arXiv:2301.09092v1 [math.GT] 22 Jan 2023

A CO大尺度几何中的相似概念

SH. KALANTARI

Abstract. 本文通过公理化集合的子集族在大尺度上彼此相似这一概念，引入了大尺度相似结构这一新的大尺度结构。我们发现，在一种特殊情形下，集合上的大尺度相似关系能够在其上诱导出一种近邻；因此，我们给出了相当大的一类例子，说明并非每个近族都包含于某个丛中。此外，我们还展示了如何将渐近维数等一些大尺度性质推广到大尺度相似空间。

1. 引言

1951年，Efremovic 定义了邻近这一概念，作为集合上的一种小尺度结构。事实上，他试图将集合的两个子集 A与 B 彼此X ([3],[4]相近这一概念公理化。作为邻近概念的一种推广，Herrlich 定义了近邻（[7]）。近邻作为一种小尺度结构，试图将集合 X的子集族彼此相近这一概念公理化，并在某种程度上统一了其他小尺度结构，例如一致性、邻近和毗连性：

“所有近邻空间及邻近映射所构成的范畴，包含这些小尺度结构及其保持映射所构成的范畴，并将它们作为嵌入子范畴，且具有一些良好性质（[7]）。”

值得一提的是，每种小尺度结构都有其优点和难点，我们的目的和需求可能会促使我们选用其中一种。关于小尺度结构及其相关应用的更多详情，建议读者参阅 [2], [10], [11]。

近年来，对大尺度空间的研究引起了广泛关注。大多数大尺度结构的定义都受到知名小尺度结构定义的启发。例如，Roe 受到一致性定义的启发，定义了粗结构这一概念（[13]）。另一个大尺度结构的例子是渐近相似关系这一概念，它受到邻近定义的影响（[9]）。集合 X 上的渐近相似关系试图公理化如下概念：两个子集在大尺度上相似，即子集 A 与 B 都属于 X。本文旨在公理化集合 X的子集族在大尺度上相似这一概念。为此，我们定义大尺度相似的概念，并研究它的一些性质。下面简要概述本文的内容。在§2 中，我们简要讨论理解本文其余部分所需的内容。我们介绍小尺度下近邻结构和邻近关系的基本定义及性质，以及

2020年数学主题分类。51F99，54A05，54A99，54F45。关键词和短语：渐近维数、渐近相似、大尺度相似、近邻。

大尺度下的粗结构和渐近相似关系。我们在§3中介绍大尺度相似空间。此外，本节还介绍大尺度相似空间的基本定义和性质，并给出若干大尺度相似空间的例子。在§4 中，我们说明在某些情况下，集合 X 上的大尺度相似结构可以在 X上诱导出一种近邻结构。此外，我们证明，对于一大类例子，下述问题的答案是“否”。

问题 1.1. 假设 $(X,\mathfrak{N})$ 是一个近邻空间，且 $\mathcal{A}\in\mathfrak{N}$。是否存在 $(X,\mathfrak{N})$ 中的某个丛 $\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}$?

我们展示如何将渐近维数的概念推广到大尺度相似空间，详见§5。在本节中，我们还将证明，大尺度等价的大尺度相似空间具有相同的渐近维数。最后，在§6中，我们定义大尺度正则(LS-正则)大尺度相似空间。本节将证明，LS-正则大尺度相似空间与大尺度映射构成的范畴，包含所有渐近相似空间与 AS.R 映射构成的范畴，且后者是前者的嵌入反射性满子范畴。

2. 预备知识

2.1. 邻近与近邻。首先固定一些记号。对于一个非空集合 X，$\mathcal{P}(X)$ 表示 X 的所有子集构成的族，因此 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ 表示 $\mathcal{P}(X)$ 的所有子集构成的族。对于 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ 中的两个元素 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，我们定义

$$\mathcal{A}\vee\mathcal{B}=\{A\cup B\mid A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\}$$

此外，假设 $\mathcal{A},\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$。如果对每个 $A\in\mathcal{A}$，都存在某个 $B\in\mathcal{B}$ 使得 $B\subseteq A$，我们记作 $\mathcal{B}\ll\mathcal{A}$。

定义 2.1. 设 X 是一个非空集合。X 上的近邻结构或近邻，是 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ 的一个子集 $\mathfrak{N}$，并满足以下附加性质。

i) 若 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}}A\neq\emptyset$，则 $\mathcal{A}\in\mathfrak{N}$。 ii) 若 $\mathcal{A}\in\mathfrak{N}$ 且 $\mathcal{A}\ll\mathcal{B}$，则 $\mathcal{B}\in\mathfrak{N}$。 iii) $\mathfrak{N}$ 的每个元素都不包含 $\emptyset$。 iv) 若 $\mathcal{A},\mathcal{B}\notin\mathfrak{N}$，则 $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}\notin\mathfrak{N}$。若 $\mathfrak{N}$ 是 X 上的近邻，则称这一对 $(X,\mathfrak{N})$ 为一个 N-空间。

设 $(X,\mathfrak{N})$ 是一个 N-空间。对 $A\subseteq X$ 和 $x\in X$，若 $\{x,A\}\in\mathfrak{N}$，则定义 $x\in\overline{A}$。若 $\overline{A}=A$，则称 $A\subseteq X$ 为闭集。因此，我们在 X 上得到一个拓扑。该拓扑是 R_0，称为 $\mathfrak{N}$ 在 X 上诱导的拓扑。为了使本文内容更加完整，我们在此回顾一些其他定义。

定义 2.2. 设 X 为一个集合。假设 δ 是 $\mathcal{P}(X)$上的一个关系。对于每个 A、$B\subseteq X$、$^-$，将 $(A,B)\notin\delta$ 记为 $A\delta B$。若关系 δ 满足以下性质，则称其为 X 上的邻近。

i) 若 $A\delta B$，则 $B\delta A$。 ii) $A\delta(B\cup C)$ 当且仅当 $A\delta B$ 或 $A\delta C$。 iii) 若 $A\delta B$，则 $A\neq\emptyset$ 和 $B\neq\emptyset$。

iv) 若 $A\delta B$，则存在某个 $D \subseteq X$，使得 $A\delta D$ 且 $(X \setminus D)\delta B$.

对所有 A， B， $C \subseteq X$。这一对 (X, δ) 称为一个邻近空间([3],[4])。

设 (X, δ) 是一个邻近空间，且 $A \subseteq X$。若 $\{x\}\delta A$，则定义 $x \in \overline{A}$ 。若我们假设$A \subseteq X$ 是闭集，当且仅当 $\overline{A} = A$，那么我们在 X 上得到一个拓扑，称为 δ 在 X 上诱导的拓扑。

定义 2.3. 设 (X, δ) 是一个邻近空间。 X 的子集族 $\mathcal{C}$ 称为 (X, δ) 中的一个簇，当且仅当它满足以下性质。i) 对所有 $A, B \in \mathcal{C}$， $A\delta B$。ii) $(A \cup B) \in \mathcal{C}$ 当且仅当 $A \in \mathcal{C}$ 或 $B \in \mathcal{C}$。iii) 对所有 $B \in \mathcal{C}$， $A\delta B$ 蕴含 $A \in \mathcal{C}$。

如果对于所有 x、 $y \in X$， $\{x\}\delta\{y\}$ 蕴含 $x = y$，则称邻近空间 (X, δ) 是分离的。设 (X, δ) 是分离邻近空间。令 $\mathfrak{X}$ 表示 (X, δ) 中所有簇组成的族。对于 $\mathfrak{X}$ 的两个子集 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ ，定义 $\mathfrak{A}\delta^*\mathfrak{B}$ ：若 $A \subseteq X$ 属于 $\mathfrak{A}$ 的所有元素，且 $B \subseteq X$ 属于 $\mathfrak{B}$ 的所有元素，则 $A\delta B$。可以证明，$(\mathfrak{X}, \delta^*)$ 是紧豪斯多夫邻近空间，并且它包含 X 作为开稠密子集。因此， $\mathfrak{X}$ 是 (X, δ) 的一种紧化，称为 X 的斯米尔诺夫紧化。有关邻近空间及其斯米尔诺夫紧化的更多详情，请参见 [10] 和 [11]。

2.2. 粗结构与渐近相似关系。

定义 2.4。设 X 是一个集合，并假设 E、 $F \subseteq X \times X$。我们定义

$$E^{-1} = \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in E\}$$

and

$E \circ F = \{(x, y) \in X \times X \mid$ 存在某个 $z \in X$， 使得 $(x, z) \in F \, and \, (z, y) \in E\}$。如果子集 $\mathcal{E}$ 属于 $\mathcal{P}(X \times X)$，并且满足以下性质，则称其为集合 X上的粗结构。

i) 如果 $E \subseteq F$，对某个 $F \in \mathcal{E}$，则 $E \in \mathcal{E}$。ii)
$E \circ F, E \cup F, E^{-1} \in \mathcal{E}$，对所有 $E, F \in \mathcal{E}$ 均成立。
iii) $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \in \mathcal{E}$。
如果 $\mathcal{E}$ 是集合 X 上的粗结构，则称有序对 $(X, \mathcal{E})$ 为粗空间。

例 2.5. 设 (X, d) 是一个度量空间。定义 $E \in \mathcal{E}_d$ ： 若存在某个$r > 0$ 使得对于所有 $(x, y) \in E$， $d(x, y) \leq r$。族 $\mathcal{E}_d$ 是 X上的粗结构。

