_4, \mathrm{SL}_2(3) \rtimes C_2, \mathrm{SL}_2(3), C_3 \rtimes C_8\}.$$

在这种情形下，对于所有 $t \in \{0,1\}$，都有 $\Theta_t(G) \leqslant O_\infty(F_t(\omega))$。

若 G 有一个前可解开子群，但 $F_0(\omega)$ 和 $F_1(\omega)$ 中至少有一个不可解，我们就称 $G \in \mathcal{H}_{F_0,F_1}$ 属于例外局部前可解类型。定理 1.2 表明，例外局部前可解类型只能对应于 $(31, 21)$-半正则树上的一对局部作用。这种例外情形确实存在，见下文例 5.8。我们强调，对于 $G \in \mathcal{H}_T$，局部作用为 $\mathrm{P\Gamma L}_3(4)$ 和 $\mathrm{P\Gamma L}_3(5)$ 本身并不意味着 G 属于情形(ii)；例如，群 $\mathrm{U}(\mathrm{P\Gamma L}_3(4), \mathrm{P\Gamma L}_3(5))$ 属于情形(i)。

下一个推论阐明了定理 1.2 的情形(ii)与 G 是否局部前可解之间的关系。

推论 1.3. 设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$。那么以下命题等价：

(i) G 是局部前可解的，换言之，G 有一个残余可解开子群。

(ii) 以下条件之一成立：

(a) 在 F_0 和 F_1 中，点稳定子均为可解群；(b) 定理 1.2 的情形(ii)成立。

对于微支撑作用，我们有以下推论。

推论 1.4. 设 $G \in \mathcal{H}_T$。假设 G 没有剩余可解紧开子群，且 ξ 是 T的一个端。则 G 和 $G(\xi)$ 在 ∂T上有微支撑作用。事实上，给定一条从 ξ指向外侧的弧 a，则 $\mathrm{rist}_G(T_a)$ 按照 *[7]*的意义，是 G 和 $G(\xi)$的 TMS 子群。

如果 G 属于例外局部前可解型，我们的方法无法确定 G 是否必然在 ∂T上有微支撑作用。若这样的群存在，找到一个半树的刚性稳定子均为平凡的 $G \in \mathcal{H}_{\mathrm{P\Gamma L}_3(5),\ \mathrm{P\Gamma L}_3(4)}$将会很有意义。

我们还推广了 [23, 定理 F]。

推论 1.5. 设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,F_1}$作用于树 T上。假设点稳定子 $F_0(\omega)$和 $F_1(\omega)$ 均为完美群。那么在 $\mathrm{Aut}(T)$ 中考虑共轭，G 要么是 $\mathrm{U}(F_0$，要么是 $\mathrm{U}(F_0)$。

第二个主要结果是，对于许多对局部作用 (F_0, F_1)，给定 $G \in \mathcal{H}_{F_0,F_1}$后， G 的一个端稳定子在类型 t 下的局部作用必然是 $F_t(\omega)$（这是由 G的局部作用所能达到的最大值）。

定理 1.6。设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,F_1}$，令 $t \in \{0,1\}$，并记 $O_t = O^\infty(F_t(\omega))$。假设 $\Lambda_t(G)$ 真包含于 $F_t(\omega)$，但 G 不属于例外局部前可解型。那么，要么$O_{1-t} = \{1\}$，要么 F_{1-t} 属于仿射型，且 $O_{1-t} \cong \mathrm{SL}_2(5)$。此外，以下情况之一成立：

(i) 对某个 $n \geqslant 2$，有 $\mathrm{PSL}_{n+1}(q) \trianglelefteq F_t \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_{n+1}(q)$，其中 F_t 作用于射影空间 $P_n(q)$;

(ii) F_t 的底属于秩 1 单李型;

(iii) 有 $(F_t, F_t(\omega), \Lambda_t(G)) = (\mathrm{M}_{11}, \mathrm{M}_{10}, \text{交错群}(6))$。

定理 1.6 中的情形并非可能得到的最强结论；有关仍未解决的例外情形的更精确表述，请见定理 4.16。即使排除例外局部前可解情形，一般而言 $\Lambda_t(G) = F_t(\omega)$ 也不成立；见例 5.7。

然而，如果我们假设两个局部作用相同（例如，这包括 G 是顶点传递的情形），那么结论会更加明确：

定理 1.7. 设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$，其中 $F_0 = F_1$ 是置换群。那么对于 $t = 0$， $\Lambda_t(G) = F_t(\omega)$，1。

主要定理都基于两种论证思路的结合。第一种大体上沿用 Radu 所采用的策略，即对树中球的逐点稳定子进行归纳，尽管这里的论证适用范围更广。单凭这一论证（最终得到命题 4.7），所需的有限 2-传递置换群分类信息相对较少，但不足以证明定理 1.2。

第二个方面基于以下观察。我们称置换群 $F \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$ 是 2-块传递的，如果 F 保持某个等价关系 $\sim$，该关系至少有两个块，并且该群在分别属于不同块的点对 $(\omega、\ \omega')$ 上传递。

引理 1.8（见推论 2.14）。设 T 是一棵厚局部有限树，设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,F_1}$ 且设 $t \in \{0,1\}$。那么 F_t 在 $F_t/\Lambda_t(G)$, 上有二重区块传递作用，其块稳定子为 $F_t(\omega)$。

因此，我们可以借助文章 [24], 中对忠实作用于块上的有限的二重区块传递置换群的分类, 从而大幅限制群 $\Lambda_t(G)$ 的可能性，并完成定理 1.2 的证明。

注 1.9。原则上，对于一棵厚局部有限树 T，可以按照 k-局部作用对 $\mathcal{H}_T$ 中的群进行分类，方法如下。给定一棵局部有限树 T、某个 $k \geqslant 0$ 和 $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$， G 在 $v \in VT$ 处的 k-局部作用是指顶点稳定子 $G(v)$ 在树 $B(v,k)$ 上诱导的自同构群；该树由距离 k 不超过 v 的顶点张成。可以构造 G 的 (P_k)-闭包 $G^{(\mathrm{P}_k)}$（也称为 k-闭包），它由 T 的所有自同构 α 组成，使得对任意顶点 $v \in VT$，都存在 $g \in G$，令对于 $B(v$ 的每个顶点和弧 w，均有 $\alpha w = g_v w$， $k)$。

给定 $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$，我们断言，对于所有 k，当且仅当 $G^{(\mathrm{P}_k)} \in \mathcal{H}_T$ 时， $G \in \mathcal{H}_T$ 成立。随着 $k \to +\infty$， (P_k)-闭包 G 形成一个降链，其交集是 $\mathrm{Aut}(T)$中 G 的闭包。我们看到， $G^{(\mathrm{P}_1)}$ 与 G 具有相同的顶点轨道，因此可以假设，任意两个类型相同的顶点都属于同一个 G-轨道。根据下文的推论 2.10， $G \in \mathcal{H}_T$ 当且仅当 G 在每个集合 V_a、$_b$、$_k$上均传递，其中 V_a、$_b$、$_k$ 由有序对 $(x、\ y)$ 组成，这些有序对中的顶点 x 和 y 分别属于 G-轨道 a 和 b，且 $d(x、\ y) = k$。注意到， G 在 V_a、$_b$、$_k$ 上传递，当且仅当 $G^{(\mathrm{P}_{2k})}$ 在 V_a、$_b$、$_k$上传递，即可得出该断言。类似的论证表明， G 是边界三重传递的，当且仅当 $G^{(\mathrm{P}_k)}$ 是边界三重传递的，适用于

所有 k。因此，对 (P_k)-闭群进行足够详尽的分类，尤其可以对作用于 ∂T上的 $\mathrm{Aut}(T)$ 的多重传递闭子群进行分类。

然而，对于 $k \geqslant 2$ P_k)-闭群的理论，目前仍处于相对早期的发展阶段。发展这一理论的主要文章有 [3] 和 [29]；在后者中，Tornier 针对一个特殊情形给出了普适构造：当 G是 (P_k)-闭的、顶点传递的，且包含一个会反转一条边的对合时， G 必定具有 $\mathrm{U}_k(F^{(k)})$ 的形式，其中 $F^{(k)}$是 $\mathrm{Aut}(B(v$ 的一个子群， $k))$ 满足某个兼容条件 (C)。对于边界 2-传递的 $\mathrm{U}_k(F^{(k)})$ 群的例子，我们还会要求 $F^{(k)}$在 $B(v$的叶上是 2-块传递的， $k)$。然而，即使假设在 $B(v$上的作用由一个给定的二重传递置换群定义， $1)$目前仍没有稳健的策略来分类满足 (C) 的 $\mathrm{Aut}(B(v$ 子群， $k))$ 。 [29] 中论证对边反转的倚重，也表明将结果推广到 G 在树上具有保型作用的情形可能会遇到困难。

文章结构 文章其余部分分为四节。第 2 节阐述类 $\mathcal{H}_T$ 的若干关键特征，包括它与 k-块传递作用之间的关系。第 3 节汇集了相关的有限群预备知识，其中包括针对作用于树上的群这一应用，对有限的块忠实 2-块传递置换群进行分类。主要定理的证明见第 4 节。在第 4.1 节中，我们对树中球的逐点稳定子进行归纳论证；结合预备知识，这实际上证明了定理 1.2，但有一种特殊情形除外：某个局部作用的底为 $\mathrm{PSL}_3(q_t)$ ，其中 $q_t > 3$ 是某个素数幂；而另一个局部作用要么具有相同形式（但 q_t 可以不同），要么具有可解点稳定子。在第 4.2 节中，我们进一步对 G 中线段稳定子的局部作用施加限制，随后在第 4.3 节证明主要定理，包括定理 1.6 更详细的版本。最后，第 5 节给出一种构造及若干示例，以说明许多例外情形确实会出现。

致谢 我感谢匿名审稿人，其建议显著改进了本文的表述。我也感谢 Florian Lehner 向我解释了一种构造，该构造有助于得到一些例子；感谢 Sven Raum 澄清表示论背景；并感谢 Pierre-Emmanuel Caprace 和 Stephan Tornier 对本文提出的其他有益意见。

2 Ge关于边界-k-传递作用于树上的一般结果 s

2.1 置换群与作用于树上的群的记号

关于置换群理论的一般概念，读者可参阅 [5] 和 [13]。

定义 2.1。设 G 为一个群。 G-集合是指一个集合 X ，其上赋有 G 通过置换对 X 的作用。给定一个 G-集合 X 以及 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$，用 $G(x_1)$ 表示 x_1 在G 中的稳定子，以及 $G(x_1, \ldots, x_n) = \bigcap_{i=1}^{n} G(x_i)$。（我们使用这种记号，而不采用更常见的 G_{x_1} 和$G_{(x_1,\ldots,x_n)}$，以避免后文下标过多。）设 Ω 是一个赋有等价关系 $\sim$的集合；我们将其等价类视为 Ω 的块。给定 $\omega \in \Omega$，用 $[\omega]$ 表示 ω的$\sim$-等价类。如果 $\sim$ 是 G-不变的，则商映射

$$\Omega \to \Omega/\sim \quad \omega \mapsto [\omega]$$

关于 G 在 $\Omega/\sim$ 上的自然作用，具有 G-等变性。

给定一个 G-等变满射映射 $\pi\colon \Omega \to X \to G$-空间，我们称 X 是 Ω 的一个因子，而 Ω 是 X的一个扩张；若 π 可逆，则称 Ω 与 X 等价（作为 G-集合），并记作

$\Omega \cong_G X$。注意，Ω 的每个因子都等价于 $\Omega/\sim$ 的一种形式，其中 $\sim$ 是一个 G-不变等价关系：具体而言，若 $\pi\colon \Omega \to X$ 是一个 G-等变映射，则 $\Omega/\sim_\pi \cong_G X,$，其中我们规定 $\omega \sim_\pi \omega'$ 当且仅当 $\pi(\omega) = \pi(\omega')$。

现在假设 G 在 X上传递作用。 X 的标准扩张是如下形式的 G-集合 Ω $X \times B$:

(a) 对某个集合 B，$\Omega = X \times B$；

(b) 映射 $X \times B \to X$；$(x,b) \mapsto x$ 是 G-等变的；

(c) 对所有 x、$y \in X$，存在$g_{x,\ y} \in G$ 使得$g_{x,\ y}(x,b) = (y,b)$ 对所有 $b \in B$均成立。

注记 2.2. 我们回顾一个基本事实：传递 G-集合的同构类型与 G的子群的共轭类一一对应。特别地，对每个 $x \in X$，传递的 G-集合X 都等价于陪集空间 $G/G(x) := \{gG(x) \mid g \in G\}$ 。给定两个陪集空间 G/H 和 G/K，满足 $H \geqslant K$，我们注意到 G/K 是 G/H 的一个扩张，且 G 也在其上传递作用。在等价意义下，我们可以如下将 G/K 实现为 $X = G/H,$ 的标准扩张:

(i) 令 $B = H/K$，并令 $\Omega = X \times B$。

(ii) 对于 G 中的每个 H 的左陪集 gH，选取一个代表元 $c_{gH} \in gH$，使得 $c_H = 1$。

(iii) 定义

$$\pi : \Omega \to G/K \quad (gH, hK) \mapsto c_{gH} hK;$$

我们赋予 G 唯一的作用 Ω，使得 π 是 G-等变的（由于 π 是一个双射，这样的作用存在）。

显然，标准扩张的条件 (a) 和 (b) 均满足。对于 (c)，给定 g_1H、$g_2H \in G/H,$，令 $c = c_{g_2H} c_{g_1H}^{-1}$。那么对所有 $h \in H$，我们都有

$$c(g_1H, hK) = \pi^{-1}(cc_{g_1H} hK) = \pi^{-1}(c_{g_2H} hK) = (g_2H, hK),$$

换言之，对于所有 $b \in B$，$c(g_1H、\ b) = (g_2H、\ b)$。

给定 X 和 $x \in X$ 的标准扩张 $X \times B$，我们可以通过以下公式定义块限制映射 β_x： $G \to \mathrm{Sym}(B)$

$$\forall g \in G, b \in B : g(x,b) = (gx, \beta_x(g)b).$$

β_x 对 $G(x)$ 的限制是一个同态。将 G 本身代入时，β_x 取决于 x 的选择；然而，由于标准扩张的条件 (c)，像 $\beta_x(G)$ 不依赖于 x，而且 $\beta_x(G) = \beta_x(G(x))$，因为

$$\forall y \in X : \beta_x(g_{x,y} G(x)) = \beta_x(G(x)) = \beta_y(g_{x,y} G(x) g_{y,x}) = \beta_y(G(y)).$$

于是，块作用是 $\mathrm{Sym}(B)$ 的子群 $\beta_x(G(x))$。注意，当且仅当对 X 的作用和块作用都传递时，G 才传递地作用于 $X \times B$。

定义 2.3. 设 Ω 是一个带有等价关系 $\sim$ 的集合。对于 $k \geqslant 1$，定义由相距较远的 k 元组组成的集合 $\Omega^{[k]}$，它包含满足以下条件的 k 元组 $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k)$：任意两个项都不属于同一个块。于是，如果 G 保持 $\sim$，至少有 k 个块，且 G 传递地作用于 $\Omega^{[k]}$，我们称 $G \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$ 是 k-按块传递的。

注记 2.4。

1. 如果一个群作用是 k-按块传递的，那么对于 $k' < k$，它也是 k'-按块传递的；特别地，每个 $k \geqslant 1$ 下的 k-按块传递作用都是传递的。

2. 如果 $G \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega)$ 相对于等价关系 $\sim$，对某个 $k \geqslant 2$ 是 k-按块传递的，那么 $\sim$ 是唯一最粗的、除全关系以外的 G-不变等价关系：见 [24, 引理 2.3]。特别地，$\sim$ 由 G 在 Ω 上的作用唯一确定。

3. 假设有一个 G-等变满射 $\pi : \Omega \to X$（G-集合之间），且 G 在 X 上是 k-传递的，并满足 $|X| \geqslant k \geqslant 2$。那么，$\sim_\pi$ 是 Ω 上一个 G-不变的非全等价关系 $\sim_\pi$，在满足这些条件的前提下，无法将其进一步粗化。因此，如果 G 相对于某个等价关系 $\sim$在 Ω 上作用k-块传递，那么 $\sim=\sim_\pi$。反过来，如果 G相对于等价关系 $\sim$在集合 Ω 上作用 k-块传递，那么作为一个 G-集合，Ω 是 k-传递 G-集合 $\Omega/\sim$的一个扩张。

2.2 边界-k-传递性的刻画

本小节为树上的作用建立一些记号，并说明 k-块传递作用与树的边界上的传递作用之间的联系，参见 k =2、3。关于作用于树上的群的理论，标准参考文献是 [26, 第一章]。

定义 2.5. 设 T 是一棵树；用 VT 表示 T 的顶点集合。于是 VT 自然划分为两部分 V_0T 和 V_1T，使得若 $v \in V_tT$，则 v 的所有邻点都属于 $V_{1-t}T$。若 $v \in V_tT$，则称顶点 v 的类型为 t。在下文中，如果我们用整数（包括下标等隐含方式）指称顶点的类型，或其他按顶点类型索引的对象，则该整数均按模 2 理解。若 v 的度（即 v 的邻点数）在 $v \in V_0T$ 上为常数，且在 $v \in V_1T$ 上也为常数，则称 T 为半正则；此时，对所有 $v \in VT_t$，我们将 v 的邻点数记为 d_t。（$d_0 = d_1$ 和 $d_0 \neq d_1$ 均允许。）若 $d_0 = d_1$，则该树为正则树。为避免退化情形，我们假设 T 是厚的，即每个顶点至少有三个邻点。T 的几何实现 $[T]$ 是一个测地空间：为每个顶点 $x \in VT$ 取一个点，并为每一对相邻顶点 $\{x、y\}$（无序对）附加一条几何边，即一条端点为 x 和 y 的单位线段。注意，T 的自同构自然延拓为 $[T]$ 的等距变换；我们赋予 VT 以其在 $[T]$ 中的子空间度量。

T的弧是由 T中相邻顶点 $(x、y)$ 组成的有序对，而（无向）边是由相邻顶点 $\{x、y\}$ 组成的无序对。（在方便时，我们有时会将无向边与其对应的几何边视为同一对象。）给定一条弧 $a = (x、y)$，则 $\overline{a}$ 表示 a的反向弧，即 $\overline{a} = (y、x)$。

在树的图示中，我们采用以下约定：

我们感兴趣的顶点将标记为黑色方块或空心圆。图中所关注的置换群，是黑色方块的逐点稳定子在空心圆集合上的作用。

T 中的一条（顶点）路径是由互异顶点组成的序列 $P = (x_i)_{i \in I}$，满足对所有 $i \geqslant 0$，x_{i+1} 都与 x_i 相邻，其中 I 是 $\mathbb{Z}$中的一个区间；路径长度为 $|I| - 1$。若路径的指标集为非负整数，我们称它为一条射线。若存在 $n、t \in \mathbb{Z}$，使得对所有 $i \geqslant n$都有 $y_{i+t} = x_i$，则两条射线 $(x_i)_{i \geqslant 0}$ 和 $(y_i)_{i \geqslant 0}$ 等价。T 的一个端是射线的一个等价类；所有端构成 T的边界 ∂T。（边界通常还配备有拓扑，但这与当前讨论无关。）注意，对于每一对 $(v、\xi) \in VT \times \partial T$，都存在唯一一条射线$(v_{\xi,\,0}、v_{\xi,\,1}、\ldots)$ 代表 ξ，且满足$v_{\xi,\,0} = v$。

给定一个顶点 $v \in VT$，我们记作

$$S(v, n) = \{w \in VT \mid d(v, w) = n\}.$$

给定 $x、y \in VT$，我们将 $S_x(y、k)$ 记作满足以下条件的顶点 z 的集合：它们与 y 的距离为 k，且从 x 到 z 的路径经过 y。换句话说，如果我们将这棵树想象成以.....为根

图2：等价关系 $\sim_{v,3}$

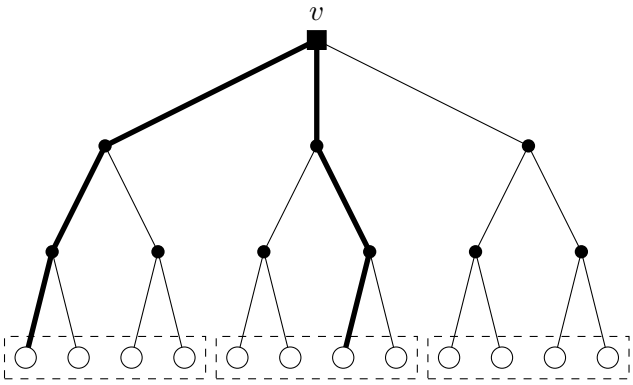
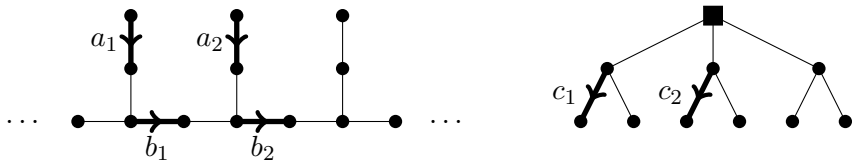


图 3：椭圆型与双曲型弧对



x，那么 $S_x(y、\ k)$ 表示从 y 继承而来且与 y 的距离为 k 的顶点集合。对于 $n \geqslant 1$，我们可以按如下方式划分 $S(v、\ n)$：

$$S(v,n) = \bigsqcup_{w \in S(v,1)} S_v(w, n-1).$$

这定义了 $\mathrm{Aut}(T)(v)$-不变等价关系 $\sim_{v,n}$ 于 $S(v,n)$上：若存在 $w \in S(v,1)$ 使得 $\{x,y\} \subseteq S_v(w, n-1)$，则记作 $x \sim_{v,n} y$。注意，给定 $x,y \in S(v,n)$，则(x,y) 是一个 $\sim_{v,n}$-远距点对（换言之，$x \not\sim_{v,n} y$）当且仅当 $d(x,y) = 2n$；见图2，其中块用虚线矩形标出，远距点对之间的路径以高亮显示。

特别地，我们看到，作为 $\mathrm{Aut}(T)(v)$-集合，$S(v,n)$ 是 $S(v,1)$的扩张。
类似地，我们在 ∂T 上定义等价关系 $\sim_v$：若 $v_{\xi,1} = v$，则记作 $\xi \sim_v \xi'$ $\xi',1$.
给定 $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$，$G^+$ 的保类型子群是 G G中 V_0T 的集合稳定子；若 $G = G^+$，则称 G 为保型。

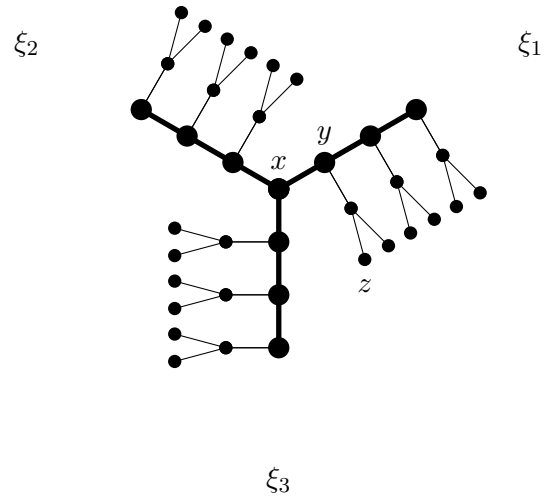
给定自同构群 $\mathrm{Aut}(T)$ 的一个自同构 g，定义平移长度 $l(g) := \min_{p \in [T]}\{d(p,gp)\}$。一个标准观察是，若 $l(g) > 0$，则 $\{p \in [T] \mid d(p,gp) = l(g)\}$ 是树中的一条直线（称为 g的轴；此时称 g 为平移）；而若 $l(g) = 0$，则 g 固定一个顶点或一条边的中点。下面的引理给出了一种方法，可通过一条弧 a 上的点对 (a, ga)，判断 g 何时是平移。

引理 2.6。设 T为一棵树，且 $g \in \mathrm{Aut}(T)$。给定一条弧 $a = (x,y)$，记 $a^- = x$ 和 $a^+ = y$。给定 T 的弧 a,b，若 $\{a^-,a^+\} \neq \{b^-,b^+\}$ 且$d(a^-,b^-) = d(a^+,b^+)$，则称 (a,b) 为双曲型。否则，称 (a,b) 为椭圆型。于是，给定 T 的一条弧 a，当且仅当 g 是一个平移且 a 属于 g 的轴时，点对 (a, ga) 为双曲型；否则，(a, ga) 为椭圆型。

证明。考虑这些弧相对于 g 的不动点，或相对于 g 的轴的排列方式，这个引理显然成立。例如，在图 3 中，$(a_1、\ a_2)$ 这一对是椭圆型的，$(b_1、\ b_2)$ 这一对是双曲型的，而 $(c_1、\ c_2)$ 这一对是椭圆型的。

□

图4：与端三元组相关的结构



给定一个由 $k \geqslant 2$ 个端组成的集合 X，存在唯一的最小子树 T_X，其中包含每个 $\xi \in X$ 的代表元。若 $|X| = 2$，则 T_X 是一条直线；若 $|X| = 3$，则 T_X 有一个唯一的度为 3 的顶点 $v(X)$，其余顶点的度均为 2。注意，对于给定的顶点 $v \in VT$ 和互异端点三元组 $(\xi_1、\xi_2、\xi_3)$，当且仅当 $(\xi_1、\xi_2、\xi_3)$ 是一个 $\sim_v$-远三元组时，才有 $v(\xi_1、\xi_2、\xi_3) = v$。例如，图4展示了 3正则树的一部分，其中子树 $T_{\{\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3\}}$以较大的顶点和较粗的边标出。从顶点 $x、y、z \in VT$ 观察这棵树，可以看到 $(\xi_1、\xi_2、\xi_3)$ 是相对于 $\sim_x$ 的远三元组，而我们有 $\xi_2 \sim_y \xi_3$ （但 $\xi_1 \nsim_y \xi_2$），并且这三个端彼此 $\sim_z$-等价。

现在考虑子群 $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$ 的作用。我们称 G 是 k-类型距离传递的，如果对于满足以下条件的 $x、y、x'、y' \in VT$：x' 与 x 类型相同，且 $d(x、y) = d(x'、y') = k$，存在 $g \in G$ 使得 $gx = x'$ 且 $gy = y'$。特别地，G 是 0-类型距离传递的，当且仅当任意两个类型相同的顶点都属于同一个 G-轨道。由于对于所有 $k \geqslant k'$，每条长度为 k' 的路径都包含在一条长度为 k 的路径中，我们看到，如果 G 是 k-类型距离传递的，那么对于 $k' < k$，它也是 k'-类型距离传递的。我们称 G 是类型距离传递的，如果对于所有 k，G 都是 k-类型距离传递的。注意，自同构群 $\mathrm{Aut}(T)$ 本身是类型距离传递的，当且仅当 T 是正则或半正则的。记 $\mathcal{H}_T$ 为 $\mathrm{Aut}(T)$ 的闭边界2-传递子群类。

我们注意到以下关于作用于树上的群的一个众所周知事实的版本（实际上，对于任意连通二分图，也有类似的陈述），它揭示了我们希望在顶点对上考察的条件与局部作用的传递性之间的一种联系。

引理 2.7. 设 T 是一棵树，且 $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$。则以下各项等价：

(i) G^+ 在 T 的无向边上传递；(ii) 对于所有 $v \in VT$ 以及从 v 出发的弧 $a、a'$，存在 $g \in G(v)$ 使得 $ga = a'$；

(iii) G 是 1-型距离传递的。

证明。假设 G^+ 在无向边上传递；设 $v \in VT$，并设 a 和 a' 分别是起点为顶点 v 和 v' 的弧，其中 v 和 v' 属于同一类型。那么 $\overline{a'}$ 或 a'必定与 a属于同一轨道；然而，由于 G^+ 是保型的，它不能将 a 映到 $\overline{a'}$。因此，存在 $g \in G$ 使得 $ga = a'$。由此可得 (i) 推出 (ii)。

现在假设 (ii) 成立；注意，对每个 $v \in VT$，稳定子 $G(v)$ 都是保型的，因此 $G(v) = G^+(v)$。设 e 为一条无向边；令 T' 为由 G^+-轨道G^+e生成的子图。显然， T' 没有孤立顶点。此外，与顶点$v \in VT$关联的所有无向边都属于同一个 G^+-轨道；因此，如果 T' 包含一个顶点，它就包含与该顶点关联的所有边。由于 T 是连通的，我们得出 $T' = T$，这表明 G^+ 在 T的无向边上传递。因此，(i) 与 (ii) 等价。

