arXiv:2301.09119v1 [math.DG] 22 Jan 2023

超凯勒流形上（$n-1$）元四元数拟多重次调和函数的 Monge-Amp¨ `ère 方程

Jixiang Fu、Xin Xu 和 Dekai Zhang

Abstract. 我们证明了超凯勒流形上（$n-1$）元四元数多重次调和函数的四元数 Monge-Amp`ère 方程存在唯一光滑解，从而得到四元数形式型方程的解。仿照 Tosatti 和 Weinkove [22] 的方法，我们通过建立 Cherrier 型不等式推导出 C^0 估计。将 Dinew 和 Sroka [9] 的方法应用于我们的情形，我们得到了 C^1 和 C^2 估计；与先前结果 [14] 相比，无需假设底层超凯勒度量是平坦的¨。

1. Introduction

超复流形是一个光滑流形 M，并配有一组三元组（I, J, K）复结构，满足四元数关系

$$IJ = -JI = K.$$

设（M, I, J, K）是一个超复流形，且 g 是 M 上的黎曼度量。若度量 g 满足：g 相对于 I, J, K 是厄米的，则称其为超厄米度量；也就是说，对 M 上的任意向量场 X 和 Y，

$$g(X,Y) = g(XI,YI) = g(XJ,YJ) = g(XK,YK).$$

分别以 $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ 表示与 I, J, K 对应的基本形式，并令 $\Omega = \omega_J + i\omega_K$。在超厄米流形（$M, I, J, K, g$）上，若度量 g 满足 $d\Omega = 0$，或等价地满足 $d\omega_I = d\omega_J = d\omega_K = 0$，则称其为超K¨ähler（HK）度量；若满足 $\partial\Omega = 0$，则称其为带挠率的超K¨ähler（HKT）度量。

类比于经典的复 Monge-Amp`ere 方程上的 Calabi-Yau 定理 [27]，该方程定义在 K¨ahler 流形上，Alesker 和 Verbitsky [4] 猜想解的存在性

对于四元数维数为 n 的紧致 HKT 流形上的四元数 Monge-Amp`ere 方程，存在相应解。其形式为

$$
\begin{aligned}
(\Omega + \partial\partial_J u)^n &= e^f \Omega^n, \\
\Omega + \partial\partial_J u &> 0,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

其中 $\partial_J = J^{-1} \circ \overline{\partial} \circ J$。虽然该方程的一般解仍未解决，但 [1, 5, 13, 9, 4, 2, 3, 18] 中已有一些部分结果。具体而言，在典范丛全纯平凡的情况下，Alesker 和 Verbitsky [4] 得到了C^0 估计。Alesker [1] 证明了在具有平坦超K¨ahler 度量的紧流形上该猜想成立。在 [2] Alesker 和 Shelukhin 在没有任何额外假设的情况下证明了 C^0 估计，随后 Sroka [18]简化了证明。Dinew 和 Sroka [9] 在超K¨ahler 流形上求解了方程 (1.1)。

与复数情形一样，我们考虑四元数形式型方程，它是形式型方程的对应版本。该形式型方程由 Fu-Wang-Wu [10, 11] 提出，并在具有非负双截面曲率的 K¨ahler 流形上得到求解。Tosatti 和 Weinkove [22]后来证明，曲率假设可以去除。

特别地，可以通过 $\partial\Omega^{n-1} = 0$（参见 [15]）在超复流形上定义四元数平衡度量。设 (M, I, J, K, g, Ω) 是四元数维数为 n 的超复流形，且 g_0 是 M 上的四元数平衡度量，其诱导的 (2, 0)-形式为 Ω_0。设φ 是一个 $(2n-4, 0)$-形式，使得 $\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J\varphi$ 严格正。则存在一个四元数平衡度量 Ω_φ ，满足

$$
\Omega_\varphi^{n-1} = \Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J\varphi. \tag{1.2}
$$

四元数形式型 Calabi-Yau 方程写作

$$
\Omega_\varphi^n = e^{f'+b'}\Omega^n \tag{1.3}
$$

其中， f' 是在 M 上给定的光滑函数，而 b' 是唯一确定的常数。求解方程 (1.3) 可得到一个四元数平衡度量 Ω_φ ，其指定体积形式在缩放意义下唯一。通过考虑函数 $u \in C^\infty(M, \mathbb{R})$，使得 $\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J(u\Omega^{n-2})$ 严格正，可将形式型方程化为函数型，并将唯一的 Ω_u 记为

满足以下条件的严格正的 (2, 0)-形式

$$\Omega_u^{n-1} = \Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J(u\Omega^{n-2}). \tag{1.4}$$

于是，方程 (1.3) 化为

$$\Omega_u^n = e^{f'+b'}\Omega^n. \tag{1.5}$$

特别地，当 Ω 是 HKT 时，$\partial\Omega = \partial_J\Omega = 0$。此时，(1.4) 变为

$$\Omega_u^{n-1} = \Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-2}. \tag{1.6}$$

本文在 Ω 为 hyperK¨ahler 的假设下研究方程 (1.5)。与复情形类似，[22], 方程 (1.5) 可改写为关于 $(n-1)$-四元数多重次调和函数的四元数 Monge-Amp`ere 方程 (1.7)。我们的主要结果如下。

定理 1.1. 设 (M, I, J, K, g, Ω) 是一个四元数维数为 n 的紧致 hyperK¨ahler 流形，且 Ω_h 是相对于 I 的严格正的 (2, 0)- 形式。设 f 是 M 上的光滑函数。那么存在唯一的一对 $(u, b) \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$，满足

$$\big(\Omega_h + \frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u)\Omega - \partial\partial_J u)\big)^n = e^{f+b}\Omega^n \tag{1.7}$$

with

$$\Omega_h + \frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u)\Omega - \partial\partial_J u) > 0, \quad \sup_M u = 0. \tag{1.8}$$

这里的 $S_1(\partial\partial_J u)$ 在第 2 节中定义，并与陈拉普拉斯算子相关（见 (2.4)、(2.5)）。最近，Gentili 和 Zhang [14] 在局部平坦超厄米流形上研究了一类包括方程 (1.7) 在内的一般全非线性方程，并在假设存在平坦超凯勒度量的条件下求解了该方程。这里我们能够去除平坦性假设。由定理 1.1 可得

推论 1.2. 设 (M, I, J, K, g, Ω) 是四元数维数为 n 的紧致超K¨ähler 流形，且 g_0 是 M 上的四元数平衡（分别为高杜雄；分别为强高杜雄）度量，其诱导的 (2, 0)-形式为 Ω_0。那么，对于 M 上给定的光滑函数 f'，存在唯一常数 b' 和唯一的四元数平衡（分别为高杜雄；分别为强高杜雄）度量 Ω_u，使其满足 (1.6) 并解方程 (1.5)。

我们得到先验估计，进而运用连续性方法证明定理 1.1。第 2 节给出本文中所用的定义和记号，并说明方程 (1.5) 与 (1.7) 之间的关系。第 3 节通过建立一个不使用超Kähler 条件的 Cherrier 型不等式，推导出 C^0 估计。第 4 节推导出 C^1 估计，第 5 节和第 6 节推导出 C^2 估计。主定理将在最后一节得到证明。

2. Preliminaries and notation

在超复流形 (M, I, J, K) 上，外微分 d 关于复结构 I 分解为 $d = \partial_I + \bar{\partial}_I$。为简便起见，我们记 $\partial = \partial_I$ 和 $\bar{\partial} = \partial_I$。Verbitsky [24] 引入算子 ∂_J，作为 ∂ 的四元数类比，定义为

$$\partial_J = J^{-1} \circ \bar{\partial} \circ J.$$

与 [9] 中一样，我们也定义

$$\bar{\partial}_J = J^{-1} \circ \partial \circ J.$$

∂、$\bar{\partial}$、∂_J 和 $\bar{\partial}_J$ 算子满足以下性质。

引理 2.1（[9], 引理 2.12）。对于超复流形 (M, I, J, K)，以下结论成立。

$$\begin{aligned} &\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial_J^2 = \bar{\partial}_J^2 = 0, \\ &\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \partial_J\bar{\partial}_J + \bar{\partial}_J\bar{\partial} = \partial\partial_J + \partial_J\partial = 0, \\ &\bar{\partial}\bar{\partial}_J + \bar{\partial}_J\bar{\partial} = \partial_J\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial_J = \bar{\partial}_J\partial + \partial\bar{\partial}_J = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

设 (M, I, J, K, g) 是一个四元数维数为 n 的超厄米流形，令

$$\Omega = \omega_J + i\omega_K$$

其中，ω_J和 ω_K 分别是(g, J)和(g, K)的基本形式。我们用$\bigwedge^{p,q}_I(M)$表示相对于 I的(p, q)-形式，本文中简称为(p, q)-形式。满足$J\alpha = \overline{\alpha}$的形式 $\alpha \in \bigwedge^{2k}_I{}^0(M)$称为 J-实形式，记作 $\alpha \in \bigwedge^{2k,0}_I \mathbb{R}, (M)$。特别地，我们有$\Omega \in \bigwedge^{2,0}_I \mathbb{R}, (M)$。

定义 2.2. 若$\alpha(X, \overline{X}J) \geq 0$（分别地，$\alpha(X, \overline{X}J) > 0$）对任意非零(1, 0)-向量 X均成立，则称 J-实(2, 0)-形式 α 为正（分别地，严格正）。

在复情形中，如果两个厄米矩阵中的一个是正定的，则可以同时将它们对角化。对于 J- 实 (2, 0)- 形式，也有类似的结果。

引理 2.3（[18], 引理 3）。设 α 和 β 是超厄米流形 M 上的两个 J-实 (2, 0)-形式，该流形的四元数维数为 n，且 α 严格正。那么对每个 $x \in M$，存在 $T^{1,0}_x(M)$ 的一组基 $e_1, \overline{e_1}J, \ldots, e_n, \overline{e_n}J$，使得

$$\alpha(e_i, e_j) = \beta(e_i, e_j) = \alpha(e_i, \overline{e_j}J) = \beta(e_i, \overline{e_j}J) = 0 \ \ for \ \ i \neq j.$$

类似于复情形 [22], 中的正定 $(n-1, n-1)$-形式，我们将严格正的 $(2n-2, 0)$-形式定义如下。

定义 2.4. 若 J-实 $(2n-2, 0)$-形式 Φ 满足：对于任意正 (2, 0)-形式 α，都有 $\Phi \wedge \alpha \geq 0$，且等号成立当且仅当 $\alpha = 0$，则称其为严格正的。我们用 $\bigwedge^{2n-2,0}_{\mathbb{R},I}(M)_{>0}$ 表示所有严格正的J-实 $(2n-2, 0)$-形式。

关于超复流形上（严格）正形式的概念，可见多种文献 [3, 26, 25], ；详尽讨论请参阅 [26] 。关于复情形，参见例如 [8]。

与 [14], 一样，我们通过以下关系定义霍奇星型算子 $*: \bigwedge^{p,0}_I(M) \to \bigwedge^{2n-p,0}_I(M)$

$$\alpha \wedge *\beta = \frac{1}{n!}\langle \alpha, \beta \rangle_g \Omega^n, \quad \text{for } \alpha, \beta \in \bigwedge^{p,0}_I(M).$$