设 X 是一个集合，且 $E \subseteq (X \times X)$。令

$$E(A) = \{b \in X \mid (a, b) \in E \, for \, some \, a \in A\}$$

对所有 $A \subseteq X$ 均成立。

例 2.6。设 $\overline{X}$ 是豪斯多夫局部紧拓扑空间 X 的一个紧化。如下定义 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$。

‘若对所有相对紧的 $K \subseteq X$， $E(K)$ 在 X 中相对紧；并且若 $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是 E 中的一个网，且 $x_\alpha \to w \in (\overline{X} \setminus X)$，则 $y_\alpha \to w$。’
回顾一下，如果 $\overline{K}$ 是紧的，那么 K of X 中的子集称为相对紧。族 $\mathcal{E}$

在 X 上定义了一种粗结构，称为与拓扑粗结构相关的紧化 $\overline{X}$ 的 X (参见 [13]第 2.2 节)。

粗结构 $\mathcal{E}$ 在拓扑空间 X 上称为与拓扑相容，如果存在一个开 $E \in \mathcal{E}$ 使得 $\Delta \subseteq E$；若每个有界子集 $(X, \mathcal{E})$ 都是相对紧的，则称其为真。由例2.6自然引出了以下问题：“设 X 是一个局部紧豪斯多夫拓扑空间，并带有一个相容且真粗结构 $\mathcal{E}$。是否存在$\overline{X}$ 的某个紧化 X，使得与$\overline{X}$ 相关联的拓扑粗结构等于 $\mathcal{E}$？”

这个问题有一个部分答案。

命题 2.7. 设 $\mathcal{E}$ 是豪斯多夫拓扑空间 X上的一个真且相容的粗结构。则存在 hX 的一个紧化 X，使得与 hX 相关联的拓扑粗结构包含 $\mathcal{E}$。此外，若 $\overline{X}$ 是 X 的另一个具有此性质的紧化，则恒等映射可唯一延拓为一个从hX 到$\overline{X}$的连续映射。

证明。 参见 [13]中的命题 2.39。 □

命题 hX 中的紧化2.7 称为Higson 紧化，即 X的紧化。我们将边界 $hX \setminus X$ 记作 νX，并称其为Higson 边界，即 X的边界。关于如何构造具有适当且相容粗结构的拓扑空间的 Higson 紧化，请参见§2.3 节 [13]。

定义 2.8。设 X 是一个集合。$\mathcal{P}$（X）上的等价关系 λ 称为渐近相似（AS.R），如果：i）若 $i \in \{1, 2\}$，则对 $A_i \lambda B_i$ 有（$A_1 \cup B_1$）λ（$A_2 \cup B_2$）。ii）（$A_1 \cup A_2$）λB。对于非空子集 A_1、A_2、$B \subseteq X$，存在 B_1、$B_2 \neq \emptyset$，使得$B = B_1 \cup B_2$ 且 $A_i \lambda B_i$，其中 $i \in \{1, 2\}$。此时，二元组（X，λ）称为渐近相似空间（AS.R 空间）。对于 AS.R 空间（X，λ）的两个子集 A 和 B，若 $A \lambda B$，则称 A 与 B 渐近相似。

例 2.9. 设 X 是一个集合，令 $\mathcal{E}$ 表示 X 上的粗结构。若存在某个 $E \in \mathcal{E}$，使得 $A \subseteq E(B)$ 且 $B \subseteq E(A)$，则定义 $A \lambda_{\mathcal{E}} B$。容易看出，$\lambda_{\mathcal{E}}$ 是 X 上的 AS.R。若对于 X 上的某个度量 d，有 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_d$，则将 $\lambda_{\mathcal{E}}$ 记为 λ_d。在这种情况下，若 A、$B \subseteq X$，则 $A \lambda_d B$ 表示 A 与 B 之间的豪斯多夫距离有限。

设 (X, λ) 是一个 AS.R 空间。若 $D = \emptyset$ 或 $D \lambda \{x\}$，其中 $x \in X$，则称 X 的子集 D 为有界子集。若对于 X 的两个子集 A 和 B，任取 A 和 B 的两个无界子集 L_1 和 L_2，它们都不渐近相似，则称这两个子集渐近不相交。若 (X, λ) 是一个渐近正规 AS.R 空间，且 X 的两个子集 A 和 B 渐近不相交，则存在 X 的子集 X_1 和 X_2，使得 $X = X_1 \cup X_2$，并且它们分别与 A 和 B 渐近不相交。回顾一下，若 d 是集合 X 上的度量，则 D 在 AS.R 空间 (X, λ_d) 中有界，当且仅当 D 在度量空间 (X, d) 中有界。可以证明，若 (X, d) 是一个度量空间，则 (X, λ_d) 是渐近正规 AS.R 空间（[9] 的命题 4.5）。

定义 2.10。设 X 是正规拓扑空间，$\mathcal{E}$ 是其上的相容真粗结构。假设 $(X,\lambda_{\mathcal{E}})$ 是渐近正规 AS.R 空间。定义：“若 $\overline{A}\cap\overline{B}\neq\emptyset$ 或 A，且 B 在 $(X,\lambda_{\mathcal{E}})$ 中不渐近不相交，则 $A\delta B$。”

可以证明，δ 定义2.10 中定义的关系是正规拓扑空间 X 上的分离接近关系，并且与 X 的拓扑相容；(X,δ)的斯米尔诺夫紧化与粗空间$(X,\mathcal{E})$的 Higson 紧化同胚（详见 §5，见 [9]）。

我们可以通过定义渐近维数来结束预备知识部分。度量空间的渐近维数这一概念由 [6] 提出。关于这一概念的更多详细信息，建议读者参阅 [1]。首先回顾一下，粗空间 $(X,\mathcal{E})$ 的子集族 $\mathcal{U}$ 称为一致有界，如果存在某个 $E\in\mathcal{E}$，使得对所有 $U\in\mathcal{U}$，都有 $U\times U\subseteq E$。如果对于某个度量 d 定义在 X 上有 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_d$，则也可以等价地说，$\mathcal{U}$ 一致有界，当且仅当存在某个 $r>0$，使得对所有 $U\in\mathcal{U}$，都有 $\mathrm{diam}(U)\leq r$。对于 AS.R 空间，我们有如下定义。

定义 2.11. 设 (X,λ) 是一个 AS.R 空间，且 $\mathcal{U}$ 是 X 的子集族。令

$$\bigotimes_{\mathcal{U}}=\bigcup_{U\in\mathcal{U}}U\times U$$

如果对于所有 $A,B\subseteq X$，$A\subseteq\bigotimes_{\mathcal{U}}(B)$ 且 $B\subseteq\bigotimes_{\mathcal{U}}(A)$ 蕴含 $A\lambda B$，则称族 $\mathcal{U}$一致有界。

可以证明，若 (X,d) 是一个度量空间，则 $\mathcal{U}$ 作为 X 的子集族，在 AS.R 空间 (X,λ_d) 中一致有界，当且仅当 $\mathcal{U}$ 在粗空间 $(X,\mathcal{E}_d)$ 中一致有界（参见 [9] 的命题 6.2）。设 X 是一个集合，并假设 $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathcal{P}(X)$。回顾一下，“$\mathcal{U}$细化 $\mathcal{V}$”是指，对于每个 $U\in\mathcal{U}$，都存在某个$V\in\mathcal{V}$，使得 $U\subseteq V$。此外，回顾一下，$\mathcal{U}$ 作为 X 的覆盖，其重数是最小的自然数 n（如果存在这样的 n），使得每个 $x\in X$ 至多属于 $\mathcal{U}$ 中的 n 个元素。文献中给出了度量空间和粗空间渐近维数的若干等价定义（参见 [1], [5]）。由于以下定义也适用于 AS.R 空间，因此我们最偏好这一种。

定义 2.12。设 (X,d) 是一个度量空间。若对于 X 的每个一致有界覆盖 $\mathcal{U}$，都存在 X 的一个一致有界覆盖 $\mathcal{V}$，使得 $\mathcal{U}$ 细化 $\mathcal{V}$，且 $\mathcal{V}$ 的重数小于或等于 $n+1$，则称 X 的渐近维数小于或等于 $n\in\mathbb{N}$。如果度量空间 (X,d) 的渐近维数小于或等于 n，但不小于 $n-1$，那么称 X 的渐近维数等于 n。

将“度量空间”一词分别替换为“粗空间”和“AS.R 空间”，即可得到粗空间和 AS.R 空间的渐近维数定义。

3. Large scale resemblance

以下定义是本文的主要定义。

定义 3.1. 设 X 为一个非空集合。若 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ 的一个子集，且满足以下性质，则称其为 X 上的大尺度相似（LS.R）。
i) $\{A\} \in \mathfrak{C}$，对所有 $A \subseteq X$ 均成立。ii) 若对某个 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$，有 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$，则 $\mathcal{B} \in \mathfrak{C}$。iii) 若 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \in \mathfrak{C}$ 和 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$，则 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \mathfrak{C}$。iv) 若 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \in \mathfrak{C}$，则 $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \in \mathfrak{C}$。

若 $\mathfrak{C}$ 表示集合 X 上的一个 LS.R，则称有序对 $(X, \mathfrak{C})$ 为大尺度相似空间（LS.R 空间）。

例 3.2. 设 $X = \{a, b, c\}$。假设

$$\mathfrak{C} = \{\{A\} \mid A \subseteq X\} \cup \{\{\{a\}, \{a, b\}\}, \{\{a, c\}, \{a, b, c\}\}\}$$