根据定义可知， G 是 1-型距离传递的，当且仅当 G^+ 是 1-型距离传递的。因此，(i) 与 (iii) 等价，这一点显而易见。 □

在温和的非退化假设下，在边界上传递的作用，尤其是任何 $G \in \mathcal{H}_T$，都是类型距离传递的。这个结论与 [4,引理 3.1.1], 的一部分类似；不过，该结果假设群是闭的且树是局部有限的，并借助了贝尔范畴定理。在接下来的两个命题中，我们将给出纯组合论证，并沿用引理 2.6 的记号。我们还将给出一些其他相关推论，这些推论在如此一般的条件下也可以证明。

命题 2.8. 设 T 是一棵厚树，且 $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$。假设 G 在∂T 上传递地作用，并且 G 不固定任何顶点，也不保持任何无向边；记 m为 G中出现的最小平移长度。则有以下结论。

(i) 以下条件恰有一个成立：

(a) $m = 1$ 和 G 是弧传递的；(b) $m = 2$，且 G 在 VT 上的轨道恰为 V_0T和 V_1T。

(ii) T 中的每条有限路径都包含在 G 中某个平移长度为m的元素的轴上。

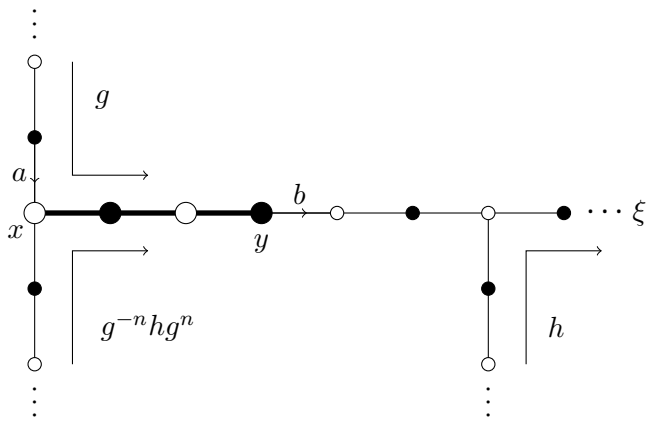
(iii) G是类型距离传递的。

证明。由于 G 不固定任何顶点、端或无向边，根据树上作用群的标准分类（见 [26]）， G 包含一个平移，因此 m 定义良好。由 [20,引理 2.1(iii)], 可知， G 的平移轴之并是 T的一个子树 T'。由于 G 在 ∂T上传递地作用，我们得到 $\partial T' = \partial T$，从而 $T' = T$。因此，给定 T的一条弧 a，则 a位于某个平移 $g \in G$的轴 L 上；由于 G 在 ∂T上传递，我们看到，对于某个 $h \in G$， L 和hL_0 有一个公共端，因此对于某个 $n \in \mathbb{Z}$， $g^n a$ 属于 hL_0。于是，每条弧都位于某个平移长度为 m的平移轴上。

设 $g_0 \in G$ 的平移长度为 m，且 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 g_0的轴上的顶点，使得 $g_0 x_i = x_{i+m}$。于是我们看到 $VT = \bigcup_{i=1}^{m} Gx_i$，并且 T的每条弧都可表示为 (gx_i, gx_{i+1})，其中 $g \in G$ 和 $0 \leqslant i < m$。由于 T 是厚的，对于每个顶点 x_i，都存在一个邻点 y_i，它不同于 x_{i-1} 和 x_{i+1}，于是对于某个 $j < i$，我们有 (x_i, y_i) 与 (x_j, x_{j+1}) 处于同一个 G- 轨道中，因此 $((x_j, x_{j+1}), (x_i, y_i))$ 是一个双曲弧对，故根据引理 2.6，它属于某个平移的轴。取满足这些条件的极大 j，则 $i - j \leqslant m$；而且，鉴于 m 是 G的最小平移长度，我们可知 $i - j \geqslant m$。因此实际上 $i - j = m$，由此推得 y_i 与 x_{i+1} 处于同一个$G(x_i)$-轨道中。类似的论证表明， y_i 与 x_{i-1}处于同一个 $G(x_i)$-轨道中。因此，对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，$G(x_i)$ 都传递地作用在其邻点上；由于 $VT = \bigcup_{i=1}^{m} Gx_i$，我们推得 G在无向边上传递。考察双曲弧对并应用引理 2.6，现在很容易看出 (i) 成立。接着注意，若 $\{a, b\}$ 是一对起始顶点类型相同的弧，则对于某个 $g \in G$，有 $b = ga$。

现在考虑一对类型相反的顶点 x、$y \in VT$，并令 P 为从 x 到 y 的路径；参见图 5，其中顶点的类型按照图 1 所示标明，且 P 用较大的顶点和较粗的边标记。于是存在弧 $a = (a_1, x)$ 以及 $b = (y, b_2)$，使得 $d(a_1, y) > d(x, y)$ 以及 $d(x, b_2) > d(x, y)$。由此可见， a_1 和 y 属于同一类型，因此

图 5：将有限路径嵌入平移长度最小的轴中



$b = ga$ 对某个 $g \in G$ 成立，并且 $(a、b)$ 是一对双曲弧对。根据引理 2.6，弧 a 和 ga 都属于 g 的轴，因此 x 和 y 位于 g 的轴上；于是可推出 P 位于 g 的轴上。令 ξ 为 g 的吸引端，并令 h 为平移长度为 m 的平移；由于 G 在 ∂T 上传递地作用，我们可以选择 h，使其吸引端为 ξ。那么当 $n \geqslant 0$ 足够大时，我们看到 $g^n P$ 包含于 h 的轴中，从而 P 包含于 $g^{-n}hg^n$ 的轴中。因此，所有奇数长度路径都包含于平移长度为 m 的平移的某条轴中；由于长度为 $2n$ 的路径包含于长度为 $2n+1$ 的路径中，实际上 T 中的每条有限路径都包含于某条平移长度为 m 的轴中，从而证明了 (ii)。

剩下要证明 G 是类型距离传递的。设 $x、y、x'、y' \in VT$ 满足：x' 与 x 类型相同，y' 与 y 类型相同，且 $d(x、y) = d(x'、y')$。令 P 为从 x 到 y 的定向路径，P' 为从 x' 到 y' 的定向路径。那么，P 位于某个长度为 2 的平移 g 的轴上，而 P' 位于某个长度为 2 的平移 g' 的轴上。必要时将 g 或 g' 替换为其逆元后，我们可以假设 P 的方向朝向 g 的吸引端，g' 也同样如此。在 G 中共轭后，我们可以假设 g 和 g' 具有相同的吸引端。接着，对 n 作用足够大的幂后，我们发现 $g^n P$ 位于 g' 的轴上。现在注意到，g' 在其轴上的作用具有这样的性质：任何两个类型、长度和方向相同的线段都属于同一个 $\langle g' \rangle$-轨道。因此存在 m 使得 $(g')^{-m} g^n P = P'$，从而证明了 (iii)。

□

命题 2.9. 设 T 是一棵厚树，且令 $G \leqslant$ 自同构群 (T)。

(i) 假设对于所有 $v \in VT$，$G(v)$ 在 ∂T 上的作用相对于 $\sim_v$ 是 2-块传递的。那么 G 在 ∂T 上是二重传递的。(ii) 假设 G 在 ∂T 上是二重传递的。那么 G 是类型距离传递的，并且对于每条射线 $\rho = (v_1、v_2、\ldots)$，在 T 中，ρ 在 G 中的逐点稳定子在 $S_{v_2}(v_1、1)$ 上传递地作用。(iii) 假设 G 是 1-型距离传递的，并且假设对于每种顶点类型 t 以及某个 k，存在 T 中一条长度为 k 的路径 $P = (v_1、v_2、\ldots\ldots、v_k)$，其中 v_1 的类型为 t，且 P 在 G 中的逐点稳定子在 $S_{v_2}(v_1、1)$ 上传递地作用。那么 G 是 k-型距离传递的。(iv) 假设 G 是零类型距离传递的。那么，对于某个 $n \geqslant 1$，G 是 $2n$- 型距离传递的，当且仅当对于所有 $v \in VT$，$G(v)$ 在 $S(v、n)$ 上的作用相对于等价关系 $\sim_v、_n$ 是 2-块传递的。

证明。（i）考虑三个互异端点 $\xi_1、\xi_2、\xi_3 \in \partial T$，并令 $w = v(\xi_1、\xi_2、\xi_3)$。于是我们看到，$\xi_1、\xi_2、\xi_3$ 属于不同的 $\sim_w$-类。由于 $G(w)$ 的作用是 2-块传递的，存在 $g \in G(v)$，使得 $g\xi_1 = \xi_1$ 和 $g\xi_2 = \xi_3$。因此，G 在 ∂T上是二重传递的。

（ii）给定 $v \in VT$，显然 $G(v)$ 保持等价关系 $\sim_v$，因此 $G(v)$ 在 ∂T上不是二重传递的，从而 G 不固定任何顶点；类似地， G 不保持任何边。因此命题 2.8适用；特别地， G 是类型距离传递的，并具有某个最小平移长度 $m \in \{1, 2\}$。令 H 为给定射线 ρ的逐点稳定子。给定 $x \in S_{v_2}(v_1、1)$，我们可以将 ρ 延拓为一条双向无限直线 $L_x = (\ldots、 w_{-1}、 w_0、 w_1、 w_2、 \ldots)$，使得 $w_0 = x$ 和 $w_i = v_i$对 $i \geqslant 1$成立。现在令 x、 $y \in S_{v_2}(v_1、1)$；构造直线 L_x和 L_y，并令 $\xi \in \partial T$ 为由 ρ 表示的端。由于 G 在 ∂T上二重传递，存在$g \in G(\xi)$ 使得 $gL_y = L_x$。若 $m = 1$，我们可以对某个 $j \in \mathbb{Z}$写成 $gy = w_j$，这意味着对所有 $i \geqslant 1$都有$gv_i = w_{i+j}$。若反之 $m = 2$，则根据命题 2.8(i)， G 是保型的，因此事实上对某个 $j \in \mathbb{Z}$有 $gy = w_{2j}$，进而对所有 $i \geqslant 1$都有 $gv_i = w_{i+2j}$。无论哪种情况， L_x 都是某个平移 $h \in G$ 的轴，其平移长度为 m，其中设对所有 $i \in \mathbb{Z}$都有 $hw_i = w_{i+m}$。于是可推出，对所有 $i \geqslant 1$都有 $h^{-j}gy = w_0 = x$和 $h^{-j}gv_i = v_i$；因此 $h^{-j}g$是 H 中的一个元素，将 y发送到 x，这表明 H在 $S_{v_2}(v_1、1)$上传递。

(iii) 首先注意，若给定条件对给定的 k 成立，那么对满足 $2 \leqslant k' < k$ 的 k' 也成立：只需截短路径 P。因此，我们可以对 k 使用归纳法，证明 G 是 k-类型距离传递的。我们可以取 $k \geqslant 2$，并假设 G 是 $(k-1)$-类型距离传递的。固定 $t \in \{0、 1\}$；取陈述中所述的路径 $P = (v_1, \ldots, v_k)$，并选取某些 $v_0 \in S_{v_2}(v_1、 1)$。现在令 x、 $y \in VT$ 满足 $d(x、 y) = k$，且 x 的类型为 $1 - t$；将从 x 到 y 的路径写作 $(w_0, w_1, w_2, \ldots, w_k)$，其中 $w_0 = x$ 且 $w_k = y$。由于 G 是 $(k-1)$-类型距离传递的，存在 $g \in G$ 使得对 $i \in \{1、 k\}$ 有 $gw_i = v_i$；进而，对所有 $i \in \{1, \ldots, k\}$，实际上都有 $gw_i = v_i$。特别地， gx 是 gw_1 的一个邻点，且不同于 v_2，因此 $gx \in S_{v_2}(v_1, 1)$。根据假设，存在逐点稳定 P 的元素 h，使得 $hgx = v_t$,0；并且我们还有 $hgy = gy = v_{t,k}$，所以我们将点对 (x, y) 映到了点对 $(v_t, 0, v_{t,k})$；注意，后一对仅取决于 t 和 k。因此， G 是 k- 类型距离传递的，结论由归纳法得出。

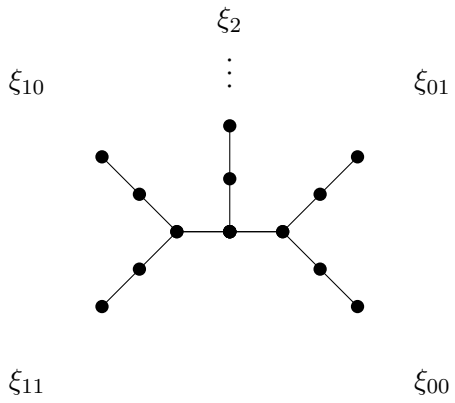
(iv) 给定 $v \in VT$，显然 $G(v)$ 保持等价关系 $\sim_{v,n}$。假设 G 是 $2n$-类型距离传递的。那么，给定 $S(v, n)$ 中两对相距 $\sim_{v,n}$ 的点对 (x, y) 和 (x', y')，由于 $d(x, y) = d(x', y') = 2n$ 以及所有顶点具有相同类型，因此存在 $g \in G$ 使得$gx = x'$ 且 $gy = y'$。现在注意到， v 既是从 x 到 y 的唯一路径的中点，也是从 x' 到 y' 的唯一路径的中点，因此实际上 $g \in G(v)$。所以，$G(v)$ 在 $S(v, n)$ 上的作用是 2-块传递的。反过来，假设对于所有 $v \in VT$， $G(v)$ 在$S(v, n)$ 上是 2-块传递的，并设 $x, y, x', y' \in VT$ 满足 $d(x, y) = d(x', y') = 2n$。令 v 和 v' 分别为从 x 到 y、从 x' 到 y' 的路径的中点。由于 G 是 0- 类型距离传递的，存在 $g \in G$ 使得 $gv = v'$。由此可见， (gx, gy) 和 (x', y') 都是 $S(v', n)$ 中相距 $\sim_{v',n}$ 的点对，因此存在 $h \in G(v')$ 使得 $hgx = x'$ 且 $hgy = y'$。因此，G 是 $2n$-类型距离传递的。 □

如果我们假设这棵树是局部有限的，且 G 是闭的，就能得到关于该作用的一系列等价性质。

推论 2.10. 设 T 是一棵厚局部有限树，且 G 是 $\mathrm{Aut}(T)$ 的闭子群。那么以下条件等价：

(i) G在 ∂T 上作用传递，且不固定任何顶点或保留任何无向边；(ii) 对所有 $n \geqslant 1$ 和 $v \in VT$， $G(v)$ 在 $S(v、 n)$ 上的作用相对于等价关系$\sim_{v,n}$是 2-块传递的；(iii) 对所有 $v \in VT$，$G(v)$ 在 ∂T 上的作用相对于等价关系 $\sim_v$是 2-块传递的；(iv) $G \in \mathcal{H}_T$；

图6：属于不同自同构群(T)-轨道的五个端及其四元组



(v) G 是 1-型距离传递的；对于每种类型为 t 的顶点以及每个 $k \geqslant 2$，在 T中存在一条长度为 k的路径 $P = (v_1、\ v_2、\ \ldots\ldots、\ v_k)$，其中 v_1的类型为 t，使得 G中 P的逐点稳定子在 $S_{v_2}(v_1、\ 1)$上作用传递；

(vi) G是类型距离传递的。

证明。命题 2.9 的各部分给出了以下蕴含关系

$$(\mathrm{iii}) \Rightarrow (\mathrm{iv}) \Rightarrow (\mathrm{v}) \Rightarrow (\mathrm{vi}) \Rightarrow (\mathrm{ii}).$$

假设 (ii) 成立；注意，对于所有 $v \in VT$， $G(v)$都是紧的。固定 $v \in VT$；给定 $\xi \in \partial T$，记$(v_{\xi,0},v_{\xi,1},\ldots)$为表示 ξ的射线，使得$v_{\xi,0} = v$。设 (ξ,χ)和 (ξ',χ')是两对$\sim_v$-相距的端。于是对每个 $n \geqslant 1$，我们发现$(v_{\xi,n},v_{\chi,n})$ 和$(v_{\xi',n},v_{\chi',n})$ 都是 $S(v,n)$中的$\sim_{v,n}$-相距点对，因此由 (ii) 可知，存在 $g_n \in G(v)$ 使得$g_n v_{\xi,n} = v_{\xi',n}$ 且$g_n v_{\chi,n} = v_{\chi',n}$。令 $g \in G(v)$ 为 (g_n)的任意一个收敛子列的极限，我们得到 $g\xi = \xi'$ 和 $g\chi = \chi'$，这表明 $G(v)$ 相对于 $\sim_v$是 2-块传递的。因此 (ii)$\Rightarrow$ (iii)，故 (ii)–(vi) 中的陈述均等价。

为了完成证明，蕴含关系 (iv) $\Rightarrow$ (i) 显然成立，而根据命题 2.8，我们有 (i) $\Rightarrow$ (vi)。因此，这六个陈述彼此等价。 □

现在来考察 ∂T 上的更高阶传递性。我们看到，树 T_X 是边界4-传递性的障碍。

引理2.11. 设 T 是一棵厚树， $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$，且 $k \geqslant 4$。那么 G 在 T 的端的 k 元组上有无穷多个轨道。

证明. 设 $X = \{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k\}$ 是 T 的 k 个互异端点组成的集合；那么 T_X 有有限多个度为 $\geqslant 3$ 的顶点，并且我们可以赋予一个不变的 $d^*(X) \in \mathbb{N}$，它是 T_X 中 T_X 的度为 $\geqslant 3$ 的顶点集合的直径。显然，对于所有 $g \in G$，都有 $d^*(X) = d^*(gX)$；由此可见，当 X 遍历所有可能的 k 个端点集合时， $d^*(X)$ 在 $\mathbb{N}$ 中可以取无界值；因此 G 在端点的 k 元组上有无穷多个轨道。例如，在图6中，若 $X = \{\xi_{ij} \mid i,j \in \{0,1\}\}$，且 $Y = \{\xi_{00},\xi_{01},\xi_2,\xi_{10}\}$，那么 $d^*(X) = 2$，但 $d^*(Y) = 1$，因此不存在自同构群 $\mathrm{Aut}(T)$ 中的元素将 X 映射到 Y。 □

因此，我们只剩下群 $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$ 在 T 的边界上 3-传递地作用这一情形。下面给出命题 2.9 和推论 2.10 关于边界 3-传递作用的一个类似结果。

命题　　命题 2.12. 设 T 是一棵厚树，且 (T) 是 $G \leqslant$ 的自同构群。则以下条件等价　　t:

(i) G 在 ∂T 上 3-传递地作用；

(ii) G 在 T 上顶点传递地作用，并且对于每个顶点 $v \in VT$， $G(v)$ 在 ∂T 上相对于等价关系 $\sim_v$ 是 3-块传递的。

证明。假设 G 在 ∂T 上传递地作用。我们看到， T 的每个顶点都可表示为$v(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，其中 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 是互异端点组成的三元组，因此 G 是顶点传递的。固定 $v \in VT$；由于 v 至少有 3 个邻点， $\sim_v$至少有 3 个块。设 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 和 (ξ_1',ξ_2',ξ_3')是 $\sim_v$-远三元组。那么存在 $g \in G$ 使得对于 $1 \leqslant i \leqslant 3$有 $g\xi_i = \xi_i'$。此外，我们看到

$$v(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = v = v(\xi_1',\xi_2',\xi_3'),$$

因此 $gv = v'$。由此， $G(v)$ 在 ∂T中对 $\sim_v$-远三元组传递。

反过来，假设 G 是顶点传递的，并且对于所有 $v \in VT$， $G(v)$ 在 $\sim_v$-远三元组上传递。那么，对于由互异端组成的三元组 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 和 (ξ_1',ξ_2',ξ_3')，其中 $v(\xi_1',\xi_2',\xi_3') = v$，不妨设存在 $g \in G$ 使得

$$v(g\xi_1, g\xi_2, g\xi_3) = gv(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = v,$$

进而存在 $h \in G(v)$，使得对于 $1 \leqslant i \leqslant 3$， $hg\xi_i = \xi_i'$。因此， G 在 ∂T上传递三次 . □

在本文余下部分，我们假设 T 是一棵粗壮局部有限半正则树，也就是说，它在同构意义下由顶点度数 $d_0, d_1 \geqslant 3$确定。令 Ω_t为一个大小为 d_t 的集合，其中 $t \in \{0,1\}$；根据所考虑的群，通常将 Ω_t 视为某种附加结构的底层集合会很方便，例如射影空间中的点。给定 $G \in \mathcal{H}_T$，由于 V_tT 中的所有顶点都属于同一个 G- 轨道，因此 G 的 t 型局部作用（在置换同构意义下）定义良好；它是由点稳定子 $G(v)$ 在 $S(v,1)$上的作用所诱导的 $\mathrm{Sym}(\Omega_t)$ 的子群，其中 $v \in V_tT$任取。记$\mathcal{H}_{F_0,F_1}$ 为满足 G 的 t 型局部作用是 $\mathrm{Sym}(d_t)$的子群 F_t 的 $G \in \mathcal{H}_T$ 类；注意，我们可以假设 F_0 和 F_1 是二重传递的，否则 $\mathcal{H}_{F_0,F_1}$ 将为空。我们用 $F_t(\omega)$ 表示 F_t 的一个点稳定子，并将其视为作用在 $\Omega_t\backslash\{\omega\}$上的置换群；特别地，取一个类型为 t 的顶点 v，它是 v的邻点 w，则 $G(v,w)$ 在 $S_w(v,1)$上作用为 $F_t(\omega)$。

给定群 $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$， G的端局部作用是 $G(x,\xi)$ 在 $S_y(x,1)$ 上的作用，其中 x 是 T 的一个顶点，而 (x,y) 是起点为 x、指向 T 的端 ξ 的弧。一般而言，闭子群 $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$ 在一个顶点处可以有许多端局部作用，具体取决于所选的端。不过，当 $G \in \mathcal{H}_T$ 时，情形会更加齐整。

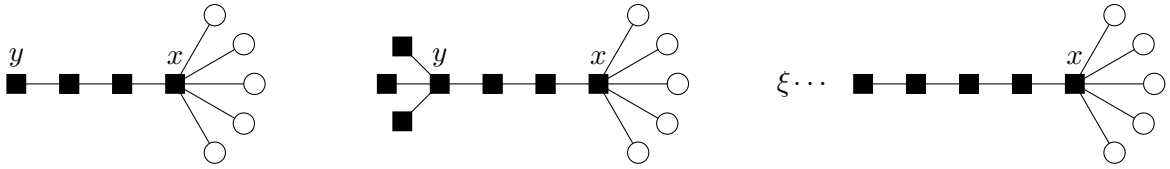
设 $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$，且在每个类型为 t 的顶点处的局部作用为 F_t。设 x 是一个类型为 t 的顶点，并考虑 $G(x,y)$ 在 $S_y(x,1)$ 上的作用，其中 $y \neq x$；记作 $k = d(x,y)$。如果 G 是 k-类型距离传递的，那么在对 $F_t(\omega)$ 作置换同构的意义下， $G(x,y)$ 在 $S_y(x,1)$ 上的作用是 $F_t(\omega)$ 的一个子群，该子群仅取决于 k 以及 x 的类型 t；在这种情况下，我们用 $\Lambda_t^k(G)$ 表示这个置换群。特别要注意， $\Lambda_t^1(G) = F_t(\omega)$。（另一方面，对于 $k \geqslant 2$，若 G 不具备 k-类型距离传递性，则不能保证 $\Lambda_t^k(G)$ 是良定义的。）以下是命题 2.9(iii) 的一个变体。

推论 2.13. 设 T 是一棵厚树，且 $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$。假设对于某个 $k \geqslant 1$， G 是 k-类型距离传递的。那么， G 是 $(k+1)$-类型距离传递的，当且仅当对于所有 $t \in \{0,1\}$， $\Lambda_t^k(G)$ 都是传递的。

证明。若对所有 $t \in \{0、1\}$， $\Lambda_t^k(G)$ 都是传递的，则命题 2.9(iii) 的论证表明，G 是 $(k+1)$-类型距离传递的。反过来，假设 G 是 $(k+1)$-类型距离传递的。我们可以取 T 中任意一条长度为 k 的路径 $P = (v_1、v_2、\ldots\ldots、v_k)$，并且对任意 $x、y \in S_{v_2}(v_1、1)$，都存在 $g \in G$，使得 $gx = gy$ 且 $gv_k = v_k$。我们看到，事实上每个这样的元素 g 都逐点固定 P，因此 $G(P)$ 实际上传递地作用在 $S_{v_2}(v_1、1)$ 上。于是 $\Lambda_t^k(G)$ 是传递的。

□

图 7：有限置换群 $\Lambda_t^k(G)$、 $\Delta_t^k(G)$ 和 $\Lambda_t(G)$



$\Lambda_0^3(G)$ $\Delta_0^3(G)$ $\Lambda_0(G)$

现在假设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$。那么，根据推论 2.10，我们可以对所有 $k \geqslant 1$ 和 $t \in \{0、1\}$ 定义 $\Lambda_t^k(G)$ 。进而，我们有 $\Lambda_t^k(G)$ 的一个正规子群 $\Delta_t^k(G)$，它是 $G(x、y) \cap \bigcap_{z \in VT,\ d(y,z)=1} G(z)$ 在 $S_y(x、1)$ 上的作用；群 $\Delta_t^k(G)$ 将在第 4 节中变得重要。显然 $\Lambda_t^{k+1}(G) \leqslant \Lambda_t^k(G)$，因此对于 $x \in V_tT$ 和 $\xi \in \partial T_{(x,\ y)}$，我们可以得到 $G(x、\xi)$ 在 $S_y(x、1)$ 上的作用，如下：

$$\Lambda_t(G) = \Lambda_t^{\infty}(G) := \bigcap_{k \geqslant 1} \Lambda_t^k(G);$$

同样，除去 $F_t(\omega)$ 的置换同构，群 $\Lambda_t(G)$ 与所选的对 $(x、\xi)$ 无关。图 7 按照定义 2.5 中的约定展示了这些有限置换群：图中画出了 $(6、4)$-半正则树的一部分（仅显示相关顶点），其中 x 为类型 0；我们得到一个 $\Lambda_0^3(G)$、 $\Delta_0^3(G)$ 或 $\Lambda_0(G)$ 作用在空心圆上的实例，而图示的方形顶点保持不动。

以下结论可由推论 2.10 立即得出（更具体地说，是由 (iv) 蕴含 (ii) 这一事实得出）。

推论 2.14. 设 T 是一棵厚局部有限树，令 $G \in \mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$，令 $t \in \{0、1\}$，并令 $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。则 F_t 在 $F_t/\Lambda_t^k(G),$ 上有一个块忠实的 2-按块传递作用，其块稳定子为 $F_t(\omega)$。

3 有限群预备知识

本节以及后文的例 5.8 中，作者使用计算机代数软件 GAP ([14]) 对个别有限群进行了一些计算；这些常规计算的细节从略。作者研究有限置换群相关事实时主要参考的教材是 [13]。

3.1 可解剩余

定义 3.1. 给定一个（拓扑）群 G 和 $g,\ h \in G,\ g$ 与 h 的交换子是元素 $[g,\ h] : = ghgh^{-1}$。按照惯例，若 H 和 K 是 G 的子群，我们定义交换子群 $[H,\ K] : = \langle [h,\ k] \mid h \in H,\ k \in K \rangle$；注意，$[H,\ K]$ 中的元素未必都能写成 $[h,\ k]$ 的形式，其中 $h \in H$ 和 $k \in K$。特别地，交换子 $[G,\ G]$ 是 G 的导出群；若 G 满足 $[G,\ G] = G$，则称其为完美群；若 $[G,\ G]$ 在 G 中稠密，则称其为拓扑完美群。另一方面，取 $i \geqslant 1$ 的导出列 $G_0 = G,\ G_{i+1} = [G_i,\ G_i]$，若对某个 n 有 $G\, G_n = \{1\}$，则称 G 为可解群（使此条件成立的最小 n 称为 G 的导出长度）。

