arXiv:2301.09101v1 [math.GR] 22 Jan 2023

# 素数幂阶群的舒尔乘子阶的界

PRADEEP K. RAI

摘要。1956 年，Green 给出了 $p$-群的舒尔乘子阶的一个界。这个界以群的阶为函数给出，是可能达到的最佳界。此后，通过向该函数中加入其他输入量，这一界被多次改进，例如群的最小生成元数以及导出子群的阶。我们通过加入另一个输入量——群的幂零类——进一步加强这些界。幂零类 2 和极大类的具体情形将得到更为详细的讨论。

## 1. 引言

有限群 $G$ 的舒尔乘子 $M(G)$ 被定义为 $G$ 以 $\mathbb{C}^*$ 为系数的第二上同调群。它在群扩张理论中发挥着重要作用。求素数幂阶群的舒尔乘子的阶、指数和秩的界，一直是先前研究的重点。本文研究素数幂阶群的舒尔乘子阶的界。

设 $G$ 是一个有限 $p$-群，其阶为 $p^n$。1956 年，Green [6] 证明了 $|M(G)|\leq p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$。此后，许多数学家进一步改进了这一界 [3, 4, 5, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22]。

为介绍最近的结果，设 G 是一个阶为 $p^n$ 、导出子群的阶为 $p^k$ 的非阿贝尔 $p$-群。Niroomand[15] 证明了

$$|M(G)|\leq p^{\frac{1}{2}(n-k-1)(n+k-2)+1}. \tag{1.1}$$

作者在 [17] 中指出，Ellis 和 Wiegold 给出的界 [4] 优于此界，并由他们的界推导出

$$|M(G)|\leq p^{\frac{1}{2}(d-1)(n+k-2)+1}(= p^{\frac{1}{2}(d-1)(n+k)-(d-2)}),$$

其中， $d$ 是 $G$.的最小生成元个数

本文通过引入另一个参数，即群的幂零类，进一步改进这些界。

在介绍本文的结果之前，我们先约定一些大多是标准的记号。群 $G$ 的中心和交换子子群分别记作 $Z(G)$和 $\gamma_2(G)$。我们用 $d(G)$表示 $G$的最小生成元个数。 $\gamma_i(G)$ 表示$G$的下中心列中的第 $i$项。子群h$x^p \mid x \in G$i记作 $G^p$。最后，群 $G$的阿贝尔化，即 $G/\gamma_2(G)$，记作 $G^{ab}$。

2010 数学学科分类号。 20J99, 20D15.关键词和短语。 舒尔乘子，有限 $p$-群，极大类。

现在陈述我们的第一个定理。

**定理 1.1.** 设 $G$ 是一个阶为 $p^n$ 、幂零类为 $c$的非阿贝尔 $p$ 群，且满足 $|\gamma_2(G)|= p^k$ 和 $d = d(G)$。那么

$$|M(G)|\leq p^{\frac{1}{2}(d-1)(n+k)-\sum_{i=2}^{\min(d,c)} d-i}.$$

因此，若 $\mu = \min(d, c)$ ，则，

$$|M(G)|\leq p^{\frac{1}{2}(d-1)(n+k)-\frac{1}{2}(\mu-1)[2d-(\mu+2)]}.$$

分情况讨论，不等式可改写如下：

$$|M(G)|\leq \begin{cases} p^{\frac{1}{2}(d-1)(n+k)-\frac{1}{2}(d-1)(d-2)} & if \quad d \leq c \\ p^{\frac{1}{2}(d-1)(n+k)-\frac{1}{2}(c-1)(2d-(c+2))} & if \quad d \geq c. \end{cases}$$

接下来，我们考虑幂零类 2 的 $p$ 群。有限的幂零类 2 的 $p$ 群若其中心与导群及 Frattini 子群重合，则称为特殊群。Berkovich 和 Janko 提出了以下问题：

**问题 1.2.** [1, 问题 1729] 设 $G$ 是一个特殊 $p$ 群，满足 $d(G) = d$ 且$|Z(G)|= p^{\frac{1}{2}d(d-1)}$。求 $G$的舒尔乘子，并描述 $G$的表示群。

**问题 1.3.** [1, 问题 2027] 求中心阶为 $p^2$ 的特殊 $p$-群的舒尔乘子。

Bekovich 和 Janko 的问题 1.2 和 1.3 分别在 [18] 和[7] 中进行了研究。鉴于这些问题，以及特殊 $p$-群$G$满足 $|Z(G)|= p^k$ 当且仅当 $d(\gamma_2(G)) = k$这一事实，在研究幂零类为 2 的 $d(\gamma_2(G))$ 群的舒尔乘子阶的界时，考虑术语 $p$似乎是合理的。