容易看出，$\mathfrak{C}$ 是 X 上的一个 LS.R。

例 3.3. 设 d 是集合 X 上的一个度量。定义 $\mathcal{P}$（$\mathcal{P}$（X））的子集 $\mathfrak{C}_d$ 如下：“若存在某个 $k > 0$ 使得对每个 A、$B \in \mathcal{A}$，$d_H(A, B) \leq k$，则 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}_d$。”
这个子集 $\mathfrak{C}_d$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ 上是一个 LS.R，X 我们称其为由度量d 在 X上诱导的 LS.R。我们不证明本例中的断言，而是在例3.4中证明一个更一般的结果。

例3.4. 设 $\mathcal{E}$ 是非空集合 X 上的一个粗结构。我们如下定义 $\mathfrak{C}_\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ 中的子集。

‘$\mathcal{A} \in \mathfrak{C}_\mathcal{E}$ 如果存在某个 $E \in \mathcal{E}$，使得对每个 A，都有 $B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq E(B)$。’
利用定义 2.4，定义 3.1 的性质 i) 和 ii) 显然成立。对于定义 3.1 的性质 iii)，设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{C}_\mathcal{E}$ 和 $C \in \mathcal{A} \bigcap \mathcal{B}$。设 $E, F \in \mathcal{E}$ 满足：对于所有 $A, A' \in \mathcal{A}$ 和 $B, B' \in \mathcal{B}$，都有 $A \subseteq E(A')$ 和 $B \subseteq F(B')$。由于对于所有 $A \in \mathcal{A}$，均有 $A \subseteq E(C)$ 和 $C \subseteq E(A)$；对于所有 $B \in \mathcal{B}$，均有 $B \subseteq F(C)$ 和 $C \subseteq F(B)$，显然对于所有 $A, B \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$，都有 $A \subseteq (E \circ F \cup F \circ E)(B)$。因此 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \mathfrak{C}_\mathcal{E}$。由于 $\mathcal{E}$ 中两个元素的并集是 $\mathcal{E}$ 的一个元素，定义 3.1 的性质 iv) 很容易验证。因此 $\mathfrak{C}_\mathcal{E}$ 是 X 上的一个大尺度相似，我们称其为由粗结构 $\mathcal{E}$ 在 X 上诱导的 LS.R。

例3.5. 设 $(X, \mathcal{E})$ 是一个粗空间。定义 fine $\tilde{\mathfrak{C}}_\mathcal{E}$ 为 f
如下。˜‘$\mathcal{A} \in \mathfrak{C}_\mathcal{E}$ 若对每个 A，$B \in \mathcal{A}$ 都存在某个 $E \in \mathcal{E}$ 使得 $A \subseteq E(B)$ 且 $B \subseteq E(A)$’。˜与例3.4 类似的论证很容易证明，$\mathfrak{C}_\mathcal{E}$ 是 X上的 LS.R。

例3.6. 设 (X, λ) 是一个 AS.R 空间。我们定义 $\mathfrak{C}_\lambda \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ 如下。‘若 $A \lambda B$，则对所有 $A, B \in \mathcal{A}$，有 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}_\lambda$。’
定义3.1 的性质 i)、ii) 和 iii) 是以下事实的直接推论：λ 是 $\mathcal{P}(X)$ 上的等价关系。由于对所有 A，B，A'，$B' \subseteq X$，$A \lambda A'$ 且 $B \lambda B'$蕴含 $(A \cup A')\lambda(B \cup B')$，定义3.1 的性质 iv) 显然成立。因此，$\mathfrak{C}_\lambda$ 是 X上的 LS.R。我们称 $\mathcal{C}_\lambda$ 为由 λ诱导的 LS.R。

回顾一下，集合 X 上的粗结构 $\mathcal{E}$ 称为连通的，如果对于每个 x、$y \in X$，都存在某个 $E \in \mathcal{E}$，使得 $(x, y) \in E$。

推论 3.7. 设 $\mathcal{E}$ 是非空集合 X 上的粗结构，并且 $\lambda = \lambda_\mathcal{E}$。那么 ˜ ˜i) $\mathfrak{C}_\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{C}_\mathcal{E}$。如果 $\mathcal{E}$ 是连通粗结构，那么 $\mathfrak{C}_\mathcal{E} = \mathfrak{C}_\mathcal{E}$ 当且仅当 X 是

有界。此外，如果 X 有界，那么 $\mathfrak{C}_{\mathcal{E}} = \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$。~

ii) $\mathfrak{C}_{\mathcal{E}} = \mathfrak{C}_{\lambda}$。

证明。显然。 □

引理 3.8。设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是 AS.R 空间 (X, λ) 的两个一致有界子集族。那么

$$\mathcal{W} = \{U \cup V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V} \text{ and } U \cap V \neq \emptyset\}$$

是 (X, λ) 的一个一致有界子集族。

证明。设 A、$B \subseteq X$ 和 $A \subseteq \bigotimes_{\mathcal{W}}(B)$，以及 $B \subseteq \bigotimes_{\mathcal{W}}(A)$。于是

$$A \subseteq (\bigotimes(B) \cup \bigotimes(B) \cup \bigotimes(C_1) \cup \bigotimes(C_2))$$

其中 $C = \bigcup_{U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V}} (U \cap V)$，$C_1 = \overset{\mathcal{U}}{\bigotimes_{\mathcal{V}}}(B) \cap C$，以及 $C_2 = \bigotimes_{\mathcal{U}}(B) \cap C$。由于 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 一致有界，很容易证明存在 B 的子集 B_1、B_2、B_3、B_4，它们分别与 $\bigotimes_{\mathcal{U}}(B)$、$\bigotimes_{\mathcal{V}}(B)$、$\bigotimes_{\mathcal{U}}(C_1)$、$\bigotimes_{\mathcal{V}}(C_2)$ 渐近相似。因此，存在 X 的子集 D，使得 $A \subseteq D$ 且 $D \lambda B'$，其中 $B' = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$。因此，$A$ 与 B 的一个子集渐近相似；类似地可证明 B 与 A 的一个子集渐近相似。结合这两个事实，很容易得出 A 和 B 渐近相似。□

~例 3.9。设 λ 是集合 X 上的一个 AS.R。定义 $\mathfrak{C}_{\lambda}$ 如下。

'$\mathcal{A} \in \mathfrak{C}_{\lambda}$~若存在一个由 X 的子集构成的一致有界族 $\mathcal{U}$，使得 $A \subseteq \bigotimes_{\mathcal{U}}(B)$ 对每个 $A, B \in \mathcal{A}$ 均成立。'

要验证定义 3.1 的第一个性质，只需注意到族 $\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ 是一致有界的。定义 3.1 的性质 ii) 显然是~由 $\mathfrak{C}_{\lambda}$ 的定义得出的。假设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{C}_{\lambda}$。设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别表示由 X 的子集构成的一致有界族，并且它们分别对 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 具有上述性质。若 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$，容易看出，引理 3.8 中提到的一致有界族 $\mathcal{W}$ 表明 $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \in \mathfrak{C}_{\lambda}$。性质 iv) 直接由以下事实得出：$\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ 是由 X 的子集构成的一致有界族。

推论 3.10. 设 λ 是集合 X 上的 AS.R。那么，~i) $\mathfrak{C}_{\lambda} \subseteq \mathfrak{C}_{\lambda}$.~ii) 若 λ 是由 X 上的度量 d 诱导的 AS.R，则 $\mathfrak{C}_{\lambda} = \mathfrak{C}_{d}$.~ ~iii) 若 λ 是由 X 上的粗结构 $\mathcal{E}$ 诱导的 AS.R，则 $\mathfrak{C}_{\mathcal{E}} \subseteq \mathfrak{C}_{\lambda} \subseteq \mathfrak{C}_{\mathcal{E}} = \mathfrak{C}_{\lambda}$。

证明。i) 和 iii) 两部分显然。ii) 部分直接由 [9] 得出。□

定义 3.11. 设 $(X, \mathfrak{C})$ 是一个 LS.R 空间。若 $B = \emptyset$，或者存在某个 $x \in X$ 使得 $\{B, \{x\}\} \in \mathfrak{C}$，则称 X 的子集 B 有界。若对每个 $x, y \in X$，都有 $\{\{x\}, \{y\}\} \in \mathfrak{C}$，则称 LS.R 空间 $(X, \mathfrak{C})$ 连通。

引理 3.12. 设 $(X, \mathfrak{C})$ 是一个连通的 LS.R 空间。那么，X 的两个有界子集的并集是 X 的一个有界子集。

证明。 假设 B_1， $B_2 \subseteq X$ 是有界的。设 x， $y \in X$ 使得$\{B_1, \{x\}\}$， $\{B_2, \{y\}\} \in \mathfrak{C}$。由于 $(X$， $\mathfrak{C})$ 是连通的， $\{\{x\}, \{y\}\} \in \mathfrak{C}$。因此，根据定义 3.1 的性质 iii)，

$$\mathcal{A} = \{B_1, \{x\}, \{y\}\}, \mathcal{B} = \{B_2, \{x\}, \{y\}\} \in \mathfrak{C}$$

定义 3.1 的性质 iv) 表明 $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \in \mathfrak{C}$。因此，定义 3.1的性质 ii) 显然意味着 $B_1 \cup B_2$ 有界。 □

引理 3.13。设 $(X, \mathfrak{C})$ 是一个 LS.R 空间，并假设 $L \subseteq X$ 无界。若$L' \subseteq X$ 且 $L, L' \in \mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$，则 L' 也无界。

