arXiv:2301.09144v1 [math.CA] 22 Jan 2023

近似正交性、Bourgain 钉扎距离定理与指数框架

ALEX IOSEVICH 和 AZITA MAYELI

ABSTRACT. 设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个可数离散子集， $d \geq 2$且具有正上 Beurling 密度。设 K 表示一个有界对称凸集，其边界光滑且处处高斯曲率非零。已知 $\mathcal{E}(A) = \{e^{2\pi ix\cdot a}\}_{a\in A}$ 不能作为 $L^2(K)$ [12]的正交基。本文证明，即使是近似平均正交性，也会以如下意义阻碍指数框架的存在。设 A 如上所述，且 $\phi \geq 0$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的连续单调非增函数，并且满足近似正交条件 。

$$\left(\frac{1}{2^j}\int_{2^j}^{2^{j+1}} \phi^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_j 2^{-j\frac{d+1}{2}} \quad \text{and} \quad |\widehat{\chi}_K(a-a')| \leq \phi(\rho^*(a-a')) \ \forall a \neq a, a, a' \in A,$$

其中 ρ^* 是 K的对偶体 K^*上的闵可夫斯基泛函。接着，如果

$$\limsup_{j\to\infty} c_j = 0,$$

那么 A 的上密度等于 0，因此 $\mathcal{E}(A) = \{e^{2\pi ix\cdot a}\}_{a\in A}$ 不是 $L^2(K)$的框架。 $p = \infty$ 的情形此前已由本文作者在 [9]中证明。关键在于，如果 $\mathcal{E}(A)$是 $L^2(K)$的框架，那么来自 $\mathcal{E}(A)$的不同指数函数 $e^{2\pi ix\cdot a}$、 $e^{2\pi ix\cdot a'}$ 中，几乎没有任何一对接近正交。我们的证明将 Bourgain 关于纽约州正勒贝格上密度集合所确定的钉住距离的结果推广到 $\mathbb{R}^d$、 $d \geq 2$。我们还改进了最初在 [9]中确立的该结果的 L^∞版本。通过运用 [13], 中的组合思想的推广，我们证明，在 L^∞ 假设下，若 $d \neq 1$ 模 4，则 A 是有限集。若 $d = 1$ 模 4， A 可能是无限集；但如果是无限集，那么它必为某条直线的子集。

1. INTRODUCTION

本文的主要目标是继续研究离散集 A 的结构，使得 $\{e^{2\pi ix\cdot a}\}_{a\in A}$ 是 $L^2(K)$ 的框架，其中 K 是一个有界的

关键词和短语。近似正交性、指数系统、正密度集合中的距离、极大定理。第一位作者的研究部分得到了美国国家科学基金会的资助，资助编号为 HDR TRIPODS - 1934962；同时也得到了 NSF DMS - 2154232 的资助。

具有光滑边界和非零曲率的对称凸体。回想一下，若存在 $0 < C_L \leq C_U < \infty$，使得对每个 $f \in L^2(K)$，这一组指数函数就是一个框架，

$$C_L|K| \cdot ||f||^2_{L^2(K)} \leq \sum_{a \in A} \left|\widehat{f}(a)\right|^2 \leq C_U|K| \cdot ||f||^2_{L^2(K)}. \tag{1.1}$$

我们回顾一些定义。

定义 1.1。设 S 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个分离子集，其含义是存在 $\delta > 0$，使得对所有 s、$s' \in S$、$s \neq s'$，都有 $|s - s'| \geq \delta > 0$。S 的上密度定义为

$$\overline{dens}(S) = \limsup_{R \to \infty} \frac{\#\{S \cap [-R, R]^d\}}{2^d R^d}.$$

类似地，S 的下密度定义为

$$\underline{dens}(S) = \liminf_{R \to \infty} \frac{\#\{S \cap [-R, R]^d\}}{2^d R^d}.$$

如果 $\overline{dens}(S) = \underline{dens}(S)$，则称贝尔林密度 $dens(S)$ 存在，且等于该值。

不难构造一个 $L^2(K)$ 的框架，方法是将 K 包在一个矩形盒中，并将该盒的正交归一指数基限制到 K上。在这种情况下，该框架是紧框架，即在（1.1）中框架的定义里，我们有 $C_L = C_U$。这类框架的一个遗憾之处在于，其密度远高于 K的体积。