设 $\mathcal{C}$ 是一个有限群类，对子群、商群和扩张封闭。给定一个原有限群 G，记 $O^{\mathcal{C}}(G)$ 为 G 的前$\mathcal{C}$ 剩余，即 G 到 $\mathcal{C}$中群的所有连续同态的核的交集。如果 G 有限，那么 $G/O^{\mathcal{C}}(G)$ 是 G的最大可解商群，而 $O^{\mathcal{C}}(G)$ 没有 $\mathcal{C}$中的非平凡商群；在这种情况下， $O^{\mathcal{C}}(G)$

称为 $\mathcal{C}$-剩余；我们还定义 $\mathcal{C}$-根 $O_{\mathcal{C}}(G)$，它是 G 中属于 $\mathcal{C}$的最大正规子群。我们主要关注 $\mathcal{C}$ 为有限可解群类的情形：此时定义 $O^{\infty}(G) := O^{\mathcal{C}}(G)$ （（前）可解剩余）以及$O_{\infty}(G) := O_{\mathcal{C}}(G)$（可解根）。

有限群 G 有一个合成列，即每个因子都是单群的次正规列；给定同构类型的合成因子个数不依赖于所选的合成列。记 $\kappa(G)$ 为群 G 的合成列中非阿贝尔因子的个数；注意，当且仅当 G 可解时，$\kappa(G) = 0$ 成立。有限群 G 的极小正规子群是指在非平凡正规子群中极小的正规子群；底是由群 G的所有极小正规子群生成的群。

注意，若 ϕ是一个定义域为 G的同态，且 $H, K \leqslant G$，则对于所有 $h, k \in G$，有 $\phi([h,k]) = [\phi(h), \phi(k)]$，从而 $\phi([H,K]) = [\phi(H), \phi(K)]$。现在我们对合成因子与次正规子群之间的关系作一些观察。

引理 3.2. 设 $\phi: A \to B$ 是有限群的同态，且 P 是 B 的完美子群，使得 $\phi(A) \geqslant P$。那么存在唯一的最小正规子群 N，它是 A 的子群且满足 $\phi(N) \geqslant P$；此外，N 是完美的。

证明. 令 $\mathcal{N}$ 为满足 $\phi(A) \geqslant P$ 的 H 的正规子群 N 所成的集合。给定 N_1、$N_2 \in \mathcal{N}$ 和 g、$h \in P$，则对于某些 $g_1 \in N_1$ 和 $h_2 \in N_2$，有 $\phi(g_1) = g$ 和 $\phi(h_2) = h$。由于 N_1 和 N_2 是 H 的正规子群，因此我们有 $[g_1, h_2] \in [N_1, N_2] \leqslant N_1 \cap N_2$，显然

$$\phi([g_1, h_2]) = [\phi(g_1), \phi(g_2)] = [g, h].$$

由于 P 由交换子生成，因此可得 $\phi([N_1, N_2]) \geqslant P$，于是 $[N_1, N_2] \in \mathcal{N}$；特别地，$\mathcal{N}$ 中任意两个元素都有一个共同的下界。由于 A 是有限的，我们推知 $\mathcal{N}$ 有一个最小元素 N，且 $N = [N, N]$。

□

引理 3.3. 设 G 是一个满足 $\kappa(G) = 1$的有限群，且 $O^{\infty}(G) \leqslant H \leqslant G$，并设 N 是 H的一个次正规子群。那么 $N \geqslant O^{\infty}(G)$ 或 $N \leqslant O_{\infty}(G)$。

证明. 我们看到 $\kappa(H) = 1$ 和 $O^{\infty}(G) = O^{\infty}(H)$，因此可以假设 $G = H$。

首先考虑 N 在 G 中正规，且 N 不包含 $O^{\infty}(G)$的情形。由于 $O^{\infty}(G)$是完美的，我们看到 $O^{\infty}(G)N/N$ 非平凡且完美，因此它至少对应于 G/N 的一个非阿贝尔合成因子。由于 $\kappa(G) = 1$，可得 $\kappa(N) = 0$，也就是说，N 是可解的。由于 N 在 G 中正规，我们推得 $N \leqslant O_{\infty}(G)$。

一般情况下，我们对 N 的次正规深度进行归纳。由归纳假设，$N \trianglelefteq N^*$，其中 $N^* \geqslant O^{\infty}(G)$ 或 $N^* \leqslant O_{\infty}(G)$。若 $N^* \leqslant O_{\infty}(G)$，则显然也有 $N \leqslant O_{\infty}(G)$；若 $N^* \geqslant O^{\infty}(G)$，则 $O^{\infty}(N^*) = O^{\infty}(G)$，结论由上一段得出。

□

下一个引理是 [23, 引理 2.5] 的推广。

引理 3.4. 设 B 是一个有限群，使得 $\kappa(B) = 1$，并构造由 B 的有限个副本 B_i 构成的直积 $\prod_{i=1}^{n} B_i$，其投影 π_i 映到第 i 个因子；构造半直积 $\prod_{i=1}^{n} B_i \rtimes$ 对称群(n)，其中对称群 (n) 通过置换 B_i 的副本而自然作用，并设 ϕ 是从 $\prod_{i=1}^{n} B_i \rtimes$ 对称群(n) 到对称群(n) 的商映射。记 $O_i = O^{\infty}(B_i)$。设 $A \leqslant \prod_{i=1}^{n} B_i \rtimes$对称群$(n)$ 满足 $\phi(A)$ 是传递的，并设 H 是 $\prod_{i=1}^{n} B_i$ 的一个子群，由 A 正规化，且对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 有 $\pi_i(H) \geqslant O_i$。

那么存在一个由 $\phi(A)$保持不变的等价关系 $\sim$，定义在 $\{1$上，……，$n\}$，以及 H 的完美正规子群 M_1，……，M_n，并具有以下性质：

(i) 给定 H 的正规子群 N，则当且仅当 $N \geqslant M_i$ 时 $\pi_i(N) \geqslant O_i$，且当且仅当$N \not\geqslant M_i$时 $\pi_i(N) \leqslant O_{\infty}(B_i)$；

(ii) $M_i = M_j$ 当且仅当 $i \sim j$;

(iii) $\pi_i(M_j) = O_i$ *if* $i \sim j$ *and* $\pi_i(M_j) = \{1\}$ *if* $i \nsim j$;

(iv) 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，我们有 $\kappa(M_i) = 1$。

证明。我们将 M_i 定义为 H 的唯一最小正规子群 N，使得 $\pi_i(N) \geqslant O_i$；根据引理 3.2，该子群存在且是完美的。M_i 的极小性保证了 $\pi_i(M_i) = O_i$。

为了完成 (i) 的证明，考虑 $N \trianglelefteq H$，使得 $N \not\geqslant M_i$。于是，根据 M_i 的唯一性，我们有 $\pi_i(N) \not\geqslant O_i$。由于 $\pi_i(H) \geqslant O_i$，且 N 是 H 的正规子群，由引理 3.3 可知 $\pi_i(N) \leqslant O_\infty(B_i)$，从而证明了 (i)。

令 $K_i = \pi_i^{-1}(O_\infty(B_i)) \cap H$，并在 $\{1,\dots,n\}$ 上定义关系 $\sim$：若 $O^\infty(K_i) = O^\infty(K_j)$，则令 $i \sim j$；显然，此时 $\sim$ 是一个 A-不变等价关系。我们证明，$i \sim j$ 当且仅当 $\pi_i(K_j)$ 可解。若 $O^\infty(K_i) = O^\infty(K_j)$，则 $\pi_i(O^\infty(K_j))$ 可解，因此 $\pi_i(K_j)$ 也可解。反过来，若 $\pi_i(K_j)$ 可解，则 $O^\infty(K_j) \leqslant K_i$；又由于 $O^\infty(K_j)$ 是完美的，我们有$O^\infty(K_j) \leqslant O^\infty(K_i)$；但此时 $O^\infty(K_i)$ 和 $O^\infty(K_j)$ 是在 A 的作用下共轭的有限群，因此它们阶相同，从而 $O^\infty(K_i) = O^\infty(K_j)$。

现在考虑满足 $i \nsim j$ 的 i、j。那么 $\pi_i(K_j)$ 不可解，因此由 (i) 得 $K_j \geqslant M_i$，从而 $\pi_j(M_i)$ 可解；由于 M_i 完美，故可得 $\pi_j(M_i) = \{1\}$。特别地，$M_i \neq M_j$。

接下来，考虑满足 $i \sim j$ 的 i、j。假设 $\pi_i(M_j) \not\geqslant O_i$。那么由 (i) 得 $\pi_i(N) \leqslant O_\infty(O_i)$，所以 $M_j \leqslant K_i$。但由于 M_j 完美，

$$M_j \leqslant O^\infty(K_i) = O^\infty(K_j) \leqslant K_j,$$

所以 $\pi_j(M_j)$ 可解，矛盾。因此实际上 $\pi_i(M_j) \geqslant O_i$，所以 $M_j \geqslant M_i$；由对称性也有 $M_i \geqslant M_j$。至此，(ii) 和 (iii) 的证明完成。

我们现在知道，对所有 j，$\pi_j(M_i \cap K_i)$ 都可解：若 $j \sim i$，则 $\pi_j(K_i)$ 可解；而若 $j \nsim i$，则 $\pi_j(M_i)$ 可解。因此 $M_i \cap K_i$ 可解，从而 $\kappa(M_i) = \kappa(\pi_i(M_i)) = 1$，证明了 (iv)。

□

3.2 有限二重传递置换群

由于射影线性群及其相关群会在多个地方出现，我们先确立一些术语。

定义 3.5。设 p 是一个素数，$q = p^e$ 是某个自然数 e，且 $V = \mathbb{F}_q^n$ 是一个以 $\{v_1、\dots\dots、v_n\}$ 为基、定义在含有 q 个元素的域 $\mathbb{F}_q$ 上的有限维向量空间。一般线性群 $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_n(q)$ 由所有从 V 到其自身的双射线性映射构成；其中有正规子群 $\mathrm{SL}(V)$，即特殊线性群，由所有行列式为 1 的此类线性映射构成；还有 $Z(V)$，即从 V 到 V 的非零标量映射群。一般半线性群 $\Gamma\mathrm{L}(V) = \Gamma\mathrm{L}_n(q)$ 是由 $\mathrm{GL}(V)$ 和 f 生成的 V 上的置换群，其中 f 通过将 $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ 映射到 $\sum_{i=1}^n \lambda_i^p v_i$ 的方式作用于 V。事实上，$\Gamma\mathrm{L}_n(q)$ 可写成半直积 $\Gamma\mathrm{L}_n(q) = \mathrm{GL}_n(q) \rtimes \langle f \rangle$，其中 f 的阶为 e。

给定 $G \leqslant \Gamma\mathrm{L}(V)$，$G$ 在 V 上的作用诱导出 G 在射影空间$P(V) = P_n(q)$上的作用，其中$P(V) = P_n(q)$是 V的所有一维子空间构成的集合；我们将 G 在 $P(V)$上诱导的置换群记为 $\mathrm{P}G$，并将 $\mathrm{P}G$ 视为 G 的射影版本（因此，$\mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}_n(q)$是射影一般半线性群，依此类推）。一个标准事实是，$\Gamma\mathrm{L}(V)$ 在 $P(V)$ 上作用的核恰为 $Z(V)$；我们将不加说明地使用这一事实。

给定 $\Gamma\mathrm{L}(V)$ 或 $\mathrm{P}\Gamma\mathrm{L}(V)$的一个子群 G，我们分别将 e_G 定义为指数 $|G\colon G \cap \mathrm{GL}(V)|$和 $|G\colon G \cap \mathrm{PGL}(V)|$。

仿射型有限置换群是 $\mathrm{Sym}(A)$ 的一个子群，形式为 $G = A \rtimes G_0$，其中 A 是一个有限初等阿贝尔群，通过乘法作用于自身，而 G_0 通过共轭在 A 上忠实作用。注意，当 G 写成这种形式时，G_0 是 A 中平凡元素的稳定子。我们将 A 视为有限向量空间 V 的加法群；我们的

约定是，在存在同构 $(V,+)\cong A$ 且 G_0 对应于 $\Gamma\mathrm{L}(V)$ 的一个子群的前提下，尽可能选择维数最小的 V。如果没有歧义，我们也可以写作 $G=V\rtimes G_0$ 和 $G_0\leqslant\Gamma\mathrm{L}(V)$，并将 G 视为 $\mathrm{Sym}(V)$ 的一个子群，其中 V 通过加法作用于自身，而 G_0 作为 $\Gamma\mathrm{L}(V)$ 在 V 上标准作用的一个子群来作用。

注 3.6. 令 $\omega\in P(V)$ 和 $L=\Gamma\mathrm{L}_n(q)(\omega)$。我们通过映射将 $P(V/\omega)$ 视为 $P(V)\backslash\{\omega\}$ 的一个 L-因子空间

$$P(V)\backslash\{\omega\}\to P(V/\omega);\ \omega'\mapsto\langle\omega,\omega'\rangle_{\mathbb{F}_q}/\omega.$$

度	s	S	$F_{\max}$	$F_{\max}(\omega)$
$d\geqslant 5$	$d-2$ 或 d	交错群(d)	对称群(d)	对称群$(d-1)$
$\frac{q^{n+1}-1}{q-1},n\geqslant 2$	2	射影特殊线性群$_{n+1}(q)$	$\mathrm{P\Gamma L}_{n+1}(q)$	$(\mathbb{F}_q,+)^n\rtimes\Gamma\mathrm{L}_n(q)$
$2^{2n+1}-2^n$	2	$\mathrm{Sp}_{2n+2}(2)$	$\mathrm{Sp}_{2n+2}(2)$	$\Omega^-_{2n+2}(2).2$
$2^{2n+1}+2^n$	2	$\mathrm{Sp}_{2n+2}(2)$	$\mathrm{Sp}_{2n+2}(2)$	$\Omega^+_{2n+2}(2).2$
11	2	射影特殊线性群$_2(11)$	射影特殊线性群$_2(11)$	交错群(5)
11	4	M_{11}	M_{11}	交错群$(6).2$
12	3	M_{11}	M_{11}	射影特殊线性群$_2(11)$
12	5	M_{12}	M_{12}	M_{11}
15	2	交错群(7)	交错群(7)	射影特殊线性群$_3(2)$
22	3	M_{22}	$\mathrm{M}_{22}.2$	射影特殊线性群$_3(4).2$
23	4	M_{23}	M_{23}	M_{22}
24	5	M_{24}	M_{24}	M_{23}
176	2	HS	HS	射影特殊酉群$_3(5).2$
276	2	Co_3	Co_3	McL·2

表 1：点稳定子不可解的有限几乎单群二重传递置换群

现在设 Ω 是一个有限集，并假设 $F\leqslant\mathrm{Sym}(\Omega)$ 是二重传递的。F 的可能情况都已为人所知，这在一定程度上是有限单群分类的结果；例如可参见 [13, §7.7] 中的综述。每个这样的群 F 要么是仿射型，要么具有单群底；此外，$F(\omega)$ 可以是可解的，也可以是不可解的。本文主要关注 F 具有单群底且 $F(\omega)$ 不可解的情形。表 1 列出了可能的底群 S（在所有情况下，它们也都是二重传递的），包括具有给定底群的最大群 $F_{\max}$、群 F 的传递度 s（其中 $S\leqslant F\leqslant F_{\max}$），以及 $F_{\max}$ 的点稳定子的结构。底群为射影特殊线性群$_{n+1}(q)$ 时，$(n,q)\in\{(2,2),(2,3)\}$ 是例外；在这些情形下，F 仍然是二重传递的，但其点稳定子可解。

群 G 的内自同构是形如 $c_g:x\mapsto gxg^{-1}$（其中 $g\in G$）的自同构。内自同构构成自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 的正规子群 $\mathrm{Inn}(G)$；商群 $\mathrm{Out}(G):=\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ 称为外自同构群。

下面的引理给出关于仿射型 2-传递群的一些必要事实。

引理 3.7（例如参见 [18, 附录 1]）。设 $G=V\rtimes G_0$ 是一个有限仿射型 2-传递群，其点稳定子为 G_0，且假设 G 不可解。我们将 V 视为域 $q=p^e$ 上的维数为 a 的向量空间，其中 a 是使得 $G_0\leqslant\Gamma\mathrm{L}(V)$ 的最小值。令

$$Z=Z(V)\cap G_0, N=O^\infty(G_0)\ and\ R=O_\infty(G_0).$$

那么以下结论之一成立：

(a) $N=$特殊线性群$_a(q)$；(b) $N=\mathrm{Sp}_a(q)$，$a\geqslant 4$ 偶数，$(a,q)\neq(4,2)$，或 $N=$指数 2 的交错群$(6)\,\mathrm{Sp}_4(2)$中；(c) $N=\mathrm{G}_2(q)$，$a=6$，$p=2$，$e>1$，或 $N=\mathrm{PSU}_3(3)\ \mathrm{G}_2(2)$中指数 2 的；

(d) $G_0 = N \in$ {交错群(7), 特殊线性群$_2(13)$};

(e) $N = \mathrm{SL}_2(5)$, $a = 2$, $q \in \{9, 11, 19, 29, 59\}$;

(f) $q = 3$、$a = 4$和 N具有结构 2^{1+4}.交错群(5), 其中 $G_0 \leqslant 2^{1+4}$.对称群(5) 和 $R = 2^{1+4}$。

此外，在所有情形下， $Z = \mathsf{C}_{G_0}(N)$和 NR/R都是单群；但在情形 **(f)** 中，我们有 $Z = R$。

证明。由于 G 是不可解的，而 V 是阿贝尔的，群 G_0 必定不可解。从附录 [18, Appendix 1] 中陈述的 Hering 定理出发，并排除 G_0 可解的情形，我们看到 G_0 具有一个完美正规子群 N，如情形 **(a)–(f)** 之一所述。我们断言，在所有情形下， N 在 $P(V)$ 上的作用都是绝对不可约的：也就是说，如果将 V 中的标量扩张到代数闭包 $\overline{V} := V \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_p}$，则不存在真非零的 $\overline{\mathbb{F}_p}$子空间W of of $\overline{V}$，使得 $P(W)$是 N不变的。对于情形 **(a)** 和 **(b)**，此断言由 [16,推论 2.10。7] 得出；对于其余情形，则由附录 [18, Appendix 1]中的论证得出。

由此可知， N 在 $\mathrm{P\Gamma L}(V)$ 中的像的中心化子是平凡的（见 [16, 引理 **2.10.1** 和 **4.0.**5]），因此 $Z = \mathsf{C}_{G_0}(N)$。在情形 **(a)–(e)** 中，我们看到 N在 $\mathrm{P\Gamma L}(V)$ 中的像是单群；由此可知， G_0 的像没有非平凡的可解根，因此 $R = Z$。在所有情形（包括情形 **(f)**）中，商群 NR/R是单群。特别地，商群 G_0R/NR嵌入外自同构群 $\mathrm{Out}(NR/R)$,，后者在所有情形下均已知是可解的，因此 G_0/NR可解，进而 G_0/N可解；由于 N 是完美群，我们推得 $N = O^\infty(G_0)$。 □

以下事实对后续论证很有用；特别是，它将使我们能够应用前一小节中的引理。

引理 3.8. 设 F 是 Sym(Ω) 的一个二重传递子群，其中 Ω 有限；设 $\omega \in \Omega$ 且 $O = O^\infty(F(\omega))$。那么

$$\kappa(F(\omega)) \leqslant 1.$$

因此，群 $S = O/O_\infty(O)$要么是平凡群，要么是非阿贝尔单群，并且外自同构群 $\mathrm{Out}(S)$ 可解。

证明。我们可以假设 $F(\omega)$ 不可解。若 F 是几乎单群，则通过考察表 **1** 可知 $\kappa(F(\omega)) = 1$ 。

反之，若 F 为仿射型，则 F 如引理 **3.7** 所述。特别地， $G_0 = F(\omega)$ 有一个正规列

$$\{1\} \trianglelefteq R \trianglelefteq NR \trianglelefteq G_0$$

使得 NR/R 是非阿贝尔单群，而 R 和 G/NR 可解，因此 $\kappa(G_0) = 1$。特别地，若 $\kappa(F(\omega)) = 0$ ，则 S ，且外自同构群 $\mathrm{Out}(S)$ 平凡。否则， S 属于一个已知的有限非阿贝尔单群列表，并且外自同构群 $\mathrm{Out}(S)$ 可解。 □

给定一个作用在集合 Ω 上的有限二重传递置换群 F，我们用 $\delta^*(F)$ 表示 $O^\infty(F(\omega))$ 在 Ω\{ω} 上作用时的轨道数。对于所有有限二重传递置换群，以下引理给出了 $\delta^*(F)$ 的值，并指出点稳定子的可解根是否传递。关键的例外情形是， F 如引理 **3.7** 的情形 **(e)** 所述，我们称之为例外 $\mathrm{SL}_2(5)$ 仿射型。

引理 3.9. 设 F 是 Sym(Ω) 的二重传递子群，且 $\omega \in$Ω。

(i) 若 $F(\omega)$ 可解，则 $\delta^*(F) = |\Omega| - 1$。

(ii) 若 F 是特殊 $\mathrm{SL}_2(5)$ 仿射型，且其底的阶为 q^2，则对于 $q = 9$，对应的值分别为 $\delta^*(F) = 2$、1、3、7、29、11、19、29、59。

(iii) 若 $F(\omega)$ 不可解，但 F 不属于特殊 $\mathrm{SL}_2(5)$ 仿射型，则 $\delta^*(F) = 1$。

此外， $O_\infty(F(\omega))$ 在 Ω\{ω} 上传递，当且仅当 $F(\omega)$ 可解。

证明。设 $R = O_\infty(F(\omega))$ 和 $N = O^\infty(F(\omega))$。若 $F(\omega)$ 可解，则 N 是平凡的，因此 (i) 显然成立；并且 $F(\omega) = R$，所以 R 是传递的。因此，我们可以假设 $F(\omega)$ 不可解。

若 Ω 是射影空间 $P_n(q)$，其上作用着 $\mathrm{PSL}_{n+1}(q) \leqslant F \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_{n+1}(q)$，则 $n \geqslant 2$ $(n\ q) \notin$ and ,$\{(2,2),(2,3)\}$，我们可以将 F 扩充为数量矩阵，从而得到 $\widetilde{F}$ $\widetilde{Z}(V) \leqslant F \leqslant$，其中 $\Gamma\mathrm{L}_{n+1}(q)$；类似地，子群 R 和 N 可分别提升为 $\Gamma\mathrm{L}_{n+1}(q)$的子群 $\widetilde{R}$ 和 $\widetilde{N}$。于是，$\widetilde{}$稳定子 $F(\omega)$ 对 Ω\{ω} 的因子空间 $P(V/\omega)$ 起作用（回顾注 3.6），$\widetilde{}$其中该作用包含单群 $\mathrm{PSL}(V/\omega)$；因此，$F(\omega)$ 模去该作用的核$\widetilde{}$后是几乎单群。我们推得 R 在 $P(V/\omega)$, 上的作用是平凡的，因此 R 不会在$\widetilde{}$Ω\{ω} 上传递。与此同时，$N = Z(V)W \rtimes \mathrm{SL}_n(q)$，其中 W 是 $\mathrm{GL}(V)(\omega)$ 在$(V/\omega) \oplus \omega$上的作用的核。我们可以将 $P(V)\backslash\{\omega\}$ 写成如下并集

$$P(V)\backslash\{\omega\} = \bigcup_{\beta/\omega \in P(V/\omega)} (P(\beta)\backslash\{\omega\})\,.$$

$\widetilde{}\mathrm{SL}_n(q)$ 的这个副本足以使 N 在 $P(V/\omega)$, 上传递作用；于是，给定 V/ω, 的一个一维子空间 β/ω后，$W(\beta)$ 在 $P(\beta)\backslash\{\omega\}$上传递作用。因此，$N$在$P(V) = \Omega\backslash\{\omega\}$上传递作用。

如果 F 是几乎单群，但不属于上一段所述情形，那么我们可以考察表 1 中可能的点稳定子。在所有情形下，我们都能看到 $R = \{1\}$，因此 R 肯定不是传递的。在大多数情形下，$|F(\omega) : N|$与 $|\Omega\backslash\{\omega\}|$互素，因此显然 N在 Ω\{ω}上传递作用。例外情形是 $F = \mathrm{M}_{11}$ 作用于 11 个点以及 $N =$交错群(6)；此时可以直接轻易验证，N 在其余 10 个点上传递作用。

至此，我们已经证明了 F 为几乎单群时的所有结论。因此，从现在起我们可以假设 $F = V \rtimes G_0$ 如引理 3.7 所述，并将 Ω\{ω} 与 V的非平凡元素集合等同，从而 $F(\omega) = G_0$。

对于 N 的作用：在情形 (a)–(d) 中，群 $V \rtimes N$ 属于二重传递仿射群的标准族之一，因此 N 在 Ω\{ω}上传递；也可以验证，在情形 (f) 中，$N = 2^{1+4}.\mathrm{Alt}(5)$ 在 Ω\{ω} 上传递。在情形 (e) 中，即 $\mathrm{SL}_2(5)$ 仿射型的例外情形，则有 $N = \mathrm{SL}_2(5)$ 作用于 $\mathbb{F}_q^2$，其中 $q \in \{9$ 为 11、19、29、$59\}$。在这些情形中，$NZ(V)/Z(V)$ 是 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 中同构于 $\mathrm{Alt}(5)$的子群之一；这些子群在 $\mathrm{PGL}_2(q)$中均共轭，参见例如 $[12, \mathrm{XII}.259]$。通过计算可知，N在 $\mathbb{F}_q^2\backslash\{0\}$ 上的轨道数分别为 $\delta^* = 2$、1、3、7、29，对应于 $q = 9$ 为 11、19、29、59。这就完成了 (ii) 和 (iii) 的证明。

对于 R 的作用：在情形 (a)–(e) 中，R 在 V 上按标量作用，因此它在 $P(V)$ 上平凡作用；由于 $P(V)$ 不是单元素集，且自然地作为因子空间出现在 Ω\{ω} 中，因此 R 在 Ω\{ω} 上非传递地作用。在情形 (f) 中，我们有 $|R| = 32$，但 $|\Omega\backslash\{\omega\}| = 80$，因此 R 同样不能传递地作用。

□

3.3 块忠实的 2-按块传递作用

我们需要特别关注这样的有限二重传递置换群：其作用可以适当地扩展为块忠实的 2-块传递作用。这里我们回顾 [24] 中的一条主要定理。

定理 3.10（见 [24, 定理 1.3 和推论 1.4]）。设 G 是一个有限群，在集合 Ω_0, 上有一个忠实的二重传递作用，该作用可扩展为 G 在集合 $\Omega = \Omega_0 \times B$ 上的 2-块传递作用，块大小为 $|B| \geqslant 2$；设 $\omega \in \Omega$。则 G 有一个非阿贝尔单群底 S，且包含 ω 的块 $[\omega]$ 的稳定子 $G([\omega])$ 是包含 $G(\omega)$ 的 G 的唯一最大真子群；记 $G([\omega])$ 的底为 W。若 S 为李型，且自然地表示为在 $\mathbb{F}_q$ 上、维数为 $n+1$ 的（射影）矩阵群，则可将 G 视为 $\mathrm{P\Gamma L}_{n+1}(q)$ 的子群。置换群在同构意义下，以下条件恰有一个成立。

(a) $\mathrm{PSL}_{n+1}(q) \leqslant G \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_{n+1}(q)$，在 $\Omega_0 = P_n(q)$ 上取标准作用，并且 $n \geqslant 2$,$q > 2$。设 μ 是 $\mathbb{F}_q^*$ 的一个生成元，设 D 是由表示 $\mathbb{F}_q^*/\langle\mu^{n+1}\rangle$ 中元素的矩阵的行列式生成的子群

。在此情形下， $G(\omega)$ 包含 $G([\omega])$ 的可解剩余；在 $(n,q)=(2,3)$ 的情形下， $G(\omega)$ 具有 $W \rtimes \mathrm{SL}_2(3)$ 的形式。此外， $e_{G(\omega)} = e_G$，且块大小 $|B|$ 整除 $q-1$，并与 $|D|$ 互素。

(b) $\mathrm{PSL}_3(q) \leqslant G \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_3(q)$ 且 $G(\omega)$ 包含于如下形式的群中

$$L^{\Gamma \mathrm{L}_1} = G \cap (W \rtimes \Gamma \mathrm{L}_1(q^2)),\ \textit{such that}\ |L^{\Gamma \mathrm{L}_1} : G(\omega)| \leqslant 2;$$