这里，逐点内积 $\langle , \rangle_g$ 定义为

$$\langle \alpha, \beta \rangle_g = \frac{1}{p!} \sum g^{\lambda_1 \overline{\mu}_1} \cdots g^{\lambda_p \overline{\mu}_p} \alpha_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} \overline{\beta_{\mu_1 \cdots \mu_p}}, \quad \text{for } \alpha, \beta \in \bigwedge^{p,0}_I(M)$$

其中，任意一个$(p, 0)$-形式 α 可局部写为

$$\alpha = \frac{1}{p!} \sum \alpha_{\lambda_1 \cdots \lambda_p} dz^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\lambda_p}.$$

在点 $p \in M$，我们可以取 I-全纯坐标 $(z^0, \cdots, z^{2n-1})$，使得 $(g_{\lambda\overline{\mu}})$ 在 p 处为恒等式，于是有

$$*(dz^{2i} \wedge dz^{2i+1}) = dz^0 \wedge dz^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz^{2i}} \wedge \widehat{dz^{2i+1}} \wedge \cdots \wedge dz^{2n-2} \wedge dz^{2n-1}.$$

容易证明，算子 $*$ 将 $\bigwedge^{2,0}_{J,\mathbb{R}}(M)_{>0}$ 映射到 $\bigwedge^{2n-2,0}_{\mathbb{R},J}(M)_{>0}$，反之亦然。

定义 2.5. (1) 对于局部写作 $\alpha=\sum_{i<j}\alpha_{ij}dz^i\wedge dz^j$ 的 J-实 (2, 0)-形式，定义 α 的 Pfaffian 为 $dz^0\wedge\cdots\wedge dz^{2n-1}=\alpha^n$。

(2) J-实 $(2n-2,0)$-形式 Φ 的 Pfaffian 定义为

$$\mathrm{Pf}(\Phi)=\mathrm{Pf}(\frac{1}{(n-1)!}*\Phi).$$

特别地，对于任意 $\alpha\in\bigwedge^{2,0}_{J,\mathbb{R}}(M)$,

$$\mathrm{Pf}(\alpha^{n-1})=\mathrm{Pf}(\alpha)^{n-1}. \tag{2.2}$$

事实上，在一点处计算并利用引理 2.3，可得 $\alpha=\sum\lambda_i dz^{2i}\wedge dz^{2i+1}$。$\hat{}$ 定义 $\Lambda=\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}$, $\Lambda_i=\lambda_0\cdots\lambda_i\cdots\lambda_{n-1}$。于是 $\mathrm{Pf}(\alpha)=\Lambda$。另一方面,

$$\alpha^{n-1}=(n-1)!\sum\Lambda_i dz^0\wedge dz^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dz^{2i}}\wedge\widehat{dz^{2i+1}}\wedge\cdots\wedge dz^{2n-2}\wedge dz^{2n-1}.$$

根据定义，我们有 $\mathrm{Pf}(\alpha^{n-1})=\Lambda^{n-1}$。因此得到 (2.2)。

此外，注意对于任意两个 J-实 (2, 0)-形式 χ 和 η，我们有

$$\frac{\chi^n}{\eta^n}=\frac{\mathrm{Pf}(\chi)}{\mathrm{Pf}(\eta)}=\frac{\mathrm{Pf}(*\chi)}{\mathrm{Pf}(*\eta)}. \tag{2.3}$$

为便于后续计算，我们引入如下定义。

定义 2.6. 对于 $\chi\in\bigwedge^{2,0}_{J,\mathbb{R}}(M)$，定义

$$S_m(\chi)=\frac{C_n^m\chi^m\wedge\Omega^{n-m}}{\Omega^n}\quad for\quad 0\le m\le n. \tag{2.4}$$

特别地，对于 $u\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，我们有

$$S_1(\partial\partial_J u)=\frac{1}{2}\Delta_{J,g}u. \tag{2.5}$$

事实上，选取局部坐标使得 $\Omega=\sum_{i=0}^{n-1}dz^{2i}\wedge dz^{2i+1}$。现在 ω_J 具有如下形式

$$\omega_J=\frac{i}{2}\sum_{\alpha=0}^{2n-1}dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\alpha.$$

由于

$$J(\partial\partial_J u)=-J(\partial_J\partial u)=-\bar\partial J\partial u=\bar\partial J^{-1}\partial u=\bar\partial\bar\partial_J u=\overline{\partial\partial_J u},$$

我们看到 $\partial\partial_J u$是 J-实的。接着计算

$$\begin{aligned}\partial\partial_J u &= \sum \partial(J^{-1}\bar{\partial}u) = \sum \partial(u_{\bar{j}}J^{-1}d\bar{z}^j)\\ &= \sum u_{\bar{j}i}dz^i \wedge J^{-1}d\bar{z}^j + \sum u_{\bar{j}}\partial(J^{-1}d\bar{z}^j) = \sum u_{\bar{j}i}dz^i \wedge J^{-1}d\bar{z}^j.\end{aligned}$$

上面的最后一个等式由

$$0 = (\bar{\partial}\bar{\partial}_J + \bar{\partial}_J\bar{\partial})(z^i) = \bar{\partial}J^{-1}\partial J(z^i) + J^{-1}\partial J\bar{\partial}z^i = J^{-1}\partial J d\bar{z}^i.$$

因此

$$S_1(\partial\partial_J u) = \frac{n\partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-1}}{\Omega^n} = \sum_{\alpha=0}^{2n-1} u_{\alpha\overline{\alpha}}$$

and

$$\Delta_{I,g}u = \frac{2n\partial\overline{\partial}u \wedge \omega_I^{2n-1}}{\omega_I^{2n}} = 2\sum_{\alpha=0}^{2n-1} u_{\alpha\overline{\alpha}}.$$

因此，方程 (2.5) 成立。

现在设 (M, I, J, K, g, Ω) 是一个紧致超K¨ahler 流形，且 Ω_h 是关于 I 的严格正 (2, 0)-形式。对于 $(n-1)$-四元数多重次调和函数，四元数 Monge–Amp`ère 方程写作

$$\left(\Omega_h + \frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u)\Omega - \partial\partial_J u)\right)^n = e^{f+b}\Omega^n \tag{2.6}$$

$$\Omega_h + \frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u)\Omega - \partial\partial_J u) > 0, \quad \sup_M u = 0. \tag{2.7}$$

对于具有诱导的 (2,0)-形式 Ω_0, 的四元数平衡度量（分别为高杜雄度量；分别为强高杜雄度量；关于定义及其与复情形的对应关系，见 [15, 表 2]），我们将 Ω_h 定义为

$$(n-1)! * \Omega_h = \Omega_0^{n-1}. \tag{2.8}$$

我们希望证明，方程 (2.6) 的解可以导出四元数形式型方程的一个解。我们还需要

$$\frac{1}{(n-1)!} * (\partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-2}) = \frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u)\Omega - \partial\partial_J u) \tag{2.9}$$

这一点可通过在局部坐标中计算得到。详情请参见 [14, 第 34]页。由 (2.3)、(2.8) 和 (2.9)，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\Omega_h+\frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u)\Omega-\partial\partial_J u)\right)^n}{\Omega^n}\\=&\frac{\mathrm{Pf}\big(*\left(\Omega_h+\frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u)\Omega-\partial\partial_J u)\right)\big)}{\mathrm{Pf}(*\Omega)}\\=&\frac{\mathrm{Pf}(\Omega_0^{n-1}+\partial\partial_J u\wedge\Omega^{n-2})}{\mathrm{Pf}(\Omega^{n-1})}.\end{aligned}$$

现在注意到，严格正的 $(2n-2,0)$ 形式 Φ 可写为 $\Phi=\phi^{n-1}$，其中 ϕ 是严格正的 (2, 0)形式。这里的证明与 [16, 第 279-280] 页中的论证几乎完全相同。由于 $*$ 将 $\bigwedge^{2,0}_{I}\mathbb{R}$, $(M)_{>0}$ 映射到 $\bigwedge^{2n-2,0}_{I}\mathbb{R}$, $(M)_{>0}$，因此

$$\Omega_0^{n-1}+\partial\partial_J u\wedge\Omega^{n-2}>0. \tag{2.10}$$

因此，存在 Ω_u 使得

$$\Omega_u^{n-1}=\Omega_0^{n-1}+\partial\partial_J u\wedge\Omega^{n-2}.$$

这样的 Ω_u 是四元数平衡的（分别地，高杜雄的；强高杜雄的），并且我们有

$$e^{f+b}=\frac{\mathrm{Pf}(\Omega_u^{n-1})}{\mathrm{Pf}(\Omega^{n-1})}=\frac{\mathrm{Pf}(\Omega_u)^{n-1}}{\mathrm{Pf}(\Omega)^{n-1}}=\left(\frac{\Omega_u^n}{\Omega^n}\right)^{n-1}.$$

由此可知，方程 (2.6) 的解满足

$$\Omega_u^n=e^{f'+b'}\Omega^n. \tag{2.11}$$

这就证明了推论 1.2。

注 2.7。在超厄米流形 (M,I,J,K,g) 上，存在唯一的无挠连接 ∇^O，称为小俣连接 [17]，使得

$$\nabla^O I=\nabla^O J=\nabla^O K=0.$$

众所周知，超K¨ahler条件 $d\Omega=0$ 等价于 $\nabla^O=\nabla^{LC}$ 其中∇^{LC} 是列维-奇维塔联络。利用小俣连接，第 [9,2节4] 证明了可以在任意点 $x\in M$ 附近选取 I-全纯局部测地坐标，使得

∇^O 的克里斯托费尔符号以及 J 的一阶导数在 x处均为零。这一性质对于第 C^2 6节中的估计至关重要。

由上述备注可得以下有用的引理。

引理2.8. 在超厄米流形（M, I, J, K, g）上，给定一个 J-实 (2, 0)-形式 α，对于任意点 $x \in M$，都可以在 x 附近选取局部 I-全纯坐标，使得对于所有 $i, j = 0, \ldots, n-1$，以下关系在 x处成立。

$$\begin{aligned} &\alpha_{2i2j,p} = \overline{\alpha_{2i+12j+1,\bar{p}}}, \quad \alpha_{2i2j+1,p} = \overline{\alpha_{2j2i+1,\bar{p}}}, \\ &\alpha_{2i+12j,p} = \overline{\alpha_{2j+12i,\bar{p}}}, \quad \alpha_{2i+12j+1,p} = \overline{\alpha_{2i2j,\bar{p}}}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

若 α 在局部可写为

$$\alpha = \sum_{i<j} \alpha_{ij} dz^i \wedge dz^j, \quad \alpha_{ij} = -\alpha_{ji},$$

and

$$\alpha_{ij,p} = \frac{\partial}{\partial z^p}\alpha_{ij}, \quad \alpha_{ij,\bar{p}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^p}\alpha_{ij}.$$