还请回顾，若 $\mathcal{E}(A)$ 可通过可逆有界映射与 $L^2(K)$ 的一个正交归一基（不一定由指数函数构成）等价，则 $= \{e^{2\pi i x \cdot a}\}_{a \in A}$ 是 $L^2(K)$ 的 Riesz基。关于 $L^2(B_d)$ 是否存在指数函数 Riesz基，这是一个由来已久的未决问题；其中 B_d 表示单位球。

众所周知，若 $\mathcal{E}(A)$ 是 $L^2(K)$ 的 Riesz基，则 $dens(A) = |K|$。为了进一步探讨 $L^2(K)$ 是否存在 Riesz基这一问题，其中 K 有界、对称、凸，且具有曲率处处非零的光滑边界，我们证明了一个结果，对生成 $L^2(K)$ 框架的集合 A 的结构施加了显著限制。

Herz 提出的一个著名驻相公式 [7] (另见 [5] 以及下文引理3.1 中的精确表述)表明

$$\widehat{\chi_K}(\xi) = \kappa^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \sin\left(2\pi\left(\rho^*(\xi) - \frac{d-1}{8}\right)\right) |\xi|^{-\frac{d+1}{2}} \tag{1.2}$$

再加上一个误差项，其中 ρ^* 是 K^*的闵可夫斯基泛函，即K的对偶体。我们将在下文定理 2.1中证明，若 $\mathcal{E}(A)$ 是一个框架， $|\widehat{\chi}_K(a-a')|$，其中 $a \neq a'$， a， $a' \in A$就不能在很多情况下远小于 $|a-a'|^{-\frac{d+1}{2}}$。换言之，差集 $A-A$ 必须避开 $\widehat{\chi}_K$的零点。

已有研究表明（另见文献中关于球的情形），如上所述，$L^2(K)$ 不存在指数函数正交基。正交性意味着 $(A-A)\backslash\{\vec{0}\}$ 严格包含于 $\widehat{\chi}_K$ 的零点集。本文证明，为使 $\mathcal{E}(A)$ 成为 $L^2(K)$ 的框架， $A-A$ 即使从平均意义上看，也不能频繁地接近 $\widehat{\chi}_K$ 的零点。更准确地说，本文的主要结果如下。

1.0.1. 我们的贡献。

定理 1.2. 设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个可数离散子集， $d \geq 2$，且 $p \in [1,\infty]$。设 K 表示一个具有光滑边界且处处高斯曲率非零的有界对称凸集。设 $\phi \geq 0$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的连续单调非增函数，使得

$$\left(\frac{1}{2^j}\int_{2^j}^{2^{j+1}} \phi^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_j\left(2^{-j\frac{d+1}{2}}\right) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{1.3}$$

对于某些常数 $c_j \geq 0$。

进一步假设

$$|\widehat{\chi}_K(a-a')| \leq \phi(\rho^*(a-a')) \tag{1.4}$$

对所有 $a \neq a'$、 a、 $a' \in A$ 均成立。

那么，如果

$$\limsup_{j\to\infty} c_j = 0,$$

A 的上密度等于 0，因此， $\mathcal{E}(A)$ 不是 $L^2(K)$ 的框架。

注记 1.3。 注意，若 $\mathcal{E}(A)$ 是一个正交系，则 $\widehat{\chi}_K(a-a') = 0$若 $a \neq a'$。因此，定理 1.2 推广了以下事实：当 $L^2(K)$ 时，不存在任何由指数函数构成的正交基，若 K 是一个具有光滑边界且高斯曲率处处非零的对称凸体 [12]。

注记 1.4。 定理 1.2 的一个直接推论是，若 $\mathcal{E}(A)$ 是 $L^2(K$ 的一个框架，且 K 如上所述，那么对于任何满足 (1.3) 和 (1.4) 的子集 $A' \subset A$ ，若 $\limsup_{j\to\infty} c_j = 0$， A' 则其正密度为零。换言之，这些性质只能在一个零密度子集上成立。若能确定以下更强的陈述是否成立，将会很有意思：

若 $\mathcal{E}(A)$ 是 $L^2(K)$ 的一个框架，且上述假设在 $A' \subset A$ 上成立，那么存在某个 $0 < \alpha < d$,

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{\#\{A' \cap B_R\}}{R^{d-\alpha}} = 0$$