证明。 反设 L' 有界。因此存在某个 $x \in X$使得 $\mathcal{B} = \{L', \{x\}\} \in \mathfrak{C}$。由于 $L' \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$，定义 3.1的性质 ii) 和 iii) 表明 $\{L, \{x\}\} \in \mathfrak{C}$，这与我们的假设 L 无界矛盾。 □

定义 3.14。设 $(X, \mathfrak{C})$ 和 $(Y, \mathfrak{C}')$ 是两个 LS.R 空间。若映射 $f\colon X \to Y$满足： Y中每个有界子集的逆像都是 X 的有界子集，并且 $f(\mathcal{A}) \in \mathfrak{C}'$ 对所有 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$ 均成立，则称其为大尺度相似映射（LS.R 映射），其中

$$f(\mathcal{A}) = \{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

若存在一个 LS.R 映射 $g\colon Y \to X$，使得对所有 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 和 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$，若 $g \circ f(\mathcal{A}) \in \mathfrak{C}$，则 $g \circ f(\mathcal{A}) \cup \mathcal{A} \in \mathfrak{C}$；若 $f \circ g(\mathcal{B}) \in \mathfrak{C}'$，则 $f \circ g(\mathcal{B}) \cup \mathcal{B} \in \mathfrak{C}'$，那么我们称 LS.R 映射 $f\colon X \to Y$ 为大尺度等价。在这种情况下，我们称 g 为 f 的大尺度逆映射。若两个 LS.R 空间之间存在大尺度等价，则称它们大尺度等价。

引理 3.15. 设 $(X, \mathfrak{C})$ 和 $(Y, \mathfrak{C}')$ 是两个 LS.R 空间。假设 $f\colon X \to Y$ 是 X 与 Y 之间的大尺度等价，且 $g\colon Y \to X$ 是 f 的大尺度逆映射。
i) 对所有 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 和$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$，若 $f \circ g(\mathcal{B}) \in \mathfrak{C}'$，则 $\mathcal{B} \in \mathfrak{C}'$；若 $g \circ f(\mathcal{A}) \in \mathfrak{C}$，则 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$。

ii) 如果 $\mathcal{B} \in \mathfrak{C}'$，那么 $f \circ g(\mathcal{B}) \cup \mathcal{B} \in \mathfrak{C}'$；如果 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$，那么 $g \circ f(\mathcal{A}) \cup \mathcal{A} \in \mathfrak{C}$。

证明。两部分都很容易验证。 □

命题 3.16。设 (X, d_1) 和 (Y, d_2) 是两个度量空间。假设 $\mathfrak{C}_1$ 和$\mathfrak{C}_2$ 是分别与 X 和 Y上的度量 d_1 和 d_2 相关联的大尺度粗糙结构。那么映射$f\colon X \to Y$

i) 是一个 LS.R 映射，当且仅当它是一个粗映射。
ii) 是大尺度等价，当且仅当它是粗等价。

证明。 利用[9]的定理 2.3 和命题 2.16，证明是显然的。 □

命题 3.17. 设 $(X, \mathcal{E})$ 和 $(Y, \mathcal{E}')$ 是两个粗空间，并假设 $f\colon X \to Y$ 是一个粗映射。那么 f 是大尺度相似空间 $(X, \mathfrak{C}_{\mathcal{E}})$ 与 $\tilde{}$ $\tilde{}(Y, \mathfrak{C}_{\mathcal{E}'})$ 之间的 LS.R 映射（大尺度相似空间 $(X, \mathfrak{C}_{\mathcal{E}})$ 和 $(Y, \mathfrak{C}_{\mathcal{E}'})$）。

证明。容易验证。 □

命题 3.18. 假设 (X, λ) 和 (Y, λ') 是两个渐近相似空间，且 $f\colon X \to Y$。那么，

i) f 是从 $(X,\mathfrak{C}_\lambda)$ 到 $(Y,\mathfrak{C}_{\lambda'})$ 的 LS.R 映射，当且仅当它是从 (X,λ) 到 (Y,λ') 的渐近相似映射。

ii) f 是 LS.R 空间（$X,\mathfrak{C}_\lambda$）与（$Y,\mathfrak{C}_{\lambda'}$）之间的大尺度等价，当且仅当它是 AS.R 空间（X,λ）与（Y,λ'）之间的渐近等价。

证明。显然。 □

从现在起，我们假设所有 LS.R 空间都是连通的。

4. Nearness structures induced from large scale resemblances

例 4.1。假设 X 是拓扑空间 Y 的一个稠密子空间。按如下方式定义 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ 的子集 $\mathfrak{C}_Y$。

‘$\mathcal{A}\in\mathfrak{C}_Y$若 $\overline{A}\cap(Y\setminus X)=\overline{B}\cap(Y\setminus X)$，则对每个 $A,B\in\mathcal{A}$。’

容易证明，$\mathfrak{C}_Y$ 是 X上的 LS.R。我们称 $\mathfrak{C}_Y$ 为与 Y相关联的X 上的拓扑大尺度相似结构。

命题 4.2. 设 $\mathcal{E}$ 是拓扑空间 X 上的一个适当且相容的粗结构，并假设 hX 表示 X的 Higson 紧化。则

$$\mathfrak{C}_\mathcal{E},\tilde{\mathfrak{C}}_\mathcal{E}\subseteq\mathfrak{C}_{hX}$$

证明。设 $A,B\subseteq X$，并假设 $A\subseteq E(B)$且 $B\subseteq E(A)$，其中 $E\in\mathcal{E}$。令$w\in(\overline{A}\cap\nu X)$。则存在网 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$，其取值于 A，使得 $x_\alpha\to w$。由于 $A\subseteq E(B)$，存在某个 $y_\alpha\in B$，使得对每个 $\alpha\in I$都有 $(y_\alpha,x_\alpha)\in E$。根据命题 2.7，E 是与 hX相关联的拓扑粗结构中的一个成员。因此，根据拓扑粗结构的定义，$y_\alpha\to w$。这表明 $w\in(\overline{B}\cap\nu X)$。于是$\overline{A}\cap\nu X\subseteq\overline{B}\cap\nu X$。类似地，可以证明 $\overline{B}\cap\nu X\subseteq\overline{A}\cap\nu X$。因此 $\overline{A}\cap\nu X=\overline{B}\cap\nu X$。利用这一事实，容易证明本命题的断言。□

命题 4.3. 设 d 是集合 X 上的一个度量，并且 $\lambda=\lambda_d$。则 $\mathfrak{C}_\lambda=\mathfrak{C}_{hX}$。

证明。这是由 [9 的命题 4.22 和推论 4.24 直接得到的。]. □

例 4.4. 设 $X=\mathbb{R}$，并假设 X 具有离散拓扑。设 Y 是 X 的一点紧化。显然，当且仅当 $\mathcal{A}$ 的所有成员都是有限的，或 $\mathcal{A}$ 的所有成员都是无限的时，$\mathcal{A}\in\mathfrak{C}_Y$。我们断言，对于 X 上的任意粗结构 $\mathcal{E}$，都有 $\mathfrak{C}_Y\neq\mathfrak{C}_\mathcal{E}$。反设我们的断言不成立，$\mathcal{E}$ 是 X 上的一个粗结构，且 $\mathfrak{C}_Y=\mathfrak{C}_\mathcal{E}$。显然，对于所有 $E\in\mathcal{E}$ 和 $x\in X$，$\{\{x\},E(x)\}\in\mathfrak{C}_Y=\mathfrak{C}_\mathcal{E}$。因此，对于所有 $E\in\mathcal{E}$ 和 $x\in X$，$E(x)$ 是有限的。由于 $\{\mathbb{N},\mathbb{R}\}\in\mathfrak{C}_Y=\mathfrak{C}_\mathcal{E}$，存在某个 $E\in\mathcal{E}$，使得 $\mathbb{R}\subseteq E(\mathbb{N})$ 且 $\mathbb{N}\subseteq E(\mathbb{R})$。所以$\mathbb{R}\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E(n)$。由于对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$E(n)$ 是有限的，$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E(n)$ 是可数的，这与 $\mathbb{R}$ 是不可数的事实相矛盾。因此，正如我们所˜断言的，$\mathfrak{C}_Y\neq\mathfrak{C}_\mathcal{E}$。完全类似的论证可以表明，对于 X 上的任意粗结构 $\mathcal{E}$，都有 $\mathfrak{C}_Y\neq\mathfrak{C}_\mathcal{E}$。

例子 4.5. 设 $X=\mathbb{R}$ 并考虑 X 配备离散拓扑，作为例子4.4。定义 $\mathcal{E}\subseteq X\times X$ 如下。

‘对每个 $x\in X$，若 $E(x)$ 是有限的，则 $E\in\mathcal{E}$。’

容易证明，$\mathcal{E}$ 是该拓扑空间上的一个恰当且相容的粗结构

X。由于 A 和 B 是 X 的两个子集，当且仅当其中一个是有限集时，它们渐近不相交，因此很容易看出，$(X, \lambda_{\mathcal{E}})$是渐近正规的。假设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是 $hX \setminus X$ 和 $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$ 中的两个簇（定义 2.10）。那么存在无限子集 $A \in \mathcal{C}$ 和 $B \in \mathcal{C}'$，使得它们渐近不相交，这就产生了矛盾。因此，X 的 Higson 紧化是一点紧化。˜根据例 4.4 和命题 4.2，$\mathfrak{C}_{\mathcal{E}}$ 和 $\mathfrak{C}_{\mathcal{E}}$ 是 $\mathfrak{C}_{hX}$的真子集。