证明。选取 x 附近的局部 I-全纯坐标，使得在 x处， J 的一阶导数为零，并且

$$Jdz^{2i} = -d\bar{z}^{2i+1}, \quad Jdz^{2i+1} = d\bar{z}^{2i}.$$

J 在 1-形式上的作用为

$$Jdz^i = J^i_{\bar{k}} d\bar{z}^k.$$

因此

$$\begin{aligned} J\alpha &= \sum_{k<l} \alpha_{kl} Jdz^k \wedge Jdz^l = \sum_{i,j} \sum_{k<l} \alpha_{kl} J^k_{\bar{i}} J^l_{\bar{j}} d\bar{z}^i \wedge d\bar{z}^j \\ &= \sum_{i<j} \sum_{k<l} \alpha_{kl} (J^k_{\bar{i}} J^l_{\bar{j}} - J^k_{\bar{j}} J^l_{\bar{i}}) d\bar{z}^i \wedge d\bar{z}^j. \end{aligned}$$

S由于 J 的导数在 x处为零，取 ∂ 并在 x 处求值得

$$\partial J\alpha = \sum_p \sum_{i<j} \sum_{k<l} \alpha_{kl,p} (J^k_{\bar{i}} J^l_{\bar{j}} - J^k_{\bar{j}} J^l_{\bar{i}}) dz^p \wedge d\bar{z}^i \wedge d\bar{z}^j. \tag{2.13}$$

另一方面

$$\partial\bar{\alpha} = \sum_{p}\sum_{i<j} \overline{\alpha_{ij,p}} dz^p \wedge d\bar{z}^i \wedge d\bar{z}^j. \tag{2.14}$$

注意，在点 x

$$J^{2i}_{\overline{2i+1}} = -1, \quad J^{2i+1}_{\overline{2i}} = 1,$$

而所有其他 $J^k_{\bar{l}}$均为零。由于 $J\alpha = \bar{\alpha}$，比较 (2.13) 和 (2.14) 的各分量可得，例如，当 $2i+1 < 2j+1$ 时，

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_{2i+12j+1,p}} &= \sum_{k<l} \alpha_{kl,p}(J^k_{\overline{2i+1}} J^l_{\overline{2j+1}} - J^k_{\overline{2j+1}} J^l_{\overline{2i+1}}) \\ &= \alpha_{2i2j,p} J^{2i}_{\overline{2i+1}} J^{2j}_{\overline{2j+1}} = \alpha_{2i2j,p}\,.\end{aligned}$$

当 $2j+1 < 2i$ 时，

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_{2j+12i,p}} &= \sum_{k<l} \alpha_{kl,p}(J^k_{\overline{2j+1}} J^l_{\overline{2i}} - J^k_{\overline{2i}} J^l_{\overline{2j+1}}) \\ &= \alpha_{2j2i+1,p} J^{2j}_{\overline{2j+1}} J^{2i+1}_{\overline{2i}} = -\alpha_{2j2i+1,p} = \alpha_{2i+12j,p}\,.\end{aligned}$$

取 i、j 的所有其他组合，可得 (2.12)。 □

注 2.9。结合引理 2.3 和注 2.7，在四元数维数为 n 的超厄米流形 (M, I, J, K, g, Ω) 上，我们可以找到局部 I-全纯测地坐标，使得 $\widetilde{\Omega}$ 与另一个 J-实 (2, 0)-形式 Ω 在点 $x \in M$ 处同时对角化，即

$$\Omega = \sum_{i=0}^{n-1} dz^{2i} \wedge dz^{2i+1}, \quad \widetilde{\Omega} = \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{\Omega}_{2i2i+1} dz^{2i} \wedge dz^{2i+1},$$

∇^O 的克里斯托费尔符号以及 J 的一阶导数在 x 处均为零，即

$$J^l_{k,i} = J^{\bar{l}}_{k,i} = J^{\bar{l}}_{k,\bar{i}} = J^l_{\bar{k},\bar{i}} = 0.$$

我们将这类局部坐标称为 x 附近的正规坐标。

3. C^0 Estimate

最近，Sroka [19] 对一类由支配四元数 Monge-Amp`ere 算子的算子所给出的偏微分方程，得到了一个尖锐的 C^0 估计。为实现我们的目的，我们采用了不同的方法，即建立 Cherrier 型不等式以及 [22] 中的引理。我们得到

定理 3.1. 设 (M, I, J, K, g, Ω) 是一个四元数维数为 n 的紧致超厄米流形，且 Ω_h 是关于 I 的严格正的 (2, 0)- 形式。设 f 是 M 上的光滑函数。若 u 是满足 (1.8) 的方程 (1.7) 的一个解，则存在一个常数 C，其仅依赖于固定数据 $(I, J, K, g, \Omega, \Omega_h)$ 和 f，使得

$$\sup_M |u| \leq C.$$

注意，由最大值原理，方程 (1.7) 中的常数 b 由 $\sup_M |f|$、Ω 和 Ω_h 一致有界。事实上，在 u 的最大值点处，

$$S_1(\partial\partial_J u)\Omega - \partial\partial_J u \leq 0.$$

因此，由方程 (1.7) 可知 b 有上界。类似地，b 也有下界。因此，为简便起见，在进行估计时我们仍将 $f + b$ 记作 f。

为方便起见，记

$$\widetilde{\Omega} = \Omega_h + \frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u)\Omega - \partial\partial_J u). \tag{3.1}$$

下面的引理是显然的。

引理 3.2。

$$S_1(\partial\partial_J u) = S_1(\widetilde{\Omega}) - S_1(\Omega_h) \tag{3.2}$$

$$\partial\partial_J u = (n-1)\Omega_h - S_1(\Omega_h)\Omega + S_1(\widetilde{\Omega})\Omega - (n-1)\widetilde{\Omega}. \tag{3.3}$$

证明。由 (3.1) 可得

$$n\widetilde{\Omega} \wedge \Omega^{n-1} = n\Omega_h \wedge \Omega^{n-1} + \frac{n}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u)\Omega^n - \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-1}).$$

也就是说,

$$S_1(\widetilde{\Omega}) = S_1(\Omega_h) + \frac{1}{n-1}(nS_1(\partial\partial_J u) - S_1(\partial\partial_J u)) = S_1(\Omega_h) + S_1(\partial\partial_J u)$$

这证明了 (3.2)，将 (3.2) 代入 (3.1) 即可得到 (3.3)。 □

定义 Ω_0 by $(n-1)!\Omega_h = *\Omega_0^{n-1}$，我们有如下结论

引理 3.3. 存在一个一致常数 C，使得

$$\partial\partial_J u \wedge (2\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-2}) \leq C\Omega^n \tag{3.4}$$

证明. 利用 (3.3)，我们计算得

$$\begin{aligned}
&\partial\partial_J u \wedge (2\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-1}) \\
=& 2\big((n-1)\Omega_h - S_1(\Omega_h)\Omega\big) \wedge \Omega_0^{n-1} - 2\big((n-1)\widetilde{\Omega} - S_1(\widetilde{\Omega})\Omega\big) \wedge \Omega_0^{n-1} \\
&+ \big((n-1)\Omega_h - S_1(\Omega_h)\Omega - ((n-1)\widetilde{\Omega} - S_1(\widetilde{\Omega})\Omega)\big)^2 \wedge \Omega^{n-2} \\
=& 2\big((n-1)\Omega_h - S_1(\Omega_h)\Omega\big) \wedge \Omega_0^{n-1} + \big((n-1)\Omega_h - S_1(\Omega_h)\Omega\big)^2 \wedge \Omega^{n-2} \\
&- 2\big((n-1)\widetilde{\Omega} - S_1(\widetilde{\Omega})\Omega\big) \wedge \Omega_0^{n-1} - 2\big((n-1)\Omega_h - S_1(\Omega_h)\Omega\big)\big((n-1)\widetilde{\Omega} - S_1(\widetilde{\Omega})\Omega\big) \wedge \Omega^{n-2} \\
&+ (n-1)^2\widetilde{\Omega}^2 \wedge \Omega^{n-2} - 2(n-1)S_1(\widetilde{\Omega})\widetilde{\Omega} \wedge \Omega^{n-1} + S_1^2(\widetilde{\Omega})\Omega^n \\
\leq& C\Omega^n - 2(n-1)\widetilde{\Omega} \wedge \Omega_0^{n-1} + 2S_1(\widetilde{\Omega})\Omega \wedge \Omega_0^{n-1} - 2(n-1)^2\Omega_h \wedge \widetilde{\Omega} \wedge \Omega^{n-2} \\
&+ 2(n-1)S_1(\widetilde{\Omega})\Omega_h \wedge \Omega^{n-1} + 2(n-1)S_1(\Omega_h)\widetilde{\Omega} \wedge \Omega^{n-1} - 2S_1(\Omega_h)S_1(\widetilde{\Omega})\Omega^n \\
&+ (n-1)^2\widetilde{\Omega}^2 \wedge \Omega^{n-2} - 2(n-1)S_1(\widetilde{\Omega})\widetilde{\Omega} \wedge \Omega^{n-1} + S_1^2(\widetilde{\Omega})\Omega^n.
\end{aligned}$$

~根据 $S_1(\Omega)$ 和 $S_{n-1}(\Omega_0)$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
&\partial\partial_J u \wedge (2\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-1}) \\
\leq& C\Omega^n - 2(n-1)\widetilde{\Omega} \wedge \Omega_0^{n-1} + \frac{2}{n}S_1(\widetilde{\Omega})S_{n-1}(\Omega_0)\Omega^n - 2(n-1)^2\Omega_h \wedge \widetilde{\Omega} \wedge \Omega^{n-2} \\
&+ \frac{2(n-1)}{n}S_1(\widetilde{\Omega})S_1(\Omega_h)\Omega^n + \frac{2(n-1)}{n}S_1(\Omega_h)S_1(\widetilde{\Omega})\Omega^n - 2S_1(\Omega_h)S_1(\widetilde{\Omega})\Omega^n \\
&+ \frac{2(n-1)}{n}S_2(\widetilde{\Omega})\Omega^n - \frac{2(n-1)}{n}S_1^2(\widetilde{\Omega})\Omega^n + S_1^2(\widetilde{\Omega})\Omega^n \\
=& C\Omega^n - 2(n-1)\widetilde{\Omega} \wedge \Omega_0^{n-1} + \frac{2}{n}S_1(\widetilde{\Omega})S_{n-1}(\Omega_0)\Omega^n - 2(n-1)^2\Omega_h \wedge \widetilde{\Omega} \wedge \Omega^{n-2} \\
&+ \frac{2(n-2)}{n}S_1(\Omega_h)S_1(\widetilde{\Omega})\Omega^n + \frac{2(n-1)}{n}S_2(\widetilde{\Omega})\Omega^n + \frac{2-n}{n}S_1^2(\widetilde{\Omega})\Omega^n.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

选取局部 I-全纯坐标，使得在某一点处，$\Omega = \sum_{i=0}^{n-1} dz^{2i} \wedge dz^{2i+1}$ 且 $\Omega_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i dz^{2i} \wedge dz^{2i+1}$，其中 $\lambda_i > 0$。由于

$$\Omega_h = \frac{1}{(n-1)!} * \Omega_0^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \Lambda_i dz^{2i} \wedge dz^{2i+1}$$