其中 B_R 表示半径为 R的球。例如，如果 A 包含在一条直线中，我们可以取任意一个 $\alpha < d-1$。我们在定理 1.7中部分回答了这个问题。

注 1.5. 文献（[15]；另见 [8]）证明，若 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 中具有正勒贝格测度的有界区域，$d \geq 2$，且 $\{e^{2\pi i x\cdot a}\}_{a\in A}$ 是 $L^2(\Omega)$ 的框架，其上、下框架常数分别为 C_U、C_L，那么每个边长为 ℓ的 d 维立方体都

$$\ell > \left(\frac{C_U|\partial\Omega|_\alpha}{C_L|\Omega|}\right)^{\frac{1}{d-\alpha}}$$

至少包含 A中的一个点，其中 $0 < \alpha < d$ 且 $|\partial\Omega|_\alpha$ 表示 α维闵可夫斯基内容 $\partial\Omega$，即 Ω 的边界。特别地，如果 Ω 是凸的（定理 1.2中便假设了这一点），则每个边长为 ℓ 的立方体都

$$\ell > \frac{C_U|\partial\Omega|}{C_L|\Omega|}$$

至少包含 A 中的一个点，其中 $|\partial\Omega|$ 表示 $\partial\Omega$ 的曲面测度。这可以看作是如下事实的定量版本，该事实由 Beurling（[1]）提出：若 Ω 具有正的勒贝格测度，且 $\mathcal{E}(A)$ 是 $L^2(\Omega)$ 的框架，则 A 具有正的上密度。

注 1.6。 $p = \infty$， $K = B_d$ 中的单位球这一情形，实质上已包含在本文的前篇（[9]）中。更准确地说，作者证明了：若 $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是任意有界且正的可测函数，使得

$$\lim_{t\to\infty} (1+t)^{\frac{d+1}{2}}\phi(t) = 0, \quad \text{and} \quad |\widehat{\chi}_{B_d}(a-a')| \leq \phi(|a-a'|) \quad \forall\, a, a' \in A,\ a \neq a', \tag{1.5}$$

那么 A 具有零上密度。对（1.3）中的 （1.3）作变量替换 $s = \frac{t}{2^j}$，可将不等式（1.3）转化为

$$\left(\int_1^2 \phi^p(2^j s)ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_j 2^{-j\frac{d+1}{2}}.$$

该陈述的 L^∞ 版本为

$$\sup_{s\in[1,2]} 2^{j\frac{d+1}{2}}\phi(2^j s) \leq c_j,$$

因此，在 $p = \infty$ 的情形下，(1.3) 是比 (1.5) 略弱的假设，不过在 L^∞ 设定中，无需单调性假设。然而，正如读者即将看到的，我们可以通过采用不同的方法大幅加强 L^∞ 这一结果。

我们的第二个结果显著改进了本文作者先前的一项定理，该定理在上文的说明 1.6 中有所描述。

定理 1.7。 假设对于所有 $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$，任意有界正可测函数均满足（*1.5*）。那么 a，$a' \in A$，$a \neq a'$。则 A 包含在一条直线上。此外，若 $d \neq 1$ 模 4，则 A 是有限集。

注 1.8。 读者将会看到，定理 1.7 的证明基于 [13]中提出的技术。结合定理 1.7 重新审视这些技术后，本文作者发现，″中证明的 Erd[13] os 整数距离原理的近似版本，在显著弱得多的假设下仍然成立。

2. Outline of the proofs and the structure of the paper

本节概述定理 1.2 和1.7的证明。

2.1. 定理 **1.2** 的证明概述。 根据驻相法（见下文引理 3.1），令 K 如上，

$$|\widehat{\chi}_K(a-a')| \leq C(1+|a-a'|)^{-\frac{d+1}{2}}$$

其中某个常数为 $C > 0$。由此可知，式（2.1）总是对 $c = C$成立。关键在于，如果该式对足够小的常数成立，我们便可运用渐近公式（3.2）（见下文）并论证

$$\sin\left(2\pi\left(\rho^*(a-a') + \frac{d-1}{8}\right)\right)$$

对于 $a \neq a'$，a，$a' \in A$，经常很小。我们将通过把定理 1.2 的证明归结为以下命题来实现这一点。

定理 2.1. 设 A 是 $\mathbb{R}^d, d \geq 2$ 的离散可数子集。设 K 表示一个具有光滑边界且处处高斯曲率非零的有界对称凸集。设 $\mathcal{A}_j$ 表示内半径为 2^j、外半径为 2^{j+1} 的环带，

其中心位于 $a' \in A$。假设

$$\left(\frac{1}{2^{dj}} \sum_{a \in A \cap \mathcal{A}_j} |\widehat{\chi}_K(a-a')|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_j 2^{-j\frac{d+1}{2}} \tag{2.1}$$

其中 c_j 与 a'无关。于是，如果

$$\limsup_{j \to \infty} c_j = 0, \tag{2.2}$$

then A 的上密度等于 0，因此 $\mathcal{E}(A)$不是 $L^2(K$ 的框架).