**定理 1.4.** 设 $G$是一个阶为 $p^n$ 的非阿贝尔有限 $p$-群，满足 $|\gamma_2(G)|= p^k$,$d(G) = d$ 且 $d\begin{pmatrix}\gamma_2(G)\\ \gamma_3(G)\end{pmatrix}(G) = \gamma$。那么

$$|M(G)|\leq p^{\frac{1}{2}(d-1)(n+k)-\sum_{i=2}^{\min(d,\gamma+1)} d-i}.$$

因此，若 $\nu = \min(d, \gamma + 1)$ ，则，

$$|M(G)|\leq p^{\frac{1}{2}(d-1)(n+k)-\frac{1}{2}(\nu-1)[2d-(\nu+2)]}.$$

分情况讨论后，不等式可改写如下：

$$|M(G)|\leq \begin{cases} p^{\frac{1}{2}(d-1)(n+k)-\frac{1}{2}(d-1)(d-2)} & if \quad d \leq \gamma+1 \\ p^{\frac{1}{2}(d-1)(n+k)-\frac{1}{2}\gamma(2d-(\gamma+3))} & if \quad d \geq \gamma+1. \end{cases}$$

鉴于问题 1.2 和 1.3 ，以下推论是定理 1.4在特殊 $p$-群上的一个应用。

**推论 1.5**。 设 $G$ 是一个幂零类为 *2* 的有限 $p$-群，且满足 $G^p \leq \gamma_2(G)$,$|\gamma_2(G)| = p^k$ 和 $d(G) = d$。那么

$$p^{\frac{1}{2}d(d-1)-k} \leq |M(G)| \leq \begin{cases} p^{(d-1)(k+1)} & if \quad d \leq k+1 \\ p^{\frac{1}{2}d(d-1)+\frac{1}{2}k(k+1)} & if \quad d \geq k+1. \end{cases}$$

此外

- 若 $G^p \cong \mathbb{Z}_p$ 则，

$$|M(G)| \leq \begin{cases} p^{(d-1)k-1} & if \quad d \leq k \\ p^{\frac{1}{2}d(d-1)+\frac{1}{2}k(k-1)-1} & if \quad d \geq k. \end{cases}$$

- 若 $p$ 是奇素数且 $G^p = \gamma_2(G)$，则

$$|M(G)| \leq p^{\frac{1}{2}d(d-1)+\frac{1}{2}k(k-3)}.$$

- 若 $G_1$ 和 $G_2$ 是特殊 $p$群，且 $|Z(G_1)| = p^2$ 并且 $|Z(G_2)| = p^3$ ，则

$$p^{\frac{1}{2}d(d-1)-2} \leq |M(G_1)| \leq p^{\frac{1}{2}d(d-1)+3}$$

*and*

$$p^{\frac{1}{2}d(d-1)-3} \leq |M(G_2)| \leq p^{\frac{1}{2}d(d-1)+6}.$$

设 $p$ 是奇素数， $G_1$ 是一个特殊的 $p$群，且 $|Z(G_1)| = p^2$。Mazur [13] 已经给出了这一情形下更一般的结果。他证明，若中心核 $Z^*(G_1)$ 与中心 $Z(G_1)$ 不重合，则 $G_1$ 的指数为 $p$ ，并属于五类群之一。这些群包括一个阶为 $p^5$的群、三个阶为 $p^6$ 的群、两个阶为 $p^7$ 的群、一个阶为 $p^{2m+3}$ 的群（对所有 $m \geq 3$ ）以及两个阶为 $p^{2m+2}$ 的群（对所有 $m \geq 2$）。由[11, 定理 2.5.10] 容易看出，若 $Z^*(G_1)$ 与 $Z(G_1)$ 重合，则 $M(G_1)$ 是阶为 $p^{\frac{1}{2}d(d-1)-2}$的初等阿贝尔群。因此，只需计算上述五个群族中各群的舒尔乘子。这可以利用 Mazur 给出的非唯一中心群的显式表示轻松完成。这一观察否定了 [7, 定理 1.3(d)] ，该定理指出，若 $G_1^p \cong \mathbb{Z}_p$，则 $|M(G_1)| = p^{\frac{1}{2}d(d-1)}$ 当且仅当 $Z^*(G_1) = G^p$。显然，由上述讨论可知，这类群并不存在。此外，与 [7,定理 1.1(c)], 相反，可以看出， $G_1$ 的舒尔乘子总是初等阿贝尔群，其指数从来不会是 $p^2$。

以下推论改进了1.5 对于 $G_2$ 当 $|G_2| \geq p^{13}$.

**推论 1.6**。 设 $p$ 为奇素数， $G_2$ 为一个特殊的 $p$-群，且 $|Z(G_2)| = p^3$且 $|G_2| \geq p^{13}$. 那么

$$|M(G_2)| \leq p^{\frac{1}{2}d(d-1)+2}.$$

此外，若 $G_2^p = \gamma_2(G_2)$，则

$$|M(G_2)| \leq p^{\frac{1}{2}d(d-1)-2}.$$

接下来，我们考虑极大类群。若有限 $p$阶为 $p^n$的群的幂零类为 $n-1$，则称其为极大类群。设 $G$ 是一个有限$p$极大类群，阶为 $p^n$。由于 $G$ 由两个元素生成，它

由Gasch¨utz [5] 的一个结果可得： $|M(G)|\leq p^{n-1}$。Moravec [14] 证明了，若 $n > p+1$则 $|M(G)|\leq p^{\frac{p+1}{2}\lceil\frac{n-1}{p-1}\rceil}$。在改进Moravec的结果后，我们证明如下定理。