定义 4.6. 设 $\mathfrak{C}$ 是集合 X上的一个 LS.R。将 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ 的子集 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$ 定义如下。

‘若 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset$，则$\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$；或者存在某个 $\mathcal{B} \in \mathfrak{C}$，使得 $\mathcal{B}$ 不包含 X 的任何有界子集，且 $\mathcal{B} \ll \mathcal{A}$。’

继续之前，我们先约定一些记号。设 $\mathcal{E}$ 是集合 X上的一个粗结构，且 $E \in \mathcal{E}$。对于 X的一个子集 L，我们用 $\mathcal{N}_E(L)$ 表示满足 $L \subseteq E(L')$ 且 $L' \subseteq E(L)$ 的所有 $L' \subseteq X$ 所成的族。

推论 4.7. 设 $(X, \mathcal{E})$ 是一个粗空间。那么，对每个 $E \in \mathcal{E}$和$L \subseteq X$，$\mathcal{N}_E(L) \in \mathfrak{C}_{\mathcal{E}}$。若 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}_{\mathcal{E}}$，则存在某个 $E \in \mathcal{E}$，使得对所有 $L \in \mathcal{A}$，$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}_E(L)$。

证明。注意，如果 $A, B \in \mathcal{N}_E(L)$，那么 $A \subseteq E \circ E(B)$ 且 $B \subseteq E \circ E(A)$。利用这一事实即可直接证明此推论。□

定理 4.8。设 $\mathcal{E}$ 是拓扑空间 X 上的一个粗结构，且 $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{\mathcal{E}}$。那么 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$ 是 X 上的一个近邻结构，并且它诱导的拓扑与 X 的拓扑相同。

证明。定义 2.1 的性质 i)、ii) 和 iii) 很容易证明。我们来证明定义 2.1 的性质 iv)。假设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \notin \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$。于是 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} = \bigcap_{B\in\mathcal{B}} \overline{B} = \emptyset$，这很容易说明 $\bigcap_{C\in\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} \overline{C} = \emptyset$。假设存在某个 $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$，使得 $\mathcal{C} \ll \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$。令 L 为 $\mathcal{C}$ 中任意一个元素。假设 $E \in \mathcal{E}$ 满足 $E = E^{-1}$ 且 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}_E(L)$。令 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{B}$。由于存在某个 $K \subseteq (A \cup B)$，使得 $L \subseteq E(K)$，若 $a \in L \setminus E(A)$，则我们可以选取某个 $b_a \in B$，使得 $(a, b_a) \in E$。令 $L_B^A = \{b_a \mid a \in L \setminus E(A)\}$。令 $L_B = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} L_B^A$，对每个 $B \in \mathcal{B}$ 均如此。对于所有 $A \in \mathcal{A}$ 以及 $B, C \in \mathcal{B}$，我们有 $L_B^A \subseteq E(L \setminus E(A))$ 且 $(L \setminus E(A)) \subseteq E(L_C^A)$。因此，对于所有 $A \in \mathcal{A}$ 以及 $B, C \in \mathcal{B}$，有 $L_B^A \subseteq E \circ E(L_C^A)$。这说明，对于所有 ˜$B, C \in \mathcal{B}$，有 $L_B \subseteq E \circ E(L_C)$。因此 $\mathcal{C} = \{L_B \mid B \in \mathcal{B}\} \in \mathfrak{C}$。由于我们假设 $\mathcal{B} \notin \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$，引理˜3.13 表明 $\mathcal{C}$ 不包含 $(X, \mathfrak{C})$ 的任何无界子集。因此，对于每个 $B \in \mathcal{B}$，L_B 都是有界的。现在，固定 $B \in \mathcal{B}$。假设 $A \in \mathcal{A}$。由于 $A \cup B$ 在$\mathcal{N}_E(L)$ 中有一个子集，若 $a \in (L \setminus E(L_B))$，则我们可以选取某个 $c_a \in A$，使得 $(a, c_a) \in E$。令 $R_A = \{c_a \mid a \in (L \setminus E(L_B))\}$。显然，$R_A \subseteq E(L \setminus E(L_B))$ 且 $(L \setminus E(L_B)) \subseteq E(R_C)$，因此对于所有 $A, C \in \mathcal{A}$，有 $R_A \subseteq E \circ E(R_C)$。这意味着 $\mathcal{D} = \{R_A \mid A \in \mathcal{A}\} \in \mathfrak{C}$。由于 $\mathcal{D} \ll \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A} \notin \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$, R_A 对所有 $A \in \mathcal{A}$ 都是有界的。因此 $L \setminus E(B)$ 有界，进而 $L = E(L_B) \cup (L \setminus E(L_B))$ 有界。我们证明了，若 $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ 且 $\mathcal{C} \ll \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$，则 $\mathcal{C}$ 的每个元素都是有界的。因此 $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \notin \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$。显然，$\mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$ 诱导的拓扑与 X 的拓扑相同。□

设 $\mathcal{A}$ 是拓扑空间 X 的一个子集族。定义

$$\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{A} \mid A \in \mathcal{A}\}$$

若拓扑空间 X 上的近邻 $\mathfrak{N}$ 满足 $\overline{\mathcal{A}} \in \mathfrak{N}$，则称其为 Herrlich 邻近（H-邻近），此时 $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}$。

推论 4.9. 设 $\mathcal{E}$ 是拓扑空间 X 上一个相容的真粗结构。若 $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{\mathcal{E}}$，则 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$ 是一种 H-近邻。

证明。假设 $\overline{\mathcal{A}} \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$。若 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset$，则由定义 4.6 可得 $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$。现在假设存在某个 $\mathcal{B} \in \mathfrak{C}$，使得 $\mathcal{B}$ 的每个元素都是无界的，且 $\mathcal{B} \ll \overline{\mathcal{A}}$。取一个包含对角线且满足 $E = E^{-1}$ 的开 $E \in \mathcal{E}$。容易看出，对所有 $A \subseteq X$，都有 $\overline{A} \subseteq E(A)$。取 $F \in \mathcal{E}$，使得对所有 B_1、$B_2 \in \mathcal{B}$，都有 $B_1 \subseteq F(B_2)$。对每个 $A \in \mathcal{A}$，取 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $B \subseteq A$，并令 $L_A = E(B) \cap A$。因此 L_A 包含 B，故它是无界的。由于 $B \subseteq E(A)$，显然 $B \subseteq E(L_A)$ 且 $L_A \subseteq E(B)$。令 A_1、$A_2 \in \mathcal{A}$。容易看出 $L_{A_1} \subseteq E(F(E(L_{A_2})))$。因此，$E \circ F \circ E$ 是 $\mathcal{E}$ 中所需的元素，可以证明 $\mathcal{C} = \{L_A \mid A \in \mathcal{A}\} \in \mathfrak{C}$。显然 $\mathcal{C} \ll \mathcal{A}$，从而 $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$。□

例 4.10。设 X 和 Y 如例 4.4 所述，并假设 $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_Y$。容易看出，$\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_{\mathcal{C}}$ 当且仅当 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset$，或者对于所有 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$，$\mathcal{A}$ 的所有元素都是无限的。假设 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B} \notin \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$。因此 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \emptyset$ 且 $\bigcap_{B\in\mathcal{B}} B = \emptyset$，这清楚地表明 $\bigcap_{C\in\mathcal{A}\vee\mathcal{B}} C = \emptyset$。此外，存在 $A \in \mathcal{A}$ 和 $B \in \mathcal{B}$，使得 A 和 B 是 X 的有限子集。因此，$(A \cup B) \in (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ 是有限的，故 $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \notin \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$。尽管 $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}_{\mathcal{E}}$，对于 X 上的每个粗结构 $\mathcal{E}$，我们证明了 $\mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$ 是 X 上的近邻（事实上，$\mathfrak{N}_{\mathcal{C}}$ 是 H-邻近）。

命题 4.11. 设 $\mathcal{E}$ 是拓扑空间 X 上一个相容的真粗结构，并用 $\mathfrak{C}$ 表示 $\mathfrak{C}_{\mathcal{E}}$。那么 $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$ 蕴含 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \nu A \neq \emptyset$，其中 $\nu A = \overline{A} \cap \nu X$，而 $\overline{A}$ 是 A 在 hX 中的闭包。

证明。 这是命题 4.2 的直接推论。 □

命题 4.11 的逆命题一般来说并不成立。

例 4.12. 设 $X = \mathbb{N}$ 并考虑 X，其度量是从 $\mathbb{R}$诱导的标准度量。设$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_d$ 并假设 δ 是定义 2.10 中定义的邻近2.10，其中 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_d$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，假设

$$A_n = \{2^{nk} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

令 $\mathcal{F}$ 表示所有满足以下条件的 $B \subseteq X$ 构成的族：$A_n \subseteq B$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$。显然，$\mathcal{F}$ 是 X 中的一个 ˜ 滤子。设 $\mathcal{F}$ 是一个包含 $\mathcal{F}$ 的超滤子，并令

$$\mathcal{C} = \{A \subseteq X \mid A\delta B \; for \; all \; B \in \tilde{\mathcal{F}}\}$$

