arXiv:2301.09139v1 [math.RA] 22 Jan 2023

环上的广义导子乘积

S. R. Behresi and M. J. Mehdipour*

摘要。本文证明，若代数 A 上广义导子 (D_1, d_1) 与 (D_2, d_2) 的乘积 (D_1D_2, d_1d_2) 是广义导子，则 d_1D_2 和 d_2D_1 将 A 映入 rad(A)。此外，对于特征不等于二的素环上的广义导子 (D_1, d_1) 与 (D_2, d_2)，我们给出 $(D_1^2 + D_1D_2, d_1^2 + d_1d_2)$ 也是广义导子的充要条件。

1 引言

在本文中，R 表示一个环，其雅各布森根为 rad(R)，幂零根为 nil(R)，即 R 的所有素理想的交。回顾一下，若对任意 $x, y \in R$，关系 $xRy = \{0\}$ 蕴含 $x = 0$ 或 $y = 0$，则称环 R 为素环；若对任意 $x \in R$，关系 $xRx = \{0\}$ 蕴含 $x = 0$，则称 R 为半素环。再回顾一下，加性映射 $d : R \to R$ 称为导子，如果

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

对所有 $x, y \in R$均成立。代数上的导子定义类似。

对于代数 A，映射 $F : A \to A$ 称为初等算子，若存在 $a_i, b_i \in A$，对于 $i = 1, ..., n$，使得

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x b_i.$$

这些算子在算子代数理论中发挥着重要作用。若 $n = 2$, A 有单位元 1_A，且 $b_1 = a_2 = 1_A$，则对所有$x \in A$，有 $F(x) = a_1x + xb_2$。那么对于每个 $x, y \in A$

$$F(xy) = F(x)y + xI_{b_2}(y),$$

其中

$$I_{b_2}(t) = tb_2 - b_2t$$

*通讯作者。2020 数学主题分类：16W25, 16N60, 47B47 关键词：广义导子、广义导子的乘积、代数、素环。

是由 b_2定义在 A 上的内导子。受这一关系的启发，引入环上的广义导子概念如下。环 R 上的加性映射 D 称为广义导子，如果存在定义在 R 上的导子 d 使得

$$D(xy) = D(x)y + xd(y)$$

对所有 $x, y \in R$。关联导子为 d 的广义导子记作 (D, d)。显然，广义导子包括导子和左中心化子；满足以下条件的加性映射 T on R

$$T(xy) = T(x)y$$

对所有 $x, y \in R$。许多作者研究了广义导子 [1-4, 9-12]。例如，Hvala [11] 研究了特征为 char(R) $\neq 2$ 的素环R 上广义导子的乘积，并刻画了其乘积仍为广义导子的广义导子。Argac 等人 [3] 研究了 2-挠无半素环 R 上广义导子 (D_1, d_1) 与 (D_2, d_2) 的乘积，并证明 (D_1D_2, d_1d_2) 是广义导子，当且仅当对每个 $x, y \in R$,

$$d_i(x)RD_j(y) = D_j(x)Rd_i(y) = 0,$$

其中 $i, j \in \{1, 2\}$ 和 $i \neq j$；另见 [13, 14]。

本文继续进行这些研究。在第 2 节中，我们研究代数上广义导子的乘积，并证明：若 (D_1, d_1)、(D_2, d_2) 和 (D_1D_2, d_1d_2) 是代数 A 上的广义导子，则 d_1D_2 和 d_2D_1 将 A 映入 rad(A)。这一结果是 Posner 第一基本定理在代数上广义导子情形下的类似结果。在第 3 节中，对于特征不为二的素环上的广义导子 (D_1, d_1) 和 (D_2, d_2)，我们给出了 $(D_1^2 + D_1D_2, d_1^2 + d_1d_2)$ 也是广义导子的充要条件。

2 代数上广义导子的乘积

本节的主要结果如下。

定理 2.1 设 (D_1, d_1) 和 (D_2, d_2) 是代数 A 和 $\alpha \in \mathbb{C}$ 上的广义导子。若 $(\alpha D_1^3 + D_1D_2, \alpha d_1^3 + d_1d_2)$ 是 A 上的广义导子，则 d_2D_1 将 A 映入 rad(A)。