**定理 1.7.** 设 $p$ 是一个奇素数， $G$ 是一个有限的极大类 $p$-群，且 $|G|= p^n$, $n \geq 4$。那么 $|M(G)|\leq p^{\frac{n}{2}}$。

## 2. 证明

设 $G$ 是一个有限的 $p$-群， $\overline{G}$ 是因子群 $G/Z(G)$。元素 $x, y \in G$ 的交换子 $x^{-1}y^{-1}xy$ 记作 $[x, y]$.。为便于阅读，我们将对 $g \in G$ 使用相同的"横线记号"$\overline{g}$，以表示不同因子群中的不同元素，只要不会引起歧义。这些记号应根据上下文来理解。例如，每当 $\overline{[x_1, x_2]} \otimes \overline{x_3} \in {}^{\gamma_2(G)\,\gamma_3(G)} \otimes \overline{G}^{ab}$ 对于 $x_1, x_2, x_3 \in G$成立时，我们用$\overline{[x_1, x_2]}$和 $\overline{x_3}$分别表示 $[x_1, x_2]\gamma_3(G)$ 和 $x_3Z(G)\gamma_2(G)$。

现在我们着手证明定理 1.1。证明基于 Ellis 和 Weigold 的以下结果 [4, 命题 1，定理之后的评论 2]。

**命题 2.1**。 设 $G$是一个幂零类为 $c$ 的有限 $p$群，且 $\overline{G}$ 是因子群 $G/Z(G)$。则

$$\Big|M(G)\Big|\Big|\gamma_2(G)\Big|\prod_{i=2}^{c}\Big|\operatorname{Im}\Psi_i\Big| \leq \Big|M(G^{ab})\Big|\prod_{i=2}^{c}\Big|\frac{\gamma_i(G)}{\gamma_{i+1}(G)} \otimes \overline{G}^{ab}\Big|,$$

其中 $\Psi_i$，对 $i = 2, \ldots c$，是一个从 $\underbrace{\overline{G}^{ab} \otimes \overline{G}^{ab} \quad \otimes \overline{G}^{ab}}_{i+1 \text{ 次}} \cdots$ 到 ${}^{\gamma_i(G)\,\underline{\gamma_{i+1}(G)}} \otimes \overline{G}^{ab}$ 定义如下：

$$\Psi_2(\overline{x_1} \otimes \overline{x_2} \otimes \overline{x_3}) = \overline{[x_1, x_2]} \otimes \overline{x_3} + \overline{[x_2, x_3]} \otimes \overline{x_1} + \overline{[x_3, x_1]} \otimes \overline{x_2}.$$

对于 $3 \leq i \leq c$,

$$\begin{aligned}\Psi_i(\overline{x_1} \otimes \overline{x_2} \otimes \cdots \otimes \overline{x_{i+1}}) \quad = \quad & \overline{[x_1, x_2, \cdots, x_i]_l} \otimes \overline{x_{i+1}} + \overline{[x_{i+1}, [x_1, x_2, \cdots x_{i-1}]_l]} \otimes \overline{x_i} \\ & + \overline{[[x_i, x_{i+1}]_r, [x_1, \cdots, x_{i-2}]_l]} \otimes \overline{x_{i-1}} \\ & + \overline{[[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]_r, [x_1, x_2, \cdots, x_{i-3}]_l]} \otimes \overline{x_{i-2}} \\ & + \cdots + \overline{[x_2, \cdots, x_{i+1}]_r} \otimes \overline{x_1}\end{aligned}$$

其中

$$[x_1, x_2, \cdots x_i]_r = [x_1, [\cdots [x_{i-2}, [x_{i-1}, x_i]] \ldots]$$

*and*

$$[x_1, x_2, \cdots x_i]_l = [\ldots [[x_1, x_2], x_3], \cdots, x_i].$$

现在我们准备证明定理 1.1。

定理 *1.1*的证明：令 $\Psi_i$ 为上文定义的映射，且 $d(G/Z(G)) = \delta$。根据命题2.1 ，我们有

$$|M(G)||\gamma_2(G)|\prod_{i=2}^{c}|\mathrm{Im}\,\Psi_i|\leq |M(G^{ab})|p^{k\delta}.$$

应用 [17, 引理 2。1]可得

$$|M(G)|\prod_{i=2}^{c}|\mathrm{Im}\,\Psi_i|\leq p^{\frac{1}{2}(d-1)(n-k)+k(\delta-1)},$$

因此

$$|M(G)|\prod_{i=2}^{c}|\mathrm{Im}\,\Psi_i|\leq p^{\frac{1}{2}(d-1)(n+k)-k(d-\delta)}. \tag{2.1}$$