族 $\mathcal{C}$ 是 (X, δ) 中的一个簇（参见 [11] 的定理 5.8），显然 $\mathcal{C} \in \nu X$。此外，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{C} \in \nu A_n$。因此 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \nu A_n \neq \emptyset$。现在假设 $L \subseteq A_1$ 且 $m = \min\{a \mid a \in L\}$。于是，对于某个 $k \in \mathbb{N}$，有 $m = 2^k$。因为若 $n \to +\infty$，则 $|2^n - 2^k| \to +\infty$，$d(m, A_n) \to +\infty$，其中 $n \to +\infty$。这显然表明 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$。

定义 4.13. 设 $(X, \mathfrak{N})$ 为一个 N-空间。若非空子集 $\mathcal{C}$ of $\mathcal{P}(X)$ 满足以下性质，则称其为 $(X, \mathfrak{N})$ 中的丛。i) $\mathcal{C} \in \mathfrak{N}$.

ii) $A \cup B \in \mathcal{C}$，当且仅当，对于所有 A、$B \subseteq X$，$A \in \mathcal{C}$ 或 $B \in \mathcal{C}$。

iii) 如果 $\overline{A} \in \mathcal{C}$，那么 $A \in \mathcal{C}$。
值得一提的是，$(X, \mathfrak{N})$ 中的丛 $\mathcal{C}$ 若满足 $(\{\{A\}\} \cup \mathcal{C}) \in \mathfrak{N}$then $A \in \mathcal{C}$，则称其为近簇。

众所周知，若 $A\delta B$ 对于邻近空间 (X, δ, δ) 中的两个子集 A 和 B，则存在一个簇 $\mathcal{C}$ 属于 (X, δ)，使得 $A, B \in \mathcal{C}$ ([14])。但这一结果无法推广到所有近邻空间。文献 [12]给出了一个反例，说明后一事实。我们将在此给出一大类反例。

命题 4.14. 设 d 是集合 X 上的一个度量，且 $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_d$。假设 $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$ 满足 $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} = \emptyset$。那么 $(X, \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}})$ 中的每个丛都不包含 $\mathcal{A}$。
证明。反设存在 $(X, \mathfrak{N}_d)$ 中的某个丛 $\mathcal{C}$，使得 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$，这与我们的结论相反。由于 $\mathcal{C} \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$，存在某个 $\mathcal{B} \in \mathfrak{C}_d$，使得 $\mathcal{B}$ 不包含 X 的任何有界子集，并且 $\mathcal{B} \ll \mathcal{C}$。令 $L \in \mathcal{B}$。根据 [8]，的引理 4.2，AS.R 空间 (X, λ_d) 中的 L 有两个无界且渐近不相交子集 L_1 和 L_2。由于 (X, λ_d) 是渐近正规 AS.R 空间，存在 $X_1, X_2 \subseteq X$，使得 $X = X_1 \cup X_2$，并且它们分别与 (X, λ_d) 中的 L_1 和 L_2 渐近不相交。因此，X_1 和 X_2 不包含任何与 L 有有限豪斯多夫距离的子集。于是 $X_1, X_2 \notin \mathcal{C}$，进而 $X \notin \mathcal{C}$，矛盾。□

假设 X 是拓扑空间 Y 的稠密子空间。定义："若 $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset$，则 $\mathcal{A} \in \mathfrak{N}_Y$，对所有 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 均成立"。近邻结构 $\mathfrak{N}_Y$ 称为与 Y 相关联的 X 上的拓扑近邻结构。

推论 4.15. 设 (X, d) 是一个度量空间，并假设 $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_d$。那么，对于 X 的每个紧化 Y，近邻$\mathfrak{N}_{\mathfrak{C}}$ 都不是与 Y 相关联的拓扑近邻结构。
证明。这是命题 4.14 的直接推论。 □

5. Asymptotic dimension of LS.R spaces

定义 5.1. 设 $\mathfrak{C}$ 是集合 X 上的一个 LS.R。若子集族 $\mathcal{U}$ 在 $(X, \mathfrak{C})$ 中一致有界，则称其在 X 中一致有界，其中

$$\mathcal{A}_{\mathcal{V}} = \{A \subseteq X \mid A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U \, and \, A \cap U \neq \emptyset \, for \, all \, U \in \mathcal{V}\} \in \mathfrak{C}$$

对所有非空的 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ 均成立。

推论 5.2. 假设 $\mathcal{U}$ 是 LS.R 空间 $(X, \mathfrak{C})$ 中的一个一致有界子集族，则 $\mathcal{U}$ 的每个元素都是有界的。
证明。假设 $U \in \mathcal{U}$且 $x \in U$。令 $\mathcal{V} = \{U\}$。显然 x，$U \in \mathcal{A}_{\mathcal{V}}$定义 3.1 的性质 ii) 显然表明 $\{\{x\}, U\} \in \mathfrak{C}$。 □

让我们回顾一下以下引理，它摘自[9]。

引理 5.3. 设 (X, d) 是一个度量空间。令 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 X 中的两个序列。如果对于每个 $I \subseteq \mathbb{N}$，$\{a_i \mid i \in I\}$ 与$\{b_i \mid i \in I\}$ 之间的豪斯多夫距离均有限，那么存在某个 $R > 0$，使得 $d(a_n, b_n) \leq R$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。
证明。这是 [9]中的引理 2.2。 □

命题 5.4。设 d 是集合 X上的一个度量。那么，子集族 $\mathcal{U}$ 在（X， $\mathfrak{C}_d$）中一致有界，当且仅当存在某个 $R>0$，使得对于所有 $U\in\mathcal{U}$，diam(U) $\leq R$。

证明。假设存在某个 $R>0$，使得对所有 $U\in\mathcal{U}$，diam(U) $\leq R$。设 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{U}$ 的非空子集。假设 $A,B\in\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$。若 $a\in A$，则存在某个$U\in\mathcal{V}$，使得 $a\in U$。由于 $B\cap U\neq\emptyset$，存在某个 $b\in(B\cap U)$。因此 $d(a,b)\leq R$。对 B 中的每个元素，同样的论证都成立，这表明 A 与 B 之间的豪斯多夫距离小于或等于 R。因此 $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}\in\mathfrak{C}_d$。为证明逆命题，反设与本命题的断言相反：对每个 $n\in\mathbb{N}$，都存在某个$U_n\in\mathcal{U}$，使得 diam(U_n) $>n$。因此，存在 $a_n,b_n\in U_n$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$， $d(a_n,b_n)>n$。假设 $I\subseteq\mathbb{N}$。令 $\mathcal{V}=\{U_i\mid i\in I\}$。假设 $A=\{a_i\mid i\in I\}$ 且 $B=\{b_i\mid i\in I\}$。显然 $A,B\in\mathcal{A}_{\mathcal{V}}$。由于 $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}\in\mathfrak{C}_d$，存在某个 $K>0$，使得 $d_H(A,B)\leq K$。显然，引理 5.3 表明存在某个 $R>0$，使得对所有 $n\in\mathbb{N}$，$d(a_n,b_n)\leq R$，矛盾。□

设 X 为一个集合，并假设 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}\subseteq\mathcal{P}(X)$。回顾一下，“$\mathcal{U}$细化 $\mathcal{V}$”是指，对于每个 $U\in\mathcal{U}$，存在某个 $V\in\mathcal{V}$，使得 $U\subseteq V$。此外，回顾一下，覆盖 $\mathcal{U}$ 的 X 的重数是满足以下条件的最小自然数集 n（如果这样的 n 存在）：每个 $x\in X$ 至多属于 $\mathcal{U}$ 的 n 个元素。

定义 5.5。我们称 LS.R 空间（X， $\mathfrak{C}$）的渐近维数小于或等于 n（$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$），如果 X 的每个一致有界覆盖 $\mathcal{U}$ 都细化为 X 的一个一致有界覆盖 $\mathcal{V}$，且 $\mathcal{V}$ 的重数小于或等于 $n+1$。此时记作 asdim$_{\mathfrak{C}}X\leq n$。如果 asdim$_{\mathfrak{C}}X\leq n$ 且 asdim$_{\mathfrak{C}}X\leq n-1$ 不成立，则称 asdim$_{\mathfrak{C}}X=n$。如果对每个 $n\in\mathbb{N}$，asdim$_{\mathfrak{C}}X\leq n$ 都不成立，则称（X， $\mathfrak{C}$）具有无限渐近维数。

定义 5.6。设 $(X,\mathfrak{C})$ 是一个 LS.R 空间，且 Y 是 X 的非空子集。我们定义

‘$\mathcal{A}\in\mathfrak{C}\mid_Y$若 $\mathcal{A}\in\mathfrak{C}$，对所有 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(Y)$.’