在此情形下， $|B| = |L^{\Gamma \mathrm{L}_1} :\ G(\omega)|q(q-1)/2$。

(c) S 是秩 1 单李型，且 G 在 Ω_0 上的作用是标准的二重传递作用。在此情形下， $|B|$ 整除 e_G，并且也整除该域的乘法群的阶。

(d) 该作用是十八种例外的二重传递分块作用之一，列于 *[24,* 表 *1]*中。

此外，在所有情形下， $W \leqslant G(\omega)$。

并非所有符合情形 (b) 和 (c) 的群都允许适当的块忠实 2-区块传递作用；具体条件见情形 (b) 的 [24, 命题 3.27] ，以及情形 (c) 的 [24, 命题 3.21] 。

由于这些情形稍后将作为特殊情形出现，在表 2 中，我们突出列出了具有 M_{11} 的非平凡块且对于 $2 \leqslant q \leqslant 5$具有底为射影特殊线性群 $\mathrm{PSL}_3(q)$ 的 2-块传递作用，如 [24, 表 1 和 3]中所示。空白项应理解为与其上方的项相同。最后一列标明了该作用属于定理 3.10 的哪一种情形。

G	$G(\omega)$	$\lvert\Omega_0\rvert$	$\lvert B\rvert$	case
M_{11}	交错群(6)	11	2	(d)
$\mathrm{P\Gamma L}_3(2)$	$W \rtimes C_3$	7	2	(b)
$\mathrm{P\Gamma L}_3(3)$	$W \rtimes$特殊线性群$\mathrm{SL}_2(3)$	13	2	(a)
	$W \rtimes \Gamma \mathrm{L}_1(9)$		3	(b)
	$W \rtimes C_8$		6	
	$W \rtimes Q_8$		6	
射影一般线性群$_3(4)$	$W \rtimes (C_{15} \rtimes C_2)$	21	6	(b)
	$W \rtimes C_{15}$		12	
$\mathrm{P\Gamma L}_3(4)$	$W \rtimes \Gamma \mathrm{L}_1(16)$	21	6	(b)
$\mathrm{P\Gamma L}_3(5)$	$W \rtimes$特殊线性群$_2(5).C_2$	31	2	(a)
	$W \rtimes$特殊线性群$_2(5)$		4	
	$W \rtimes \Gamma \mathrm{L}_1(25)$		10	(b)
	$W \rtimes C_{24}$		20	
	$W \rtimes (C_3 \rtimes C_8)$		20	
	$W \rtimes$ (特殊线性群$_2(3) \rtimes C_4$)		5	(d)
	$W \rtimes$ (特殊线性群$_2(3) \rtimes C_2$)		10	
	$W \rtimes$特殊线性群$_2(3)$		20	

表 2：一些特别值得关注的 2-区块传递作用

结合推论 2.14 和定理 3.10，可得关于 $\Lambda_t(G)$ for$G \in \mathcal{H}_T$ 的以下限制；我们将以此为基础证明本文的主要结果。

引理 3.11. 设 T 是一棵厚局部有限树，设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,F_1}$ 且设 $t \in \{0,1\}$。设 $\Lambda = \Lambda_t(G)$。则以下情况之一成立；除非另有说明，若对 $n \geqslant 1$ 有 $\mathrm{PSL}_{n+1}(q) \leqslant F_t \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_{n+1}(q)$，则我们有 $\Omega_t = P_n(q)$:

(i) $\mathrm{PSL}_{n+1}(q) \leqslant F_t \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_{n+1}(q)$，其中 $n \geqslant 2$ 且 $q > 2$，并且 F_t 在 F_t/Λ 上的作用如定理 3.10 的情形 (a) 所述；

(ii) $\mathrm{PSL}_3(q) \leqslant F_t \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_3(q)$，且 F_t 在 F_t/Λ 上的作用如定理 3.10 的情形 (b) 所述；

(iii) F_t 的底为秩 1 李型，且 F_t 在 F_t/Λ 上的作用如定理 3.10 的情形 (c) 所述；

(iv) $(F_t,\ \Lambda,\ d_t) = (\mathrm{M}_{11}, \text{交错群}(6),\ 11)$;

(v) $(F_t,\ \Lambda,\ d_t) = (\mathrm{PSL}_5(2),\ C_2^4 \rtimes \text{交错群}(7),\ 31)$;

(vi) $\mathrm{PSL}_3(q) \leqslant F_t \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_3(q)$，$F_t$ 在 F_t/Λ 上的作用是定理 3.10 的情形 (d) 中所列其余例外作用之一，且 $O^\infty(F_t(\omega)) \nleqslant \Lambda$；

(vii) $\Lambda = F_t(\omega)$。

此外，在所有情形下：

(a) Λ包含 $F_t(\omega)$的底；

(b) $O_\infty(\Lambda)$ 在 $\Omega_t\backslash\{\omega\}$ 上传递作用，当且仅当 Λ 可解。

证明。设 W 为 $F_t(\omega)$ 的底。如 [24, 表所示，定理 3.10 的情形 (d) 分别对应 M_{11} 和 $\mathrm{PSL}_5(2)$ 的一个例外 2-区块传递作用（其点稳定子分别为 $\mathrm{Alt}(6)$ 和 $C_2^4 \rtimes \mathrm{Alt}(7)$）。对于 [24, 表中其余的 2-区块传递作用，群满足 $\mathrm{PSL}_3(q) \leqslant G \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_3(q)$，其中某个 q，且该作用是对射影空间上作用的扩张，因此点稳定子不包含块稳定子的可解剩余。根据推论 2.14 和定理 3.10，化归到所列情形以及$\Lambda \geqslant W$ 这一事实现已显然。

剩下要证明的是，$O_\infty(\Lambda)$ 在 $\Omega_t\backslash\{\omega\}$ 上传递，当且仅当 Λ 可解。通过检查即可排除情形 (iv) 和 (v)。显然，Λ 本身在 $\Omega_t\backslash\{\omega\}$ 上传递，因此若 Λ 可解，便无需证明。于是我们可以假设 Λ，因此 $F_t(\omega)$也不可解，从而排除情形 (ii) 和 (iii)。

记作 $O_t = O^\infty(F_t(\omega))$。若 $O_t \leqslant \Lambda$，则由引理 3.3 可得 $O_\infty(\Lambda) \leqslant O_\infty(F_t(\omega))$，进而由引理 3.9 可知 $O_\infty(\Lambda)$ 在 $\Omega_t\backslash\{\omega\}$ 上非传递。因此我们可以假设 $O_t \nleqslant \Lambda$，从而排除情形 (i) 和 (vii)。

唯一剩下的情形是 (vi)；令 $V = \mathbb{F}_q^3$，并将 ω 视为 V中的一条直线。根据 [24, 命题 3.12], ，将标量群扩张进去得到 $F \leqslant \Gamma_3(q)$ Λ Λ L 后，的提升具有如下形式：$\Lambda = W' \rtimes A$，其中 W'平凡地作用，而 A在 V/ω的非零向量上传递。由此，A 的结构受引理 3.7 的限制，实际上属于引理 3.7(e) 的情形。特别地，$O_\infty(\Lambda)$ 在 $P(V/\omega)$上平凡地作用。因此，$O_\infty(\Lambda)$ 在 $P(V/\omega)$上平凡地作用，因而在 $\Omega_t\backslash\{\omega\}$上非传递。

□

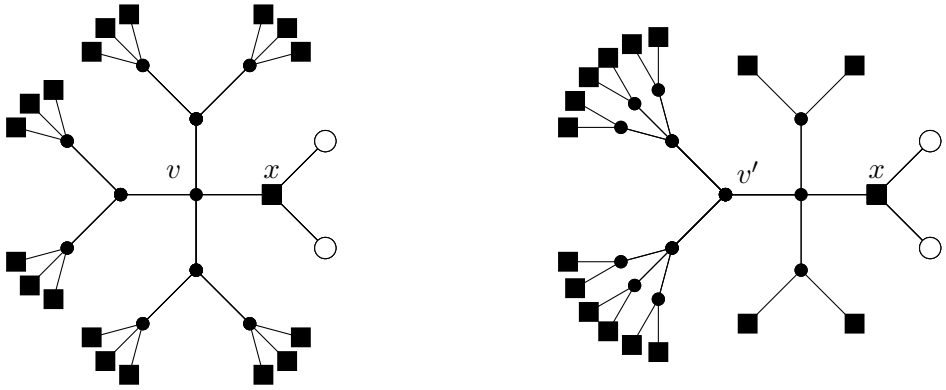
后续论证将排除或限制引理 3.11 的某些情形；参见注 4.15。

4 边界 2-传递群的刚性稳定子与端局部作用

4.1 探索半树刚性稳定子的局部作用

本节将证明本文的主要定理。在本小节的大部分内容（直至并包括命题 4.7），我们都不需要用到有限 2-传递置换群分类的细节，但我们的方法会用到这样一个事实：

图 8：群 $\Theta^{1,0^2}(G)$（左）和 $\Theta^{2,0^1}(G)$（右）



点稳定子至多有一个非阿贝尔合成因子（引理 3.8）。接下来的一系列结果将以独立于有限 2-传递置换群分类的形式陈述。

本节余下部分中，我们用 $G_k(x)$ 表示 $S(x, k)$ 和 $G_k(x_1, \ldots, x_n) = \bigcap_{i=1}^{n} G_k(x_i)$ 的逐点稳定子。

下面通过一个命题引入一些更多的记号。

命题 4.1. 设 $G \in \mathcal{H}_{F_0, F_1}$ 作用于树 T。设 $x \in V_0T$。对于 $v \in VT\backslash\{x\}$ 和 $i \geqslant 0$，将树视为以 v 为根，并用 B_i^v 表示距 v 的距离为 $d(v,x)+i$、且不是 x 的后代的顶点集合。于是令

$$K_i^v = G(x) \cap \bigcap_{y \in B_i^v} G(y).$$

令 $O_0 = O^\infty(F_0(\omega))$，并将 $\Theta^{r,0^i}(G)$ 记为 $K = K_i^v$ 在其对 $S_v(x,1)$ 的作用下所得的像，将其视为 $F_0(\omega)$ 的子群，其中 $r = d(x,v)$；见图 8。那么，除去 $F_0(\omega)$ 的置换自同构的影响，对于给定的 $d(v,x)$ 值，$\Theta^{r,0^i}(G)$ 不依赖于 (v,x) 的选择。此外，以下条件成立：

(i) We have $\Theta_0^{r,i}(G) \trianglelefteq \Lambda_0^r(G)$ *and* $\Theta_0^{1,i}(G) \trianglelefteq F_0(\omega)$.

(ii) 经过 $F_0(\omega)$ 的置换自同构后，我们可以安排使得 $\Theta^{r+1,0^i}(G) \trianglelefteq \Theta^{r,0^i}(G)$。特别地，对于所有 $r \geqslant 1$ 和 $i \geqslant 0$，$\Theta^{r,0^i}(G)$ 在 $F_0(\omega)$ 中是次正规的。

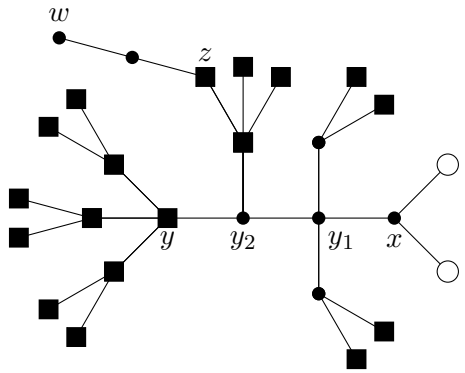
(iii) 若对于所有 $r \geqslant 1$，$\Theta^{r,0^0}(G) \geqslant O_0$，则对于所有 $r \geqslant 1$ 和 $i \geqslant 0$，$\Theta^{r,0^i}(G) \geqslant O_0$。

证明。由 G 在给定类型的顶点上传递作用，且对每个顶点 v，$G(v)$ 在 $S(v, r)$ 上传递作用这一事实可知，$\Theta^{r,0^i}(G)$ 在 $F_0(\omega)$ 的置换自同构下具有独立性。

注意，对于固定的 (v, x)，集合 B_i^v 在 $G(v, x)$ 的作用下是不变的，而它们在 $S_v(x, 1)$ 上的作用为 $\Lambda_0^r(G)$。由此可知，对于所有 $i \geqslant 0$，$\Theta^{r,0^i}(G) \trianglelefteq \Lambda_0^r(G)$。由于 $\Lambda_0^1(G) = F_0(\omega)$，我们推得 $\Theta^{1,0^i}(G) \trianglelefteq F_0(\omega)$，从而证明了 (i)。

令 $\overline{B}_i^v$ 为包含 $B_i^v \cup \{x\}$ 的最小子树；我们看到，事实上 K_i^v 逐点固定 $\overline{B}_i^v$。对于固定的 i，通过观察可知 $\Theta^{r+1,0^i}(G) \trianglelefteq \Theta^{r,0^i}(G)$：若取 v 的一个邻点 w，使得 $d(w,x) = d(v,x)+1$，那么 w 被 K_i^v 固定，因此 K_i^v 作为集合稳定 B_i^w，而且 $\overline{B}_i^w$ 还包含 B_i^v。现在利用 (i) 部分并对 r 作归纳，可得 $\Theta^{r,0^i}(G)$ 是 $F_0(\omega)$ 的次正规群，从而完成 (ii) 的证明。

图9：集合 $\bigcup_{j=1}^{k} X_j$（黑色方块）以及顶点 $w \in B_{i+1}^{y}$，对应于 $k=3, i=1$



对于 (iii)，我们对 i 作归纳。假设对于所有 $r \geqslant 1$ 以及某个 $i \geqslant 0$，都有 $\Theta^{r,\,{}_0{}^{i}}(G) \geqslant O_0$，并令 $k \geqslant 1$。固定一个类型 0 的顶点 x 和一个满足 $d(x,y)=k$ 的顶点 y。设从 x 到 y 的路径上的顶点依次为 $x=y_0, y_1, \ldots, y_k=y$。注意，对所有$v \in VT\backslash\{x\}$，群 K_i^v 在 x 处的局部作用包含 $\Theta^{r,\,{}_0{}^{i}}(G)$，其中 $r=d(v,x)$，因此也包含 O_0。

对于 $1 \leqslant j \leqslant k$，令 $X_j = S_x(y_j, i+1)$；图9给出了一个形如 $\bigcup_{j=1}^{k} X_j$ 的集合示例。于是，给定 $z \in X_j$，我们有 $d(z,x)=i+j+1$，且 K_i^z 在 x 处的局部作用包含 O_0。给定 $z, z' \in X_j$，我们有 $d(z,z') \leqslant 2i+2 \leqslant (i+j+1)+i$，因此 K_i^z 固定 z'，反之亦然。特别地，对于每个 $z \in X_j$，K_i^z 都是群 $M_j = \langle K_i^z \mid z \in X_j \rangle$ 中的正规子群。令 $L_j = \bigcap_{z \in X_j} K_i^z$。由引理 3.2 可知，$L_j$ 在 x 处的局部作用包含 O_0。此外，我们看到子群 L_j 都是 $G(x,y)$ 中的正规子群，因此再次由引理 3.2 可知，群 $L = \bigcap L_j$ 在 x 处的局部作用包含 O_0。现在我们要证明 L 逐点固定 B_{i+1}^{y}：注意，B_{i+1}^{y} 由所有满足以下条件的顶点 w 组成：$d(w,y)=k+i+1$，且从 w 到 y 的路径不经过 x。给定 $w \in B_{i+1}^{y}$，从 w 到 y 的路径与从 x 到 y 的路径在某个顶点 y_j 处相交，其中 $1 \leqslant j \leqslant k$（在图9所示示例中为 $j=2$），因此

$$k+i+1 = d(w,y_j) + d(y_j,y) = d(w,y_j) + k - j; \text{ hence } d(w,y_j) = i+j+1.$$

取路径上距离 y_j 为 $i+1$ 的顶点 z，可知 $z \in X_j$ 和 $d(w、z) = j \leqslant d(z、x) + i$。因此 $w \in \overline{B}_i^z$，故 w 被 L 固定。因此 L 逐点固定 B_{i+1}^{y}，由此我们推得 $\Theta^{k,\,{}_0{}^{i+1}}(G) \geqslant O_0$。由于 $k \geqslant 1$ 是任意的，事实上，对于所有 $k \geqslant 1$，都有 $\Theta^{k,\,{}_0{}^{i+1}}(G) \geqslant O_0$，归纳步骤至此完成。□

我们类似地定义 $\Theta^{r,\,{}_1{}^{i}}(G)$，如同定义 $\Theta^{r,\,{}_0{}^{i}}(G)$。鉴于当 r 增大（固定 i）或 i 增大（固定 r）时，$\Theta^{r,\,{}_t{}^{i}}(G)$ 弱单调递减，再结合此处所有群都是某个固定有限群 $F_t(\omega)$ 的子群这一事实，可知当 $r \to \infty$ 或 $i \to \infty$ 增大时，$\Theta^{r,\,{}_t{}^{i}}(G)$ 最终会保持不变。我们定义极限子群 $\Theta^{\infty,\,{}_t{}^{i}}(G)$、$\Theta^{r,\,{}_t{}^{\infty}}(G)$ 和 $\Theta^{\infty,\,{}_t{}^{\infty}}(G)$；这些子群同样是在 $F_t(\omega)$ 的置换自同构意义下定义的。

当群 $G \in \mathcal{H}_T$ 以上下文中显而易见时，我们将简写为 $\Theta^{r,\,{}^{i}}$。今后我们将简写为 $\Theta^{r,\,{}^{i}}$。

注意，在命题 4.1 中，对于任意固定的顶点 $v \in VT\backslash\{x\}$，$K = \bigcap_{i \geqslant 0} K_i^v$ 是半树 $T_{(x,\,y)}$ 的逐点稳定子，其中 y 是从 x 到 v 的路径上 x 之后的第一个顶点；等价地，K 是半树 $T_{(y,\,x)}$ 的刚性稳定子。因此，$\Theta^{r,\,{}_\infty{}_0}$ 是半树根处半树刚性稳定子的局部作用 Θ_0；由于 $\Theta^{r,\,{}_\infty{}_0}$ 不依赖于 r，我们也有 $\Theta^{\infty,\,{}_0{}^{\infty}} = \Theta_0$。对 Θ_1 也有类似观察。于是，命题 4.1(iii) 可更简洁地改述如下：

推论 4.2. 设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,\,F_1}$。若 $\Theta^{\infty,\,{}_0{}^{0}} \geqslant O^{\infty}(F_0(\omega))$，则 $\Theta_0 \geqslant O^{\infty}(F_0(\omega))$。

回顾一下， $\Delta_t^k(G)$ 是 $G(x)\cap G_1(y)$ 在 $S_y(x$ 上的作用， $1)$，其中 x 和 y 是满足 $d(x、y)=k\geqslant 1$ 的顶点，且 x 的类型为 t。注意， $\Delta_t^k(G)\trianglelefteq\Lambda_t^k(G)$ 和 $\Delta_t^k(G)\leqslant\Lambda_t^{k+1}(G)$。

下一个引理将在本小节的一个特殊情形中使用，并将在第 4.2 节中发挥更重要的作用；在该节中，我们将更详细地研究群 Λ_t^k 的结构。群 A 和 B 的次直积是指满足以下条件的子群 C： $A\times B$

$$(A\times\{1\})C=C(\{1\}\times B)=A\times B.$$

引理 4.3。设 $G\in\mathcal{H}_T$，并设 $x、y\in VT$，其中 x 的类型为 t，且 $d(x、y)=k>0$。设 $N_{y、x}$ 和 $N_{x、y}$ 分别为 $G(x、y)$ 在 $S_y(x、1)$ 和 $S_x(y、1)$ 上作用的核，并设 $N=N_{x、y}N_{y、x}$。若 k 为奇数，则将商群 $G(x、y)/N$ 视为群 $A_k=A_{k、0}=A_k$ 的一个副本[1]，该群仅依赖于 G 和 k；若 k 为偶数，则将商群 $G(x、y)/N$ 视为群 $A_{k、t}$ 的一个副本，该群依赖于 $(G、k、t)$。

于是存在满同态 $\psi_{k,t}\colon\Lambda_t^k\to A_{k,t}$，其核为 Δ_t^k，使得 $G(x,y)$在 $S_y(x,1)\times S_x(y,1)$ 上的作用构成一个次直积

$$M_{x,y}=\{(a,b)\in\Lambda_t^k\times\Lambda_{t+k}^k\mid\psi_{k,t}(a)=\psi_{k,t+k}(b)\}.$$

证明。群 $A_{k,t}$ 在同构意义下不依赖于顶点 (x,y) 的选取，这一事实源于 G 是类型距离传递的。

$G(x,y)$ 在 $S_y(x,1)\times S_x(y,1)$ 上的作用给出了一个同态 π，它从 $G(x,y)$ 映到 $\Lambda_t^k\times\Lambda_{t+k}^k$，其核为 $N_{x,y}\cap N_{y,x}$；记 $M_{x,y}=\pi(G(x,y))$。将 $M_{x,y}$ 描述为 Λ_t^k 和 Λ_{t+k}^k 的次直积，是 Goursat 引理的一个实例；我们也可以如下理解这一论证。若考虑 $G(x,y)$ 在 $S_y(x,1)$上的作用，就有一个满同态 $\pi_{x,y}$，它从 $G(x,y)$ 映到 Λ_t^k，其核为 $N_{y,x}$。根据 Δ_t^k的定义，我们看到 $N_{x,y}$在 Λ_t^k中的像，因而 N的像也恰好是 Δ_t^k。对 Λ_{t+k}^k也有同样的描述，只需交换 x和 y 的角色。因此

$$\frac{\Lambda_t^k}{\Delta_t^k}\cong\frac{G(x,y)}{N}\cong A_{k,t}\cong\frac{\Lambda_{t+k}^k}{\Delta_{t+k}^k}.$$ □

此时，我们已经具备足够一般的框架来构造例子；为避免打断主要定理的推进脉络，这些例子单列在第 5 节中，但读者也可以在本节与例子一节之间来回参阅，以便理解证明中某些步骤的动机。

接下来，我们将通过一系列关于群 $\Theta^{k,\ t^{\ i}}$ 的引理，最终对存在 $\Theta_t\not\geqslant O_t$ 的情形作出一系列限制。

引理 4.4。设 $G\in\mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$，且 $\kappa(F_0(\omega))=1$。记 $O_0:=O^\infty(F_0(\omega))$ 和 $R_0=O_\infty(O_0)$，并假设对于某个 k，有 $\Theta^{k,\ {}_0{}^0}\geqslant O_0$。此外，我们还作出以下假设之一：

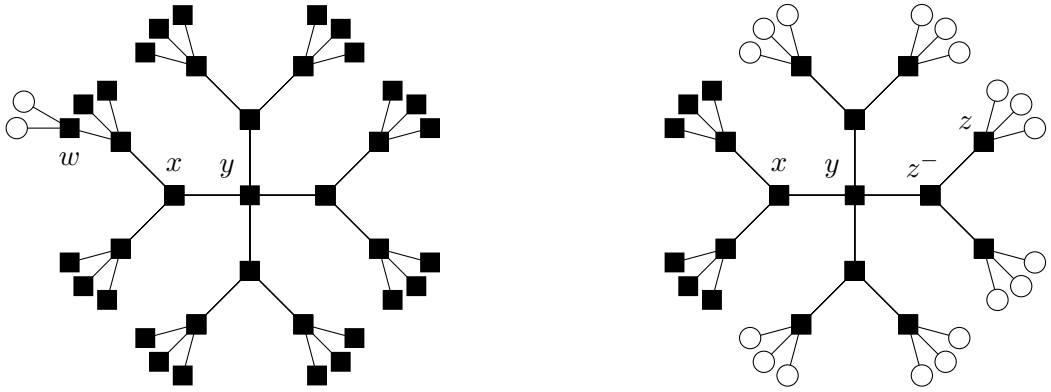
(a) 我们有 $k=1$； F_1 不同构于 外自同构群(O_0/R_0)的任何子商；并且 $O_\infty(F_0(\omega))$ 是非传递的。

(b) 我们有 $k\geqslant 2$ 和 $\Theta^{k-1,\ {}_0\quad{}^1}\geqslant O_0$。

于是 $\Theta^{k,\ {}_0{}^1}\geqslant O_0$。

证明。设 x 是类型为 k 的顶点，并考虑 $G_k(x)$ 在 $S(x、k+1)$ 上的作用。由假设，$\Theta^{k、\ {}_0{}^0}\geqslant O_0$，这保证了 $G_k(x)$ 在 $S_x(y、1)$ 上的作用的像，对每个 $y\in S(x、k)$ 都包含 O_0。因此我们可以应用引理 3.4，其中 $A=G(x)/G_{k+1}(x)$ 嵌入在 $\prod_{y\in S(x、k)}B_y\wr$ 中，$\mathrm{Sym}(S(x、k))$，每个 B_y 都是 $F_0(\omega)$ 的一个副本，并且 $H=G_k(x)/G_{k+1}(x)$。我们得到 $S(x、k)$ 上一个 $G(x)$-不变等价关系 $\sim$，并且对每个 $y\in S(x、k)$， H 的一个完美正规子群 M_y，满足 $\kappa(M_y)=1$，使得 M_y 在 $S_x(y、1)$ 上的作用为 O_0，其中 $M_y=M_{y'}$ 当且仅当 $y\sim y'$，并且当 $y'\not\sim y$ 时， M_y 在 $S_x(y'、1)$ 上平凡作用。为了证明 $\Theta^{k、\ {}_0{}^1}\geqslant O_0$,

图 10: $G_3(y)$ 在 $S_y(w,1)$ 上的作用（左），以及 $G_2(x,y)$ 在 $S_x(y,3)$ 上的作用（右）



现在只需证明 $\sim$ 是平凡等价关系。注意，对所有 $k' \geqslant 1$，由于 $G(x)$ 在 $S(x、k')$ 上有二重区块传递作用，每个 $S(x、k')$ 上非全域的 $G(x)$-不变等价关系 $\sim'$ 都必须满足 $\sim' \subseteq \sim_{x,\ k'}$。特别地，若 $\sim$ 非平凡，则存在 $y'、y'' \in S(x、k)$，使得 $y' \sim y''$ 且 $0 < d(y'、y'') < 2k$。

在情形 (a) 中，我们有 $k = 1$。由于 $G(x)$ 在 $S(x,1)$上的作用是本原的，因此只有两种可能：$\sim$ 是平凡关系或全关系，所以为导出矛盾，我们可以假设 $\sim$ 是 $S(x,1)$上的全关系。于是，$M := M_y$作为 $y \in S(x,1)$的函数是常值的，因此 M是 H 的一个子群，并且被 A正规化。令 C 为 A 中 $M/O_\infty(M)$ 的中心化子。则A/MC 同构于外自同构群 $\mathsf{Out}(O_0/R_0)$, 的一个子群，因此 A/HC 同构于外自同构群 $\mathsf{Out}(O_0/R_0)$的一个子商；故由我们的假设，$C \nleqslant H$。由于 $G(x)/G_1(x) \cong F_1$ 是二重传递的，可知 C传递地作用于 $S(x,1)$。现在，C在 $S(x,2)$ 上的轨道关系是 $G(x)$-不变的，且不包含于$\sim_x$,2中，因此它是全关系，也就是说，C 传递地作用于 $S(x,2)$。特别地，给定$y \in S(x,1)$，则 $C_y := C \cap G(x,y)/G_2(x)$ 传递地作用于 $S_x(y,1)$。然而，我们看到C_y 作为 $F_0(\omega)$ 的正规子群作用，并且中心化 O_0/R_0。由于 $\kappa(F_0(\omega)) = 1$，我们推得 C_y 作为 $F_0(\omega)$的可解正规子群作用。因此，$F_0(\omega)$ 有一个可解传递正规子群，这与我们的假设矛盾。此矛盾完成了情形 (a) 的证明。

现在假设我们处于情形 (b)，因此 $k \geqslant 2$。反设 $\sim$不是平凡的等价关系。于是存在 $y', y'' \in S(x,k)$，使得 $y' \sim y''$且 $0 < d(y', y'') < 2k$，因此对于 x的某个邻点 z，我们有 $y', y'' \in S_x(z, k-1)$。我们有 $G_{k-1}(z)$ 在$S_x(z$上的作用，$k)$。令 $y \in S_x(z, k-1)$。由于 $\Theta^{k-1}{}_{,0}{}^{1} \geqslant O_0$，我们看到存在 $N_y \trianglelefteq G_{k-1}(z)$，其在 $S_z(y$上作用为 O_0，$1) = S_x(y,1)$，并逐点固定 $S(z$的其余部分，$k)$。因此 $G_{k-1}(z)$ 在 $S_x(z$上的作用，$k)$ 是一个包含 $\prod_{y \in S_x(z}$的可解剩余 $O = \prod_{y \in S_x(z,k-1)} O_0$ 的群，${}_{k-1)}F_0(\omega)$。现在 $G_k(x)$是 $G_{k-1}(z)$的正规子群，因此若取 $G_k(x)$ 在 $\prod_{y \in S_x(z}$中的像 H'，${}_{k-1)}F_0(\omega)$，则 $H' \cap O$是 O的正规子群；由引理 3.3，我们进而看到实际上 $H' \geqslant O$。回想起 $\kappa(M_y) = 1$，可知对每个 $y \in S_x(z,k-1)$，M_y 在 O 中的像恰好是由y索引的直因子。但这样一来 $M_{y'} \neq M_{y''}$，所以 $y' \not\sim y''$，矛盾。这个矛盾完成了情形 (b) 的证明。