证明。设$(\alpha D_1^3 + D_1D_2, \alpha d_1^3 + d_1d_2)$ 是 A 上的广义导子。那么对每个 x、$y \in A$,

$$\alpha D_1^3(x)d_1(y) + 3\alpha D_1(x)d_1^2(y) + D_2(x)d_1(y) + D_1(x)d_2(y) = 0. \tag{1}$$

令 P为 A的一个极小素理想。由于 $\alpha d_1^3 + d_1d_2$是导子，按照 Posner 第一基本定理 [15] 中的类似过程可得，对于每个 x, y, $z \in A$

$$d_2(x)d_1(y)d_2(z) = 0. \tag{2}$$

这意味着对于每个 x, $y \in A$,

$$d_i(x)d_j(y) \in P \quad \text{and} \quad d_i d_j(x) \in \operatorname{rad}(A)$$

对于 i、$j \in \{1,2\}$ 和 $i \neq j$。由此及 (1) 可知

$$d_2(D_1(x)d_2(y)) \in P$$

对于所有 x、$y \in A$，因此

$$d_2(D_1(x))d_2(y) + D_1(x)d_2^2(y) \in P \tag{3}$$

对于所有 x、$y \in A$。在 (1) 中以 $d_2(y)$ 替换 y，并利用 (2)，得到

$$D_1(x)d_2^2(y) \in P \tag{4}$$

对于所有 x、$y \in A$。结合 (3) 和 (4)，得

$$d_2(D_1(x))d_2(y) \in P$$

对于所有 x、$y \in A$。由此可得，对于所有 $x \in A$, $d_2(D_1(x)) \in P$。因此， d_2D_1 将 A 映入其根。□

由定理 2.1 可得以下结果。

推论 2.2 设 (D_1, d_1) 和 (D_2, d_2) 是代数 A 上的广义导子。若 (D_1D_2, d_1d_2) 是 A 上的广义导子，则 d_1D_2 和 d_2D_1 将 A 映入 $\operatorname{nil}(A)$。

证明。根据定理 2.1 的证明，我们有

$$D_2(x)d_1(y) + D_1(x)d_2(y) = 0 \tag{5}$$

对所有 $x, y \in A$ 均成立。设 P 是 A 的一个极小素理想。由 (5) 可推得

$$d_1(D_2(x)d_1(y) + D_1(x)d_2(y)) \in P$$

and

$$D_2(x)d_1^2(y) + D_1(x)d_2(d_1(y)) \in P.$$

Hen因此，对所有 $x, y \in A$，都有 $d_1(D_2(x))d_1(y) \in P$。由此，对所有 $x \in A$，都有 $d_1(D_2(x)) \in P$. □

3 素环上广义导子的乘积

本节首先介绍本节的主要结果。

定理 3.1 设 R 是一个特征为 R 的素环，且 (D_i, d_i) 是 R 上的广义导子，其中 $i = 1, 2$。那么，$(D_1^2 + D_1D_2, d_1^2 + d_1d_2)$ 是 R 上的广义导子，当且仅当以下命题之一成立。

(i) $d_1 \neq 0$, $d_1 = -d_2$ 和 $D_1 = -D_2$。
(ii) $d_1 = 0$, $d_2 \neq 0$ 和 $D_1 = 0$。(iii)
D_1 和 D_2 是右中心化子。

证明。设 (D_1, d_1) 和 (D_2, d_2) 是 R 上的广义导子。那么，$(D_1^2+D_1D_2, d_1^2+d_1d_2)$ 是 R 上的广义导子，当且仅当

$$2D_1(x)d_1(y) + D_2(x)d_1(y) + D_1(x)d_2(y) = 0 \tag{6}$$

对所有的 $x, y \in R$。因此，(i)、(ii) 或 (iii) 中的任一命题均可推出 $(D_1^2 +D_1D_2, d_1^2 + d_1d_2)$ 是 R 上的广义导子。

反过来，设 d_1、d_2 和 $d_1^2 + d_1d_2$ 是导子。那么

$$\begin{aligned}(d_1^2 + d_1d_2)(xy) &= d_1^2(x)y + 2d_1(x)d_1(y) + xd_1^2(y)\\ &+ d_1(x)d_2(y) + d_2(x)d_1(y) + xd_1d_2(y)\\ &= (d_1^2 + d_1d_2)(x)y + x(d_1^2 + d_1d_2)(y)\end{aligned}$$