其中 $\Lambda_i = \lambda_0 \cdots \hat{\lambda}_i \cdots \lambda_{n-1}$，我们有 $S_1(\Omega_h) = S_{n-1}(\Omega_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \Lambda_i$。因此

$$\frac{2}{n} S_1(\widetilde{\Omega}) S_{n-1}(\Omega_0) + \frac{2(n-2)}{n} S_1(\widetilde{\Omega}) S_1(\Omega_h) = \frac{2(n-1)}{n} S_1(\widetilde{\Omega}) S_{n-1}(\Omega_0). \tag{3.6}$$

现在计算

$$2(n-1)\widetilde{\Omega} \wedge \Omega_0^{n-1} = 2(n-1)(n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{\Omega}_{2i,2i+1} \Lambda_i dz^0 \wedge \cdots \wedge dz^{2n-1}$$

$$2(n-1)^2 \Omega_h \wedge \widetilde{\Omega} \wedge \Omega^{n-2} = 2(n-1)(n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \Lambda_i (S_1(\widetilde{\Omega}) - \widetilde{\Omega}_{2i,2i+1}) dz^0 \wedge \cdots \wedge dz^{2n-1}.$$

Thus

$$2(n-1)\widetilde{\Omega} \wedge \Omega_0^{n-1} + 2(n-1)^2 \Omega_h \wedge \widetilde{\Omega} \wedge \Omega^{n-2} = \frac{2(n-1)}{n} S_1(\widetilde{\Omega}) S_{n-1}(\Omega_0) \Omega^n. \tag{3.7}$$

结合 (3.5)、(3.6) 和 (3.7)，我们得到

$$\partial\partial_J u \wedge (2\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-2}) \leq C\Omega^n + \frac{2(n-1)}{n} S_2(\widetilde{\Omega}) \Omega^n + \frac{2-n}{n} S_1^2(\widetilde{\Omega}) \Omega^n. \tag{3.8}$$

接下来还需证明最后两项之和有一个上界。证明与 [22]，中的证明类似；为完整起见，我们在此给出证明。选取局部坐标，使得在某一点处，

$$\Omega = \sum_{i=0}^{n-1} dz^{2i} \wedge dz^{2i+1}$$

$$\widetilde{\Omega} = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i dz^{2i} \wedge dz^{2i+1} \text{ with } 0 < \mu_0 \leq \cdots \leq \mu_{n-1}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&2(n-1)S_2(\widetilde{\Omega})+(2-n)S_1^2(\widetilde{\Omega})\\
=&\,2(n-1)\sum_{i<j}\mu_i\mu_j-(n-2)(\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i)^2\\
=&\,-(n-2)\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i^2-2(n-2)\sum_{i<j}\mu_i\mu_j+2(n-1)\sum_{i<j}\mu_i\mu_j\\
=&\,-(n-2)\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n-1}\mu_i\mu_j-(n-2)\mu_0^2+2\mu_0\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\\
\le&\,-\sum_{1\le i<j\le n-1}(\mu_i-\mu_j)^2+2\mu_0\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i.
\end{aligned}$$

我们要利用方程证明这个量有一个上界

$$\mu_0\cdots\mu_{n-1}=e^f.$$

当 $\mu_1<\mu_{n-1}/2$ 时，我们有 $(\mu_1-\mu_{n-1})^2\ge\frac{1}{4}\mu_{n-1}^2$。因此

$$-\sum_{1\le i<j\le n-1}(\mu_i-\mu_j)^2+2\mu_0\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\le-\frac{1}{4}\mu_{n-1}^2+C\mu_{n-1}\le C',$$

并且上面的第一个不等式成立，是因为 μ_0 有一致上界，因为它是最小特征值。当 $\mu_1\ge\mu_{n-1}/2$ 时，对于 $i=1$、$\cdots$、$n-1$，我们有 $\mu_i\ge\mu_{n-1}/2$。因此

$$\mu_0\le\frac{C}{\mu_1\cdots\mu_{n-1}}\le\frac{C2^{n-2}}{\mu_{n-1}^{n-1}}.$$

而在这种情况下

$$-\sum_{1\le i<j\le n-1}(\mu_i-\mu_j)^2+2\mu_0\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i\le\frac{C'}{\mu_{n-1}^{n-1}}\mu_{n-1}=\frac{C'}{\mu_{n-1}^{n-2}}\le C'.$$

这就证明了该引理。 □

现在我们来建立 Cherrier 型不等式：

引理 3.4. 存在一致常数 C 和 p_0，使得对于所有 $p\ge p_0$，

$$\int_M|\partial e^{-\frac{pu}{2}}|_g^2\Omega^n\wedge\overline{\Omega}^n\le Cp\int_M e^{-pu}\Omega^n\wedge\overline{\Omega}^n. \tag{3.9}$$

证明. 根据引理 3.3，我们有

$$\mathcal{I} := \int_M e^{-pu}\partial\partial_J u \wedge (2\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-2}) \wedge \overline{\Omega}^n \leq C\int_M e^{-pu}\Omega^n \wedge \overline{\Omega}^n.$$

通过分部积分，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} =& -\int_M \partial e^{-pu} \wedge \partial_J u \wedge \Big(2\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-2}\Big) \wedge \overline{\Omega}^n \\
&+ \int_M e^{-pu}\partial_J u \wedge \partial\Big((2\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-2}) \wedge \overline{\Omega}^n\Big) \\
=& p\int_M e^{-pu}\partial u \wedge \partial_J u \wedge \Big(2\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-2}\Big) \wedge \overline{\Omega}^n \\
&+ \int_M e^{-pu}\partial_J u \wedge \Big((2\partial\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \partial\Omega^{n-2}) \wedge \overline{\Omega}^n + (2\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-2}) \wedge \partial\overline{\Omega}^n\Big) \\
=& \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2
\end{aligned}$$

由于 $\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-2} > 0$ （见（2.10）），我们得到

$$\mathcal{I}_1 \geq p\int_M e^{-pu}\partial u \wedge \partial_J u \wedge \Omega_0^{n-1} \wedge \overline{\Omega}^n \geq c_0 p\int_M e^{-pu}\partial u \wedge \partial_J u \wedge \Omega^{n-1} \wedge \overline{\Omega}^n,$$

[1]其中我们将 $\Omega_0 \geq c_0^{\overline{n-1}}\Omega$ 用作正定常数 c_0。

接下来我们估计 $\mathcal{I}_2$。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 =& -\frac{1}{p}\int_M \partial_J e^{-pu} \wedge \Big((2\partial\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \partial\Omega^{n-2}) \wedge \overline{\Omega}^n + (2\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-2}) \wedge \partial\overline{\Omega}^n\Big) \\
=& \frac{1}{p}\int_M e^{-pu}\Big((2\partial_J\partial\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \partial_J\partial\Omega^{n-2}) \wedge \overline{\Omega}^n - (2\partial\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \partial\Omega^{n-2}) \wedge \partial_J\overline{\Omega}^n\Big) \\
&+ \frac{1}{p}\int_M e^{-pu}\Big((2\partial_J\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \partial_J\Omega^{n-2}) \wedge \partial\overline{\Omega}^n + (2\Omega_0^{n-1} + \partial\partial_J u \wedge \Omega^{n-2}) \wedge \partial_J\partial\overline{\Omega}^n\Big) \\
=& \frac{1}{p}\int_M e^{-pu}\partial\partial_J u \wedge \Big(\partial_J\partial\Omega^{n-2} \wedge \overline{\Omega}^n - \partial\Omega^{n-2} \wedge \partial_J\overline{\Omega}^n + \partial_J\Omega^{n-2} \wedge \partial\overline{\Omega}^n + \Omega^{n-2} \wedge \partial_J\partial\overline{\Omega}^n\Big) \\
&+ \frac{1}{p}\int_M e^{-pu}\Big(2\partial_J\partial\Omega_0^{n-1} \wedge \overline{\Omega}^n - 2\partial\Omega_0^{n-1} \wedge \partial_J\overline{\Omega}^n + 2\partial_J\Omega_0^{n-1} \wedge \partial\overline{\Omega}^n + 2\Omega_0^{n-1} \wedge \partial_J\partial\overline{\Omega}^n\Big) \\
=& \mathcal{I}_{21} + \mathcal{I}_{22}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{I}_{22}$ 满足以下估计：

$$\mathcal{I}_{22} \geq -Cp^{-1}\int_M e^{-pu}\Omega^n \wedge \overline{\Omega}^n.$$

分部积分可得

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{21} =& \int_M e^{-pu}\partial u\wedge\partial_J u\wedge\left(\partial_J\partial\Omega^{n-2}\wedge\overline{\Omega}^n-\partial\Omega^{n-2}\wedge\partial_J\overline{\Omega}^n+\partial_J\Omega^{n-2}\wedge\partial\overline{\Omega}^n+\Omega^{n-2}\wedge\partial_J\partial\overline{\Omega}^n\right)\\ &+\frac{1}{p}\int_M e^{-pu}\partial_J u\wedge\left(\partial_J\partial\Omega^{n-2}\wedge\partial\overline{\Omega}^n+\partial\Omega^{n-2}\wedge\partial\partial_J\overline{\Omega}^n+\partial\partial_J\Omega^{n-2}\wedge\partial\overline{\Omega}^n+\partial\Omega^{n-2}\wedge\partial_J\partial\overline{\Omega}^n\right)\\ &\geq -C\int_M e^{-pu}\partial u\wedge\partial_J u\wedge\Omega^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^n.\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}&\geq (c_0p-C)\int_M e^{-pu}\partial u\wedge\partial_J u\wedge\Omega^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^n-\frac{C}{p}\int_M e^{-pu}\Omega^n\wedge\overline{\Omega}^n\\ &\geq\frac{c_0p}{2}\int_M e^{-pu}\partial u\wedge\partial_J u\wedge\Omega^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^n-\frac{C}{p}\int_M e^{-pu}\Omega^n\wedge\overline{\Omega}^n.\end{aligned}$$

取 $p_0=(2c_0)^{-1}C$，则对所有 $p\geq p_0$,

$$\frac{1}{p}\int_M\partial e^{-\frac{pu}{2}}\wedge\partial_J e^{-\frac{pu}{2}}\wedge\Omega^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^n\leq C\int_M e^{-pu}\Omega\wedge\overline{\Omega}^n.$$

这就证明了该引理。 □

定理 3.1 的证明。由引理 3.4，仿照 [12] 和 [21, 20, 23] 中的论证，并将 M 视为一个 Hermitian 流形 (M,I,g)，即可证明 C^0 估计。为完整起见，我们在此略述证明。

由 [20],，Cherrier 型不等式 (3.9) 蕴含

$$e^{-p_0\inf\limits_M u}\leq C\int_M e^{-p_0u}\omega_I^{2n}.$$

于是由 [12] 或 [21]，存在一致常数 C_1 和 $\delta>0$，使得

$$|\{u\leq\inf_M u+C_1\}|_{\omega_I}\geq\delta.$$

另一方面，由 $\sup_M u=0$ and $\Delta_{\omega_I}u=2S_1(\partial\partial_J u)\geq-2S_1(\Omega_h)$（见（3.2））， 可得（见 [23]）

$$\int_M(-u)\omega_I^{2n}\leq C_2.$$

于是我们有

$$-\delta\inf_M u\leq\int_{\{u\leq\inf\limits_M u+C_1\}}(-u+C_1)\leq C.$$

证明至此完成。 □

4. C^1 Estimate

定理4.1. 设 u 是定理 1.1 中的一个解。则存在常数 C，它仅取决于固定数据（I、J、K、g、Ω、Ω_h）和 f，使得

$$|du|_g \leq C. \tag{4.1}$$

证明。在局部坐标中进行简单计算可得

$$n\partial u \wedge \partial_J u \wedge \Omega^{n-1} = \frac{1}{4}|du|_g^2 \Omega^n.$$