□

引理 4.5. 令 $G \in \mathcal{H}_{F_0,F_1}$。对每个 $t \in \{0,1\}$，记作 $O_t := O^\infty(F_t(\omega))$。令 $t \in \{0,1\}$ 和$k \geqslant 1$，并假设 $\Theta^k{}_{,1-t}{}^{1} \geqslant O_{1-t}$，且若 $k \geqslant 2$，则 $\Theta^{k-1}{}_{,t}{}^{1} \geqslant O_t$。那么 $\Theta^k{}_{,t}{}^{0} \geqslant O_t$。

证明。取 $t = 1$；关于 $t = 0$ 的论证类似。令 x 和 y 为T 中类型分别模 2 为 k 和 $k+1$ 的相邻顶点。

假设 $k = 1$；注意 $\Theta^1{}_{,\ i}{}^{0} = \Delta_i^1$和 $F_i(\omega) = \Lambda_i^1$。由假设可知 $\Theta^1{}_{,\ 0}{}^{0} \geqslant O_0$，因此 $F_0(\omega)/\Theta_0^{1,0}$ 是可解的。由引理 4.3可知 $F_1(\omega)/\Theta_1^{1,0}$ 是可解的，因此 $\Theta^1{}_{,\ 1}{}^{0} \geqslant O_1$。

从现在起，我们假设 $k \geqslant 2$。我们可以将 $\Theta^{k,\,0\,1}$ 解释为 $G_k(y)$ 在 $S_y(w$上的作用；对于任意 $w \in S(y、\ k),\ 1)$；事实上，我们取 $w \in S_y(x、\ k-1)$，从而确保 $S_y(w、\ 1) = S_x(w、\ 1)$（见图 10）。对于 $z \in VT\backslash\{x\}$，令 z^- 为从 x 到 z 的路径上的倒数第二个顶点，并记 $G_{x,\ z} := G(z, z^-)/G_1(z)$。注意，$G_{x,\ z}$ 是 $F_i(\omega)$的一个副本，其中 i 是 z的类型。

如图 10（右）所示，$G_{k-1}(x$在 $S_x(y$上的 $y)$ 作用可自然地由一个同态描述

$$\varphi : G_{k-1}(x, y) \to \prod_{z \in S_x(y,k-1)} G_{x,z}.$$

注意，φ 相对于 φ的定义域和陪域上 $G(x、\ y)$ 的自然作用是等变的，且 φ 的核为 $G_k(y)$。由于 $\Theta^{k,\ {}_0{}^1} \geqslant O_0$，可知 $G_k(x)/G_{k+1}(x)$包含 $(O_0)^{|S(x,\ k)|}$；特别地，$\varphi(G_k(x))$ 包含$\prod_{z \in S_x(y,\ k-1)} G_{x,\ z}$的可解剩余。

由于 $\Theta^{k-1,\ {}_1{}^1} \geqslant O_1$，可知 $G_{k-1}(x)/G_k(x)$ 包含 $(O_1)^{|S(x,\ k-1)|}$；特别地，我们有 $G_{k-1}(x)$ 的一个子群 A，它在 $S_x(w$上以 O_1 的方式作用于 $1)$，但逐点固定集合 $S(x、\ k)\backslash S_x(w、\ 1)$。令 N为 A在 $G(x$中的正规闭包，令 N^*为 N的可解剩余；则$N \leqslant G_{k-1}(x、\ y)$，且 N在 w处的局部作用包含 O_1，因此 N^*在 w处的局部作用也包含 O_1。与此同时，$\varphi(N^*)$包含于 $\prod_{z \in S_x(y,\ k-1)} G_{x,\ z}$的可解剩余中，因此 $\varphi(N^*) \leqslant \varphi(G_k(x))$。

对于每个 $a \in O_1$，现在我们取 $g_a \in N^*$，使其在 $S_x(w、\ 1)$和 $g'_a \in G_k(x)$ 上的作用分别为 a，且满足 $\varphi(g'_a) = \varphi(g_a)$。于是 $h_a = (g'_a)^{-1} g_a$ 是 $\ker\varphi = G_k(y)$ 的一个元素；由于 $g'_a \in S_k(x)$ 和 $S_y(w、\ 1) \subseteq S(x、\ k)$，$g_a$ 与 h_a 在 $S_y(w、\ 1)$ 上的作用相同。鉴于可以自由选择 a，我们看到 $G_k(y)$ 在 $S_y(w、\ 1)$ 上的作用包含 O_1，换言之，$\Theta^{k,\ {}_1{}^0} \geqslant O_1$。 □

引理 4.6. 设 $G \in \mathcal{H}_T$，并设 $\mathcal{C}$ 是有限群的扩张封闭群簇。令 $k \geqslant 1$，并假设 $x \in V_0T$ 和 $y \in V_1T$ 是相邻顶点，且 $G_{k-1}(x、\ y)/G_k(x)$ 以及 $G_{k-1}(x、\ y)/G_k(y)$ 都是 $\mathcal{C}$-群。那么紧开子群 $G_{k-1}(x、\ y)$ 是 pro-$\mathcal{C}$；特别地，G 是局部 pro-$\mathcal{C}$。

证明。该假设保证以下 pro-$\mathcal{C}$ 剩余的等式：

$$O^{\mathcal{C}}(G_k(x)) = O^{\mathcal{C}}(G_{k-1}(x, y)) = O^{\mathcal{C}}(G_k(y)).$$

特别地，我们看到 $O^{\mathcal{C}}(G_{k-1}(x, y))$ 同时被 $G(x)$ 和 $G(y)$ 正规化，因此是 $H = \langle G(x), G(y)\rangle$ 中的正规子群。由于两个局部作用都是二重传递的，我们看到 H 在 T 上极小作用；特别地，H 没有非平凡的紧正规子群。由此可得 $O^{\mathcal{C}}(G_{k-1}(x, y))$ 是平凡的，换言之，$G_{k-1}(x, y)$ 是 pro-$\mathcal{C}$。 □

现在我们得到在 $\Theta_t \not\geqslant O_t$ 对某个 $t \in \{0, 1\}$ 成立的情形下，对 $G \in \mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$ 的预期限制。

命题 4.7. 设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$，其中 F_t 在 Ω_t 上作用，并记 $O_t := O^\infty(F_t(\omega))$。假设 $\kappa(F_0)$, $\kappa(F_1) \leqslant 1$，且对于 $t \in \{0, 1\}$，$\mathrm{Out}(O_t/O_\infty(O_t))$ 可解。那么以下情形恰有一个成立：

(i) 对所有 $t \in \{0,\ \Theta_t \geqslant O_t$成立；对某些 $t \in \{0,\ 1\}$和 $O_t \neq \{1\}$成立。

(ii) G是局部 pro-$\mathcal{C}$ 的，其中 $\mathcal{C}$ 是包含 $O_\infty(F_0(\omega))$ 和 $O_\infty(F_1(\omega))$的最小有限群扩张封闭群簇。此外，对于 $t \in \{0,\ 1\}$，我们有 $\Theta_t \leqslant O_\infty(F_t(\omega))$，且群 $O_{\mathcal{C}}(\Lambda_t)$在 $\Omega_t\backslash\{\omega\}$上传递作用。

证明。注意，$\mathcal{C}$ 中的所有群都是可解的。若 (i) 成立，显然不存在这样的 $k \geqslant 0$ 或$v \in VT$ 使得 $G_k(v)$ 是前可解的，因此 G 不是局部前可解的。因此 (i) 和 (ii) 互斥，我们可以假设 (ii) 不成立。

暂且假设 G 不是局部前-$\mathcal{C}$。那么由引理 4.6可知，存在某个 $t \in \{0、\ 1\}$，使得 $\Theta^{\infty,\ _t\ ^0}$ 不是一个 $\mathcal{C}$-群；不妨设这发生在 $t = 1$处。根据$\mathcal{C}$的定义，我们推得

$$\Theta_1^{\infty,0} \nleqslant O_\infty(F_1(\omega)) \neq F_1(\omega);$$

由命题 4.1，$\Theta^{\infty,\ _0\ _1}$ 是 $F_1(\omega)$ 的次正规子群，因此由引理 3.3 可得

$$\Theta_1^{\infty,0} \geqslant O_1 \neq \{1\},$$

因此由推论 4.2 得到 $\Theta_1 \geqslant O_1$。若 $F_0(\omega)$ 可解，则自动有 $\Theta_0 \geqslant O_0$，故设 $F_0(\omega)$ 不可解。引理 4.5 保证 $\Theta^{1,\ _0\ ^0} \geqslant O_0$。对 k 使用归纳法，可得

$$\Theta_0^{k,0} \geqslant O_0 \ \Rightarrow\ \Theta_0^{k,1} \geqslant O_0 \ \Rightarrow\ \Theta_0^{k+1,0} \geqslant O_0,$$

对所有 $k \geqslant 1$ 均成立；第一个蕴含由引理 4.4 得出（在 $k = 1$ 的情形下，我们利用外自同构群$(O_0/O_\infty(O_0))$ 可解这一事实），第二个蕴含则由引理 4.5 得出。因此 $\Theta^{\infty,\ _0\ ^0} \geqslant O_0$，由此通过推论 4.2 得到$\Theta_0 \geqslant O_0$。因此 (i) 成立。

从现在起，我们可以假设 G 是局部 pro-$\mathcal{C}$ 的，换言之，存在某个 $x \in V_0T$ 和$k \geqslant 1$，使得 $G_k(x)$ 是 pro-$\mathcal{C}$ 的。我们立即推出，对于 $t \in \{0,1\}$，Θ_t 是可解的；由于Θ_t 显然是 $F_t(\omega)$中的正规子群，我们得出

$$\forall t \in \{0,1\}:\ \Theta_t \leqslant O_\infty(F_t(\omega)).$$

我们还可以将 k 选得足够大，使得对于 $t \in \{0,1\}$ 以及所有 $l \geqslant k$，都有 $\Lambda_t^l = \Lambda_t$。

剩下需要排除的可能性是：存在某些 $t \in \{0,1\}$，使得 $O_{\mathcal{C}}(\Lambda_t)$的作用不是传递的。取 $y \in S(x, 2l + t)$，使得 $2l \geqslant k$，并考虑$G_k(x) \cap G(y)$ 在 $S_x(y, 1)$上的作用 Δ。那么，由于 Δ 是 Λ_t的正规 $\mathcal{C}$-子群，我们看到 Δ 的作用是非传递的。对所有 $l \geqslant k/2$, 重复这一论证，我们发现 $G_k(x)$ 在边界上有无限多个轨道；由于 $G_k(x)$ 在 $G(x)$中的指数有限，因此 $G(x)$ 在边界上也有无限多个轨道，这与推论 2.10(iii)矛盾。这就完成了从 (ii) 的否定推出 (i) 的证明，也就完成了二分定理的证明。 □

命题 4.7 的证明并不需要深入了解有限二重传递置换群。然而，若现在应用引理 3.8 和 3.11，我们会发现命题 4.7(ii) 受到很强的限制。

推论 4.8. 设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,F_1}$，其中 F_t 作用于 Ω_t，并记 $O_t := O^\infty(F_t(\omega))$。则以下情况恰有一种成立：

(i) 对所有 $t \in \{0,1\}$，$\Theta_t \geqslant O_t$。

(ii) 对所有 $t \in \{0,1\}$，都有 $\Theta_t \leqslant O_\infty(F_t(\omega))$，且 Λ_t 可解；但 $F_0(\omega)$和 $F_1(\omega)$ 中至少有一个不可解。此外，对所有满足 $F_t(\omega)$ 不可解的 $t \in \{0,1\}$，都有 $\mathrm{PSL}_3(q) \leqslant F_t \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_3(q)$，其中 $q > 3$，且 $F_t(\omega)$ 是F_t 在 $P_2(q)$上的通常作用的点稳定子。

证明。(i) 和 (ii) 两种情况显然互斥。若 $F_0(\omega)$ 和 $F_1(\omega)$ 都可解，则显然 (i) 成立，因此不妨设 $O_0 \neq \{1\}$。在这种情况下，命题 4.7(i) 推出推论的情形 (i)，所以不妨设命题 4.7(ii) 成立，这意味着 $\Theta_t \leqslant O_\infty(F_t(\omega))$，且 $O_\infty(\Lambda_t)$ 对于 $t \in \{0$ 和 $1\}$ 均在 $\Omega_t \backslash \{\omega\}$ 上传递地作用。由引理 3.11(b)，Λ_0 和 Λ_1 都可解，因此 Λ_0 不包含 O_0。取 t 使得 $O_t \neq \{1\}$，则引理 3.11 中除 (ii) 和 (vi) 之外的所有情况都被排除。在剩余情况下，我们有 $\mathrm{PSL}_3(q) \leqslant F_t \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_3(q)$，且 $F_t(\omega)$ 是 F_t 在 $P_2(q)$ 上的通常作用的一个点稳定子；由于 O_t 非平凡，我们有 $q > 3$。

□

推论 4.8(i) 是定理 1.2(i) 的结论，因此只要将推论 4.8(ii) 归约到定理 1.2(ii) 给出的特殊情形，该定理便得以证明。

4.2 线段逐点稳定子的局部作用

设 x 和 y 是树 T 中相距 k 的顶点，且 x 的类型为 t。回想一下（如图 7 所示），给定 $G \in \mathcal{H}_T$，群 $\Lambda_t^k := \Lambda_t^k(G)$ 是 $G(x,y)$ 在 $S_y(x,1)$ 上的作用，而 $\Delta_t^k := \Delta_t^k(G)$ 是 $G(x) \cap G_1(y)$ 在 $S_y(x,1)$ 上的作用。设 δ_t^k 为 Δ_t^k 在 $S_y(x,1)$ 上的轨道数。

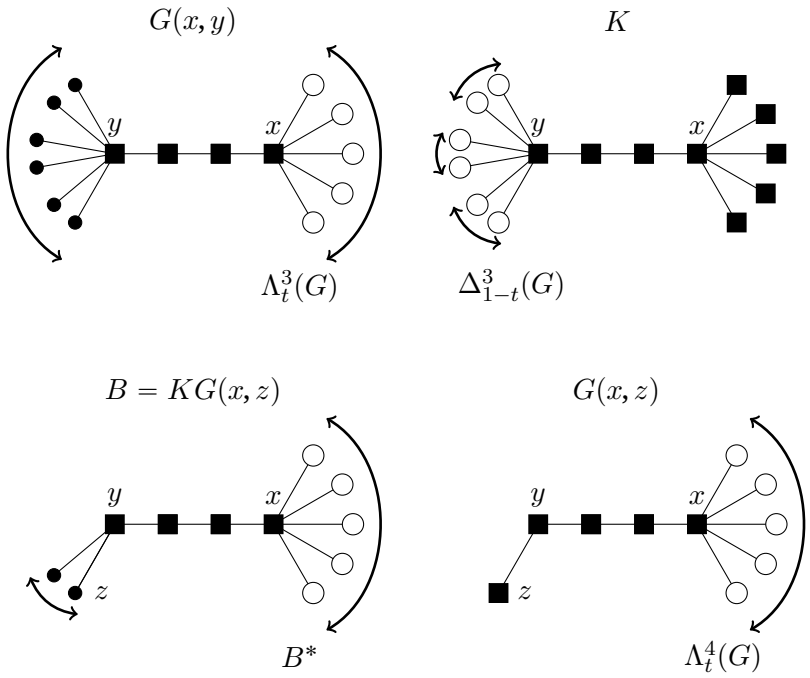
我们发现群 Λ_t^k 和 Δ_t^k 之间存在一种有用的关系。

引理 4.9. 设 $G \in \mathcal{H}_T$，并设 $k \geqslant 1$。则

$$|\Lambda_t^k : \Lambda_t^{k+1}| = \delta_{t+k}^k.$$

此外，$|\Lambda_t^k : \Lambda_t^{k+1}|$ 整除 $d_{t+k} - 1$。

图 11：经由 $\Delta_{t+k}^k(G)$ 从 $\Lambda_t^k(G)$ 到 $\Lambda_{t+1}^k(G)$



证明。证明中涉及的关键群如图 11 所示。取两个顶点 x和 y，其中 $d(x,y) = k$和 $x \in V_tT$，并取 $z \in S_x(y,1)$；我们比较 $G(x,y)$ 和$G(x,z)$ 在 $S_y(x,1)$上的作用。注意到 $G(x,y)$ 在 $S_x(y,1)$ 上传递地作用。$K = G_1(x) \cap G(y)$是 $G(x,y)$ 在 $S_y(x,1)$ 上的作用的核，且为 $G(x,y)$的正规子群，因此它在 $S_x(y,1)$上的轨道是 $G(x,y)$这一作用的块；考虑 y的类型，该作用有 $\delta = \delta_{t+k}^k$ 个轨道，并且 δ 也整除 $d_{t+k} - 1$。令 B 为 $G(x,y)$ 中 z的 K-轨道的集合稳定子，并令 B^* 为 B在 x处的局部作用。于是 $G(x,z), K \leqslant B \leqslant G(x,y)$，而且轨道 Kz 和 Bz 重合，因此 $B = KG(x,z)$。特别地，由于 K 在x 处的局部作用是平凡的，我们得到 $B^* = \Lambda_t^{k+1}$。由于 $G(x,y)$ 传递地置换 $S_x(y,1)$ 的块，因此有 $|G(x,y) : B| = \delta$；又由于 $B \geqslant K$，可得 $|\Lambda_t^k : B^*| = \delta$。由此得出$\delta = |\Lambda_t^k : \Lambda_t^{k+1}|$。 □

当 $\{1\} \neq O^\infty(F_0(\omega)) \leqslant \Lambda_0^k$ 时，我们可以进一步缩小 δ_0^k 的可能取值范围，发现除了一些特殊情形外，我们有 $\delta_0^k = 1$，因此 $\Lambda_k^{k+1} = \Lambda_k^k$。主要工作在于

证明将处理推论 4.8(ii) 的情形，从而分离出例外的局部前可解类型。

引理 4.10. 令 $G \in \mathcal{H}_{F_0,F_1}$；对于 $t \in \{0,1\}$，记作 $O_t = O^\infty(F_t(\omega))$。假设 $\tau \in \{0,1\}$ 和 $k \geqslant 1$ 满足 $\Lambda_\tau^k \geqslant O_\tau$。那么以下条件恰有一个成立。

(a) 有 $O_\tau = \{1\}$。(b) 有 $\Delta_\tau^k \geqslant O_\tau \neq \{1\}$ 和 $\delta_\tau^k = 1$，因此 $\Lambda_{\tau+k}^{k+1} = \Lambda_{\tau+k}^k$。(c) 有 $\Delta_\tau^k \geqslant O_\tau \neq \{1\}$，但 $\delta_\tau^k > 1$。在这种情况下，F_τ 是例外特殊线性群$_2(5)$ 仿射型，而 $F_{\tau+k}$ 几乎单。特别地，对于 $q \in \{9、19、29、59\}$，有 $d_\tau = q^2$；$O^\infty(F_\tau(\omega)) =$ 特殊线性群$_2(5)$；$\delta_\tau^k = \delta^*(F_\tau) \in \{2、3、7、29\}$；并且 $\Lambda_\tau^k = \Lambda_\tau = F_\tau(\omega)$。(d) 有 Δ_τ^k 可解，但 $O_\tau \neq \{1\}$，因此 Δ_τ^k 不包含 O_τ。在这种情况下，G 属于例外局部前可解类型，其中 $F_t = \mathrm{P\Gamma L}_3(q_t)$，且 $\{q_0、q_1\} = \{4、5\}$。对于 $t \in \{0 \text{ 和 } 1\}$，同样有 $\Lambda_t^k = F_t(\omega)$，而 Δ_t^k 是 $F_t(\omega)$ 的可解根，因此 $\delta_t^k = q_t + 1$，且 Λ_t^{k+1} 可解。

*More*此外，如果 $F_\tau \cong F_{\tau+k}$（例如，如果 k 是偶数），那么情形 (c) 和 (d) 不可能出现 r.

证明。注意，这四种情形互不相容：只有在 $O_\tau = \{1\}$ 时才是情形 (a)；情形 (b) 和 (c) 由 δ_τ^k 的取值区分；只有在 Δ_τ^k 不包含 O_τ 时才是情形 (d)。如果 $O_\tau = \{1\}$，则无需再证明，因此假设 $O_\tau \neq \{1\}$。根据引理 4.9，如果 $O_\tau \neq \{1\}$ 且 $\delta_\tau^k = 1$，那么我们处于情形 (b)，所以从现在起假设 $\delta_\tau^k > 1$。

不失一般性，令 $\tau = 0$。对于 $t \in \{0、1\}$，令 R_t^k 为 Λ_t^k 的可解根。我们已经注意到，Δ_0^k 在 Λ_0^k 中是正规子群。由于 Λ_0^k 在 $\Omega\backslash\{\omega\}$ 上传递地作用，Δ_0^k 的所有轨道大小相等。还要注意，Δ_t^k 包含 Θ_t。

假设 $\Delta_0^k \geqslant O_0$。那么 O_0 是非平凡且非传递的，因此属于引理 3.9 的情形(ii)；于是 δ_0^k 整除 $\delta^*(F_0)$，其中 $\delta^*(F_0) \in \{2、3、7、29\}$。由于 $\delta^*(F_0)$ 是素数，实际上$\delta_0^k = \delta^*(F_0)$。由于 F_0 是仿射型，根据引理 3.11 可知 $\Lambda_0^k = \Lambda_0 = F_0(\omega)$。由引理 4.9 可推得 Λ_k^{k+1} 真包含于 $F_k(\omega)$；由引理 3.11 可知F_k 是几乎单群，因此 $F_0 \ncong F_k$ 且 k 为奇数。由此我们属于本引理的情形 (c)。

至此，我们已经处理了 $\Delta_0^k \geqslant O_0$的情形，因此从现在起假设Δ_0^k 不包含 O_0。根据假设 $\Lambda_0^k \geqslant O_0$，由此可得 O_0 是 Λ_0^k的可解剩余；进而可知 $\kappa(\Lambda_0^k) = \kappa(F_k(\omega)) = 1$。由于 Δ_0^k 是 Λ_0^k的正规子群，由引理 3.3 可得 $\Delta_0^k \leqslant R_t^k$，因此$\Theta_0 \leqslant R_t^k$。

由推论 4.8，我们有 $\mathrm{PSL}_3(q_0) \trianglelefteq F_0 \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_3(q_0)$，其中 F_0 作用于 $\Omega_0 = P_2(q_0)$，这里 $q_0 > 3$ 是某个素数幂；此外，F_1 也具有相同形式（但所用的素数幂可能不同），或者 $F_1(\omega)$ 是可解的。

射影直线 $P_1(q_0)$ 是 $\Omega_0\backslash\{\omega\}$ 的一个 $F_0(\omega)$-等变商，方式如注 3.6 所述。由于 $O_0 \leqslant \Lambda_0^k$，$\Lambda_0^k$ 在 $P_1(q_0)$ 上的作用给出一个同态 $\pi_0 : \Lambda_0^k \to \mathrm{P\Gamma L}_2(q_0)$，其像包含单正规子群 $\mathrm{PSL}_2(q_0)$。π_0 的核是 Λ_0^k 的可解根 R_0^k，因为 $\mathrm{PSL}_2(q_0)$ 在 $\mathrm{P\Gamma L}_2(q_0)$ 中的中心化子是平凡的。特别地，$\pi_0(\Delta_0^k) = \{1\}$。

令 $A_{k,t}$ 和 $\psi_{k,t}$ 如引理 4.3 中所述；注意 $A_{k,0} = A_{k,k}$。于是我们有满同态 $\psi_{k,0} : \Lambda_0^k \to A_{k,0}$ 和 $\psi_{k,k} : \Lambda_k^k \to A_{k,0}$，其核分别为 Δ_0^k 和 Δ_k^k。令$B_{k,0} = A_{k,0}/O_\infty(A_{k,0})$，并令 α 为从 $A_{k,0}$ 到 $B_{k,0}$ 的商映射；则 $B_{k,0}$ 是一个底为 $\mathrm{PSL}_2(q_0)$ 的几乎单群。由于 $B_{k,0}$ 是 Λ_k^k 的一个商群，因此 Λ_k^k 不可解，进而 $F_k(\omega)$ 不可解；故对某个 $q_k > 3$，有 $\mathrm{PSL}_3(q_k) \trianglelefteq F_k \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_3(q_k)$。于是我们可以仿照 π_0 定义 $\pi_k : \Lambda_k^k \to \mathrm{P\Gamma L}_2(q_k)$。

为完成证明，我们必须证明属于情形 (d)，其中 $F_0 \ncong F_k$；为此，我们将逐一给出若干断言。

断言 1：参数 k 是奇数。若 $\Lambda_k^k \geqslant O_k$，则 $\{q_0、q_1\} = \{4、5\}$ 且 射影特殊线性群$_2(q_0) \cong$ 射影特殊线性群$_2(q_1) \cong$ 交错群(5)。

注意，如果 k 是偶数，那么 $\Lambda_0^k = \Lambda_k^k$ 和 $F_0 = F_k$；因此在这种情况下，$\Lambda_k^k \geqslant O_k$ 和 $q_0 = q_k$。

假设 $\Lambda_k^k \geqslant O_k$ 和 $q_0 = q_k$，以导出矛盾。我们看到，$\alpha\psi_{k,\,0}$ 和 $\alpha\psi_{k,\,k}$ 的核分别为 R_0^k 和 R_k^k；因此存在单射同态$\beta_0, \beta_k : B_{k,\,0} \to \mathrm{P\Gamma L}_2(q_0)$，使得

$$\beta_0\alpha\psi_{k,0} = \pi_0 \text{ and } \beta_k\alpha\psi_{k,k} = \pi_k.$$

映射 β_0 和 β_k 仅相差一个 $\mathrm{P\Gamma L}_2(q_0)$的自同构；事实上，由于 $\mathrm{P\Gamma L}_2(q_0)$ 的外自同构群是平凡的（例如参见 [31, 定理 3.2]），存在 $\lambda \in \mathrm{P\Gamma L}_2(q_0)$，使得对所有 $b \in B_{k,\,0}$，$\beta_k(b) = \lambda\beta_0(b)\lambda^{-1}$。考虑 $G(x,y)$ 在 $S_y(x,1) \times S_x(y,1)$上的作用。通过注 3.6 中描述的映射，我们得到 $P_1(q_0) \times P_1(q_k)$ 的一个因子 $G(x,y)$-空间，其中 $P_1(q_0) \times P_1(q_k)$ 取自$S_y(x,1) \times S_x(y,1)$。由 $G(x,y)$ 诱导的 $P_1(q_0) \times P_1(q_k)$ 的置换群于是为 $\mathrm{P\Gamma L}_2(q_0)^2 = \mathrm{P\Gamma L}_2(q_0) \times \mathrm{P\Gamma L}_2(q_k)$的如下子群：

$$M = \{(h, \lambda h\lambda^{-1}) \mid h \in H\}, \text{ where } H = \pi_0(\Lambda_0^k).$$

特别地，M 包含在 $D = \{(h,h) \mid h \in \mathrm{P\Gamma L}_2(q_0)\}$的某个 $\mathrm{P\Gamma L}_2(q_0)^2$ 共轭群中。然而，我们看到，D 的任意共轭群的作用都使得一个因子中的点稳定子固定另一因子中的一个点，因此 D 在 $P_1(q_0) \times P_1(q_k)$上非传递地作用，从而 $G(x,y)$ 在 $S_y(x,1) \times S_x(y,1)$上非传递，这意味着 G 不是类型距离传递的。这与推论 2.10 矛盾。