对所有的 $x, y \in R$。因此

$$2d_1(x)d_1(y) + d_2(x)d_1(y) + d_1(x)d_2(y) = 0 \tag{7}$$

对所有的 $x, y \in R$。将 (7) 中的 x 替换为 $xd_1(z)$。那么

$$\begin{aligned}2d_1(x)d_1(z)d_1(y) &+ 2xd_1^2(z)d_1(y) + d_2(x)d_1(z)d_1(y)\\ &+ xd_2d_1(y) + d_1(x)d_1(z)d_2(y) + xd_1^2(z)d_2(y) = 0.\end{aligned}$$

由此及 (7) 可得

$$2d_1(x)d_1(z)d_1(y) + d_2(x)d_1(z)d_1(y) + d_1(x)d_1(z)d_2(y) = 0$$

这与 (7) 一起表明

$$-d_1(x)d_2(z)d_1(y) + d_1(x)d_1(z)d_2(y) = 0$$

因此

$$d_1(x)(d_1(z)d_2(y) - d_2(z)d_1(y)) = 0.$$

R 的素性表明，要么 $d_1(x) = 0$ 要么 $d_1(z)d_2(y) = d_2(z)d_1(y)$，对所有$x, y, z \in R$均成立。在这两种情况下，对所有 $y, z \in R$，均有 $d_1(z)d_2(y) = d_2(z)d_1(y)$。由此及式(7)可推得

$$2d_1(z)d_1(y) + 2d_2(z)d_1(y) = 0.$$

So

$$(d_1(z) + d_2(z))Rd_1(y) = 0$$

对于所有 $y, z \in R$。这意味着

$$d_1 = -d_2 \quad \text{or} \quad d_1 = 0. \tag{8}$$

现在，设 D_1 和 D_2 都不是右中心化子。那么 $d_1 \neq 0$ 或 $d_2 \neq 0$。在情形$d_1 \neq 0$下，由 (8) 得 $d_1 = -d_2$。设 $d_1(y) \neq 0$，其中 $y \in R$。由 (6) 可得

$$D_1(x)d_1(y) + D_2(x)d_1(y) = 0$$

对于所有 $x \in R$。因此

$$D_1(x) = -D_2(x)$$

对于所有 $x \in R$。也就是说，(i) 成立。现在考虑情形 $d_2 \neq 0$ 和 $d_1 = 0$。设 $d_2(y) \neq 0$，其中 $y \in R$。那么由 (6)，$D_1(x)d_2(y) = 0$，因此对于所有$x \in R$，有 $D_1(x) = 0$。于是，对于所有 $x \in R$，有 $D_1(x) = 0$。也就是说，(ii) 成立。□

注 3.2 很容易看出，若不假设 char$(R) \neq 2$，定理 3.1 并不成立。只需假设 $D_1 = D_2$ 是 R上的任意广义导子。

现在，我们给出定理 3.1 的一些推论。

推论 3.3 设定理 3.1 的假设均成立。又设 $(D_1^2+D_1D_2, d_1^2+d_1d_2)$ 是 R上的广义导子。则以下断言等价。

(a) D_1 是非零导子；(b) D_2 是非零导子且 $D_2 = -D_1$；(c) D_2 和 D_1 是非零导子；(d) D_1 是非零导子且 $D_1 = -D_2$。

证明。设 D_1 是非零导子，则 $D_1 = d_1$。由定理 3.1 (i) 可得，D_2 是非零导子且 $D_2 = -D_1$。因此，(a)⇒(b)，且 (c)⇒(d)。(b)⇒(c) 和 (d)⇒(a) 的推导显然。□

推论 3.4 设 d_1 和 d_2 是特征为 $\neq 2$ 的素环 R 上的导子，其中 char$(R) \neq 2$。若 $d_1^2 + d_1d_2$ 是 R 上的导子，则 $d_1 = 0$ 或 $d_1 = -d_2$。

设 $\xi, \zeta \in R$。R 上的广义导子 $r \mapsto \zeta r + r\xi$ 记作 $F_{\xi,\zeta}$，称为内广义导子。在这种情况下，(D, I_ζ) 是 R 上的广义导子。