选取 $G$ 的子集 $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_\delta\}$，使得 $\{\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots\ \overline{x_\delta}\}$ 是 $G/Z(G)$ 的极小生成集。固定 $i\leq \min(\delta,c)$。由于 $i\leq c$, $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ 是非平凡群，利用 [12, 引理 3.6 (c)]，我们可以选取一个权为 $i$ 的交换子 $[y_1,y_2,\cdots\ y_i]$，使得 $[y_1,y_2,\cdots\ y_i]\notin\gamma_{i+1}(G)$ 且 $y_1,\ldots,y_i\in S$。由于 $i\leq\delta$,$S\backslash\{y_1,y_2,\cdots\ y_i\}$ 至少包含 $\delta-i$ 个元素，从 $S\backslash\{y_1,y_2,\cdots\ y_i\}$ 中任取 $\delta-i$ 个元素$z_1,z_2,\ldots,z_{\delta-i}$。由于 $[y_1,y_2,\cdots\ y_i]\notin\gamma_{i+1}(G)$ 且 $z_j\notin\{y_1,y_2,\cdots\ y_i\}$，$\Psi_i(\overline{y_1},\ldots,\overline{y_i},\overline{z_j})\neq 1$。注意，集合 $\{\Psi_i(\overline{y_1},\ldots,\overline{y_i},\overline{z_j})\ \mid\ 1\leq j\leq\delta-i\}$ 是 $\mathrm{h}\{\Psi_i(\overline{y_1},\ldots,\overline{y_i},\overline{z_j})\ \mid\ 1\leq j\leq\delta-i\}\mathrm{i}$ 的极小生成集，因为 $\{\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots\ \overline{x_\delta}\}$ 是 $G/Z(G)$ 的极小生成集。因此$|\mathrm{Im}\Psi_i|\geq p^{\delta-i}$。将此代入等式 2.1，即得所需结果。

现在我们继续证明定理 1.4。下面的命题是证明的主要依据。

**命题 2.2**。设 $G$ 是一个幂零类 *2* 的 $p$-群，且 $\Psi_2$ 是命题 *2.1*中给出的同态。假设 $d\left(\frac{G}{Z(G)}\right)=\delta$ 且 $d(\gamma_2(G))=\gamma$。则，

$$|\mathrm{Im}(\Psi_2)|\geq p^{\sum_{i=2}^{min(\delta,\gamma+1)}(\delta-i)}.$$

证明。取 $x_1,x_2,\ldots,x_\delta\in G$ 使得

$$\frac{G}{\Phi(G)Z(G)}=\langle\overline{x_1}\rangle\times\langle\overline{x_2}\rangle\times\cdots\times\langle\overline{x_\delta}\rangle.$$

令 $U$ 为集合 $\{x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_\delta\}$。现在我们按如下方式为 $^{\gamma_2(G)\,\gamma_2(G)^p}$选取一个极小生成集：由于集合 $T=\{[x_i,x_j]\mid 1\leq i<j\leq\delta\}$ 生成$\gamma_2(G)$，我们从该集合中选取一个元素，记作 $[x_{i_1^1},x_{i_2^1}]$，使得 $\overline{[x_{i_1^1},x_{i_2^1}]}\neq 0\in_{\gamma_2(G)\ \gamma_2(G)^p}$。定义

$$U_1=\{x_{i_1^1},x_{i_2^1}\},$$

and

$$V_1=\left\langle\overline{[x_{i_1^1},x_{i_2^1}]}\right\rangle\leq\frac{\gamma_2(G)}{\gamma_2(G)^p}.$$

假设 $U_j$ 和 $V_j \leq {}^{\gamma_2(G)}\gamma_2(G)^p$ 已经定义。为了定义 $U_{j+1}$ 和 $V_{j+1}$，我们检查是否存在元素 $[y,z] \in T$、 $y,\ z \in U$，使得 $U_j \cap \{y,\ z\} \neq \phi$ 且$V_j < \left\langle V_j,\ \overline{[y,z]} \right\rangle$。如果 $T$ 中存在这样的元素，记作 $[x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}]$，那么我们定义

$$U_{j+1} = U_j \cup \{x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}\},$$

and

$$V_{j+1} = \left\langle V_j, \overline{[x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}]} \right\rangle \leq \frac{\gamma_2(G)}{\gamma_2(G)^p}.$$

否则，我们任取一个元素 $[x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}] \in T$, ${}^{x_{i_1^{j+1}}}$， $x_{i_2^{j+1}} \in U$，使得

$$V_j < \left\langle V_j, \overline{[x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}]} \right\rangle,$$

并定义

$$U_{j+1} = \{x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}\},$$

and

$$V_{j+1} = \left\langle V_j, \overline{[x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}]} \right\rangle.$$

显然

$$V_\gamma = \left\langle \overline{[x_{i_1^1}, x_{i_2^1}]}, \ldots, \overline{[x_{i_1^\gamma}, x_{i_2^\gamma}]} \right\rangle = \frac{\gamma_2(G)}{\gamma_2(G)^p}.$$

现在假设对于 $j = k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_t$, $U_j \cap U_{j+1} = \phi$，并且这些是唯一满足条件的数。将元素记为

$$\bar{x} \otimes \overline{[y,z]} + \bar{y} \otimes \overline{[z,x]} + \bar{z} \otimes \overline{[x,y]} \in \frac{G}{\Phi(G)Z(G)} \otimes \frac{\gamma_2(G)}{\gamma_2(G)^p}$$