由此矛盾可推得 k 为奇数；假设 $\Lambda_k^k \geqslant O_k$。那么 $q_0 \neq q_k$ 和$\kappa(\Lambda_0^k) = \kappa(\Lambda_k^k) = 1$；此外，对于 $t \in \{0,k\}$，Λ_t^k 的唯一非阿贝尔合成因子是 $\mathrm{PSL}_2(q_k)$。根据满射$\psi_{k,\,0}$ 和 $\psi_{k,\,k}$，我们得到 $\mathrm{PSL}_2(q_0) \cong \mathrm{PSL}_2(q_k)$作为抽象群；因此 $\{q_0, q_k\} = \{4,5\}$ 以及 $\mathrm{PSL}_2(q_0) \cong \mathrm{PSL}_2(q_1) \cong \mathrm{Alt}(5)$, 参见 [2]。断言 1 的证明至此完成。

我们现在知道，对所有 $t \in \{0、1\}$，$\mathrm{PSL}_3(q_t) \trianglelefteq F_t \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_3(q_t)$ 和 $q_t > 3$，并且可以写作 $q_1 = q_k$。

断言 2：给定 $k' \geqslant 1$ 和 $t \in \{0,$ 使得 $1\}$，且满足 $\Delta_t^{k'} \geqslant O_t$，则 $\delta_t^{k'} = 1$。

如前所述，我们已将 $\Delta_t^{k'} \geqslant O_t$ 的情形归约为三个情形 (a)、(b)、(c) 中所描述的情形。另一方面，由于对所有 $t \in \{0,$ $\mathrm{PSL}_3(q_t) \trianglelefteq F_t \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_3(q_t)$和 $q_t > 3$，我们看到两个局部作用都不可解，也都不是仿射型。因此，若 $\Delta_t^{k'} \geqslant O_t$，则我们处于情形 (b)，这意味着 $\delta_t^{k'} = 1$, 如所声称的那样。

断言 3：假设 k 是满足以下条件的极小者：存在 $t \in \{0,1\}$ 使得 Δ_t^k不包含O_t。那么情形 (d) 成立。

由断言 2 和引理 4.9 可知

$$\forall t \in \{0,1\} : \; F_t(\omega) = \Lambda_t^1 = \Lambda_t^2 = \cdots = \Lambda_t^k.$$

特别地，$\Lambda_k^k \geqslant O_k$。由断言 1 得到 $\{q_0, q_1\} = \{4,5\}$；不失一般性，$q_0 = 5$和 $q_1 = 4$。于是我们有 $F_0 =$ 射影特殊线性群$_3(5) = \mathrm{P\Gamma L}_3(5)$，从而 $B_{k,\,0} \cong$ 对称群(5)，其在 $P_1(q_t)$ 上以 $\mathrm{P\Gamma L}_2(q_t)$ 的方式作用。由此可知，$F_1(\omega)/R_k^k$ 同构于对称群(5)（而非交错群(5)），进而推出 $F_1 \nleqslant$射影一般线性群$_3(4)$。

我们看到，$\Lambda_t^k = F_t(\omega)$ 有唯一的极小正规子群 W_t，它是阶为 q_t^2 的初等阿贝尔群。考察 Λ_t^k 的结构可知，$B_{k,\,0}$是 Λ_0^k 和 Λ_1^k 的公共商群中最大的一个，因此为了满足引理 4.3，必须有 $\Delta_t^k = R_t^k$。接着可见，Δ_t^k的轨道与 $P_1(q_t)$ 中的点相对应，因此 $\delta_t^k = q_t + 1$。然后由引理 4.9 得到$|\Lambda_t^k :\ \Lambda_t^{k+1}| = q_{1-t} + 1$；更准确地说，$\Lambda_t^{k+1}$是$B_{k,\,0}$ 在 $P_1(q_{1-t})$上的作用的一个点稳定子的原像。

根据推论 2.14，F_t 在 Λ_t^{k+1}的陪集上的作用是 2-块传递的，块大小为 $q_{1-t}+1$。可能情形由表 2 控制；特别是，鉴于 $F_1 \nleqslant \mathrm{PGL}_3(4)$,

我们必须有 $F_1 =$PΓL$_3(4)$。按照上一段的方法得到 Λ_t^{k+1} 后，可见 Λ_0^{k+1}具有 $W_0 \rtimes$ (SL $_2(3) \rtimes C_4$) 的形式，而 Λ_1^{k+1}具有 $W_1 \rtimes \Gamma\mathrm{L}_1(16)$ 的形式。此外，如表 2 所示，这些子群确实是 2-块传递作用的点稳定子。特别要注意，对于所有 $k' > k$，包括 $k' = \infty$，群 $\Lambda_0^{k'}$ 和 $\Lambda_1^{k'}$ 都是可解的。由命题 4.7 可知，G 是局部前可解的，因此我们推断 G 属于例外局部前可解型。断言 3 的证明至此完成。

断言4：参数 k 是最小的，使得存在 $t \in \{0,1\}$，令 Δ_t^k 不包含 O_t。

为证明这一断言，我们考察所有可能的 k' 和 t 取值下 $\Lambda_t^{k'}$ 的结构。与断言 3 的证明一样，我们有

$$\forall t \in \{0,1\}: \ F_t(\omega) = \Lambda_t^1 = \Lambda_t^2 = \cdots = \Lambda_t^{k_0},$$

其中 k_0 是最小的，使得存在 $t \in \{0,1\}$，令 Δ_t^k 不包含 O_t。于是由断言 3 可知，对于所有 $k' > k_0$ 和 $t \in \{0,1\}$，$\Lambda_t^{k'}$ 都是可解的，而 O_0 和 O_1 不可解。由于引理的假设中我们假定了 $\Lambda_\tau^k \geqslant O_\tau$，因此可得 $k = k_0$，如所断言。

结合断言 3 和断言4，即完成引理的证明。 □

就定理 1.2 而言，引理 4.10 的关键情形最终会导向定理 1.2 的情形(ii)，即情形 (d)：这是唯一一种可能出现 $\Lambda_t^k \geqslant O_t$ 但对某些 $t \in \{0,1\}$ 有 $\Lambda_t^{k+1} \ngeqslant O_t$ 的情形。证明这种情形确实可能发生，将在文章末尾的例 5.8 中给出。

注意以下推论，它完成了定理 1.2 证明的大部分工作，并处理了定理 1.6 的一个特殊情形。

推论 4.11. 令 $G \in \mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$ 并记作 $O_t = O^\infty(F_t(\omega))$。假设对任意 k，引理 4.10(d) 都不成立。那么，对所有 $k \geqslant 0$，以及 $t \in \{0、1\}$ 两者，均有 $\Delta_t^k \geqslant O_t$；因此，$\Lambda_t \geqslant O_t$。此外，若我们有 $O_0 \neq \{1\}$ 和 $O_1 \neq \{1\}$，且 F_0 与 F_1 均非例外特殊线性群$_2(5)$仿射型，则对 $t \in \{0、1\}$ 两者，均有 $\Lambda_t = F_t(\omega)$。

证明. 给定 $t \in \{0、1\}$，我们可以反复应用引理 4.10，根据 Λ_t^k 限制 Δ_t^k 和 Λ_t^{k+1}，从 $k = 1$ 开始，此时有 $\Lambda_t^1 = F_t(\omega) \geqslant O_t$。由于引理 4.10 的情形 (d) 从未出现，通过对 k 使用归纳法可知 $\Delta_t^k \geqslant O_t$，因此对所有 $k \geqslant 1$ 以及 $t \in \{0、1\}$ 两者，也有 $\Lambda_t^{k+1} \geqslant O_t$。特别地，对 $t \in \{0、1\}$ 两者，均有 $\Lambda_t \geqslant O_t$。

现在假设 $O_0 \neq \{1\}$ 和 $O_1 \neq \{1\}$，且 F_0 和 F_1 都不是例外的特殊线性群$_2(5)$仿射型。那么只能出现引理 4.10 的情形 (b)，因此由引理 4.9 和归纳法可知，对于所有 $k \geqslant 0$ 和 $t \in \{0,$ $\Lambda_t^k = F_t(\omega)$ 和 $\delta_t^k = 1$， $1\}$。因此，对于 $t \in \{0$和 $1\}$， $\Lambda_t = F_t(\omega)$。 □

当引理 4.10(d) 确实出现时，我们也可以给出可能的群 Λ_t。

引理 4.12. 设 $F_t = \mathrm{P\Gamma L}_3(q_t)$ 对于 $q_0 = 5$ 和 $q_1 = 4$ 成立，设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,F_1}$ 满足：对于某个 $t \in \{0,$ Λ_t 真包含于 F_t 的一个点稳定子中；并设 W_t 是 $F_t(\omega)$ 的底。那么 $\Lambda_t = W_t \rtimes A_t$，其中

$$A_0 \in \{\mathrm{SL}_2(3) \rtimes C_4, \mathrm{SL}_2(3) \rtimes C_2, \mathrm{SL}_2(3), C_3 \rtimes C_8\} \ \textit{and} \ A_1 = \Gamma\mathrm{L}_1(16).$$

证明。由于 $O_0 \neq \{1\}$ 和 $O_1 \neq \{1\}$，但我们有 $\Lambda_t \lneq F_t(\omega)$，其中某些 $t \in \{0、1\}$ 满足条件，因此由推论 4.11 可知，对于某个 k，必然成立引理 4.10(d)，从而

$$\Lambda_0 \leqslant W_0 \rtimes (\mathrm{SL}_2(3) \rtimes C_4) \ \text{ and } \ \Lambda_1 \leqslant W_1 \rtimes \Gamma\mathrm{L}_1(16).$$

由于 F_t 在 Λ_t的陪集上有 2-区块传递作用，因此可以从表 2 推导出 Λ_0 和 Λ_1可能的群。特别地，我们立即看到 $\Lambda_1 = W_1 \rtimes \Gamma\mathrm{L}_1(16)$。可以验证，在表 2 中作为 $F_0 =$ PΓL$_3(5)$的 2-区块传递作用的点稳定子出现的群里，属于 $W_0 \rtimes (\mathrm{SL}_2(3) \rtimes C_4)$ 的群正如陈述中所列。

□

在证明主要定理之前，我们还需要处理几个其他特殊情形。首先请注意一些计算，利用表 2 中可能的作用列表即可轻易验证这些计算。

引理 4.13. 设 $G = \mathrm{P\Gamma L}_3(p)$ 对于 $p \in \{2,3\}$，在集合 Ω 上 2-块传递地作用，点稳定子为 $G(\omega)$，且块的集合 $\Omega/\sim$ 对应于射影平面 $P_2(q)$，并赋予其通常的 G-作用。设 $N \trianglelefteq G(\omega)$，并设 δ 为 N 在除 $[\omega]$ 外的块集合上的轨道数。若 $p = 2$，则 $\delta \in \{1, 3, 6\}$。若 $p = 3$，则 $\delta \in \{1, 2, 4, 12\}$；此外，当块为单点时，情形 $\delta = 2$ 不会出现。

现在，我们对 $\Lambda_t^k(G)$ 得到一些限制：当两个局部作用的底均为 $\mathrm{PSL}_3(q)$ 时，或者一个局部作用的底为此类群而另一个局部作用具有可解点稳定子时。

引理 4.14. 设 $G \in \mathcal{H}_{F_0,F_1}$。假设 $\mathrm{PSL}_3(q_0) \leqslant F_0 \leqslant \mathrm{P\Gamma L}_3(q_0)$，其中 F_0 作用于$P_2(q_0)$，且 $q_0 \geqslant 2$为某个素数幂。还假设 F_1 具有相同形式，其中 $q_1 \leqslant q_0$为某个素数幂；或者 F_1 是其他某个二重传递群，且 $F_1(\omega)$ 可解；在后一种情况下，记作 $q_1 = 1$。还假设 G 不满足引理 4.12 的假设。若 $q_t \leqslant 3$，则记 $m_t = q_t$；若 $q_t > 3$ 且 $F_t \not\geqslant \mathrm{PGL}_3(q_t)$，则记 $m_t = 1/3$；否则记 $m_t = 1$。那么对于所有 $k \geqslant 1$ 和 $t \in \{0, 1\}$，都有 $\Lambda_t^k \geqslant O^\infty(F_t(\omega))$。此外，以下情形之一成立。

(i) 对所有 $k \geqslant 1$，我们有 $q_1 = 1$ 和 $|F_0(\omega) : \Lambda_0^k|$ 整除 $m_0(q_0 - 1)$。

(ii) 对所有 $k \geqslant 1$，我们有 $(q_0, q_1) = (3, 2)$、$|F_0(\omega) : \Lambda_0^k| \in \{1, 3, 6\}$ 和 $|F_1(\omega) : \Lambda_1^k| \leqslant 2$。

(iii) 我们有 $q_0 \equiv 1$ 模 9、$q_1 = 2$ 和 $F_0 \not\geqslant$ 射影一般线性群 $_3(q_0)$。在这种情况下，对所有 $k \geqslant 1$，我们有 $\Lambda_1^k = F_1(\omega)$ 和 $|\Lambda_0^k : \Lambda_0^{k+1}| \in \{1, 3\}$。

(iv) 对所有 $k \geqslant 1$，我们有 $\Lambda_t^k = F_t(\omega)$ 和 $t \in \{0, 1\}$。

证明。记作 $O_t = O^\infty(F_t(\omega))$。注意，$m_t(q_t - 1)$ 始终是一个整数；更具体地说，如果$q_t > 3$，那么 $m_t(q_t - 1)$ 就是指数

$$|F_0(\omega) \cap \mathrm{PGL}_3(q_0) : O^\infty(\mathrm{PGL}_3(q_0)(\omega))|.$$

由推论 4.11，我们对 $t \in \{0, 1\}$ 都有 $\Lambda_t \geqslant O_t$；此外，如果 $q_1 > 3$，那么对 $t \in \{0, 1\}$ 都有 $\Lambda_t = F_t(\omega)$。因此，我们可以假设 $q_1 \leqslant 3$，也就是说，$F_1(\omega)$ 是可解的。

令 Y_t 为 $\mathbb{N}$ 中 $m_t(q_t - 1)$ 的因子集合。接下来我们断言 $|F_t(\omega) :$ 对所有$k \geqslant 1$ 以及 $t \in \{0, 1\}$，都有 $\Lambda_t^k| \in Y_t$。如果 $q_t \leqslant 3$，则由表 2 可得此结论。如果 $q_t \geqslant 4$，那么 $t = 0$；又因为 $\Lambda_0^k \geqslant O_0$，所以要么 $\Lambda_0^k = F_0(\omega)$，要么我们属于定理 3.10 的情形 (a)。特别地，我们有以下限制：

(a) 我们有

$$|F_0(\omega) : \Lambda_0^k| = |F_0(\omega) \cap \mathrm{PGL}_3(q_0) : \Lambda_0^k \cap \mathrm{PGL}_3(q_0)|;$$

由于 $\Lambda_0^k \geqslant O_0$，这保证了 $|F_0(\omega) : \Lambda_0^k| \in Y_0$。

(b) 如果 $q_0 \neq 3$ 且 F_0 包含 $\mathrm{PGL}_3(q_0)$，那么 $|F_0(\omega) : \Lambda_0^k|$ 与 3 互素。

注意，除非 $q_0 = 3$ 或 $q_0 \equiv 1$ 模 9，否则 $|F_0(\omega) : \Lambda_0^k|$ 与 3 互素。若 $q_1 = 1$，则无需再证明其他内容，因此从现在起我们假设 $q_1 \in \{2, 3\}$。

接下来考虑 $(q_0, q_1) = (3, 2)$的情形。在这种情况下，剩下要证明的只有$|F_0(\omega) : \Lambda_0^k| \neq 2$。我们注意到，若 k 是满足 $|F_0(\omega) : \Lambda_0^k| = 2$的最小值，则 $\Lambda_0^{k-1} = F_0(\omega)$ 且 $|\Lambda_0^{k-1} : \Lambda_0^k| = 2$，因此根据引理 4.9，$\delta_{k-1}^{k-1} = 2$。然而，根据引理 4.13，这不是 δ_0^{k-1}（因为 $\Lambda_0^{k-1} = F_0(\omega)$）或 δ_1^{k-1}的有效取值。

从现在起，我们假设 $q_1 \in \{2, 3\}$ 和 $(q_0, q_1) \neq (3, 2)$。我们对 k使用归纳法证明其余情形。对于 $k = 1$，无需证明，因此假设 $k \geqslant 2$，并且我们已经对所有 $1 \leqslant k' < k$ 和 $t \in \{0, 1\}$证明了该引理。注意，根据引理 4.13 和 4.10以及归纳假设，对于每个 $t \in \{0, 1\}$，我们都有 $\delta_t^{k-1} \in X_{q_t}$，其中

$X_2 = \{1,3,6\}$, $X_3 = \{1,4,12\}$ 以及 $X_q = \{1\}$ 对于 $q \geqslant 4$。（对于 $q_t = 3$，我们利用了归纳假设保证 $\Lambda_t^{k-1} = F_t(\omega)$这一事实。）给定 $t \in \{0,1\}$，我们断言 Λ_t^k也符合该引理的陈述。

假设 $q_t = q_{t+k-1}$（换言之，k 为奇数或 $q_0 = q_1$）。那么由引理 4.9 和前面的论证可得

$$\delta_{t+k-1}^{k-1} = |\Lambda_t^{k-1} : \Lambda_t^k| \in X_{q_{t+k-1}} \cap Y_t = \{1\},$$

因此 $\Lambda_t^k = \Lambda_t^{k-1}$。类似地，若 $t = 1$、$q_0 > 3$ 且 k 为偶数，则 $\delta_0^{k-1} = 1$，因此 $\Lambda_t^k = \Lambda^{k-}{}_t \quad {}^1$.

从现在起，我们可以假设 $t = 0$、$q_0 > 3$ 和 k 为偶数；于是 $|\Lambda_0^{k-1}: \Lambda_0^k| = \delta_1^{k-1} \in X_{q_1}$，并且根据归纳假设，$\Lambda_1^{k-1} = F_1(\omega)$。

由引理 4.3，我们有一个同构

$$\theta : \frac{\Lambda_0^{k-1}}{\Delta_0^{k-1}} \to \frac{F_1(\omega)}{\Delta_1^{k-1}},$$

因此 $F_1(\omega)/\Delta_1^{k-1}$ 同构于 Λ_0^{k-1} 的一个可解商群。Λ_0^{k-1} 的最大可解商群的导出长度至多为 2，因此 Δ_1^{k-1} 包含 $F_1(\omega)$ 的第二导群。若 $q_1 = 3$，我们便看到 $F_1(\omega)$ 的第二导群（其形式为 $C_3^2 \rtimes Q_8$）在 $\Omega_1\backslash\{\omega\}$ 上传递。由此可推出 $\delta_1^{k-1} = 1$，进而得到 $\Lambda_0^k = \Lambda_0^{k-1}$。这就完成了在 $q_1 = 3$ 情形下该引理的证明。

从现在起，我们可以假设 $q_1 = 2$。于是，$F_1(\omega)$ 的第二导群 N 非平凡，这排除了 $\delta_1^{k-1} = 6$的情形；因此 $\delta_1^{k-1} \in \{1,3\}$。此外，我们知道$|\Lambda_0^{k-1}$：除非 $q_0 \equiv 1$ 模 9 且 $F_0 \not\geqslant \mathrm{PGL}_3(q_0)$，否则 $\Lambda_0^k|$ 与 3 互素。这就完成了所有情形下的归纳步骤，从而证明了该引理。 □

4.3 主要定理

利用前两个小节的结果，我们可以立即证明定理 1.2 及其推论。

定理 1.2 的证明。注意，这两种情形互斥：若 (ii) 成立，则 Θ_0 可解，但 $O^\infty(F_0(\omega))$ 非平凡且完美，因此 $O^\infty(F_0(\omega))$ 不可能包含于 Θ_0中。

若推论 4.8(i)适用，则本定理的情形(i)成立，因此我们可以假设推论 4.8(ii)适用。特别地，由推论 4.11可推得，对于某个 k，引理 4.10(d)必然成立。于是，对于 $\{q_0、q_1\} = \{4、5\}$，$F_t = \mathrm{P\Gamma L}_3(q_t)$，而 Λ_t的可能情形由引理 4.12给出；因此(ii)成立。 □

推论 1.3的证明。设 G 有一个剩余可解紧开子群 U；为证明(ii)，我们可以假设 F_0 和 F_1 之一有一个不可解点稳定子。于是 U包含两种类型的半树的刚性稳定子，因此定理 1.2(i)不成立；故(ii)成立。

反过来，假设(ii)成立。在情形(ii)(a)中，显然 G 的每个弧稳定子都是残余可解的。在情形(ii)(b)中，我们属于命题 4.7的情形(ii)，因此 G是局部前可解的。故(ii)蕴含(i)，从而完成了(i)与(ii)等价的证明。 □

推论 1.4 的证明。假设 G 的局部作用为 F_0 和 F_1。由于 G 没有剩余可解的紧开子群，推论 1.3(ii) 的否定成立，因此我们处于定理 1.2 的情形 (i)，其中 $\Theta_t(G) \geqslant O^\infty(F_t(\omega)) \neq \{1\}$，对某些 $t \in \{0、1\}$ 成立，例如对于 $t = 0$。此外，$\Theta_0(G)$ 是传递群 $F_0(\omega)$的非平凡正规子群，因此 $\Theta_0(G)$ 没有不动点。我们看到，G 和 $G(\xi)$ 在树的顶点上都至多有两个轨道，这确保了它们是紧生成的，并且不保持任何真子树。现在考虑一条弧$a = (v, w)$ 从 ξ 向外延伸，并令 $H = \mathrm{rist}_G(T_a)$。如果 w 是类型 0，那么 H 在 $S_v(w$上的作用没有不动点，$1)$；而如果 w 是类型 1，那么每个 $x \in S_v(w、1)$ 都是类型 0，我们看到

此时 H 在 $S_v(w$上的作用没有不动点， $2)$。无论哪种情况，$\mathrm{rist}_G(T_a)$ 都只固定 T_a的有限多条弧。根据 [7, 命题 4.6] ，可知 $\mathrm{rist}_G(T_a)$ 是 G 和 $G(\xi)$的 TMS 子群。特别地，显然 $\mathrm{rist}_G(T_a)$ 非平凡；由 a的选择具有任意性，我们得出 G 和 $G(\xi)$ 在 ∂T上的作用是微支撑的。 □

推论 1.5 的证明。注意，该假设排除了例外局部前可解型。如果 G 在树 T 的顶点上有两个轨道，那么根据 [27, 定理 6(iii)], G 包含于 $\mathrm{U}(F_0$ 的一个 $\mathrm{Aut}(T)$-共轭U 中。如果 G 是顶点传递的，那么根据 [4, 命题 3.2.2], 它包含于 $\mathrm{U}(F_0)$ 的一个 $\mathrm{Aut}(T)$-共轭 U 中。另一方面，给定T的一条弧 a ，则根据定理 1.2，对于所有 $t\in\{0,\ \Theta_t(G)=F_t(\omega)\ 1\}$，由此我们推得 $G(a)=U(a)$；局部作用还保证 G 在每个 U 弧轨道上传递作用，因此我们得出$G=U$。 □

注 4.15。定理 1.2 将引理 3.11 中的情形归约如下（另参见表 2）。如果 G 属于例外局部前可解型，那么 $F_t=\mathrm{P\Gamma L}_3(5)$ 属于情形(ii)或(vi)，而 $F_t=\mathrm{P\Gamma L}_3(4)$ 属于情形(ii)。如果 G 不属于例外局部前可解型，那么情形(v)和(vi)不可能出现，情形(ii)只可能在 $q\in\{2,3\}$ 时出现。例 5.7 将给出一个情形(iv)的例子、一个 $q=2,3$ 时情形(ii)的例子，以及无穷多个 n 和 q 时情形(i)的例子。对于四个秩 1 李型 2-传递群族中的每一个，都可能存在（无穷多个）情形(iii)的例子，但构造这些例子超出了本文的范围。

定理 1.7 可以由下文的定理 4.16 推得，不过现阶段直接证明也足够简单。

定理 1.7 的证明。对于 $t\in\{0,1\}$，记作 $O_t=O^\infty(F_t(\omega))$。我们考察 $t=0$ 所对应的引理 3.11 中的各个情形。注意，由于 $d_0=d_1$，不会出现例外的局部前可解情形。

在情形 (vii) 中无需证明，而情形 (v) 已由定理 1.2 排除。若 $\mathrm{PSL}_3(q_0)\leqslant F_0\leqslant\mathrm{P\Gamma L}_3(q_0)$，且 F_0 作用于 $P_2(q_0)$，则同样的描述也适用于带有 $q_0=q_1$的 F_1；由引理 4.14 可知，对所有 $t\in\{0,1\}$，都有 $\Lambda_t=F_t(\omega)$。因此，我们可以假设 F_0 不具有这种形式；这排除了情形 (ii) 和 (vi)，而在情形 (i) 中，我们有 $n\geqslant 3$。

在引理 3.11 的情形 (i) 和 (iv) 中， $F_0(\omega)\cong F_1(\omega)$ 不可解。结论由推论 4.11 得出。

在情形 (iii) 中， $F_0\cong F_1$ 定义在特征为 p 的域上，并且我们看到 $d_0-1=d_1-1$ 是 p 的幂，因此由引理 4.9 可知， $|F_t(\omega)\colon\ \Lambda_t|$ 是 p 的幂。另一方面，根据定理 3.10，指数 $|F_t(\omega)\colon\ \Lambda_t|$ 与 p 互素。

因此，对所有 $t\in\{0,\ 1\}$，都有 $F_t(\omega)=\Lambda_t$。 □

现在我们给出定理 1.6 的更精确版本。结合引理 4.12，下面的定理加强了引理 3.11，并且也有效地涵盖了定理 1.7。

定理 4.16. 设$G\in\mathcal{H}_{F_0,F_1}$ 并记 $O_t=O^\infty(F_t(\omega))$。记 $\lambda_t=|F_t(\omega)\colon\ \Lambda_t(G)|$ ，并假设对于某个给定的 $t\in\{0,1\}$，有 $\lambda_t>1$ ，但 G 不是例外局部前可解型。那么以下情况之一成立。

(i) 有 $\mathrm{PSL}_{n+1}(q_t)\trianglelefteq F_t\leqslant\mathrm{P\Gamma L}_{n+1}(q_t)$ ，其中 F_t 作用于 $P_n(q_t)$，且 $n\geqslant 2$, $q_t>2$；若$q_t=3$ ，则假设 $n\geqslant 3$。在此情形下， $\Lambda_t(G)$ 是 F_t 的一个二重区块传递作用的点稳定子，如定理 3.10 的情形 (a) 所述，并且 λ_t 整除 q_t-1。

(ii) F_t 的底是秩 1 单李型。在这种情形下， $\Lambda_t(G)$ 是 F_t 的二重区块传递作用的点稳定子，如 *[24, 命题 3.21]* （定理 3.10 的情形 (c)）所述。特别地， λ_t整除 $\gcd(q_t-1,e_{F_t})$，其中 F_t 在 $\mathbb{F}_{q_t}$上具有（射影）矩阵系数。

(iii) 元组 $(F_t, \Lambda_t(G), d_t, \lambda_t)$ 是表 2 的前六行之一；因此， $\lambda_t \in \{2, 3, 6\}$。

我们回顾引理 4.9 的记号与结论，并记

$$\lambda_t = \mu_t \nu_{1-t},\ where\ \mu_i = \prod_{k\geqslant 1} \delta_i^{2k}\ and\ \nu_i = \prod_{k\geqslant 1} \delta_i^{2k-1}.$$

那么，除非出现 $F_t = \mathrm{P\Gamma L}_3(3)$ and$\lambda_t = 6$ 的情形，否则在所有情况下均有 $\mu_t = 1$ （换言之，$\lambda_t = \nu_{1-t}$）；在该情形下， $\mu_t \in \{1,\ 2\}$。此外，以下情况之一成立。

(a) F_{1-t} 是可解的，且对 ν_{1-t} 的所有素因子 p ，均有 $d_{1-t} \equiv 1 \bmod p$ 。

(b) F_{1-t} 属于例外的特殊线性群 $_2(5)$ 仿射型，且 ν_{1-t} 是 $\delta^*(F_{1-t}) \in \{2、3、7、29\}$ 的幂。

(c) F_{1-t} 的底是特征为 p 的域上的秩 1 单李型，且 ν_{1-t} 是 p 的幂。

(d) F_{1-t} =$\mathrm{P\Gamma L}_2(8)$ 作用于 28 个点，且 ν_{1-t} 是 3 的幂。

(e) $F_{1-t} = \mathrm{P\Gamma L}_3(p)$ 对 $p \in \{2, 3\}$, $F_t \ncong F_{1-t}$ 的自然作用，以及对某些$a, b \geqslant 0$的 $\nu_{1-t} = 2^a 3^b$ 。若 $p = 2$ ，则 $a \leqslant b$；而若 $p = 3$ ，则有 $a > b$。若 $F_t = \mathrm{P\Gamma L}_3(3)$ ，则$\lambda_t \in \{1,3, 6\}$。

证明。 不失一般性，假设 $t = 0$。对于 $i \in \{0, 1\}$，记作 $O_i = O^\infty(F_i(\omega))$。

由定理 1.2，我们现在得到，对于 $i = 0$， $\Theta_i \geqslant O_i$ 为 1，因此显然 $\Lambda_i \geqslant O_i$ ，且对所有 $k \geqslant 1$都有 $\Delta_i^k \geqslant O_i$ 。特别地，对于所有 $i \in \{0, 1\}$ 和 $k \geqslant 1$， Δ_i^k的轨道数 δ_i^k必须整除 O_i的轨道数 $\delta^*(F_i)$ 。由引理 3.11， F_0 是几乎单群，因此由引理3.9(iii)，若 $F_0(\omega)$ 不可解，则对所有 k都有 $\delta_0^k = 1$ 。由引理 4.9可得 $\lambda_0 = \mu_0\nu_1$ ；进而， μ_i 和 ν_i是 $\delta^*(F_i)$的因子。

接下来我们证明 $\mu_0 = 1$，特殊情形除外；在该情形下，我们有 $\mu_0 \in \{1, 2\}$；这也将导出本定理的情形 (i)–(iii)。

与定理 1.7 的证明一样，我们考察引理 3.11 中的各个情形；注意，由于 $\lambda_0 > 1$，情形 (vii) 不适用。我们将分别处理 $F_0 \in \{\mathrm{P\Gamma L}_3(2)、\mathrm{P\Gamma L}_3(3)、\mathrm{M}_{11}\}$ 在自然作用下的情形。除这些情形外，根据注 4.15，我们只需考察引理 3.11 的情形 (i) 和 (iii)。

设引理 3.11 的情形 (i) 适用，且 $q_0 \geqslant 4$。在此情形下， $F_0(\omega)$ 不可解，因此 $\delta^*(F_0) = 1$ ，进而 $\mu_0 = 1$。由定理 3.10 可知， λ_0 整除 $q_0 - 1$，故本定理的情形 (i) 成立。

假设引理 3.11 的情形(iii)成立： F_0 的底秩为 1，其（射影）矩阵系数取自阶为 $q_0 = p_0^e$ 的域。根据定理 3.10， λ_0 也整除 $q_0 - 1$ 和 e_{F_0}。在这种情况下， $\delta^*(F_0) = d_0 - 1$ 是 p_0的幂，而它与 λ_0互素，因此 $\mu_0 = 1$ ，进而 λ_0 整除 $\delta^*(F_1)$的某个幂。因此，本定理的情形(ii)成立。

剩下的情形是 $F_0 \in \{\mathrm{P\Gamma L}_3(2)、\mathrm{P\Gamma L}_3(3),\ 且\ \mathrm{M}_{11}\}$ 以自然作用。表 2 的前六行涵盖了 $\Lambda_0(G)$ 的所有可能取值，因而也涵盖了 λ_0的所有可能取值；可以看出，在所有情形下均有 $\lambda_0 \in \{2、3、6\}$。因此，本定理的情形 (iii)适用。我们还注意到，若对 $p_i \in \{2、3\}$有 F_i =$\mathrm{P\Gamma L}_3(p_i)$，则根据引理 4.13，对所有 k，都有 $\delta_i^k \in Z_{p_i}$，其中 $Z_2 = \{1、3、6\}$，且$Z_3 = \{1、2、4、12\}$；另一方面，若 $F_i = \mathrm{M}_{11}$，则 O_i是传递的，因此 $\delta^*(F_i) = 1$。

If $F_0 = \mathrm{P\Gamma L}_3(2)$ 则 $\lambda_0 = 2$，但 2 不是 δ_0^k 的可能取值；由此可得 $\mu_0 = 1$.