定义

$$\beta := \frac{1}{4}|du|_g^2.$$

按照 [6]，我们考虑

$$G = \log \beta - \varphi \circ u$$

其中 φ 是待定函数。假设 G 在 p 处取得最大值，接下来我们在点 p 处，使用 p 附近的正规坐标进行计算（见注 2.9）。

$$\begin{aligned}
\partial G &= \frac{\partial \beta}{\beta} - \varphi' \partial u = 0; \\
\partial_J G &= \frac{\partial_J \beta}{\beta} - \varphi' \partial_J u = 0; \\
\partial \partial_J G &= \frac{\partial \partial_J \beta}{\beta} - \frac{\partial \beta \wedge \partial_J \beta}{\beta^2} - \varphi'' \partial u \wedge \partial_J u - \varphi' \partial \partial_J u \\
&= \frac{\partial \partial_J \beta}{\beta} - ((\varphi')^2 + \varphi'') \partial u \wedge \partial_J u - \varphi' \partial \partial_J u.
\end{aligned}$$

Let

$$A = S_{n-1}(\widetilde{\Omega})\Omega^{n-1} - \widetilde{\Omega}^{n-1}, \tag{4.2}$$

~其中 Ω 与最后一节中的相同。在正规坐标中计算可得

$$A = (n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\sum_{j \neq i} \frac{\widetilde{\Omega}_{01} \cdots \widetilde{\Omega}_{2n-2\,2n-1}}{\widetilde{\Omega}_{2j2j+1}} \Big) dz^0 \wedge dz^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz^{2i}} \wedge \widehat{dz^{2i+1}} \wedge \cdots \wedge dz^{2n-2} \wedge dz^{2n-1}.$$

因此， A 为正，并且在点 p 处有

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \frac{\partial\partial_J G \wedge A \wedge \overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n \wedge \overline{\Omega}^n} \\
&= \frac{\partial\partial_J \beta \wedge A \wedge \overline{\Omega}^n}{\beta\widetilde{\Omega}^n \wedge \overline{\Omega}^n} - ((\varphi')^2 + \varphi'')\frac{\partial u \wedge \partial_J u \wedge A \wedge \overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n \wedge \overline{\Omega}^n} - \varphi'\frac{\partial\partial_J u \wedge A \wedge \overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n \wedge \overline{\Omega}^n}.
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

我们需要计算 $\partial\partial_J\beta$。根据 β 的定义，我们有

$$\beta\overline{\Omega}^n = n\overline{\partial}u \wedge \overline{\partial_J u} \wedge \overline{\Omega}^{n-1}.$$

对两边取 ∂_J，并注意到 $\partial_J\Omega = 0$，因为 Ω 是超K¨ahler 的，我们得到

$$\partial_J\beta \wedge \overline{\Omega}^n = n\partial_J\overline{\partial}u \wedge \overline{\partial_J u} \wedge \overline{\Omega}^{n-1} - n\overline{\partial}u \wedge \partial_J\overline{\partial_J u} \wedge \overline{\Omega}^{n-1}.$$

然后对两边取 ∂，得到

$$
\begin{aligned}
\partial\partial_J\beta \wedge \overline{\Omega}^n =& n\partial\partial_J\overline{\partial}u \wedge \overline{\partial_J u} \wedge \overline{\Omega}^{n-1} + n\partial_J\overline{\partial}u \wedge \partial\overline{\partial_J u} \wedge \overline{\Omega}^{n-1} \\
&- n\partial\overline{\partial}u \wedge \partial_J\overline{\partial_J u} \wedge \overline{\Omega}^{n-1} + n\overline{\partial}u \wedge \partial\partial_J\overline{\partial_J u} \wedge \overline{\Omega}^{n-1}.
\end{aligned}
$$

由方程

$$\widetilde{\Omega}^n = e^f\Omega^n, \tag{4.4}$$

取 $\overline{\partial}$ 后，我们得到

$$A \wedge n\overline{\partial}\partial\partial_J u = (n-1)(-n\widetilde{\Omega}^{n-1} \wedge \overline{\partial}\Omega_h + \overline{\partial}e^f \wedge \Omega^n),$$

取 $\overline{\partial_J}$ 后，我们得到

$$A \wedge n\overline{\partial_J}\partial\partial_J u = (n-1)(-n\widetilde{\Omega}^{n-1} \wedge \overline{\partial_J}\Omega_h + \overline{\partial_J}e^f \wedge \Omega^n).$$

因此，对于（4.3）的第一项，我们有

$$\partial\partial_J\beta \wedge A \wedge \overline{\Omega}^n = I_1 + I_2 + n\partial_J\overline{\partial}u \wedge \partial\overline{\partial_J u} \wedge \overline{\Omega}^{n-1} \wedge A - n\partial\overline{\partial}u \wedge \partial_J\overline{\partial_J u} \wedge \overline{\Omega}^{n-1} \wedge A \tag{4.5}$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_1 &= (n-1)(-n\widetilde{\Omega}^{n-1} \wedge \overline{\partial}\Omega_h + \overline{\partial}e^f \wedge \Omega^n) \wedge \overline{\partial_J u} \wedge \overline{\Omega}^{n-1}, \\
I_2 &= (n-1)(n\widetilde{\Omega}^{n-1} \wedge \overline{\partial_J}\Omega_h - \overline{\partial_J}e^f \wedge \Omega^n) \wedge \overline{\partial}u \wedge \overline{\Omega}^{n-1}.
\end{aligned}
$$

通过直接计算,

$$\begin{aligned}
\partial_J\overline{\partial}u &= \sum u_{\overline{j}i}J^{-1}d\overline{z^i}\wedge d\overline{z^j};\\
\partial\overline{\partial_J}u &= \sum u_{ij}dz^j\wedge J^{-1}dz^i;\\
\partial\overline{\partial}u &= \sum u_{i\overline{j}}dz^i\wedge d\overline{z^j};\\
\partial_J\overline{\partial_J}u &= \sum u_{i\overline{j}}J^{-1}d\overline{z^j}\wedge J^{-1}dz^i;
\end{aligned}$$

因此，(4.5) 的第三项变为

$$n\partial_J\overline{\partial}u\wedge\partial\overline{\partial_J}u\wedge\overline{\Omega}^{n-1}\wedge A=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2n-1}(\sum_{i\neq k}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}})(|u_{2kj}|^2+|u_{2k+1j}|^2)\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n; \tag{4.6}$$

第四项为

$$-n\partial\overline{\partial}u\wedge\partial_J\overline{\partial_J}u\wedge\overline{\Omega}^{n-1}\wedge A=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2n-1}(\sum_{i\neq k}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}})(|u_{2k\overline{j}}|^2+|u_{2k+1\overline{j}}|^2)\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n. \tag{4.7}$$

对于 I_1 和 I_2，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1}I_1 &= -n\widetilde{\Omega}^{n-1}\wedge\overline{\partial}\Omega_h\wedge\overline{\partial_J}u\wedge\overline{\Omega}^{n-1}-\overline{\partial_J}u\wedge\overline{\partial}e^f\wedge\Omega^n\wedge\overline{\Omega}^{n-1}\\
&= -\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{(\Omega_h)_{2i2i+1,\overline{j}}u_j}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{u_j(e^f)_{\overline{j}}}{e^f}\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n
\end{aligned} \tag{4.8}$$

and

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1}I_2 &= n\widetilde{\Omega}^{n-1}\wedge\overline{\partial_J}\Omega_h\wedge\overline{\partial}u\wedge\overline{\Omega}^{n-1}+\overline{\partial}u\wedge\overline{\partial_J}e^f\wedge\Omega^n\wedge\overline{\Omega}^{n-1}\\
&= -\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{(\overline{\Omega}_h)_{2i2i+1,j}u_{\overline{j}}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{u_{\overline{j}}(e^f)_j}{e^f}\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

结合 (4.8)、(4.9)、(4.6) 和 (4.7)，我们得到 (4.5) 的估计

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\partial_J\beta\wedge A\wedge\overline{\Omega}^n}{\beta\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n} &= -\frac{1}{n\beta}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{(\Omega_h)_{2i2i+1,\overline{j}}u_j+(\overline{\Omega}_h)_{2i2i+1,j}u_{\overline{j}}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}+\frac{1}{n\beta}\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{u_j(e^f)_{\overline{j}}+u_{\overline{j}}(e^f)_j}{e^f}\\
&\quad+\frac{1}{n\beta}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{i\neq k}\frac{|u_{2kj}|^2+|u_{2k+1j}|^2}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}+\frac{1}{n\beta}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{i\neq k}\frac{|u_{2k\overline{j}}|^2+|u_{2k+1\overline{j}}|^2}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

再次通过直接计算，(4.3) 的第二项为

$$\partial u \wedge \partial_J u \wedge A \wedge \overline{\Omega}^n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\sum_{k\neq i}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2k2k+1}})(|u_{2i}|^2+|u_{2i+1}|^2)\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n. \tag{4.11}$$

对于 (4.3) 的第三项，我们计算得

$$\begin{aligned}\partial\partial_J u\wedge A &= \partial\partial_J u\wedge(\frac{n\widetilde{\Omega}^{n-1}\wedge\Omega}{\Omega^n}\Omega^{n-1}-\widetilde{\Omega}^{n-1})\\ &= (S_1(\partial\partial_J u)\Omega-\partial\partial_J u)\wedge\widetilde{\Omega}^{n-1}\\ &= (n-1)(\widetilde{\Omega}^n-\Omega_h\wedge\widetilde{\Omega}^{n-1}).\end{aligned} \tag{4.12}$$

由 M 的紧致性，存在 $\epsilon>0$ 使得 $\Omega_h\geq\epsilon\Omega$，我们得到

$$\begin{aligned}-\varphi'\frac{\partial\partial_J u\wedge A\wedge\overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n} &= -(n-1)\varphi'+(n-1)\varphi'\frac{\Omega_h\wedge\widetilde{\Omega}^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n}\\ &\geq -(n-1)\varphi'+\frac{\epsilon(n-1)\varphi'}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

We 可以假设 $\beta\gg 1$，否则问题已经解决。不等式 (4.3) 变为

$$\begin{aligned}0\geq&\frac{n-1}{n\beta e^f}\sum_{i=0}^{2n-1}(u_i(e^f)_{\overline{i}}+u_{\overline{i}}(e^f)_i)\\ &-\frac{(\varphi')^2+\varphi''}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\sum_{k\neq i}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2k2k+1}})(|u_{2i}|^2+|u_{2i+1}|^2)\\ &-(n-1)\varphi'+\frac{n-1}{n}(\epsilon\varphi'-C_1\frac{\sum u_j}{\beta}-C_2\frac{\sum u_{\overline{j}}}{\beta})\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