为 $(x,\ y,\ z)$，并定义

$$W_j = \{(x, x_{i_1^j}, x_{i_2^j}) \mid x \in U \backslash U_j\}$$

对于 $j = 1,\ \ldots\ldots,\ \gamma$。

我们断言， $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_\gamma$极小生成 $\left\langle W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_\gamma \right\rangle$。为此，注意到 $\Phi\ G\ {}^G Z(\ )(G)$ 和 ${}^{\gamma_2(G)}\gamma_2(G)^p$ 是初等阿贝尔 $p$-群，因此可以视为域 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上的向量空间，其基分别为 $\{\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_\delta}\}$ 和 $\{\overline{[x_{i_1^1}, x_{i_2^1}]}, \ldots, \overline{[x_{i_1^\gamma}, x_{i_2^\gamma}]}\}$。由此可知，集合 $\{\overline{x_i} \otimes \overline{[x_{i_1^j}, x_{i_2^j}]} \mid 1 \leq i \leq \delta, 1 \leq j \leq \gamma\}$ 构成张量积 $\phi\ G\ {}^G Z(\ )(G) \otimes {}^{\gamma_2(G)}\gamma_2(G)^p$ 的一组基。现在取一个元素 $(x, {}^{x_{i_1^1}}, {}^{x_{i_2^1}}) \in W_1$。表达式 $(x, {}^{x_{i_1^1}}, {}^{x_{i_2^1}})$ 中存在项 $\overline{x} \otimes \overline{[x_{i_1^1}, x_{i_2^1}]}$，确保 $(x, {}^{x_{i_1^1}}, {}^{x_{i_2^1}}) \notin \left\langle W_1 \backslash (x, {}^{x_{i_1^1}}, {}^{x_{i_2^1}}) \right\rangle$。这表明 $W_1$极小生成 $\mathrm{h}W_1\mathrm{i}$。若 $k_1 > 1$，假设对于 $j \leq k_1 - 1$， $W_1 \cup W_2 \ldots \cup W_j$极小生成 $\left\langle W_1 \cup W_2 \ldots \cup W_j \right\rangle$。取一个元素 $(x, {}^{x_{i_1^{j+1}}}, {}^{x_{i_2^{j+1}}}) \in W_{j+1}$。根据定义 $x \in U \backslash U_{j+1}$。因此，如果

$$(x, x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}) \in \left\langle W_1, W_2, \ldots, W_j, W_{j+1} \backslash (x, x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}) \right\rangle,$$

then

$$\overline{x} \otimes \overline{[x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}]} = \overline{x} \otimes \overline{[x_{i_1^1}, x_{i_2^1}]^{\alpha_1} \cdots [x_{i_1^j}, x_{i_2^j}]^{\alpha_j}}.$$

由于 $\overline{x} \neq 0 \in {}^G_{\Phi(G)Z(G)}$，我们得到

$$\overline{[x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}]} = \overline{[x_{i_1^1}, x_{i_2^1}]^{\alpha_1} \cdots [x_{i_1^j}, x_{i_2^j}]^{\alpha_j}}.$$

但这是不可能的，因为 $V_j < \left\langle V_j, \overline{[x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}]} \right\rangle$. 这表明 $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{k_1}$ 极小生成 $\mathbf{h}W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{k_1}\mathbf{i}$。

现在若 $\gamma > 1$，假设 $k_{t+1} = \gamma$，并且 $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{k_j}$ 对于$1 \leq j \leq t$极小生成 $\left\langle W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{k_j} \right\rangle$。令 $(x, x_{i_1^{k_j+1}}, x_{i_2^{k_j+1}}) \in W_{k_j+1}$。根据 $W_{k_j+1}$的定义，我们有 $x \in U \backslash U_{k_j+1}$(*i.e.* $U \backslash \{x_{i_1^{k_j+1}}, x_{i_2^{k_j+1}}\}$)。首先假设 $x \in U_{k_1} \cup \cdots \cup U_{k_j}$，并令 $l_1, l_2, \ldots, l_r$ 为所有小于 $k_j + 1$ 且满足 $x = x_{i_{s_1}^{l_1}} = x_{i_{s_2}^{l_2}} = \ldots = x_{i_{s_r}^{l_r}}$ 的数，其中 $s_i' s$ 只能是 1 或 2。不失一般性，我们可以假设，对于 $i = 1, 2, \ldots, r$，有 $s_i = 1$。现在若

$$(x, x_{i_1^{k_j+1}}, x_{i_2^{k_j+1}}) \in \left\langle W_1, W_2, \ldots W_{k_j+1} \backslash (x, x_{i_1^{k_j+1}}, x_{i_2^{k_j+1}}) \right\rangle,$$

then

$$\overline{x} \otimes \overline{[x_{i_1^{k_j+1}}, x_{i_2^{k_j+1}}]} = \overline{x} \otimes \overline{[x_{i_1^1}, x_{i_2^1}]^{\alpha_1} \cdots [x_{i_1^{k_j}}, x_{i_2^{k_j}}]^{\alpha_{k_j}} [x_{i_2^{l_1}}, y_1]^{\beta_1} \cdots [x_{i_2^{l_r}}, y_r]^{\beta_r}}$$

对某些 $y_1, y_2, \ldots, y_r \in G$，且对某些 $\alpha_i, \beta_k \in \mathbb{Z}$。由于 $\overline{x} \neq 0 \in {}_{\Phi}G^{G}_{Z()(G)}$，~~我们~~有

$$\overline{[x_{i_1^{k_j+1}}, x_{i_2^{k_j+1}}]} = \overline{[x_{i_1^1}, x_{i_2^1}]^{\alpha_1} \cdots [x_{i_1^{k_j}}, x_{i_2^{k_j}}]^{\alpha_{k_j}} [x_{i_2^{l_1}}, y_1]^{\beta_1} [x_{i_2^{l_2}}, y_2]^{\beta_2} \cdots [x_{i_2^{l_r}}, y_r]^{\beta_r}}.$$