若 F_0 =$\mathrm{P\Gamma L}_3(3)$，则 $\lambda_0 \in \{2, 3, 6\}$；而 $\delta_0^k \in \{1, 2, 4, 12\}$ 对所有 k 都成立；因此 $\mu_0 \in \{1, 2\}$。若$\mu_0 = \lambda_0 = 2$，则 $\nu_1 = 1$，并取满足 $|F_0(\omega)$ 的最小 k： $\Lambda_0^k| > 1$，我们需要$|\Lambda_0^{k-1}$: $\Lambda_0^k| = 2$ 和 $\delta_0^{k-1} = 2$；由引理 4.13 可得 $|F_0(\omega) : \Lambda_0^{k-1}| > 1$，这是不可能的。要使 $\mu_0 > 1$ 成立，唯一剩下的可能是 $\mu_0 = 2$ 且 $\lambda_0 = 6$。

现在，我们根据 ν_1 的取值来考察 F_1 的可能性，其中 ν_1 必为 $\delta^*(F_1)$ 的某个幂的因子。

If F_1 是可解的，因此我们看到情形 (a) 必须..... 用。

若 $F_1(\omega)$ 不可解，则必属于引理 3.9 的情形(ii)，由此得到本定理的情形 (b)。

从现在起，我们可以假设 F_1 几乎单且 $F_1(\omega)$ 可解；特别地， $\delta^*(F_1) = d_1 - 1$。

若 F_1 的底是秩 1 李型，则 $\delta^*(F_1)$ 是定义特征 p 的幂，因此 ν_1 也是 p 的幂。于是情形 (c) 成立。

若 F_1 是作用在 28 个点上的 $\mathrm{P\Gamma L}_2(8)$，则 $\delta^*(F_1) = 3^3$，且我们处于定理的情形 (d)。

若 $F_1 = \mathrm{P\Gamma L}_3(p)$ 对于 $p \in \{2,3\}$，则 ν_1 是 Z_p 中元素的乘积；进而， Z_p 中任意元素的乘积都满足关于 ν_1 素因子分解的给定限制。根据引理 4.14，若对于某些 $q \in \{2,3\}$ 有 $F_0 = \mathrm{P\Gamma L}_3(q)$，则 $q_0 = 3$, $q_1 = 2$ 且 $\lambda_0 \in \{3,6\}$。因此情形 (e) 成立。

对于 F_1，除此之外别无其他可能：例如，参见 [13, §7.7]中给出的 2-传递群分类。

□

5 构造一些边界 2-传递群的例子

在最后这一节中，我们给出一种构造，以说明定理 1.2 的例外情形确实会出现，并给出一些 $G \in \mathcal{H}_{F_0,\ F_1}$ 的例子（对应若干不同的配对 (F_0, F_1)），这些例子并不属于例外情形，但仍具有 $\Lambda_0(G) \neq F_0(\omega)$。这些例子用到了表 2 中列出的若干 2-块传递作用；此外，它们也受到 Florian Lehner、R¨ognvaldur M¨oller 和 Wolfgang Woess 一种（更一般的）未发表构造的启发。

在讨论具体例子之前，我们先概述这一构造。

给定一个图 Γ，令 $A\Gamma$ 为 Γ的弧集合；给定一个顶点 $v \in V\Gamma$，记 $A_\Gamma(v)$ 为以 v为起点的弧集合。固定一个作用于 $t = 0$ 的有限 2-传递置换群 $F_t \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega_t)$，其中 $t = 0$ 为 1 且$|\Omega_t| = d_t \geqslant 3$；为简化记号，本节中始终假设 Ω_0 与 Ω_1 不相交。于是，我们可以构造作用在 (d_0, d_1)-半正则树 T 上的群 $\mathrm{U}(F_0, F_1)$。构造 $\mathrm{U}(F_0, F_1)$（更多细节见 [27]）需要对 T的弧进行着色 $\mathcal{L}$：$AT \to \Omega_0 \cup \Omega_1$，并满足以下性质：所有终止于同一顶点的弧颜色相同；对于每个类型为 t 的顶点 v， $\mathcal{L}$ 限制为从 $A_T(v)$ 到 Ω_t 的双射。记 $\mathrm{Aut}^+(T)$ 为 T 上在顶点处保型的自同构群。自同构 $g \in \mathrm{Aut}^+(T)$ 在类型为 t 的顶点 v 处的（$\mathcal{L}$-）局部作用如下：

$$\sigma_{\mathcal{L},v}(g) : \Omega_t \to \Omega_t;\ c \mapsto \mathcal{L}g(\mathcal{L}|_{A_T(v)})^{-1}c.$$

群 $\mathrm{U}_\mathcal{L}(F_0, F_1)$ 定义为所有满足 $\sigma_{\mathcal{L},v}(g) \in F_t$（对所有 $v \in V_tT$ 和 $t \in \{0,1\}$）的 $g \in \mathrm{Aut}(T)$ 的集合。根据 [27, 命题 11],，在 $\mathrm{Aut}(T)$-共轭意义下，$\mathrm{U}_\mathcal{L}(F_0, F_1)$ 不依赖于 $\mathcal{L}$ 的选择，因此我们可以直接写作 $\mathrm{U}(F_0, F_1) = \mathrm{U}_\mathcal{L}(F_0, F_1)$。显然可验证， $U := \mathrm{U}(F_0, F_1)$ 是 $\mathrm{Aut}(T)$ 的一个闭子群，且属于$\mathcal{H}_{F_0,F_1}$。更一般地，给定 $G \leqslant \mathrm{Aut}(T)$， G 在 v 处的局部作用，是由 $G(v)$ 中的元素实现的所有局部作用的集合；根据 [27, 引理 13]，群 U 本身在类型为 t 的顶点处具有局部作用 F_t。

以下基本观察是局部作用方法的关键。

引理 5.1. 设 $g, h \in$自同构群$^+(T)$。若 $gv = hv$对某个 $v \in VT$成立，且对所有 $w \in VT$都有$\sigma_{\mathcal{L},\ w}(g) = \sigma_{\mathcal{L},\ w}(h)$，则 $g = h$。

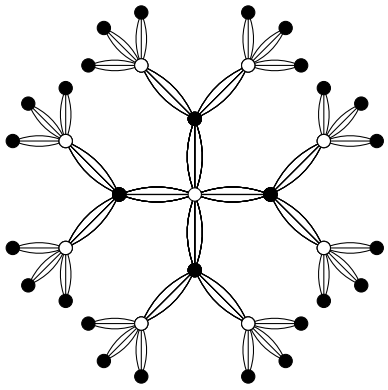
更准确地说，若 $gv = hv$ 对某个 $v \in VT$ 成立，且 $\sigma_{\mathcal{L},\ v}(g) = \sigma_{\mathcal{L},\ v}(h)$，则对所有$a \in A_T(v)$也有 $ga = ha$，因此对所有 $w \in S(v, 1)$，都有 $gw = hw$。

证明。第二个陈述显然成立，因为 $\mathcal{L}$ 将 $A_T(v)$ 双射到 Ω_t （其中 v 的类型为 t）。因此，考虑从 v 到某个可能使 g 和 h 不一致的顶点/弧 a 的距离 d，并对 d 使用归纳法，即可由第二个陈述推出第一个陈述。

□

我们的下一个目标是构造 $U = \mathrm{U}(F_0, F_1)$ 的一个子群，使其仍具有相同的局部作用；但若固定一对相邻顶点 x 和 y，其类型分别为 0 和 1，则 $G(x,y)/G_1(x,y)$ 将严格小于 $U(x,y)/U_1(x,y)$。所有满足 $x' \neq y$ 与 x 相邻且 $y' \neq x$ 与 y 相邻的顶点对 (x', y') 组成 $S_y(x,1) \times S_x(y,1)$。群 $U(x,y)$ 作为完整直积 $F_0(\omega_0) \times F_1(\omega_1)$ 作用，其中 ω_0 和 ω_1 分别是从 x 到 y 以及从 y 到 x 的弧的颜色。由于 G 的局部作用为 F_t，群 $G(x,y)$ 将投影到 $F_0(\omega_0)$ 和 $F_1(\omega_1)$，但它未必是完整直积；事实上，我们将使其成为一个给定的次直积。根据 Goursat 引理（另请回顾引理 4.3），这意味着 $G(x,y)/G_1(x,y)$ 将作为一对满同态的拉回出现：$\psi_0 \colon F_0(\omega_0) \to B$ 和 $\psi_1 \colon F_1(\omega_1) \to B$，它们映到某个公共商群 B。

图 12：具有 $|B| = 3$ 的图 T^*



构造 5.2。回顾定义 2.1 和注记 2.2 中设定的更详尽的置换群术语。假设给定一对满同态$\psi_0 \colon F_0(\omega_0) \to B$ 和 $\psi_1 \colon F_1(\omega_1) \to B$，其中 $\omega_t \in \Omega_t$。现在可以按照注记 2.2 的方式构造 $\Omega_t \times B$，即 F_t-集合 Ω_t 的一个标准扩张，具体如下。将 Ω_t 与陪集空间 $F_t/F_t(\omega_t)$ 等同。取 $F_t(\omega_t)$ 的一组左陪集代表元 A_t，其中 a_ω 是陪集 ω 的代表元；然后将 $(\omega、b)$ 映射到 $R_t := \ker \psi_t$ 在F_t中的左陪集 $a_\omega \psi_t^{-1}(b)$，从而得到从 $\Omega_t \times B$ 到 F_t/R_t 的一个双射。于是，F_t 在 $\Omega_t \times B$ 上的诱导作用 α_t 是 Ω_t 的一个标准扩张。对于每个 $\omega \in \Omega_t$，我们有一个函数 $\psi_\omega \colon F_t \to B$，其定义为

$$\forall f \in F_t, b \in B : f(\omega, b) = (f\omega, \psi_\omega(f)b).$$

函数 ψ_ω 是注记 2.2 中块限制映射的一个实例；在当前情形下，相应的块作用就是 B 在其自身上的正则作用。注意，ψ_ω限制为从 $F_t(\omega)$ 到 B的满同态；特别地，若 $\omega = \omega_t$，则 ψ_ω 限制为 ψ_t。给定 $\omega \in \Omega_t$，设 $R_\omega := \{f \in F_t(\omega) \mid \psi_\omega(f) = 1\}$；特别地，$R_{\omega_t} = R_t$。我们还可以将 R_ω 解释为 (ω, b) 的稳定子，其中 F_t 在 $\Omega_t \times B$上的作用中，b 可取为 B中的任意元素。

设 T为 (d_0, d_1)-半正则树，给定 $v \in VT$，记 $t(v)$ 为 v的类型。现在引入辅助图 T^*，它有自己的弧着色

$$\mathcal{L}^* : AT^* \to (\Omega_0 \cup \Omega_1) \times B.$$

图 T^* 与 T具有相同的顶点，但 T中颜色为 ω 的每条弧都替换为一组颜色为 (ω, b)的弧，每个 $b \in B$ 对应一条弧，使得如果弧 a 的颜色为 (ω_a, b)，那么

反向弧 $\overline{a}$ 具有某种颜色 $(\omega_{\overline{a}}, b)$（见图 12）。于是存在从 T^* 到 T 的自然投影：它固定顶点，并将 T^* 中的每条弧映射到 T 中起点和终点相同的弧。

我们如下定义自同构群 $g \in \mathrm{Aut}^+(T^*)$ 在类型为 t 的顶点 v 处的局部作用：

$$\sigma_{\mathcal{L}^*,v}(g) : \Omega_t \times B \to \Omega_t \times B;\ c \mapsto \mathcal{L}^* g (\mathcal{L}^*|_{A_{T^*}(v)})^{-1} c.$$

引理 5.1 在此情形下仍然适用，只需将 T 替换为 T^*，并将 $\mathcal{L}$ 替换为 $\mathcal{L}^*$。我们赋予 $\mathrm{Aut}^+(T^*)$ 弧 T^* 上的置换拓扑。定义 G^* 为满足以下条件的 $g \in \mathrm{Aut}^+(T^*)$ 的集合：$\sigma_{\mathcal{L}^*,v}(g) \in \alpha_t(F_t)$ 对所有 $v \in V_t T$ 均成立；给定 $g \in G^*$，记 $\sigma_v^*(g)$ 为满足 $\alpha_t(\sigma_v^*(g)) = \sigma_{\mathcal{L}^*,v}(g)$ 的 F_t 中的元素。最后，T^* 到 T 的投影诱导出一个同态 $\pi\colon \mathrm{Aut}^+(T^*) \to \mathrm{Aut}(T)$，并定义

$$G := \mathbf{U}(F_0, F_1, \alpha_0, \alpha_1) := \pi(G^*).$$

本节余下部分中，我们假设 G 已按照构造 5.2 构造完成。下一个命题将说明 G 的一些一般性质。

命题 5.3. 设 G 如构造 5.2 中所述。给定 T 的相邻顶点 x 和 y，写作 $\omega_{xy} = \mathcal{L}(a)$，其中 a 是 T 中从 x 到 y 的弧。

(i) G 是 $\mathrm{U}(F_0, F_1)$ 的闭子群。

(ii) π 在 G 上的限制是单射。

(iii) 设 T' 是 T 的一个非空子树。定义 T'-肖像为一个函数 $p\colon VT' \to F_0 \sqcup F_1$，其中若 v 的类型为 t，则 $p(v) \in F_t$；并且对 T' 中任意两个相邻顶点 x 和 y（其类型分别为 0 和 1），有

$$p(x) \in F_0(\omega_{xy}),\ p(y) \in F_1(\omega_{yx}),\ \psi_{\omega_{xy}}(p(x)) = \psi_{\omega_{yx}}(p(y)).$$

那么对每个 T'-肖像 p，存在一个 $g \in G^*$ 逐点固定 T'，使得对所有 $v \in VT'$ 都有 $\sigma_v^*(g) = p(v)$。反之，给定任意一个逐点固定 T' 的 $g \in G^*$，则映射 $v \mapsto \sigma_v^*(g)$ 定义了一个 T'-肖像。

(iv) 设 x 和 y 分别是类型 0 和类型 1 的相邻顶点。则 $G(x, y)$ 在 $S_y(x, 1) \times S_x(y, 1)$ 上的作用是如下次直积：

$$\{(f_0, f_1) \in F_0(\omega_{xy}) \times F_1(\omega_{yx}) \mid \psi_{\omega_{xy}}(f_0) = \psi_{\omega_{yx}}(f_1)\}.$$

(v) 给定 $t \in \{0, 1\}$，则 G 在类型为 t 的顶点处具有局部作用 F_t，且 G 是 2-类型-距离传递的。

(vi) G 具有独立性性质 (P_2)（回顾注 1.9）。

证明。对于所有 g，$h \in \mathrm{Aut}^+(T^*)$ 和 $v \in VT$，下式成立：

$$\sigma_{\mathcal{L}^*,v}(gh^{-1}) = \sigma_{\mathcal{L}^*,h^{-1}v}(g)\sigma_{\mathcal{L}^*,v}(h^{-1}) = \sigma_{\mathcal{L}^*,h^{-1}v}(g)\sigma_{\mathcal{L}^*,h^{-1}v}(h)^{-1}.$$

因此 G^* 是 G 的子群，所以 $\pi(G^*)$ 是 $\mathrm{Aut}(T)$ 的子群。由于 α_t 与 F_t 在 Ω_t 上的作用相容，很容易看出 $G \leqslant \mathrm{U}(F_0, F_1)$。

根据 G^* 的定义，显然 G^* 在置换拓扑中是闭的，因此 G^* 具有紧弧稳定子。由此可知 G 具有紧弧稳定子，因此 G 在 $\mathrm{Aut}(T)$ 中是闭的，从而完成 (i) 的证明。

对于 (ii)，考虑满足 $\pi(g) = 1$ 的 $g \in G^*$。于是 g 固定每个顶点；特别地，给定 $t \in \{0, 1\}$ 和 $v \in V_t T$，则 g 固定 v 及 v 的所有邻点。令 $\sigma_{\mathcal{L}^*,\ v}(g) = \alpha_t(f)$，则

$\alpha_t(f)$ 保持投影映射 ϕ 从 $\Omega_t \times B$ 到 Ω_t 的每个纤维不变。由于 ϕ 将 α_t 与 F_t 在 Ω_t 上的作用交织起来，可知 f 在 Ω_t 上平凡地作用；又由于 $F_t \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega_t)$，因此有 $f = 1$，所以 $\alpha_t(f) = 1$。于是 g 在每个顶点处都具有平凡局部作用，由此我们得出 g 是 T^* 的平凡自同构，证毕。

对于 (iii)，给定逐点固定 $g \in G^*$ 的 T'，以及陈述中所述的相邻顶点 x 和 y，显然我们需要满足

$$\sigma_x^*(g) \in F_0(\omega_{xy}),\ \sigma_y^*(g) \in F_1(\omega_{yx}),\ \psi_{\omega_{xy}}(\sigma_x^*(g)) = \psi_{\omega_{yx}}(\sigma_y^*(g)).$$

假设 g 将从 x 指向 y、颜色为 $(\omega_{xy}, 1)$ 的弧 a 映到颜色为 (ω', b) 的弧上，那么 $\omega' = \omega_{xy}$，因为 ga 是一条从 x 指向 y 的弧。此外，$\overline{a}$ 的颜色为 $(\omega_{yx}, 1)$，而 $\overline{(ga)}$ 的颜色为 (ω_{yx}, b)，因此我们有

$$\psi_{\omega_{xy}}(\sigma_x^*(g)) = b = \psi_{\omega_{yx}}(\sigma_y^*(g)).$$

因此，映射 $v \mapsto \sigma_v^*(g)$ 定义了一个 T'-肖像。反过来，假设给定一个 T'-肖像 p；我们的目标是构造一个元素 $g \in G^*$，使其产生这个 T'-肖像。我们从子树 T' 开始向外确定 g 对顶点和弧的映射；根据假设，T' 被逐点固定。对于每个顶点 w，我们将选取局部作用 $\sigma_w^*(g) = f_w$，其中若 $w \in VT'$，则 $f_w = p(w)$。假设我们已选定 gw 和局部作用 $\sigma_w^*(g) = f_w$，且恰当当且仅当 $w \in VT''$，其中 T'' 是 T 的一个包含 T' 的子树。若 $T'' = T$，则我们已完成；否则，令 $w \in VT''$，并假设 w' 是 w 的一个不属于 T'' 的邻点。从 w 到 w' 存在一组颜色为 $\{\omega\} \times B$ 的T^*-弧，其中某个 $\omega \in$ 属于 $\Omega^{t(w)}$；于是局部作用 f_w 规定，若 a 是一条从 w 出发、颜色为 (ω, b) 的弧，则 ga 必须是从 gw 出发、颜色为 $f_w(\omega, b)$ 的弧。所有这类弧 ga 都终止于同一个顶点 w''，我们将其设为 gw'。从 w' 到 w 的 T^*-弧颜色为 $\{\omega_1\} \times B$，而从 gw 到 gw' 的弧颜色为$\{\omega_2\} \times B$，其中某个 ω_1，$\omega_2 \in$ 属于 $\Omega^{t(w')}$。令 $h \in F_{t(w')}$ 满足：对所有 $b \in B$，都有 $h(\omega_1, b) = (\omega_2, b)$（这里用到了 $\Omega_{t(w')} \times B$ 上的作用是标准扩张这一事实）；再令 $h' \in F_{t(w')}(\omega_2)$ 满足 $\psi_{\omega_2}(h') = \psi_\omega(f_w)$（这是可行的，因为 $\psi_{\omega_2}(F_{t(w')}(\omega_2)) = B$）。现在令 $f_{w'} = h'h$；于是，若 a 是一条从 w' 出发、颜色为 (ω_1, b) 的弧，则我们令 ga 为一条从 gw' 出发、颜色为

$$f_{w'}(\omega_1, b) = (\omega_2, \psi_\omega(f_w)b).$$

以 f_w 的形式选择 $f_{w'}$，确保我们尊重边反转；换言之，给定一条从 w 到 w' 的弧 a 及其反向弧 $\overline{a}$（从 w' 到 w），我们就设定 $g(\overline{a}) = \overline{(ga)}$。现在，我们为 $z \in VT'' \cup \{w'\}$ 选取的局部作用 f_z 是相容的。

重复这一过程，我们可以为所有 $w \in VT''$ 选取合适的 gw 和 $\sigma_w^*(g)$，其中 T'' 是任意一棵包含 T' 的树，并且 $VT''\backslash VT'$ 是有限的。由于 G^* 是 $\mathrm{Aut}(T^*)$ 中的闭子群，且具有紧的顶点稳定子，因此利用紧致性论证，我们可以在整棵树 T 上一致地选取顶点的像和局部作用。

第 (iv) 部分是 (iii) 的特例。

对于 (v)，由 (i) 和 (iii) 显然可知，G 在类型为 t 的顶点处具有局部作用 F_t。由于 F_t 在 Ω_t 上传递，根据引理 2.7，G 是 1-型距离传递的。此外，给定第 (iv) 部分中的一对相邻顶点 x 和 y，我们看到 $G(x, y)$ 在 $S_y(x, 1)$ 和 $S_x(y, 1)$ 上均传递；因此，事实上 G 是 2-类型距离传递的（证明方法类似于命题 2.9(iii) 的证明）。

对于第 (vi) 部分，我们必须证明 $G = G^{(\mathrm{P}_2)}$，也就是说，如果 $g \in \mathrm{Aut}(T)$ 在每个半径 2 的球上都表现为 G 中的某个元素，那么 $g \in G$。显然，$G^{(\mathrm{P}_2)} \leqslant \mathrm{U}(F_0, F_1)$。由于 G 在给定类型的顶点上传递，只需取一个顶点 $v_0 \in VT$ 并证明 $G^{(\mathrm{P}_2)}(v_0) \leqslant G$。设 $g \in G^{(\mathrm{P}_2)}(v_0)$，并设 $p\colon VT \to F_0 \sqcup F_1$ 由如下方式给出：对于类型为 t的 $v \in VT$，令 $p(v) = \sigma_{\mathcal{L},v}(g) \in F_t$。现在我们构造 $h \in \mathrm{Aut}^+(T^*)$，使得 $\pi(h) = g$。显然，若对每个 $v \in VT^*$都令 $hv = gv$，则 h会保持 T^*中顶点的邻接关系。令 x为类型 t的一个顶点，y 为 x的一个邻点，并设从 x 到 y 以及从 y 到 x 的 T-弧的颜色分别为 ω_{xy}和 ω_{yx}。那么在 T^*中，我们将从 x到 y、颜色为 $(\omega_{xy}$的弧在 h下的像设为 $b)$

为从 hx 到 hy、颜色为 $p(x)(\omega_{xy}$的弧，$b)$（此时 $p(x) \in F_t$ 作用于 $\Omega_t \times B$）；我们对 T^*中所有相邻顶点对 x 和 y 都这样处理。唯一可能导致无法定义出 T^* 的自同构的情况，是未能保持边反向：换言之，存在一对相邻顶点 x 和 y 以及某个 $b \in B$，使得

$$\psi_{\omega_{xy}}(p(x)) \neq \psi_{\omega_{yx}}(p(y)).$$

假设这种情况发生，并考察 g对 $B_T(x,2)$所起的作用；我们将其定义为由距 x不超过 2 的所有顶点所张成的 T子树。由于 $g \in G^{(\mathrm{P}_2)}$，存在 $g' \in G^*$，使得$\pi(g')a = ga$对 $B_T(x$的每条弧 a 都成立2)。通过比较 $B_T(x$的弧的颜色与这些弧的像的颜色，我们可知2)

$$\sigma_{\mathcal{L},x}(g) = \sigma_{\mathcal{L},x}(\pi(g')) \text{ and } \sigma_{\mathcal{L},y}(g) = \sigma_{\mathcal{L},y}(\pi(g')).$$

于是我们 有 $\sigma_{\mathcal{L},\ x}(\pi(g')) = \sigma_x^*(g')$ 作为 F_t的元素；将 x换成 y 时也同样如此。但 n

$$\psi_{\omega_{xy}}(\sigma_x^*(g')) \neq \psi_{\omega_{yx}}(\sigma_y^*(g')),$$

这与第 (iii) 部分矛盾。由此矛盾可推出，h 确实是 T^*的自同构；显然，根据 h 的构造方式，$h \in G^*$ 和 $\pi(h) = g$。因此 $G^{(\mathrm{P}_2)}(v_0) \leqslant G$，从而完成证明。