第一项有下界。现在我们取

$$\varphi(t)=\frac{\log(2t+C_0)}{2}. \tag{4.15}$$

其中 C_0 由 C^0 估计确定，并将 (4.14) 改写为

$$C_3\geq C_4\sum_{i=0}^{n-1}(\sum_{k\neq i}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2k2k+1}})(|u_{2i}|^2+|u_{2i+1}|^2)+C_5\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}. \tag{4.16}$$

因此，对于任意固定的 i

$$\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}\geq\frac{C_5}{C_3}\geq C.$$

由方程 (4.4) 还可得

$$\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}} = e^{-f}\prod_{j\neq i}\widetilde{\Omega}_{2j2j+1} \geq \frac{C^{n-1}}{\sup_M e^f}.$$

由所有 $\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}$ 上的界，根据 (4.16) 可得 β 的界。 □

5. Bound on $\partial\partial_J u$

定理 5.1. 设 u 是定理 1.1 中的解。那么存在一个仅依赖于固定数据（$I, J, K, g, \Omega, \Omega_h$）和 f 的常数 C，使得

$$|\partial\partial_J u|_g \leq C. \tag{5.1}$$

证明. 为简便起见，记

$$\eta = S_1(\partial\partial_J u).$$

考虑函数

$$G = \log\eta - \varphi\circ u$$

其中函数 φ 如上一节所述。我们使用以 p 为中心的正规坐标，在 G 的最大值点 p 处进行计算（见注 2.9）。我们有

$$\begin{aligned}
\partial G &= \frac{\partial\eta}{\eta} - \varphi'\partial u = 0;\\
\partial_J G &= \frac{\partial_J\eta}{\eta} - \varphi'\partial_J u = 0;\\
\partial\partial_J G &= \frac{\partial\partial_J\eta}{\eta} - ((\varphi')^2+\varphi'')\partial u\wedge\partial_J u - \varphi'\partial\partial_J u.
\end{aligned}$$

令 A 与前文相同（见 (4.2)），则在点 p 处有

$$\begin{aligned}
0 &\geq \frac{\partial\partial_J G\wedge A\wedge\overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n}\\
&= \frac{\partial\partial_J\eta\wedge A\wedge\overline{\Omega}^n}{\eta\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n} - ((\varphi')^2+\varphi'')\frac{\partial u\wedge\partial_J u\wedge A\wedge\overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n} - \varphi'\frac{\partial\partial_J u\wedge A\wedge\overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

第二项和第三项已在上一节中处理。现在我们聚焦于第一项中的$\partial\partial_J\eta$ 。

根据定义， η 是实数，并且

$$\eta\overline{\Omega}^n = n\bar\partial\bar\partial_J u\wedge\overline{\Omega}^{n-1}.$$

在假设下 erK¨ahler 条件 $d\Omega = 0$，对上面的等式求两次导数可得

$$\partial\partial_J\eta \wedge \overline{\Omega}^n = n\partial\partial_J\bar{\partial}\bar{\partial}_J u \wedge \overline{\Omega}^{n-1} = n\bar{\partial}\bar{\partial}_J\partial\partial_J u \wedge \overline{\Omega}^{n-1} \tag{5.3}$$

上面的最后一个等式归功于引理 2.1。

我们知道（回忆一下（3.3））

$$\partial\partial_J u = (n-1)\Omega_h - S_1(\Omega_h)\Omega + S_1(\widetilde{\Omega})\Omega - (n-1)\widetilde{\Omega}.$$

Thus

$$\bar{\partial}\bar{\partial}_J\partial\partial_J u = (n-1)\bar{\partial}\bar{\partial}_J\Omega_h - \bar{\partial}\bar{\partial}_J S_1(\Omega_h)\wedge\Omega + \bar{\partial}\bar{\partial}_J S_1(\widetilde{\Omega})\wedge\Omega - (n-1)\bar{\partial}\bar{\partial}_J\widetilde{\Omega}. \tag{5.4}$$

这里我们再次利用了 Ω 上的超 Kähler 条件。现在我们有

$$\begin{aligned}\partial\partial_J\eta \wedge A \wedge \overline{\Omega}^n &= nA \wedge \bar{\partial}\bar{\partial}_J\partial\partial_J u \wedge \overline{\Omega}^{n-1} \\ &= n(n-1)A\wedge\bar{\partial}\bar{\partial}_J\Omega_h\wedge\overline{\Omega}^{n-1} - n\bar{\partial}\bar{\partial}_J S_1(\Omega_h)\wedge A\wedge\Omega\wedge\overline{\Omega}^{n-1} \\ &\quad + n\bar{\partial}\bar{\partial}_J S_1(\widetilde{\Omega})\wedge A\wedge\Omega\wedge\overline{\Omega}^{n-1} - n(n-1)A\wedge\bar{\partial}\bar{\partial}_J\widetilde{\Omega}\wedge\overline{\Omega}^{n-1}\end{aligned} \tag{5.5}$$

注意到

$$A\wedge\Omega = S_{n-1}(\widetilde{\Omega})\Omega^n - \widetilde{\Omega}^{n-1}\wedge\Omega = \frac{n-1}{n}S_{n-1}(\widetilde{\Omega})\Omega^n$$

and

$$\bar{\partial}\bar{\partial}_J S_1(\widetilde{\Omega})\wedge\Omega^n = n\bar{\partial}\bar{\partial}_J\widetilde{\Omega}\wedge\Omega^{n-1}.$$

（5.5）的第三项变为

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\bar{\partial}_J S_1(\widetilde{\Omega})\wedge A\wedge\Omega\wedge\overline{\Omega}^{n-1} &= \bar{\partial}\bar{\partial}_J S_1(\widetilde{\Omega})\wedge(\Omega^n\cdot\frac{n-1}{n}S_{n-1}(\widetilde{\Omega}))\wedge\overline{\Omega}^{n-1} \\ &= (n-1)S_{n-1}(\widetilde{\Omega})\bar{\partial}\bar{\partial}_J\widetilde{\Omega}\wedge\Omega^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^{n-1}.\end{aligned}$$

第四项为

$$A\wedge\bar{\partial}\bar{\partial}_J\widetilde{\Omega}\wedge\overline{\Omega}^{n-1} = S_{n-1}(\widetilde{\Omega})\bar{\partial}\bar{\partial}_J\widetilde{\Omega}\wedge\Omega^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^{n-1} - \widetilde{\Omega}^{n-1}\wedge\bar{\partial}\bar{\partial}_J\widetilde{\Omega}\wedge\overline{\Omega}^{n-1}.$$

(5.5) 的前两项相似，因此我们得到

$$\partial\partial_J\eta\wedge A\wedge\overline{\Omega}^n = n(n-1)\bar{\partial}\bar{\partial}_J\widetilde{\Omega}\wedge\widetilde{\Omega}^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^{n-1} - n(n-1)\bar{\partial}\bar{\partial}_J\Omega_h\wedge\widetilde{\Omega}^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^{n-1}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{\partial\partial_J\eta\wedge A\wedge\overline{\Omega}^n}{\eta\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n}&=n(n-1)\frac{\bar\partial\bar\partial_J\widetilde{\Omega}\wedge\widetilde{\Omega}^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^{n-1}}{\eta\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n}-n(n-1)\frac{\bar\partial\bar\partial_J\Omega_h\wedge\widetilde{\Omega}^{n-1}\wedge\overline{\Omega}^{n-1}}{\eta\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n}\\&=\frac{n-1}{\eta n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{2n-1}\frac{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1,p\bar p}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}-\frac{n-1}{\eta n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{2n-1}\frac{(\Omega_h)_{2i2i+1,p\bar p}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}\\&\geq\frac{n-1}{\eta n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{2n-1}\frac{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1,p\bar p}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}-\frac{C_1}{\eta}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

现在，我们利用方程改写 (5.6) 的右端

$$\mathrm{Pf}(\widetilde{\Omega}_{ij})=e^f\mathrm{Pf}(\Omega_{ij}).\tag{5.7}$$

对两边取对数

$$\log\mathrm{Pf}(\widetilde{\Omega}_{ij})=f+\log\mathrm{Pf}(\Omega_{ij}).\tag{5.8}$$

由于 $\Omega^n=\mathrm{Pf}(\Omega_{ij})dz^0\wedge\cdots\wedge dz^{2n-1}$ 且 $\bar\partial\Omega=0$，我们有 $\bar\partial\mathrm{Pf}(\Omega)=0$。对 (5.8) 取 $\bar\partial$，由于 $\mathrm{Pf}(\Omega_{ij})^2=\det(\Omega_{ij})$，可得

$$\frac{1}{2}\sum\widetilde{\Omega}^{ij}\widetilde{\Omega}_{ji,\bar p}=f_{\bar p}.\tag{5.9}$$

对两边取 ∂，我们得到

$$\frac{1}{2}\sum\widetilde{\Omega}^{ij}\widetilde{\Omega}_{ji,\bar pp}=\frac{1}{2}\sum\widetilde{\Omega}^{ik}\widetilde{\Omega}_{kl,p}\widetilde{\Omega}^{lj}\widetilde{\Omega}_{ji,\bar p}+f_{p\bar p}.\tag{5.10}$$

写成局部坐标后，(5.10) 的左边为

$$\frac{1}{2}\sum\widetilde{\Omega}^{2i2i+1}\widetilde{\Omega}_{2i+12i,p\bar p}+\frac{1}{2}\sum\widetilde{\Omega}^{2i+12i}\widetilde{\Omega}_{2i2i+1,p\bar p}=\sum\frac{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1,p\bar p}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}.\tag{5.11}$$

我们断言，(5.10) 右端的第一项为正，即

$$\sum\widetilde{\Omega}^{ik}\widetilde{\Omega}_{kl,p}\widetilde{\Omega}^{lj}\widetilde{\Omega}_{ji,\bar p}\geq 0.\tag{5.12}$$

事实上，在典范坐标中，

$$\begin{aligned}\sum \widetilde{\Omega}^{ik}\widetilde{\Omega}_{kl,p}\widetilde{\Omega}^{lj}\widetilde{\Omega}_{ji,\bar{p}} &= \widetilde{\Omega}^{2i2i+1}(\widetilde{\Omega}^{2j2j+1}\widetilde{\Omega}_{2i+12j,p}\widetilde{\Omega}_{2j+12i,\bar{p}} + \widetilde{\Omega}^{2j+12j}\widetilde{\Omega}_{2i+12j+1,p}\widetilde{\Omega}_{2j2i,\bar{p}})\\ &\quad + \widetilde{\Omega}^{2i+12i}(\widetilde{\Omega}^{2j2j+1}\widetilde{\Omega}_{2i2j,p}\widetilde{\Omega}_{2j+12i+1,\bar{p}} + \widetilde{\Omega}^{2j+12j}\widetilde{\Omega}_{2i2j+1,p}\widetilde{\Omega}_{2j2i+1,\bar{p}})\\ &= \sum \frac{\widetilde{\Omega}_{2i+12j,p}\widetilde{\Omega}_{2j+12i,\bar{p}} + \widetilde{\Omega}_{2i2j+1,p}\widetilde{\Omega}_{2j2i+1,\bar{p}}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}\widetilde{\Omega}_{2j2j+1}}\\ &\quad - \sum \frac{\widetilde{\Omega}_{2i+12j+1,p}\widetilde{\Omega}_{2j2i,\bar{p}} + \widetilde{\Omega}_{2i2j,p}\widetilde{\Omega}_{2j+12i+1,\bar{p}}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}\widetilde{\Omega}_{2j2j+1}}\end{aligned}$$