通过鸽巢原理，我们可以得出结论：存在一点 x_0 ，它位于某个 $a_0 \in A$ 的一个小邻域内，使得从 x_0 到 A 中正比例部分的小邻域的钉住 ρ^*-距离聚集在 $\frac{k}{2} + \frac{d-1}{8}$ 附近，其中 k 取遍整数。这与 Bourgain 的一个结果的变体相矛盾。该结果指出，对于上勒贝格密度为正的集合，相对于几乎每一点，其钉住距离集都包含所有充分大的正实数。为了应用 Bourgain 的结果，我们还需要进一步细化先前通过鸽巢原理从 A中选出的子集。

2.2. 定理 1.7 的证明概要。 作者 [13] 证明了，如果$\mathcal{E}(A)$ 是 $L^2(K)$ 中的无限正交集，其中 $K \subset \mathbb{R}^d$ 是一个边界光滑且处处曲率非零的对称凸体，那么 A 包含于一条直线上，因此 $\mathcal{E}(A)$ 在 $L^2(K)$ 中是不完备的。此外，他们还证明，如果 $d \neq 1$ 模 4，则 A 必为有限集。我们将看到，在上述 (1.5) 给出的较弱假设下，这一结果的证明仍然成立。

2.3. 本文结构。 本文组织如下。在下文第3 节中，我们证明定理2.1。在该节末尾，我们将说明 Bourgain 关于固定点距离集结果的修改版本，这是我们证明所需的。在第4 节中，我们由定理2.1 推导出定理1.2。

3. Proof of Theorem 2.1

假设（2.1）和（2.2）成立，且 A具有有限的上密度 $\alpha_0 > 0$。根据假设，对于固定的 $a' \in A$

$$\sum_{a \in A \cap \mathcal{A}_j} |\widehat{\chi}_K(a-a')|^p \leq c_j^p 2^{j(d-p\frac{d+1}{2})}. \tag{3.1}$$

我们需要以下著名的驻相结果。

引理 3.1. *(*[7]*)* 设 K 是一个有界的对称凸体，其边界光滑且处处高斯曲率不为零。设

$$\rho^*(\xi) = \sup_{x\in K} x\cdot\xi.$$

给定 $\omega \in S^{d-1}$，令 $\kappa(\omega)$ 表示 ∂K 在单位法向量为 ω 的（唯一）点处的高斯曲率。那么

$$\widehat{\chi}_K(\xi) = \kappa^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\sin\left(2\pi\left(\rho^*(\xi)-\frac{d-1}{8}\right)\right)|\xi|^{-\frac{d+1}{2}} + \mathcal{D}_K(\xi), \tag{3.2}$$

其中

$$|\mathcal{D}_K(\xi)| \le C_K|\xi|^{-\frac{d+3}{2}}.$$

将其代入（3.1）得

$$\sum_{a\in A\cap\mathcal{A}_j}\kappa^{-\frac{p}{2}}\left(\frac{a-a'}{|a-a'|}\right)\left|\sin\left(2\pi\left(\rho^*(a-a')-\frac{d-1}{8}\right)\right)\right|^p|a-a'|^{-p\frac{d+1}{2}} \le c_j^pC_1 2^{j(d-p\frac{d+1}{2})} \tag{3.3}$$

对于某个固定的 $C_1>0$，由此可得

$$\sum_{a\in A\cap\mathcal{A}_j}\left|\sin\left(2\pi\left(\rho^*(a-a')-\frac{d-1}{8}\right)\right)\right|^p \le C_2c_j^p2^{dj},$$

对于某个固定的 $C_2>0$，它取决于 ∂K上曲率函数的最大值。注意，误差项 $\mathcal{D}_K$ 来自（3.2），当 $O(2^{-j\frac{d+3}{2}})$ 时为 $a\in\mathcal{A}_j$，若 C_1 足够大，则该误差项可并入（3.3）右端的常数 j 中。