□

特别地，对于 D of $F_0(\omega_0)$ and $F_1(\omega_1)$的任意次直积，我们构造了 $\mathrm{U}(F_0, F_1)$ 的一个闭子群 G，使得 $G(x,y)$ 在 $S_y(x,1) \times S_x(y,1)$ 上的作用为 D，且G 仍具有局部作用 F_t。然而，G 是否确实在 ∂T 上双重传递地作用，对次直积的选择更为敏感。根据推论 2.10，当且仅当对于所有 k，G 都是 k-类型距离传递的，才有 $G \in \mathcal{H}_T$；要确定后一性质是否成立，需要根据命题 5.3(iii) 的意义，对肖像进行更细致的考察。

注意，给定 $\omega, \omega' \in \Omega_t$，则对于任意满足 $f\omega = \omega'$的 $f \in F_t$，都有 $fR_\omega f^{-1} = R_{\omega'}$。对于满足 $\omega \neq \omega'$的 $\omega, \omega' \in \Omega_t$，考虑 B 的以下子群也会很有用：

$$K_{t,\omega,\omega'} := \psi_\omega(F_t(\omega, \omega')); \ K'_{t,\omega,\omega'} = \psi_\omega(F_t(\omega) \cap R_{\omega'}).$$

由于 F_t 在 Ω_t 上是二重传递的，可以看出，在 B 中按共轭考虑时，群 $K_{t,\omega,\omega'}$ 和 $K'_{t,\omega,\omega'}$ 不依赖于点对 (ω, ω') 的选择。对于我们的论证，通常只需在共轭意义下了解这些子群，因此记作 $K_t = K_{t,\omega,\omega'}$ 和 $K'_t = K'_{t,\omega,\omega'}$。给定 $\omega'' \in \Omega_{1-t}$（默认取 $\omega'' = \omega_{1-t}$），我们便可定义

$$L_{1-t} = F_{1-t}(\omega'') \cap \psi_{\omega''}^{-1}(K_t) \text{ and } L'_{1-t} = F_{1-t}(\omega'') \cap \psi_{\omega''}^{-1}(K'_t);$$

可以看出，在共轭意义下，L_{1-t} 和 L'_{1-t} 不依赖于 $(\omega, \omega', \omega'')$ 的选择。特别地，我们将 L_{1-t} 和 L'_{1-t} 视为作用在 $\Omega_{1-t}\backslash\{\omega''\}$ 上的置换群；这些作用的置换性质不依赖于 $(\omega, \omega', \omega'')$。同样，$F_t$ 作用在 F_t/L_t 和 F_t/L'_t 上的置换性质不依赖于 $(\omega, \omega', \omega'')$。我们注意到，指数 $|F_{1-t}(\omega'') : L_{1-t}|$ 统计了 R_ω 在 $\Omega_t\backslash\{\omega\}$ 上的轨道数：记 $\sim_{R_\omega}$ 为 $\Omega_t\backslash\{\omega\}$ 上的 R_ω-轨道关系，则

$$|F_{1-t}(\omega'') : L_{1-t}| = |B : K_t| = |F_t(\omega) : F_t(\omega, \omega')R_\omega| = |(\Omega_t\backslash\{\omega\})/\sim_{R_\omega}|.$$

下一个引理给出了满足 $G \in \mathcal{H}_T$ 的必要条件。

引理 5.4. 设 G 如构造 5.2 中所述。对于每个 $t \in \{0、1\}$，都有 $\Lambda_t^2 = L_t$。此外，设 x 和 y 是 T 的相邻顶点，则下列条件等价：

(i) G是 3 型距离传递的；

(ii) L_0 和 L_1 是传递的;

(iii) 给定 $z \in S_x(y,1)$，则 $G(x,y,z)$ 在 $S_y(x,1)$ 上传递；给定 $z' \in S_y(x,1)$，则 $G(z',x,y)$ 在 $S_x(y,1)$ 上传递;

(iv) $G(x,y)$ 在 $S_y(x,1) \times S_x(y,1)$ 上传递地作用。

证明。设 x 和 y 是 T 的相邻顶点；不失一般性，假设 x 的类型为 0，因此 $G(x,y,z)$ 在 $S_y(x,1)$ 上的作用是 Λ_0^2 的一个副本。通过考察 T'-肖像 p，我们可以恢复 $G(x,y,z)$ 在 $S_y(x,1)$ 上的作用，其中 T' 是由 $\{x,y\}$ 张成的树，使得 $p(y)$ 在 F_1 中的像固定 ω_{yx} 和 ω_{yz}。鉴于

$$\psi_{\omega_{xy}}(p(x)) = \psi_{\omega_{yx}}(p(y)),$$

我们看到，$p(x)$ 的可能取值遍历 L_0的一个副本。证明 $\Lambda_1^2 = L_1$的论证类似。

现在我们看到，由推论 2.13，(i) 和 (ii) 等价；进而，根据对 Λ_t^2的描述，我们看到 (ii) 和 (iii) 等价。最后，由于 $G(x,y)$ 分别在$S_y(x,1)$ 上以及在 $S_x(y,1)$ 上分别传递，我们看到 (iii) 和 (iv) 等价。□

推论 5.5. 设 G 如构造 5.2 所述，并假设 $G \in \mathcal{H}_T$。那么，对于 $t \in \{0,1\}$，F_t 在 F_t/L_t 上传递地 2-块传递。

证明. 设 $t \in \{0,1\}$。由引理 5.4 和 Λ_t的定义，我们看到$L_t = \Lambda_t^2 \geqslant \Lambda_t$。由推论 2.14，$F_t$ 在 F_t/Λ_t上传递地 2-块传递；因此 F_t 也在因子空间 F_t/L_t上传递地 2-块传递。（在这两种情况下，块都是 $F_t(\omega_t)$的轨道，其中包含L_t。）□

特别地，假设我们的构造得到 $G \in \mathcal{H}_T$。那么对于每个 $t \in \{0,1\}$，要么 L_t是 F_t 在 Ω_t 上的作用的点稳定子（等价地，$\ker \psi_{1-t}$ 在 $\Omega_{1-t}\backslash\{\omega_{1-t}\}$上传递），要么 F_t/L_t 是具有非平凡块的 2-块传递群；在后一种情况下，F_t 的可能性受到限制，因为我们必须满足定理 3.10 中的某一种情形。

一般而言，要确定对于较大的 k，G 是否是 k-类型距离传递的，会更加复杂。令 $t \in \{0,1\}$，并令 ρ为一条射线，其顶点为 $(v_t, v_{t+1}, \dots)$，其中 v_t的类型为 t；令 ω_i^+为 T 从 v_i 到 v_{i+1} 的弧的颜色，并令 ω_i^-为 T 从 v_{i+1}到 v_i的弧的颜色。令 $P = P_{t,k}$ 为从 v_t 到 v_{t+k}的路径。那么，一个 P-肖像为每个 $i \geqslant t$的 v_i 赋予一个群元素 h_i，使得

(a) 我们有 $h_t \in F_t(\omega_t^+)$ 和 $h_{t+k} \in F_{t+k}(\omega_{t+k}^-)$，并且对于 $t < i < t+k$，有 $h_i \in F_i(\omega_i^+, \omega_i^-)$;

(b) 对于 $t \leqslant i < t+k$，满足以下兼容条件:

$$\psi_{\omega_i^+}(h_i) = \psi_{\omega_{i+1}^-}(h_{i+1}).$$

在此背景下解读推论 2.13，判定 G 是否为 $(k+1)$-类型-距离传递的标准如下：对于两种类型 t，以及所有 $\omega_1^*, \omega_2^* \in \Omega_t\backslash\{\omega_t^+\}$，存在一个 $P_{t,\ k}$-肖像 p，使得 $p(v_t)\omega_1^* = \omega_2^*$。

下面给出一个更简单的充分条件，以得到 $G \in \mathcal{H}_T$；不过，我们将在例 5.7 中看到，这个条件并非必要条件。

引理 5.6. 设 G 如构造 5.2 中所述，并假设 L_0' 和 L_1' 是传递的。那么 $G \in \mathcal{H}_T$。

证明. 保留上文射线 ρ 的记号。我们考虑 ρ-肖像 p，使得 $p(v_i)=1$ 对于 $i\geqslant t+2$ 成立；记作 $h_i=p(v_i)$。显然，平凡局部作用 h_{t+2}、h_{t+3}、.....彼此兼容。为了使 h_{t+1} 与 h_{t+2} 兼容，我们需要

$$h_{t+1}\in F_{1-t}(\omega_{t+1}^-,\omega_{t+1}^+);\ \psi_{\omega_{t+1}^+}(h_{t+1})=1,$$

换言之，h_{t+1} 可以遍历 K'_{1-t}的一个副本。接下来，为使 h_t 与 h_{t+1}相容，我们需要

$$\psi_{\omega_t^+}(h_t)=\psi_{\omega_{t+1}^-}(h_{t+1}),$$

这使得 h_t 可以遍历 L'_t的一个副本。由于根据假设，L'_t 是传递的，我们现在看到，对于所有 ω_1^*, $\omega_2^*\in\Omega_t\backslash\{\omega_t^+\}$，都存在一个 ρ-肖像 p，使得 $p(v_t)\omega_1^*=\omega_2^*$。由命题 5.3(iii)，所有此类肖像都由 G中的元素见证，因此 G 中 ρ 的逐点稳定子在 $S_{v_{t+1}}(v_t,1)$上作用传递。根据命题 5.3(v)，我们现在看到 G 满足推论 2.10(v)，因而 $G\in\mathcal{H}_T$。 □

我们以构造 5.2 的两个特殊情形结束本节。在这些例子中，如果把向量空间或域视为群，应将其理解为该向量空间或域的加法群；而 $\mathbb{F}^*$ 则是域 $\mathbb{F}$的乘法群。

例 5.7。我们将构造适当的 (F_0,F_1) 的 $G\in\mathcal{H}_{F_0,F_1}$ 示例，使得 Λ_0 严格小于 F_0，且不满足引理 5.6。在构造 5.2 中，我们有满同态 $\psi_0:F_0(\omega_0)\to B$ 和 $\psi_1:F_1(\omega_1)\to B$；在这个例子中，为了简化分析，我们令 ψ_1 为恒等映射。

对于 $t=\{0,1\}$，令 F_t 为一个有限群，其在陪集空间 $\Omega_t=F_t/M_t$ 上有二重传递作用；令 $d_t=|\Omega_t|$，并令 $B=M_1$。将 $\omega_t=M_t$ 视为 Ω_t 中的一个点。我们假设存在一个从 M_0 到 B 的满同态 ψ_0，其核为 R_0；令 $\psi_1=\mathrm{id}_B$ 和 $R_1=\{1\}$。为了使后文的一些传递性论证成立，我们还假设 F_0 对 F_0/R_0 的作用是 2-块传递（其中各块为 M_0 的轨道）；这意味着我们无需直接指定 M_0，因为它可以恢复为包含 R_0 的 F_0 的唯一最大真子群。例如，可以取 (F_0,F_1,B,R_0) 为以下之一：

$$(\mathrm{M}_{11},\mathrm{Sym}(3),\mathrm{Sym}(2),\mathrm{Alt}(6));\ (\mathrm{P\Gamma L}_3(2),\mathrm{Sym}(3),\mathrm{Sym}(2),C_2^2\rtimes C_3);$$
$$(\mathrm{P\Gamma L}_3(3),\mathrm{Sym}(4),\mathrm{Sym}(3),C_3^2\rtimes Q_8);\ (\mathrm{PGL}_{n+1}(q),\mathbb{F}_q\rtimes\mathbb{F}_q^*,\mathbb{F}_q^*,\mathbb{F}_q^n\rtimes\mathrm{SL}_n(q)),$$

对于最后一族例子，我们取 q 为素数幂，并令 $q\neq 2$ 和 $n+1$ 与 $q-1$ 互素。

接着，我们按照构造 5.2 构造 $G=\mathsf{U}(F_0,F_1,\mathcal{L}^*,\alpha_0,\alpha_1)$。$F_0$ 在 F_0/R_0 上 2-块传递这一事实蕴含 R_0 在 $\Omega_0\backslash\{\omega_0\}\times B$ 上传递，因此也在 $\Omega_0\backslash\{\omega_0\}$ 上传递。然后，我们考虑相关群 $L_t,L'_t\leqslant F_t(\omega_t)$。

在当前情形下，我们看到 $L_0\geqslant L'_0=R_0$。由于 R_0 在 $\Omega_0\backslash\{\omega_0\}$ 上传递，因此有 $L_1=B$，并且我们看到，对于 $t\in\{0,1\}$，L_t 在 $\Omega_t\backslash\{\omega_t\}$ 上传递。另一方面，L'_1 是平凡的。特别地，L'_1 在 $\Omega_1\backslash\{\omega_1\}$ 上不传递。

我们沿用前文射线 $\rho=(v_t,v_{t+1},\dots)$ 的记号；不妨设 ω_t^+ 是平凡陪集 M_t。要证明 $G\in\mathcal{H}_T$，只需证明以下结论：对于所有 $\omega_1^*,\omega_2^*\in\Omega_t\backslash\{\omega_t^+\}$，存在一个 ρ-肖像 p，使得 $p(v_t)\omega_1^*=\omega_2^*$。事实上，我们将证明更强的结论：若 $t=0$，则可取 $p(v_t)$ 为 R_0 的任意元素；而若$t=1$，则可取 $p(v_t)$ 为 $F_1(\omega_1^+)$ 的任意元素。我们根据 t 的类型来划分论证。

(i) 若 $t=0$，我们取 $p(v_t)\in R_0$，使得 $\psi_{\omega_0^+}(p(v_0))=1$。这与 v_1 处的平凡局部作用相容，因此对于 $i\geqslant 2$，我们设 $p(v_i)=1$。

(ii) 若 $t=1$，假设给定某个 $h_1 \in F_1(\omega_1^+)$；设 $p(v_1)=h_1$，并记 $b=\psi_{\omega_1^+}(h_1)$。对于 $p(v_2)$，兼容条件是 $\psi_{\omega_2^-}(p(v_2))=b$，换言之，$p(v_2)$ 被限制在 $R_{\omega_2^-}$ 的一个左陪集中。由于 F_0 在 $\Omega_0 \times B$ 上的作用是 2-块传递的，我们得到 $R_{\omega_2^-}$ 在 $(\Omega_0 \backslash \{\omega_2^-\}) \times B$ 上的传递作用。因此，我们可以找到 $h_2 \in F_0$，使得

$$\psi_{\omega_2^-}(h_2)=b;\ h_2(\omega_2^+,b)=(\omega_2^+,b).$$

由于 $R_{\omega_2^-}$ 是 $F_0(\omega_2^-)$的正规子群，实际上 h_2 逐点固定 $\{\omega_2^+\} \times B$，因此 $\psi_{\omega_2^+}(h_2)=1$。于是，对所有 $i \geqslant 3$，我们可以令 $p(v_2)=h_2$ 并令 $p(v_i)=1$。

在这两种情形下，根据命题 5.3(iii)，存在具有给定肖像的 $g \in G$，由此可推出 $G \in \mathcal{H}_T$。

最后，我们证明对所有 $k \geqslant 2$，Λ_0^k 都真包含于 $F_0(\omega)$。事实上，我们有$|F_0(\omega_0):L_0|=d_1-1>1$，因为 ψ_1 的核是平凡的，继而根据引理 5.4有 $\Lambda_0^2=L_0$；进而，对所有 $k \geqslant 2$，$\Lambda_0^k \leqslant \Lambda_0^2$。

Exam例 5.8。我们将构造一个定理 1 中例外情形(ii)的例子。 2.

设 $F_t=\mathrm{P\Gamma L}_3(q_t)$ 作用于 $\Omega_t=P_2(q_t)$，其中 $q_0=5$ 且 $q_1=4$，固定 $\omega_t \in F_t$，并令$B=\mathrm{Sym}(5)$。那么对所有 $t \in \{0、1\}$，都有 $B \cong \mathrm{P\Gamma L}_2(q_t)$；作为置换群，$\mathrm{P\Gamma L}_2(4)=\mathrm{Sym}(P_1(4))$，而 $\mathrm{P\Gamma L}_2(5) \hookrightarrow \mathrm{Sym}(P_1(5))$ 是 $\mathrm{Sym}(5)$嵌入 $\mathrm{Sym}(6)$的例外嵌入。因此存在一个满同态 $\psi_t: F_t(\omega_t) \to B$；$R_t=\mathbb{F}_{q_t}^2 \rtimes \mathbb{F}_{q_t}^*$ 是 ψ_t 的核，即 $F_t(\omega_t)$的可解根。（回想一下，证明引理 4.10 时也作了类似的观察。）特别地，由于 B 不可解，我们注意到，当 $t \in \{0、1\}$时，群 $F_t(\omega_t)$ 不可解。通过选取 $\mathrm{P\Gamma L}_2(q_t)$ 与 B之间的一个同构，我们可以认为 ψ_t 由 $F_t(\omega_t)$ 在 $P_1(q_t)$ 上的作用所确定，该作用如注 3.6 所述。

我们再次按照构造 5.2 构造 F_t-集 $\Omega_t \times B$及群 $G=\mathrm{U}(F_0,F_1,\mathcal{L}^*,\alpha_0,\alpha_1)$。在此情形下，我们可以将群 K_t,K_t', L_t,L_t' 描述到共轭为止。群 K_t 对应于 $\mathrm{P\Gamma L}_2(q_t)$ 在 $P_1(q_t)$ 上的作用的一个点稳定子：具体而言，K_0 是 B 中指数为 6 的子群，其形式为 $C_5 \rtimes C_4$；而 K_1 与 $\mathrm{Sym}(4)$ 共轭，后者是在其对 5 个点的自然作用下 B 的点稳定子。对于子群 K_t'，我们发现 $K_0'=K_0$，而 K_1' 在 K_1 中的指数为 2，且可表示为 $K_1 \cap \mathrm{Alt}(5)=\mathrm{Alt}(4)$。通过同态$\psi_{\omega_t}$ 以及赋予 B的作用，我们得到 $F_t(\omega_t)$ 在射影直线 $P_1(q_{1-t})$ 上的一个作用；群 L_t 是此作用的一个点稳定子，并且有 $|L_0: L_0'|=2$ 和$L_1=L_1'$。具体而言，我们发现作为抽象群，L_0 的形式为 $C_5^2 \rtimes (\mathrm{SL}_2(3) \rtimes C_4)$；$L_0'$ 的形式为 $C_5^2 \rtimes (\mathrm{SL}_2(3) \rtimes C_2)$；而 $L_1=L_1'$ 的形式为 $\mathbb{F}_{16} \rtimes \Gamma\mathrm{L}_1(16)$。注意，群 L_0,L_0', L_1 都是可解的。

可以验证，对于 $t \in \{0,1\}$，F_t 在 L_t' 的陪集上 2-块传递。更准确地说，按照 [24]，的术语，F_0 在 L_0' 上的作用是表 [24，表 1]，中列出的 $\mathrm{PSL}_3(5)=\mathrm{P\Gamma L}_3(5)$ 的块大小为 10 的例外作用；而 F_1 在 L_1' 上的作用则是 [24，命题 3.27] 意义下参数为 $d_x=d_y=1$ 的 QP 型作用。特别地，这保证了 L_t' 在 $\Omega_t \backslash \{\omega_t\}$ 上传递，因此由引理 5.6 可得 $G \in \mathcal{H}_T$。

现在我们说明 $G(x,z)$ 是前可解的，其中 x 和 z 是任意两个满足 $d(x,z)=2$ 的顶点。由引理 5.4，$G(x,z)$ 在 $S_z(x,1)$ 上的作用是可解群 $L_{t(x)}$。更一般地，若 x 是任意有限顶点集，且对于所有 $y \in \mathrm{x}$，都存在 $y' \in \mathrm{x}$ 使得 $d(y,y')=2$，那么对于所有 $y \in \mathrm{x}$，$G(\mathrm{x})$ 在 $S(y,1)$ 上的作用都是 $L_{t(y)}$ 的子群；因此，$G(\mathrm{x})/G_1(\mathrm{x})$ 包含于若干个 L_0 和 L_1 的副本的有限直积中，故它是可解的。特别地，对于所有 $k \geqslant 1$，$G_{k-1}(x,z)/G_k(x,z)$ 都是可解的，因此 $G(x,z)$ 是前可解的。

特别地，每个半树的刚性稳定子都是前可解的，因此 Θ_t 是可解的，从而对于所有 $t \in \{0、1\}$，都有 $\Theta_t \leqslant O_\infty(F_t(\omega))$。实际上，对于这个例子，我们恰好得到 $\Theta_t=O_\infty(F_t(\omega))$。$\psi_\omega$ 的核恰好是 $F_t(\omega)$的可解剩余，因此，给定一个根为 x、类型为 t的半树 T'，以及由 T中所有不属于 T'的边所张成的树 T''，对于所有 $g \in O_\infty(F_t(\omega))$，我们

可以构造一个 T''-肖像 p_g，使得 $p_g(x) = g$，并且对于所有 $y \in VT''\backslash\{x\}$，都有 $p_g(y) = 1$。然后，我们可以找到 G 中的合适元素，通过命题 5.3(iii)证明 $\Theta_t(G) \geqslant O_\infty(F_t(\omega))$。

还需指出，Λ_t 是定理 1.2 中列出的关于 $t = 0$、1 的可能情况之一。根据引理 5.4，我们有 $\Lambda_t \leqslant L_t$。另一方面，我们处于这样一种情形：对所有 $t \in \{0、1\}$，L'_t 都是传递的，因此引理 5.6 的证明保证了 $\Lambda_t \geqslant L'_t$。于是 $\Lambda_1 = L_1 = \mathbb{F}_{16} \rtimes \Gamma\mathrm{L}_1(16)$ 且 $\Lambda_0 = C_5^2 \rtimes A(5)$，其中

$$A(5) \in \{\mathrm{SL}_2(3) \rtimes C_4, \mathrm{SL}_2(3) \rtimes C_2\}.$$

总之，我们得到了一个群 $G \in \mathcal{H}_{\mathrm{P\Gamma L}_3(5),\ \mathrm{P\Gamma L}_3(4)}$，它作用在 (31、21)- 半正则树上，且两种局部作用的点稳定子都不可解，因此弧稳定子不是前可解的；但任意长度为 2 的路径的稳定子都是前可解的。

参考文献

[1] O. Amann，《树自同构群及其酉表示》，博士论文，苏黎世联邦理工学院，2003 年。[2] E. Artin，《线性群的阶》，《Comm. Pure Appl. Math》8 (1955)，第 3 期，355–365。[3] C. Banks、M. Elder 和 G. A. Willis，《由有限子树上的作用确定的树自同构单群》，《J. Group Theory》18，235–261（2015）。[4] M. Burger 和 Sh. Mozes，《作用于树上的群：从局部到整体结构》，《Publ. Math. IHES》92（2000），113–150。[5] P. J. Cameron，《置换群》，伦敦数学会学生教材 45，剑桥大学出版社，纽约，1999。[6] P.-E. Caprace、M. Kalantar 和 N. Monod，《I 型猜想与双曲群的边界表示》，《Proc. London Math. Soc.》127（2023），第 2 期，447–486。[7] P.-E. Caprace、T. Marquis 和 C. D. Reid，《从紧子群生长树》，《群、几何与动力学》18（2024），第 1 期，327–352。[8] P.-E. Caprace 和 N. Radu，《作用于树上的单群的 Chabauty 极限》，《朱西厄数学研究所杂志》19（2020），第 4 期，1093–1120。[9] P.-E. Caprace、C. D. Reid 和 G. A. Willis，《全不连通群的局部正规子群。第一部分：一般理论》，《数学论坛：西格玛》5（2017），e11，76 页。[10] P.-E. Caprace、C. D. Reid 和 G. A. Willis，《全不连通群的局部正规子群。第二部分：紧生成单群》，《数学论坛：西格玛》5（2017），e12，89 页。[11] A. Devillers、M. Giudici、C. H. Li、G. Pearce 和 C. E. Praeger，《关于非本原三阶置换群》，《J. London Math. Soc》84（2011），第 3 期，649–669。[12] L. E. Dickson，《线性群：伽罗瓦域论阐述》，B. G. Teubner，莱比锡，1901。[13] J. Dixon 和 B. Mortimer，《置换群》，数学研究生教材第 163 卷，施普林格，纽约，1996。[14] GAP 团队，《GAP——群、算法与编程》，4.12.1 版；2022。（https://www.gap-system.org）

[15] C. Houdayer 和 S. Raum，《作用于树上的局部紧群、I 型猜想与非 amenable 冯·诺依曼代数》，《Comment. Math. Helv.》94（2019），第 1 期，185–219。[16] P. B. Kleidman 和 M. Liebeck，《有限经典群的子群结构》，伦敦数学会讲义系列 129，剑桥大学出版社，剑桥，1990。[17] W. Lederle，《带色 Neretin 群》，《Groups Geom. Dynam.》13（2019），第 2 期，467–510。[18] M. Liebeck，《秩 3 仿射置换群》，《Proc. London Math. Soc.》54（1987），第 3 期，477–516。[19] H. Matui，《有限型单侧移位的拓扑全群》，《J. Reine Angew. Math.》705（2015），35–84。[20] R. G. Möller 和 J. Vonk，《作用于树上的群的正规子群与图的自同构群》，《J. Group Theory》15（2012），第 6 期，831–850。[21] C. Nebbia，《树的等距变换群与 CCR 性质》，《Rocky Mountain J. Math.》29（1999），第 1 期，311–316。[22] Yu. A. Neretin，《圆的微分同胚群的组合类比物》，《俄罗斯科学院·Izvestiya Mathematics》（俄文）41（1993），第 2 期，337–349。[23] N. Radu，《树的边界二重传递自同构群的分类定理》，《Inventiones math.》209（2017），第 1 期，1–60。[24] C. D. Reid，《除存在非本原系统外的多重传递性》，《J. Group Theory》（2024），2024 年 1 月 19 日在线发表。[25] L. Semal，《作用于树上的 Radu 群具有 CCR 性质》，《J. Australian Math. Soc.》（2024），2024 年 3 月 6 日在线发表。[26] J. P. Serre，《树》，施普林格数学专著，施普林格，柏林，2003。[27] S. M. Smith，《置换群与拓扑群的一个乘积》，《Duke Math. J.》166（2017），第 15 期，2965–2999。[28] E. Thoma，《离散 I 型群的一种刻画》，《Inventiones math.》6（1968），190–196。[29] S. Tornier，《具有指定局部作用的树上的群》，《J. Australian Math. Soc.》115（2023），第 2 期，240–288。[30] G. A. Willis，《尺度群》，2020 年预印本，arXiv:2008.05220[31] R. A. Wilson，《有限单群》，数学研究生教材，施普林格，伦敦，2009。

索引

$\mathcal{C}$-根基，18$\mathcal{C}$-剩余，18

2-块传递，8

$A\Gamma$，AT, 39 仿射类型，19 弧，1, 9 轴，10

边界，9

$\Delta_t^k(G)$, 17, 26, 27$\delta^*(F)$, 21δ_t^k, 31∂T, 9d_t, 9 度，9 导出群，17

e_G, 19 椭圆型（弧对）, 10 端, 9 exceptional $\mathrm{SL}_2(5)$ 仿射类型，21

F_t, 16

$G(x)$, 7$[g,h]$, $[G,H]$, 17 $G_k(x)$，$G_k(x_1,\ldots,x_n)$, 25 一般线性群, 19$\Gamma\mathrm{L}$, 19

半树, 3 双曲型（弧对）, 10

$\kappa(G)$, 18k-按块传递, 8

Λ_t^k, 16$\Lambda_t(G)$, 17$\Lambda_t(G)$, $\Lambda_t^k(G)$, 17, 26 局部作用, 2, 16, 39

微支撑，3 极小正规子群，18

$O^\infty(G)$, $O_\infty(G)$, 17$O^{\mathcal{C}}(G)$, $O_{\mathcal{C}}(G)$, 17 Ω_t, 16 外自同构群 (G), 20 外自同构群, 20

$P(V)$, 19 （拓扑）完美，17 路径, 9 PΓL, 射影一般线性群, 射影特殊线性群，19 前可解-$\mathcal{C}$ 剩余, 17 可解原剩余, 17

射线，9 刚性稳定子，3

$\sim_{v,\ n}$，10$\sim_v$，10 半正则（树），9 特殊线性群，19 底，18 可解根，17 可解剩余，17 标准扩张，8 次直积，27$t(v)$ 40，，，Θ_t Θ^r ${}_t{}^i$，25，26 平移长度，10（顶点的）类型，1，9 类型距离传递，11 保型，10 U(F_0,F_1)，3，39VT，V_tT，9$Z(V)$，19