但这样一来，对某些 $y \in U$，且对某些 $i$，

$$V_{k_j} < \left\langle V_{k_j}, \overline{[x_{i_2^{l_i}}, y]} \right\rangle.$$

这与我们为 ${}^{\gamma_2(G)}\gamma_2(G)^p$ 选取基的方式矛盾。因此，现在~~我们~~可以假设 $x \in U \backslash (U_{k_1} \cup \cdots \cup U_{k_j} \cup U_{k_j+1})$。接下来，如果

$$(x, x_{i_1^{k_j+1}}, x_{i_2^{k_j+1}}) \in \left\langle W_1, W_2, \ldots W_{k_j+1} \backslash (x, x_{i_1^{k_j+1}}, x_{i_2^{k_j+1}}) \right\rangle,$$

我们得到

$$\overline{x} \otimes \overline{[x_{i_1^{k_j+1}}, x_{i_2^{k_j+1}}]} = \overline{x} \otimes \overline{[x_{i_1^1}, x_{i_2^1}]^{\alpha_1} \cdots [x_{i_1^{k_j}}, x_{i_2^{k_j}}]^{\alpha_{k_j}}}$$

对某些 $\alpha_i$ $(1 \leq i \leq k_j) \in \mathbb{Z}$，这同样不可能。这表明 $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{k_j+1}$极小生成 $\left\langle W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{k_j+1} \right\rangle$。如果 $k_{j+1} > k_j + 1$，假设 $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{k_j+i}$ 对于 $i \leq k_{j+1} - k_j - 1$ 极小生成 $\left\langle W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{k_j+i} \right\rangle$。将上述论证中的相同思路应用于此，可以证明 $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{k_j+i+1}$ 极小生成 $\left\langle W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{k_j+i+1} \right\rangle$。这表明 $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{k_{j+1}}$ 极小生成 $\left\langle W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_{k_{j+1}} \right\rangle$。因此，我们现在可以得出结论： $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_\gamma$ 极小生成 $\left\langle W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_\gamma \right\rangle$，因此 $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_\gamma$ 是一个线性无关集。

现在，由于 $|U_1| = |U_{k_i+1}| = 2$ 对 $1 \leq i \leq t$成立，根据 $W_1$ 和$W_{k_i+1}$的定义可得 $|W_1| = |W_{k_i+1}| = \delta - 2$。对于 $1 \leq j \leq k_i - 1$，注意，若 $|W_j| \geq m$则 $|W_{j+1}| \geq m - 1$，因为 $U_j \cap \{x_{i_1^{j+1}}, x_{i_2^{j+1}}\} \neq \phi$。因此很容易推出

$$|W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_\gamma| \geq \sum_{i=2}^{min(\delta, \gamma+1)} (\delta - i).$$

现在，由张量积的泛性质，存在一个同态$\eta$，使得下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \frac{G}{\gamma_2(G)Z(G)} \times \gamma_2(G) & \xrightarrow{\phi} & \frac{G}{\gamma_2(G)Z(G)} \otimes \gamma_2(G) \\ \mathcal{P}\downarrow & & \eta\downarrow \\ \frac{G}{\Phi(G)Z(G)} \times \frac{\gamma_2(G)}{\gamma_2(G)^p} & \xrightarrow{\theta} & \frac{G}{\Phi(G)Z(G)} \otimes \frac{\gamma_2(G)}{\gamma_2(G)^p}, \end{array}$$

其中

$$\mathcal{P}(\overline{x}, y) = (\overline{x}, \overline{y}) \quad \text{for } x \in G, y \in \gamma_2(G),$$

$$\phi(\overline{x}, y) = \overline{x} \otimes y, \quad \text{and} \quad \theta(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x} \otimes \overline{y}.$$

因此，我们有

$$\eta(\overline{x} \otimes y) = \overline{x} \otimes \overline{y}.$$

由于 $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_\gamma$ 在 $\eta$ 下的原像同构于 $\mathrm{Im}(\Psi_2)$ 的一个子群，因此我们得到

$$|\mathrm{Im}(\Psi_2)| \geq p^{\sum_{i=2}^{min(\delta,\gamma+1)} (\delta-i)}.$$

证明至此完成。 □

现在我们准备证明定理1.4。

定理 ***1.4*** 的证明：令 $\Psi_2$ 为命题2.1中给出的同态，且 $\overline{\Psi}_2$ 为与群 $G/\gamma_3(G)$相关的类似定义的同态。另外，令 $d(G/Z(G)) = \delta$。由于 $G/\gamma_3(G)$ 是一个幂零类 2 的群，由命题2.2 可得

$$|\mathrm{Im}(\overline{\Psi}_2)| \geq p^{\sum_{i=2}^{min(\delta,\gamma+1)} (\delta-i)}.$$

容易看出 $|\mathrm{Im}(\Psi_2)| \geq |\mathrm{Im}(\overline{\Psi}_2)|$. 定理1.4 现在可由方程 2.1 得出。