族 $\mathfrak{C}\mid_Y$ 是 Y 上的 LS.R，我们称其为由 Y 诱导的子空间 LS.R。

命题 5.7。设 Y 是 LS.R 空间 $(X,\mathfrak{C})$ 的非空子集。则

$$\operatorname{asdim}_{\mathfrak{C}\mid_Y}Y\leq\operatorname{asdim}_{\mathfrak{C}}X$$

证明。假设对于某个 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，asdim$_{\mathfrak{C}}X\leq n$。设 $\mathcal{U}$ 是 Y 的一致有界覆盖。令 $\mathcal{V}=\mathcal{U}\cup\{\{x\}\mid x\in X\setminus Y\}$。假设 $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$。令

$$B=\{x\in X\setminus Y\mid\{x\}\in\mathcal{W}\}$$

假设 $\mathcal{B}=\{A\cap Y\mid A\in\mathcal{A}_{\mathcal{W}}\}$，并令 $\mathcal{W}'=\{U\in\mathcal{U}\mid U\in\mathcal{W}\}$。容易看出 $\mathcal{B}=\mathcal{A}_{\mathcal{W}'}$。由于 $\mathcal{U}$是 Y的一个一致有界覆盖，且 $\mathcal{W}'\subset\mathcal{U}$，因此 $\mathcal{B}\in\mathfrak{C}\mid_Y$。于是$\mathcal{B}\in\mathcal{C}$。由于 $A=(A\cap Y)\cup B$，对于所有 $A\in\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$，显然 $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}=\mathcal{B}\vee\{B\}\in\mathcal{C}$。因此，定义 3.1 的性质 iv) 表明 $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}\in\mathfrak{C}$。于是 $\mathcal{V}$ 是 X的一个一致有界覆盖。由于渐近维数$_{\mathcal{C}}X\leq n$，存在 X 的一个一致有界覆盖 $\mathcal{V}'$，使得 $\mathcal{V}$ 细化$\mathcal{V}'$，且 $\mathcal{V}'$ 的重数小于或等于 $n+1$。令

$$\mathcal{U}'=\{U\cap Y\mid U\in\mathcal{V}'\,and\,V\subseteq U,\,for\,some\,V\in\mathcal{U}\}$$

显然， $\mathcal{U}$细化 $\mathcal{U}'$，且 $\mathcal{U}'$的重数小于或等于 $n+1$。此外，很容易证明 $\mathcal{U}'$ 是 LS.R 空间 $(Y, \mathfrak{C}|_Y)$ 的一个一致有界子集族。这表明渐近维数 $_{\mathfrak{C}|_Y} Y \leq n$。因此，渐近维数 $_{\mathfrak{C}|_Y} Y \leq$ 渐近维数 $_{\mathfrak{C}} X$。□

定理 5.8。假设（$X, \mathfrak{C}$）和（$Y, \mathfrak{C}'$）是两个大尺度等价的 LS.R 空间。那么

$$\text{asdim}_{\mathfrak{C}} X = \text{asdim}_{\mathfrak{C}'} Y$$

证明。设 $f: X \to Y$ 是 X 与 Y 之间的一个大尺度等价映射，且设 $g: Y \to X$ 是 f 的一个大尺度逆映射。假设 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 且渐近维数 $_{\mathfrak{C}} X \leq n$。设 $\mathcal{U}$ 是 Y 的一个一致有界覆盖。令 $\mathcal{V} = \{g(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$。设 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ 且令 $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{W}}$。令 $\mathcal{W}' = \{U \in \mathcal{U} \mid g(U) \in \mathcal{W}\}$。假设 $A' = g^{-1}(A) \cap (\bigcup_{U \in \mathcal{W}'} U)$。容易验证， $A' \in \mathcal{A}_{\mathcal{W}'}$ 且 $g(A') = A$。因此，存在 $\mathcal{A}_{\mathcal{W}'}$ 的一个子集 $\mathcal{B}$，使得 $g(\mathcal{B}) = \mathcal{A}_{\mathcal{W}}$。由于 $\mathcal{A}_{\mathcal{W}'} \in \mathfrak{C}'$，定义 3.1 的性质 ii) 表明 $\mathcal{B} \in \mathfrak{C}'$；又由于 g 是一个 LS.R 映射， $\mathcal{A}_{\mathcal{W}} = g(\mathcal{B}) \in \mathfrak{C}$。因此， $\mathcal{V}$ 是Z的一个一致有界覆盖，其中 $Z = g(Y)$。根据命题 5.7，渐近维数$_{\mathfrak{C}|_Z} Z \leq n$。因此，存在 Z 的一个一致有界覆盖 $\mathcal{V}'$，使得 $\mathcal{V}'$ 的重数小于或等于 $n+1$，且$\mathcal{V}$细化 $\mathcal{V}'$。令 $\mathcal{U}' = \{g^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}'\}$。不难证明， $\mathcal{U}$ 细化$\mathcal{U}'$，且 $\mathcal{U}'$的重数小于或等于 $n+1$。还需证明， $\mathcal{U}'$是（$Y, \mathfrak{C}'$）的一个一致有界子集族。为此，假设 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}'$。令$\mathcal{O}' = \{V \in \mathcal{V}' \mid g^{-1}(V) \in \mathcal{O}\}$。容易证明， $g(\mathcal{A}_{\mathcal{O}}) \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{O}'}$。因此，由定义 3.1 的性质 ii) 可得 $g(\mathcal{A}_{\mathcal{O}}) \in \mathfrak{C}$；又由于 f 是一个 LS.R 映射， $f(g(\mathcal{A}_{\mathcal{O}})) \in \mathcal{C}'$。于是，引理 3.15 的性质 i) 蕴含 $\mathcal{A}_{\mathcal{O}} \in \mathfrak{C}'$，这正是所需结论。因此我们证明了渐近维数$_{\mathfrak{C}'} Y \leq n$。这表明渐近维数$_{\mathfrak{C}'} Y \leq$ 渐近维数$_{\mathfrak{C}} X$。类似的论证可验证不等式：渐近维数$_{\mathfrak{C}} X \leq$ 渐近维数 $_{\mathfrak{C}'} Y$。□

例5.9。设 $X = \mathbb{N}$，并考虑带有离散拓扑的 X。令 Y 表示 X的一点紧化。假设 $\mathcal{U}$是 $(X, \mathfrak{C}_Y)$ 的一致有界覆盖。首先注意到，由于 $\mathcal{U}$ 一致有界，推论 5.2 表明 $\mathcal{U}$ 的每个元素都有界，因此是有限的。令 $i \in \mathbb{N}$。假设 $\mathcal{W} = \{U \in \mathcal{U} \mid i \in U\}$。由于 $\{i\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathcal{W}} \in \mathfrak{C}_Y$， $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ 的每个元素都有界。因此 $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ 的所有元素都是有限的。于是$\bigcup_{U \in \mathcal{W}} U \in \mathcal{A}_W$ 是有限的。这显然意味着 $\mathcal{W}$ 是有限的。因此，我们证明了：对于某个 $U \in \mathcal{U}$，满足 x、$i \in U$的所有 $x \in \mathbb{N}$ 所构成的集合有最大值。令 $a_1 = 1$。假设对于某个 $n \in \mathbb{N}$，选取了 a_n。令 a_{n+1} 为满足 x、$l \in U$的最大 $x \in \mathbb{N}$，其中 $U \in \mathcal{U}$且 $l \leq a_n + 1$。假设对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $V_1 = \{1, ..., a_2\}$ 且$V_{n+1} = \{a_n + 1, ..., a_{n+2}\}$。令 $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$。假设 $U \in \mathcal{U}$，且 $m = \min\{x \mid x \in U\}$。若 $m = 1$，则显然 $U \subseteq V_1$。假设 $m \geq 2$。选取$n \in \mathbb{N}$ 使得 $a_n + 1 \leq m \leq a_{n+1}$（注意，对每个 $n \in \mathbb{N}$， $a_{n+1} \geq a_n + 1$显然成立）。容易验证 $U \subseteq V_{n+1}$。因此 $\mathcal{U}$ 细化 $\mathcal{V}$。假设 $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$。若 $\mathcal{V}'$ 有限，则 $\mathcal{A}_{\mathcal{V}'}$ 的每个元素都是有限的；若 $\mathcal{V}'$ 无限，则$\mathcal{A}_{\mathcal{V}'}$ 的每个元素都是无限的。因此，两种情况下都有 $\mathcal{A}_{\mathcal{V}'} \in \mathfrak{C}_Y$。这表明 $\mathcal{V}$ 是 X的一个一致有界子集族。此外，若 $n \in \mathbb{N}$，则对每个 $m \geq n+2$，都有 $V_n \cap V_m = \emptyset$。这表明 $\mathcal{V}$ 的重数等于 2。因此我们证明了渐近维数$_{\mathfrak{C}_Y} X \leq 1$。现在令 $\mathcal{O} = \{\{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{N}\}$。容易看出，族 $\mathcal{O}$ 是 X的一个一致有界子集族。假设 $\mathcal{O}'$ 是 $(X, \mathcal{C}_Y)$ 的一致有界覆盖，且 $\mathcal{O}$ 细化它。假设 $\mathcal{O}'$ 的重数小于或等于 1。选取

$O \in \mathcal{O}'$ 使得 $\{1,2\} \subseteq O$。假设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \in O$。由于 $\mathcal{O}'$ 的重数小于 1，对于所有满足 $O' \neq O$的 $O' \in \mathcal{O}'$，都有 $n \notin O'$。由于 $\{n, n+1\} \in \mathcal{O}$，$n+1 \in O$。因此 $O = \mathbb{N}$，这与 O有界这一事实矛盾。因此 $\mathcal{O}'$ 的重数大于或等于 2。因此我们证明了渐近维数$_{\mathfrak{C}_Y} X \geq 1$，由此可得渐近维数$_{\mathfrak{C}_Y} X = 1$。

6. Large scale regular LS.R spaces

定义 6.1. 若对于两个非空子集 A_1 和 A_2 of X，只要 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$and $(A_1 \cup A_2) \in \mathcal{A}$，就存在某些$\mathcal{A}_1$，$\mathcal{A}_2 \in \mathfrak{C}$，分别包含它们 A_1 和 A_2，且 $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2)$，则称 LS.R 空间 $(X, \mathfrak{C})$ 为大尺度正则（LS-正则）。