由于 $\widetilde{\Omega}$ 是 J-实的，利用关系式 (2.12) 可得

$$\widetilde{\Omega}^{ik}\widetilde{\Omega}_{klp}\widetilde{\Omega}^{lj}\widetilde{\Omega}_{ji\bar{p}} = \sum \frac{|\widetilde{\Omega}_{2i+12j,p}|^2 + |\widetilde{\Omega}_{2i2j+1,p}|^2 + |\widetilde{\Omega}_{2i+12j+1,p}|^2 + |\widetilde{\Omega}_{2i2j,p}|^2}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}\widetilde{\Omega}_{2j2j+1}} \tag{5.13}$$

因此 (5.12) 成立。由 (5.6)、(5.10)、(5.11) 和 (5.12) 可得

$$\frac{\partial\partial_J\eta \wedge A \wedge \overline{\Omega}^n}{\eta\widetilde{\Omega}^n \wedge \overline{\Omega}^n} \geq \frac{n-1}{2\eta n}\Delta_{I,g}f - \frac{C_1}{\eta}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}. \tag{5.14}$$

由 (4.11) 和 (4.13)，不等式 (5.2) 现在变为

$$\begin{aligned}0 \geq &\frac{n-1}{2\eta n}\Delta_{I,g}f - \frac{(\varphi')^2+\varphi''}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\sum_{k\neq i}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2k2k+1}})(|u_{2i}|^2+|u_{2i+1}|^2)\\ &- (n-1)\varphi' + \left(\frac{\epsilon(n-1)\varphi'}{n} - \frac{C_1}{\eta}\right)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}.\end{aligned} \tag{5.15}$$

假设 $\eta \gg 1$，由 (5.15) 可得

$$C_2 \geq C_3\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}} \tag{5.16}$$

因此所有 $\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}$ 都一致有界。由于 $\eta = S_1(\partial\partial_J u) = S_1(\Omega) - S_1(\Omega_h)$，因此我们可以得到 η 的一致有界估计。

□

6. C^2 Estimate

定理 6.1. 设 u 是定理 1.1 中的一个解。那么存在常数 C，它仅依赖于固定数据（I、J、K、g、Ω、Ω_h）和 f，使得

$$|\nabla^2 u|_g \leq C. \tag{6.1}$$

证明. 由于 $\nabla^2 u$ 的特征值之和有下界

$$\frac{1}{2}\Delta_{I,g}u = S_1(\partial\partial_J u) = S_1(\widetilde{\Omega}) - S_1(\Omega_h) \geq -S_1(\Omega_h),$$

只需证明最大特征值有上界。按照 [7] 在 M 上定义函数

$$\lambda(x) = \sup_{X\in S(T_xM)} (\nabla^2 u)(X, X)$$

其中， $S(T_xM)$ 表示 x 处的单位切向量。

考虑函数

$$G = \lambda + \frac{1}{4}|du|_g^2.$$

由于我们已经得到了 C^1 估计，只需在最大值点 $p \in M$ 处估计 G。在 p 周围的正规坐标中，我们引入实坐标

$$z^j = t_j + it_{2n+j}, \quad j = 0, \cdots, 2n-1, \tag{6.2}$$

并计算

$$\nabla^2 u = \nabla(u_{t_j} dt_j) = u_{t_i t_j} dt_i \otimes dt_j - \Gamma_{ji}^k u_{t_j} dt_i \otimes dt_k, \tag{6.3}$$

其中， Γ_{ji}^k 是相对于 $\{\frac{\partial}{\partial t_j}\}_{i=0}^{4n-1}$ 的 ∇ 的克里斯托费尔符号。设

$$X(p) = \sum_{j=0}^{4n-1} X^j(p)\frac{\partial}{\partial t_j}(p)$$

是实现 $\nabla^2 u$ at p 上确界的向量，并将其延拓为 X p 附近的常向量场，即

$$X = \sum_{j=0}^{4n-1} X^j(p)\frac{\partial}{\partial t_j}.$$

然后在充分小的邻域中定义，

$$\tilde{\lambda} = \nabla^2 u(X, X)$$

$$\tilde{G} = \tilde{\lambda} + \frac{1}{4}|du|_g^2.$$

~ ~ ~ ~注意到 $\lambda \leq \lambda$, $\lambda(p) = \lambda(p)$。因此，G 也在 p附近的 p 处取到最大值，而 λ~因此在 p附近是光滑的。由 (6.3) 可得

$$\tilde{\lambda} = D_X^2 u - \Gamma_{ji}^k u_{t_j} X^i X^k \tag{6.4}$$

其中 D 表示关于实坐标的通常导数。

令 A 如前所述（见 (4.2)），则在点 p 处有

$$0 \geq \frac{\partial\partial_J \tilde{G} \wedge A \wedge \overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n \wedge \overline{\Omega}^n} = \frac{\partial\partial_J \tilde{\lambda} \wedge A \wedge \overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n \wedge \overline{\Omega}^n} + \frac{\frac{1}{4}\partial\partial_J |du|_g^2 \wedge A \wedge \overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n \wedge \overline{\Omega}^n}. \tag{6.5}$$

在局部坐标中，第一项为

$$\begin{aligned} \frac{\partial\partial_J \tilde{\lambda} \wedge A \wedge \overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n \wedge \overline{\Omega}^n} &= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_{i\neq p} \frac{\tilde{\lambda}_{2p\overline{2p}} + \tilde{\lambda}_{2p+1\overline{2p+1}}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{p\neq i} \frac{\tilde{\lambda}_{2p\overline{2p}} + \tilde{\lambda}_{2p+1\overline{2p+1}}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

对 (6.4) 求两次导数，得到

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{p\overline{p}} &= D_X^2 u_{p\overline{p}} - \Gamma^k_{jip\overline{p}} u_{t_j} X^i X^k - \Gamma^k_{jip} u_{t_j t_{\overline{p}}} X^i X^k - \Gamma^k_{ji\overline{p}} u_{t_j t_p} X^i X^k \\ &\geq D_X^2 u_{p\overline{p}} - C_1(\tilde{\lambda} + 1). \end{aligned} \tag{6.7}$$

这里用到了注 2.9，以及 Γ^k_{ij} 的导数仅依赖于 g这一事实，并且 u 的梯度有界。此外

$$|u_{t_i t_j}| \leq C_2(1 + \tilde{\lambda}).$$

由 (5.1) 和 (3.2) 可知

$$\frac{1}{C_3} \leq \widetilde{\Omega}_{2i2i+1} \leq C_3. \tag{6.8}$$

利用 (6.7) 和 (6.8)，我们可以估计 (6.6)：

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{p\neq i} \frac{\tilde{\lambda}_{2p\overline{2p}} + \tilde{\lambda}_{2p+1\overline{2p+1}}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}} &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{p\neq i} \frac{D_X^2 u_{2p\overline{2p}} + D_X^2 u_{2p+1\overline{2p+1}}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}} - C_1(\tilde{\lambda} + 1) \\ &\geq C_4 \sum_{p=0}^{2n-1} D_X^2 u_{p\overline{p}} - C_1(\tilde{\lambda} + 1) \end{aligned} \tag{6.9}$$

为了处理右端的第一项，我们使用方程 (5.7)

$$\log \mathrm{Pf}(\widetilde{\Omega}_{ij}) = f + \log \mathrm{Pf}(\Omega_{ij}).$$

沿方向 X 求两次导数，得到

$$\frac{1}{2}\sum \widetilde{\Omega}^{ij} D_X^2 \widetilde{\Omega}_{ji} = \frac{1}{2}\sum \widetilde{\Omega}^{ik} D_X \widetilde{\Omega}_{kl} \widetilde{\Omega}^{lj} D_X \widetilde{\Omega}_{ji} + D_X^2 f + D_X^2 \log \mathrm{Pf}(\Omega_{ij}). \tag{6.10}$$

与上一节一样,

$$\sum \widetilde{\Omega}^{ik} D_X \widetilde{\Omega}_{kl} \widetilde{\Omega}^{lj} D_X \widetilde{\Omega}_{ji} = \sum \frac{D_X \widetilde{\Omega}_{2i+12j} D_X \widetilde{\Omega}_{2j+12i} + D_X \widetilde{\Omega}_{2i2j+1} D_X \widetilde{\Omega}_{2j2i+1}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1} \widetilde{\Omega}_{2j2j+1}} - \sum \frac{D_X \widetilde{\Omega}_{2i+12j+1} D_X \widetilde{\Omega}_{2j2i} + D_X \widetilde{\Omega}_{2i2j} D_X \widetilde{\Omega}_{2j+12i+1}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1} \widetilde{\Omega}_{2j2j+1}}.$$

注意，对于 $p = 0, \ldots, 2n-1$,

$$\frac{\partial}{\partial t_p} \widetilde{\Omega}_{ij} = \frac{\partial}{\partial z^p} \widetilde{\Omega}_{ij} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}^p} \widetilde{\Omega}_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial t_{2n+p}} \widetilde{\Omega}_{ij} = -i\big(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^p} \widetilde{\Omega}_{ij} - \frac{\partial}{\partial z^p} \widetilde{\Omega}_{ij}\big).$$

因此，由 (2.12) 可得

$$D_X \widetilde{\Omega}_{2i2j} = \overline{D_X \widetilde{\Omega}_{2i+12j+1}}, \quad D_X \widetilde{\Omega}_{2i2j+1} = \overline{D_X \widetilde{\Omega}_{2j2i+1}},$$
$$D_X \widetilde{\Omega}_{2i+12j} = \overline{D_X \widetilde{\Omega}_{2j+12i}}, \quad D_X \widetilde{\Omega}_{2i+12j+1} = \overline{D_X \widetilde{\Omega}_{2i2j}}.$$

因此

$$\sum \widetilde{\Omega}^{ik} D_X \widetilde{\Omega}_{kl} \widetilde{\Omega}^{lj} D_X \widetilde{\Omega}_{ji} \geq 0.$$

结合 (6.10) 得

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{D_X^2 \widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}} \geq D_X^2 f + D_X^2 \log \mathrm{Pf}(\Omega_{ij}). \tag{6.11}$$

将 J 写成局部坐标形式

$$J = J_{\bar{k}}^{l} d\bar{z}^k \otimes \partial_{z^l} + J_{k}^{\bar{l}} dz^k \otimes \partial_{\bar{z}^l}.$$

注意

$$\widetilde{\Omega}_{ij} = (\Omega_h)_{ij} + \frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u)\Omega_{ij} - (-u_{i\bar{k}} J_j^{\bar{k}} + u_{j\bar{k}} J_i^{\bar{k}})).$$