推论 3.5 设定理 3.1 的假设成立。再设 $(D_1^2+D_1D_2, d_1^2+d_1d_2)$ 是 R 上的广义导子。若 $\xi, \zeta \in R$, 则以下结论成立。

(i) 若 $D_1 = F_{\xi,\zeta}$，则 $D_2 = -F_{\xi,\zeta}$ 或 $\zeta \in \mathbf{Z}(R)$。(ii) 若 $D_2 = F_{\xi,\zeta}$ 且 $D_1 \neq 0$，则 $D_1 = -F_{\xi,\zeta}$ 或 $\zeta \in \mathbf{Z}(R)$。

对于每个 $\xi \in R$，R 上的右中心化子 $r \mapsto r\xi$ 记作 R_ξ。注意，(R_ξ, I_ξ) 是 R上的广义导子。

推论 3.6 设定理 3.1 的假设成立。再设 $(D_1^2+D_1D_2, d_1^2+d_1d_2)$ 是 R上的广义导子。则以下结论成立。

(i) 若 D_1 是 R上的非零左中心化子，则 D_2 是 R上的左中心化子。(ii) 若 D_2 是 R上的左中心化子，则 D_1 是 R上的左中心化子。(iii) 若 $D_1 = R_\xi$，则 $D_2 = R_{-\xi}$ 或 $\xi \in \mathbf{Z}(R)$。(iv) 若 $D_2 = R_\xi$ 且 $D_1 \neq 0$，则 $D_1 = R_{-\xi}$ 或 $\xi \in \mathbf{Z}(R)$。

参考文献

[1] Ahmadi Gandomani, M. H., Mehdipour, M. J.：卷积代数上的 Jordan、Jordan 右导子和 Jordan 左导子，Bull. Iranian Math. Soc., 45 189–204 (2019)。[2] Ahmadi Gandomani, M. H., Mehdipour, M. J.：某些卷积代数上的广义导子，Aequationes Math., 92 (2) 223–241 (2018)。[3] Argac, N., Nakajima, A., Albas, E.：关于半素环上的正交广义导子，Turk. J. Math., 28, 185–194 (2004)。[4] Bresar, M.：两个导子的复合与广义导子之间的距离，Glasgow Math. J., 33, 80–93 (1991)。[5] Bresar, M., Vukman, J.：正交导子及 Posner 定理的推广，Rad. Mat., 5, 237–246 (1989)。[6] Chebotar, M. A., Lee, P. H.：关于素环导子复合的一个注记，Comm. Algebra, 81, 2965–2969 (2003)。[7] Creedon, T.：导子的乘积，Proc. Edinburgh Math. Soc., 41, 407–410 (1998)。[8] Dixmier, J.：Algebres Envellopantes，Cauthier-Villars，巴黎，1974。[9] De Filippis, V.：素环和非交换巴拿赫代数中的广义导子，Bull. Korean Math. Soc., 45 (4), 621–629 (2008)。[10] Ghasemi, M., Mehdipour, M. J.：连通乘法线性泛函的巴拿赫代数上的导子，Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 44 1727–1748 (2021)。[11] Hvala, B.：环中的广义导子，Comm. Algebra, 26, 1147–1166 (1998)。[12] Lee, T. K.：左忠实环的广义导子，Comm. Algebra, 27 (8), 4057-4073 (1999)。[13] Mehdipour, M. J., Saeedi, Z.：局部紧阿贝尔群的群代数上的导子，Monatsh. Math, 180 595–605 (2016)。[14] Mehdipour, M. J., Saeedi, Z.：卷积代数上的导子，Bull. Korean Math. Soc., 52 123–1132 2015)。

[15] Posner, E. C.：素环中的导子，Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1093–1100 (1957)。[16] Vuk man, J.：关于巴拿赫代数中导子的一个结果，Proc. Amer. Math. Soc., 116, 971–975 (1992)。

Seyed Reza Behresi
数学系，设拉子理工大学，设拉子
71555-313，伊朗 电子邮件：
r.behresi@sutech.ac.ir
Mohammad Javad Mehdipour 数
学系，设拉子理工大学，设拉子
71555-313，伊朗 电子邮件：
mehdipour@sutech.ac.ir