现在我们着手证明推论1.5。证明将用到以下两个结果。

**命题 2.3**。 设 $G$ 是一个幂零类为 *2* 的 *p* 群（$p$为奇数），其中 $G/\gamma_2(G)$为初等阿贝尔群，$d(G) = d$ 且 $|G^p| = p^t$。设 $V$ 是由所有形如 $x^p \otimes x\gamma_2(G)$ 的元素生成的 $\gamma_2(G) \otimes G/\gamma_2(G)$ 的子群，其中 $x \in G$。则 $|V| = p^{\frac{1}{2}t(2d-t+1)}$。</output>

该命题的证明与 [18, 命题 3.3] 的证明完全相同。

**定理 2.4**。 [11, 定理2.5。6] 设 $Z$ 是有限群 $G$的一个中心子群。则存在如下正合序列

$$Z \otimes \frac{G}{\gamma_2(G)} \mapsto M(G) \mapsto M(G/Z) \mapsto \gamma_2(G) \cap Z \mapsto 1,$$

其中，映射 $\alpha$： $Z \otimes \frac{G}{\gamma_2(G)} \mapsto M(G)$ 定义如下：设 $G$ 由 $F/R$给出，其中 $F$ 是某个自由群，$R$是其正规子群，并将 $Z$ 标识为 $T/R$。之后

将 $Z \otimes G$和 $M(G)$分别标识为 $T/R \otimes F/\gamma_2(F)R$和 $\gamma_2(F) \cap R/[F,R]$后，$\alpha$ 定义为

$$\alpha(xR \otimes yR\gamma_2(F)) = [x,y][F,R].$$

现在我们可以证明推论1.5。

推论 ***1.5***的证明。对所有有限 $p$-群，下界是一个众所周知的事实 [推论 3。2, [9]]。上界直接由定理1.4 以及关于群 $G$，$\gamma = k$ 和 $n = d + k$的事实得出。

接下来假设 $G^p \cong \mathbb{Z}_p$。由于对任意有限群 $K$，$\gamma_2(K) \leq K^2$，对于 $p = 2$，可知 $G$ 是阶为 8 的四元数群或二面体群。因此，$M(G)$ 要么是平凡的，要么阶为 2。因此现在可以假设 $p$ 是一个奇素数。考虑定理 2.4 中关于 $Z = G^p$ 的正合序列。我们将证明在这种情况下，映射 $\alpha : G^p \otimes {}_{\gamma_2}^{G} G() \mapsto M(G)$ 是平凡映射。为此，设 $G^p = \mathrm{h}g^p\mathrm{i}$，其中 $g \in \overline{G_\circ}$ 根据 $\alpha$ 的定义，注意到对所有 $x \in G$，$x^p \otimes x\gamma_2(G) \in \ker \alpha$。因此，对所有 $x$，$y \in G$，$(gy)^p \otimes gy\gamma_2(G) \in \ker \alpha$。张量积 $\otimes$ 的双线性意味着

$$g^p \otimes y\gamma_2(G) + y^p \otimes g\gamma_2(G) \in \ker \alpha.$$

但是 $y^p = (g^p)^m$ 对于某个自然数 $m$。因此 $g^p \otimes y\gamma_2(G) \in \ker \alpha$ 对所有$y \in G$ 均成立。因此，$\alpha$ 是平凡映射。由 2.4 中的正合序列可得

$$|M(G)| = \frac{|M(G/G^p)|}{|G^p|}.$$

现在应用先前在推论中得到的群 $G/G^p$的一般界限，即可得到此情形下所需的界限。

接下来，假设 $p$ 是一个奇素数，且 $G^p = \gamma_2(G)$。再次对 $Z = G^p = \gamma_2(G)$ 应用定理 2.4 中的正合序列，得到

$$|M(G)| \leq \frac{|M(G/\gamma_2(G)|}{|\gamma_2(G)|} \frac{|G^p \otimes G/\gamma_2(G)|}{|\ker \alpha|}. \tag{2.2}$$

根据 $\alpha$ 的定义，显然有 $x^p \otimes \overline{x} \in \ker \alpha$ 对所有 $x \in G$. 均成立。因此，由命题2.3

$$|\ker \alpha| \geq p^{\frac{1}{2}\gamma(2d-k+1)}.$$

现在令 $|M(G/\gamma_2(G)| = p^{\frac{1}{2}d(d-1)}$，$|G^p \otimes G/\gamma_2(G)| = p^{dk}$ 以及不等式 2.2中 $|\ker \alpha|$ 的下界，即可得到所需结果。

现在我们证明推论 1.6，它改进了推论1.5 在以下情形下的结论：$G$ 是一个特殊的 $p$-群，且 $|G| \geq p^{13}$ 并且 $|Z(G)| = p^3$. 证明利用了群的可提升性与舒尔乘子之间众所周知的联系。