对两边求两次导数，得到

$$\begin{aligned}(n-1) D_X^2 \widetilde{\Omega}_{2i2i+1} = {} & (n-1) D_X^2 (\Omega_h)_{2i2i+1} + \sum_{p=0}^{2n-1} D_X^2 u_{p\bar{p}} + S_1(\partial\partial_J u) D_X^2 \Omega_{2i2i+1} \\ & - (D_X^2 u_{2i\overline{2i}} + D_X^2 u_{2i+1\overline{2i+1}}) + u_{i\bar{k}} D_X^2 J_j^{\bar{k}} - u_{j\bar{k}} D_X^2 J_i^{\bar{k}}.\end{aligned} \tag{6.12}$$

这里我们再次用到了注 2.9，即在点 p 处,

$$J_{\bar{k},i}^{l} = J_{k,i}^{\bar{l}} = J_{\bar{k},\bar{i}}^{\bar{l}} = J_{\bar{k},\bar{i}}^{l} = 0.$$

结合式 (6.11)

$$\sum_{p=0}^{2n-1} D_X^2 u_{p\overline{p}} \geq -C_5(\tilde{\lambda}+1). \tag{6.13}$$

然后结合 (6.9)，我们得到

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{p\neq i}\frac{\tilde{\lambda}_{2p\overline{2p}}+\tilde{\lambda}_{2p+1\overline{2p+1}}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}} \geq -C'(\tilde{\lambda}+1). \tag{6.14}$$

现在我们得到了 (6.6) 的估计。(6.5) 的第二项已按照 (4.10) 中的方式通过 C^1估计处理

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{1}{4}\partial\partial_J|du|_g^2\wedge A\wedge\overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n}\\
=&-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{(\Omega_h)_{2i2i+1,\overline{j}}u_j+(\overline{\Omega}_h)_{2i2i+1,j}u_{\overline{j}}}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{u_j(e^f)_{\overline{j}}+u_{\overline{j}}(e^f)_j}{e^f}\\
&+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{i\neq k}\frac{|u_{2kj}|^2+|u_{2k+1j}|^2}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2n-1}\sum_{i\neq k}\frac{|u_{2k\overline{j}}|^2+|u_{2k+1\overline{j}}|^2}{\widetilde{\Omega}_{2i2i+1}}.
\end{aligned} \tag{6.15}$$

结合 (6.8) 和 C^1 估计，我们得到

$$\frac{\frac{1}{4}\partial\partial_J|du|_g^2\wedge A\wedge\overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n} \geq -C_6+C_7(|u_{ij}|^2+|u_{i\overline{j}}|^2). \tag{6.16}$$

根据 λ 的定义

$$|u_{ij}|^2+|u_{i\overline{j}}|^2 \geq C_8\tilde{\lambda}^2. \tag{6.17}$$

结合 (6.16) 和 (6.17)，我们得到

$$\frac{\frac{1}{4}\partial\partial_J|du|_g^2\wedge A\wedge\overline{\Omega}^n}{\widetilde{\Omega}^n\wedge\overline{\Omega}^n} \geq -C_6+C\tilde{\lambda}^2. \tag{6.18}$$

将 (6.14) 和 (6.18) 代入 (6.5)

$$0 \geq C\tilde{\lambda}^2-C'\tilde{\lambda}-C''. \tag{6.19}$$

˜这给出了 λ的上界，因此 λ 有上界。 □

7. Proof of the Main Theorem

有了 C^2 估计后，就可以推导出 $C^{2,\alpha}$-估计。为了证明主定理，我们考虑以下带有 $t \in [0,1]$的连续性方程（u_t， b_t）：

$$(\Omega_h + \frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u_t)\Omega - \partial\partial_J u_t))^n = e^{tf+(1-t)f_0+b_t}\Omega^n, \tag{7.1}$$

$$\Omega_h + \frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u_t)\Omega - \partial\partial_J u_t) > 0, \quad \sup_M u_t = 0. \tag{7.2}$$

其中 $f_0 = \log(\Omega_h^n/\Omega^n)$。考虑集合

$$S = \{t \in [0,1] : (u_t, b_t) \in C^{2,\alpha}(M,\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \text{ solves the equation } (7.1), (7.2)\}$$

显然，我们有 $0 \in S$。 $C^{2,\alpha}$估计说明了 S 的闭性。我们将按照 [7] 中的方法证明其开性。记

$$\widetilde{\Omega}_u = \Omega_h + \frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J u)\Omega - \partial\partial_J u).$$

考虑算子

$$\mathcal{M} : \mathcal{A} \ni u \mapsto \frac{\widetilde{\Omega}_u^n}{\Omega_u} \in \mathcal{B},$$

其中

$$\mathcal{A} \coloneqq \{u \in C^{k+2,\alpha}(M) : \widetilde{\Omega}_u > 0, \int_M u\Omega^n \wedge \overline{\Omega}^n = 0\}$$
$$\mathcal{B} \coloneqq \{\tilde{f} \in C^{k,\alpha}(M) : \int_M \tilde{f}\Omega^n \wedge \overline{\Omega}^n = \int_M \Omega^n \wedge \overline{\Omega}^n\}.$$

剩下需要证明，对于每个 $u \in \mathcal{A}$，微分 $d_u\mathcal{M}$ 都是一个同构。事实上，对于$v \in T_u\mathcal{A}$，我们有

$$\begin{aligned} d_u\mathcal{M}(v) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{M}(u+tv) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{(\Omega_h + \frac{1}{n-1}(S_1(\partial\partial_J(u+tv))\Omega - \partial\partial_J(u+tv)))^n}{\Omega^n} \\ &= \frac{n}{n-1}\frac{(S_1(\partial\partial_J v)\Omega - \partial\partial_J v) \wedge \widetilde{\Omega}_u^{n-1}}{\Omega^n} = \frac{S_{n-1}(\widetilde{\Omega}_u) - 1}{2(n-1)}\Delta_{I,g} v. \end{aligned}$$

根据一般椭圆理论，我们知道拉普拉斯算子是 M 上零积分函数空间之间的双射。因此，$\mathcal{M}$ 局部可逆，进而 S 是开集。

致谢：Fu 受到国家自然科学基金项目（编号：12141104）的资助。Zhang 受到国家自然科学基金项目（编号：11901102）的资助。

References

[1] Alesker, S. 紧流形上带平坦超凯勒度量的四元数 Monge-Amp`ere 方程的可解性。《数学进展》241 (2013), 192–219.[2] Alesker, S., and Shelukhin, E. 一般四元数 Calabi 问题的一致估计（附录由 Daniel Barlet 撰写）。《数学进展》316 (2017), 1–52.[3] Alesker, S., and Verbitsky, M. 超复流形上的多重次调和函数与 HKT 几何。《几何分析杂志》16, 3 (2006), 375–399.[4] Alesker, S., and Verbitsky, M. HKT 流形上的四元数 Monge-Amp`ere 方程与 Calabi 问题。《以色列数学杂志》176 (2010), 109–138.[5] Bedulli, L., Gentili, G., and Vezzoni, L. HKT 几何中 Calabi-Yau 问题的抛物型方法。《数学杂志》302, 2 (2022), 917–933.[6] Błocki, Z. Calabi-Yau 定理中的梯度估计。《数学年刊》344, 2 (2009), 317–327.[7] Błocki, Z. K`ahler 几何中的复 Monge-Amp¨ere 方程。载于《多重势理论》，《数学讲义》系列第 2075 卷。施普林格，海德堡，2013，第 95–141 页。[8] Demailly, J.-P. 复解析与微分几何。Citeseer，1997.[9] Dinew, S., and Sroka, M. 由 HK 度量构造 HKT。arXiv 预印本 arXiv:2105.09344 (2021).[10] Fu, J., Wang, Z., and Wu, D. 形式型 Calabi-Yau 方程。《数学研究快报》17, 5 (2010), 887–903.[11] Fu, J., Wang, Z., and Wu, D. 非负正交双截曲率 K¨ahler 流形上的形式型方程。《变分法与偏微分方程》52, 1-2 (2015), 327–344.[12] Fu, J.-X., and Yau, S.-T. 非 K¨ahler 流形上带通量的超弦理论与复 Monge-Amp`ere 方程。《微分几何杂志》78, 3 (2008), 369–428.[13] Gentili, G., and Vezzoni, L. 作为环面纤维化的阿贝尔超复幂零流形上的四元数 Calabi 猜想。《国际数学研究通知》IMRN, 12 (2022), 9499–9528.[14] Gentili, G., and Zhang, J. 带平坦超凯勒度量的紧流形上的全非线性椭圆方程。《几何分析杂志》32, 9 (2022), 论文编号 229，38 页。¨,[15] Lejmi, M., and Weber, P. 超复流形上的上同调。载于《复几何与辛几何》，《施普林格 INdAM 丛书》第 21 卷。施普林格，Cham，2017，第 107–121 页。[16] Michelsohn, M. L. 复几何中特殊度量的存在性。《数学学报》149, 3-4 (1982), 261–295。

[17] Obata, M. 带自然仿射联络的近复流形上的仿射变换。日本数学会杂志 8 (1956), 345–362.[18] Sroka, M. 四元数 Calabi 猜想的 C^0 估计。《数学进展》370 (2020), 107237.[19] Sroka, M. 超厄米流形上四元数 Monge-Amp`ere 方程的尖锐一致界。arXiv 电子印本（2022年11月）, arXiv:2211.00959.
[20] Tosatti, V., and Weinkove, B. 紧厄米流形上的复 Monge-Amp`ere 方程。《美国数学会杂志》23, 4 (2010), 1187–1195.[21] Tosatti, V., and Weinkove, B. 厄米流形和平衡流形上的复 Monge-Amp`ere 方程估计。《亚洲数学杂志》14, 1 (2010), 19–40.[22] Tosatti, V., and Weinkove, B. 紧 K`ahler 流形上（$n-1$）-多重次调和函数的 Monge-Amp¨ere 方程。《美国数学会杂志》30, 2 (2017), 311–346.[23] Tosatti, V., and Weinkove, B. 厄米度量、（$n-1,n-1$）形式与 Monge-Amp`ere 方程。《纯粹与应用数学杂志》755 (2019), 67–101.[24] Verbitsky, M. 带挠率的超凯勒流形、超对称与霍奇理论。《亚洲数学杂志》6 (01 2002), 679–712.¨,[25] Verbitsky超复流形上的平衡HKT度量与强HKT度量。《数学研究快报》16, 4 (2009), 735–752. M. ,[26] Verbitsky超凯勒流形上的正形式。《大阪数学杂志》47, 2 (2010), 353–384. M. ,¨紧 K[27] Yauahler 流形的里奇曲率与复 Monge-Amp S. T. ere 方程。I. 《纯粹与应用数学通讯》31, 3 (1978), 339–411.¨,`,Shanghai Center for Mathematical Sciences, Jiangwan Campus Fudan University, 200438, Shang-电子邮箱：majxfu@fudan.edu.cnhai, China, School of Mathematical Sciences, Fudan University电子邮箱：20110180015@fudan.edu.cn Shanghai 200433, China,Department of Mathematics, 200444, Shanghai University电子邮箱：dkzhang@shu.edu.cn