推论 6.2. 设 X 是一个集合，并假设 $\mathcal{E}$ 和 λ 分别表示 X上的一个粗结构˜ ˜和一个 AS.R。那么， $\mathfrak{C}_\mathcal{E}$, $\mathfrak{C}_\mathcal{E}$, $\mathfrak{C}_\lambda$ 和 $\mathfrak{C}_\lambda$ 是 X上的 LS-正则大尺度相似关系。

证明。显然。 □

例 6.3。 设 X 和 $\mathfrak{C}$ 如例 3.2所示。显然 $\mathfrak{C}$ 不是 LS-正则的。

例 6.4. 在例 $\mathfrak{C}_Y$ 中定义的 4.4显然是 LS-正则的。回忆一下˜$\mathfrak{C}_Y \neq \mathfrak{C}_\mathcal{E}$， $\mathfrak{C}_\mathcal{E}$，对于所有粗结构 $\mathcal{E}$ 在 X 上。

定义 6.5. 设 $\mathfrak{C}$ 是集合 X 上的一个 LS.正则 LS.R。对于 X 的两个子集 A 和 B，定义

‘$A\lambda_\mathfrak{C}B$，如果对于某个 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$， A、$B \in \mathcal{A}$’。

容易验证， $\lambda_\mathfrak{C}$ 是集合 X 上的一个 AS.R。

假设 λ 和 λ' 是集合 X 上的两个 AS.R关系。如果对于所有 A、$B \subseteq X$， $A\lambda B$ 蕴含 $A\lambda' B$，则称 $\lambda \leq \lambda'$。下面的两个命题很容易证明。

˜命题 6.6. 设 λ 是集合 X 上的一个 AS.R。分别将 $\mathfrak{C}_\lambda$ 和 $\mathfrak{C}_\lambda$ 记为 $\mathfrak{C}$ 和 $\mathfrak{C}'$。则 $\lambda_\mathfrak{C} = \lambda$ 和 $\lambda_{\mathfrak{C}'} \leq \lambda$。

命题 6.7. 设 $\mathfrak{C}$ 是集合 X 上的 LS.正则 LS.R，并记 $\lambda_\mathfrak{C}$ 为 λ。那么 $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}_\lambda$。

命题 6.8. 设 $(X, \mathfrak{C})$ 是一个 LS-正则 LS.R 空间。若 $\mathcal{U}$ 是 LS.R 空间 $(X, \mathfrak{C})$ 的一致有界子集族，则它是 AS.R 空间 $(X, \lambda_\mathfrak{C})$ 的一致有界子集族，

证明。假设 A 和 B 是 X 的两个子集，满足 $A \subseteq \bigotimes_\mathcal{U}(B)$ 且 $B \subseteq \bigotimes_\mathcal{U}(A)$。设 $\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U} \mid A \cap U \neq \emptyset \, and \, B \cap U \neq \emptyset\}$。显然 A、$B \in \mathcal{A}_\mathcal{U}$，因此 $A\lambda_\mathfrak{C}B$。□

命题 6.8 的逆命题一般而言并不成立。

例 6.9. 设 $X = \mathbb{N}$，并假设 $\mathcal{E}$ 表示所有满足以下性质的 $E \subseteq X \times X$ 的族。

‘存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $x \in X$， $E(x)$ 和 $E^{-1}(x)$ 至多有 n 个成员。’

族 $\mathcal{E}$ 是 X 上的粗结构（ $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\mathcal{E}$）。令 $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\mathcal{E}$。对于 A 和 B 中的两个子集 X，有 $A\lambda_\mathfrak{C}B$ 当且仅当 A 和 B 要么都有限，要么都无限

（见 [9]的例 3.1）。令 $U_i = \{i, i+1, ..., 2i\}$，对每个 $i \in \mathbb{N}$。假设 $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$。容易验证， $\mathcal{U}$ 是 AS.R 空间（$X, \lambda_{\mathfrak{C}}$）上的一致有界子集族。我们断言 $\mathcal{A}_{\mathcal{U}} \notin \mathfrak{C}$。反设 $E \in \mathcal{E}$满足：对于所有 $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$，都有 $A \subseteq E(B)$。令 $N \in \mathbb{N}$满足 $E(x)$，且对于所有 $x \in X$， $E^{-1}(x)$至多有 N 个元素。显然 $X \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$。由于对每个$x \in X$， $E(x)$和 $E^{-1}(x)$都含有有限个元素，我们可以选取足够大的 $m \in \mathbb{N}$，使得对每个 $i \leq 2N$，都有（$E(m) \cup E^{-1}(m)$）$\cap U_i = \emptyset$。令 $i > 2N$。由于 U_i 有多于 $2N+1$个元素，我们可以选取 $a_i \in U_i$ 使得 $a_i \notin (E(m) \cup E^{-1}(m))$。令 $A = (\cup_{i=1}^{2N} U_i) \cup B$，其中 $B = \{a_i \mid i > 2N\}$。显然 $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{U}}$，且（$E(m) \cup E^{-1}(m)$）$\cap A = \emptyset$。这表明 $\mathbb{N}$ 不是 $E(A)$的子集，矛盾。因此 $\mathcal{A}_{\mathcal{U}} \notin \mathfrak{C}$，从而 $\mathcal{U}$ 不是 LS.R 空间（$X, \mathfrak{C}$）上的一致有界子集族。

定义 6.10. 我们称 LS.R 空间 $(X, \mathfrak{C})$ 为 A-LS.R 空间，如果：i) $(X, \mathfrak{C})$ 是 LS-正则的。ii) 对每个 $A, B \in \mathcal{A}$， $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 和 $\{A, B\} \in \mathfrak{C}$，则 $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}$。

我们用 L 表示由所有 LS.R 空间及 LS.R 映射构成的范畴。

定理 6.11. 设 A 和 R 分别表示 L 的满子范畴，其对象分别是所有 A-LS.R 空间和所有 LS-正则 LS.R 空间。则：i) A 与由所有 AS.R 空间及 AS.R 映射构成的范畴同构。ii) A 是 R 的反射性满子范畴。

证明。i) 设 F 表示这样一个函子：它将每个 A-LS.R 空间 $(X, \mathfrak{C})$ 对应到 AS.R 空间 $(X, \lambda_{\mathfrak{C}})$，并将两个 A-LS.R 空间 $(X, \mathfrak{C})$ 和 $(Y, \mathfrak{C}')$ 之间的每个 LS.R 映射 $f: X \to Y$ 对应到 AS.R 映射 $f: (X, \lambda_{\mathfrak{C}}) \to (Y, \lambda_{\mathfrak{C}'})$。不难证明， F 定义了一个范畴同构。

ii) 假设 $(X, \mathfrak{C})$ 是 LS-正则 LS.R 空间。定义 $\tilde{\mathfrak{C}}$ 为所有满足 $\{A, B\} \subseteq \mathfrak{C}$ 的 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 的集合，其中对所有 $A, B \in \mathcal{A}$ 均成立。显然，$(X, \tilde{\mathfrak{C}})$ 是一个 A-LS.R 空间。此外请注意，若 $(Y, \mathfrak{D})$ 是一个 A-LS.R 空间，且 $f: (X, \mathfrak{C}) \to (Y, \mathfrak{D})$ 是一个 LS.R 映射，则 $f: (X, \tilde{\mathfrak{C}}) \to (Y, \mathfrak{D})$ 是一个 LS.R 映射。因此，$((X, \tilde{\mathfrak{C}}), i)$ 是 $(X, \mathfrak{C})$ 的 A-反射。□

References

[1] G. Bell, A. Dranishnikov 渐近维数，Topology and its Applications，第 155 卷（2008），1265-1296。[2] H.L.Bentley, H. Herrlich, M. Husek，拓扑学中一致、邻近和接近性概念的历史发展，Handbook of the history of general topology，第 3 卷。Springer Science and Business Media, 2013。[3] V. A. Efremovic，无穷小空间，DAN SSSR 76（1951年），341-343。[4] V. A. Efremovic，邻近几何 I，Mat. Sb. 31（1951年），189-200。[5] B. Grave，粗空间的渐近维数，New York J. Math 12（2006），249-256。[6] M. Gromov，无限群的渐近不变量，London Math. Soc. Lecture Notes，182，1993。[7] H. Herrlich，接近性概念，General Topology and its applications 4.3（1974），191-212。[8] Sh. Kalantari，一种用于大尺度计数维数的新归纳方法，Archiv der Mathematik，110.4（2018），403-412。[9] Sh. Kalantari, B. Honari，渐近相似，Rocky Mountain J. Math. 第 46 卷，第 4 期（2016），1231-1262。[10] S. Naimpally，利用邻近方法解决拓扑与分析问题，Walter de Gruyter，2010。

[11] S. A. Naimpally 和 B. D. Warrack，邻近空间，剑桥数学丛书第 59 号，剑桥大学出版社，英国剑桥，1970，平装版（2008）。[12] S. A. Naimpally, J. H. M. Whitfield，并非每个近族都包含于某个族中，美国数学会会刊 47.1（1975），237-238。[13] J. Roe，粗几何讲义，大学讲座丛书第 31 册。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003。[14] J. W. Thron，关于 F. Riesz 有关邻近结构的问题，美国数学会会刊 40.1（1973），323-326。

(SH. KALANTARI) Department of Basic Sciences, Babol Noshirvani University of Technology, Shariati Ave.,Babol, Iran, Post Code:47148-71167.电子邮箱：shahab.kalantari@nit.ac.ir