我们将左端写成 $I+II$ 的形式，其中 I 是对以下各项求和：

$$\left\{a\in A\cap\mathcal{A}_j : \left|\sin\left(2\pi\left(\rho^*(a-a')-\frac{d-1}{8}\right)\right)\right|^p \le \delta\right\}$$

而 II 是对该集合补集上的各项求和，其中 $0<\delta<<1$ 待定。我们有

$$II > \delta\cdot\#\left\{a\in A\cap\mathcal{A}_j : \left|\sin\left(2\pi\left(\rho^*(a-a')-\frac{d-1}{8}\right)\right)\right|^p > \delta\right\},$$

因此

$$\#\left\{a\in A\cap\mathcal{A}_j : \left|\sin\left(2\pi\left(\rho^*(a-a')-\frac{d-1}{8}\right)\right)\right|^p > \delta\right\} < C_3c_j^p\delta^{-1}2^{dj}, \tag{3.4}$$

对某个固定的 $C_3 > 0$。

假设 $j \geq j_0$，稍后确定。如果 $\sup_{j \geq j_0} c_j^p$ 足够小，取 $\delta = \frac{1}{1000}$，则有 (3.4) 的右侧为 $< (1-r)\#\{A \cap \mathcal{A}_j\}$，其中 $r \in (0,1)$，且接近 1，稍后选定。之所以可行，是因为 A 具有正的上密度，并且

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{\#\{A \cap \mathcal{A}_j\}}{|\mathcal{A}_1| 2^{dj}} = \alpha_0 > 0.$$

注意，只取满足$j \geq j_0$ 的环带 $\mathcal{A}_j$ （对任意有限的 j_0）并不会影响上密度。更准确地说，移除 $\cup_{j \leq j_0} \{\mathcal{A}_j \cap A\}$后的 A 的上密度与 A的上密度相同，

由此可知，若将 A 中属于集合（3.4）的这些点去掉，则 $A \cap \mathcal{A}_j$ 中仍会剩下 r 比例的点。对每个 $j \geq j_0$都这样处理，其中j_0 待定，然后取并集，得到一个具有正上密度的集合$A_{good,\ j_0}(a')$，使得

$$\left| \sin\left(2\pi \left(\rho^*(a-a') - \frac{d-1}{8} \right) \right) \right|^p \leq \delta \text{ for all } a \in A_{good,j_0}(a'). \tag{3.5}$$

由（3.5）可知，若 E 表示 $A_{good,j_0}(a')$ 的 δ-邻域，其中 δ 如上所述，则不存在满足以下条件的 L_0：对每个 $L > L_0$，都有 $\rho^*(x-a') = L$。若将 a'替换为以 a'为中心、半径为 δ 的球内任意一点，结论仍然成立。我们将使用 Bourgain 的以下结果的一个推广。

定理3.2。设 E 是 $\mathbb{R}^2$中的一个上勒贝格密度为正的集合。那么，对几乎所有 $x_0 \in E$，存在 $L_0 = L_0(x_0) > 0$，使得对所有 $L > L_0$，都存在 $x \in E$ 满足 $|x - x_0| = L$。

正如我们将在第 5 节中概述的，Bourgain 的结果可推广如下。设 E 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个上勒贝格密度为正的集合，$d \geq 2$。设 K 和 ρ^* 如上所述。那么，对几乎所有 $x_0 \in E$，存在 $L_0 > 0$，使得对所有 $L > L_0$，都存在 $x \in E$ 满足 $\rho^*(x - x_0) = L$。

这一结果由 Bourgain 于 [2] 证明（[4] 中可见一项相关结果）。不过，正如下文将指出的，这一推广只需对 Bourgain 方法稍作修改即可得到。该证明仅依赖于圆形极大函数的 L^p 估计，这是 Bourgain 于 1986 年证明的（[3]）。不过，如果用任意具有非零曲率的光滑曲线替代圆，同样的估计仍然成立。由于

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \rho^*(x) = 1\}$$

是一个光滑曲面，具有上文所述的 ρ^*，二维论证便可得出。在更高维情形下，论证要容易得多，因为所需的极大估计已由 Stein（[19]）在球面情形下证明，并由 Greenleaf（[6]）对一般