推论 1.6 的证明：设 $Z^*(G)$ 是使 $G/Z^*(G)$ 可实现的 $G$ 的最小中心子群。由于 $|G| \geq p^{13}$，根据 [13, 定理 5.7] $G$ 不可实现。因此，$Z^*(G)$ 是非平凡的。设 $Z$ 是 $Z^*(G)$ 的一个阶为 $p$ 的子群。由于$Z \leq Z(G) = \gamma_2(G)$，根据 [11, 定理 2.5.10]，我们有

$$|M(G)| = |M(G/Z)|/|Z|.$$

注意， $G/Z$ 是一个 2 类幂零群，且 $G^p \leq \gamma_2(G)$ 和 $(G/Z)^p = \gamma_2(G/Z)$. 这使我们能够对群 1.5 应用推论 $G/Z$ ，从而得到所需结果。

现在我们证明定理 1.7，该定理给出了 $p$- 极大类群的舒尔乘子界。这些群是有限 $p$-群中的一个重要类别，最早由 Blackburn 研究[2]。以下证明使用了他发现的著名事实。

定理 1.7 的证明 令 $P_1 = C_G(\gamma_2(G)/\gamma_4(G))$. 任取元素$s \in G \backslash P_1 \cup C_G(\gamma_{n-2}(G))$ 和 $s_1 \in P_1 \backslash \gamma_2(G)$。那么 $s$ 和 $s_1$ 生成 $G$。若对 $i \geq 2$ 定义 $s_i = [s_{i-1}, s]$，则 $s_i \in \gamma_i(G) \backslash \gamma_{i+1}(G)$。令 $\Psi_i, i \geq 3$ 为命题 2.1 中定义的映射。于是

$$\Psi_i(\overline{s_1} \otimes \overline{s} \otimes \overline{s} \otimes \cdots \otimes \overline{s} \otimes \overline{s_1}) \quad = \quad \overline{[s_1, s, s, \cdots, s]_l [s, s, \cdots, s, s_1]_r} \otimes \overline{s_1} + \overline{t} \otimes \overline{s}$$

对于某个 $t \in G$。
若 $i$ 是奇整数，请注意

$$\overline{[s_1, s, s, \cdots, s]_l} = \overline{[s, s, \cdots, s, s_1]_r}.$$

由于 $p \neq 2$，可得 $\Psi_i(\overline{s_1} \otimes \overline{s} \otimes \overline{s} \otimes \cdots \otimes \overline{s} \otimes \overline{s_1})$ 是一个非单位元，因此 $\mathrm{Im}\Psi_i$ 是非平凡的。利用这一事实，等式2.1给出了所需结果。

## 参考文献

[1] Y. Berkovich, Z. Janko，《素数幂阶群》第3卷（德古意特出版社，柏林，2011年）。[2] N. Blackburn，关于一类特殊 p 群，《数学学报》100（1958年），49-92。[3] N. Blackburn 和 L. Evens，p 群的舒尔乘子，《纯粹与应用数学杂志》309（1979年），100-113。[4] G. Ellis 和 J. Wiegold，素数幂阶群的舒尔乘子上界，《澳大利亚数学会公报》60（1999年），191-196。[5] W. Gaschutz、J. Neub¨user 和 Ti Yen，关于 p 群的乘子，《数学杂志》100（1967年），93-96。[6] J. A. Green，有限 p 群的自同构数，《伦敦皇家学会会刊》237（1956年），574-581。[7] S. Hatui，秩为2的特殊 $p$群的舒尔乘子，《群论杂志》23（2020年），85–95。[8] M.R. Jones，$p$群的乘子，《数学杂志》127（1972年），165-166。[9] M.R. Jones，有限群乘子的若干不等式，《美国数学会会刊》39（1973年），450–456。[10] M.R. Jones，有限群乘子的若干不等式 II，《美国数学会会刊》45，167-172（1974年）。[11] G. Karpilovsky，《舒尔乘子》，伦敦数学会专著，新系列第2号（1987年）。[12] E.I. Khukhro，有限 $p$群的 $p$自同构，伦敦数学会讲义系列第246卷（1998年）。[13] M. Mazur，秩为2的特殊 $p$群的中心核，未发表著作，见 http://people.math.binghamton.edu/mazur/papers/pubp1.pdf[14] P. Moravec，关于具有给定余类的有限 p 群的舒尔乘子，《以色列数学杂志》185（2011年），189-205。[15] P. Niroomand，关于非阿贝尔 p 群的舒尔乘子的阶，《代数杂志》322（2009年），4479-4482。[16] P. Niroomand 和 F.G. Russo，Green 上界的改进，《代数与应用杂志》第11卷第06期，1250116（2012年）。[17] P.K. Rai，关于 $p$群的舒尔乘子阶的注记，《代数与计算国际杂志》27（2017年），495-500。[18] P.K. Rai，关于特殊 $p$群的舒尔乘子，《纯粹与应用代数杂志》222（2018年），316-322。

[19] L. R. Vermani，关于乘子的正合序列以及 *Gaschutz*、*Neubuser* 和 *Yen* 定理，《伦敦数学会杂志》1（1969年），95-100。[20] L.R. Vermani，关于有限群的乘子，《伦敦数学会杂志》1（1974年），765- 768。[21] J. Wiegold，乘子与具有有限中心因子群的群，《数学杂志》89（1965年），345-347。[22] J. Wiegold，有限 *p* 群的交换子子群，澳大利亚数学会杂志10（1969年），480-484。

（Pradeep K.Rai）印度特伦甘纳邦海得拉巴马欣德拉大学电子邮件地址：
raipradeepiitb@gmail.com