具有非零高斯曲率的紧曲面。我们将在下文第 5 节概述其证明。

为了使用 Bourgain 的结果，我们需要确保：若 E 如上一段所述，那么 a' 的 1 1000 邻域中的某个点可以在定理3.2中充当钉扎点。Bourgain 定理的证明给出的结论略强于定理3.2的结论，即存在 $x_0 \in E$，使得对于 E 中任意一个相对密度 r 充分接近 1 的子集，都存在$L_0 > 0$，使得对所有 $L > L_0$，都存在 $x \in E$ 满足 $\rho^*(x - x_0) = L$。鉴于此，我们通过在 A 的 δ-邻域中找到这样的一个 x_0，并选择 a' 为 A中 x_0 所在的 δ-邻域对应的点，来完成证明。

4. Proof of Theorem 1.2

令 $\mathcal{A}_j$ 如上所述。根据定理1.2的假设，我们有

$$\sum_{a\in A\cap\mathcal{A}_j} |\widehat{\chi}_K(a-a')|^p \le \sum_{a\in A\cap\mathcal{A}_j} \phi^p(\rho^*(a-a')).$$

由于 ϕ 是单调的，上面的右侧表达式有如下上界：

$$C\int_{c_1 2^j\le\rho^*(u-a')\le c_2 2^{j+1}} \phi^p(\rho^*(u-a'))du = C\int_{c_1 2^j\le\rho^*(u)\le c_2 2^{j+1}} \phi^p(\rho^*(u))du,$$

or

$$C\int_{c_1 2^j\le\rho^*(r\omega)\le c_2 2^{j+1}} \phi^p(\rho^*(r\omega))r^{d-1}d\omega dr = C\int_{c_1 2^j\le r\rho^*(\omega)\le c_2 2^{j+1}} \phi^p(r\rho^*(\omega))r^{d-1}d\omega dr,$$

其中 C 是一个独立常数。

令 $t = r\rho^*(\omega)$。我们得到

$$C\int_{c_1 2^j\le t\le c_2 2^{j+1}}\int_{S^{d-1}} \phi^p(t)t^{d-1}\frac{d\omega}{(\rho^*(\omega))^d}dt$$

$$= C\int_{c_1 2^j\le t\le c_2 2^{j+1}}\int_S \phi^p(t)t^{d-1}dt\frac{d\sigma_{\rho^*}(\eta)}{|\nabla\rho^*(\eta)|}, \tag{4.1}$$

其中 $d\sigma_{\rho^*}$ 是.....上的曲面测度

$$S = \{x : \rho^*(x) = 1\},$$

ρ^*单位球面。

表达式（4.1）可由经典余面积公式推出。例如，[14],可进行类似的计算。

由于 $\rho^*(\eta) = \eta \cdot \nabla \rho^*(\eta)$，因此 $|\nabla \rho^*(\eta)| \geq C > 0$，当 η位于 ρ^*-单位球面上时，对某个不同的 $C > 0$。由此可知（4.1）有如下界

$$(4.1) \leq C' 2^{j(d+1)} \cdot 2^{-j} \int_{c_1 2^j}^{c_2 2^{j+1}} \phi^p(t) t^{d-1} dt \leq C'' c_j 2^{dj} \cdot 2^{-j\frac{d+1}{2}p},$$

上面的第一个不等式源于这样一个事实：有限维赋范空间上的所有范数都是可比的。

两边同时除以 2^{dj} 并取 p次方根即可得到结论。由此，根据定理1.2 可由定理2.1推出。

5. Sketch of proof of a slight strengthening of Theorem 3.2

本节概述以下结果的证明，该结果基本上源自 Bourgain 在 [2] 中的论证。

De定义 5.1。我们称 $E \subset \mathbb{R}^d$ 具有正的上勒贝格密度 i f

$$\overline{dens}_{\mathcal{L}}(E) = \limsup_{R \to \infty} \frac{|E \cap B_R|}{|B_R|} > 0,$$

其中 B_R 表示半径为 R的球。

定义5.2. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 满足 $\overline{dens}_{\mathcal{L}}(E) > 0$。若 E' 是 E 的一个细化，且相对密度为 r，则称 $E' \subset E$ 并且

$$\overline{dens}_{\mathcal{L}}(E') \geq r \cdot \overline{dens}_{\mathcal{L}}(E).$$

定理5.3. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 具有正的上勒贝格密度 $\overline{dens}_{\mathcal{L}}(E)$。那么存在阈值 $L_0 > 0$、阈值 $r \in (0,1)$ 以及 $x_0 \in E$，使得对于任何相对密度为 r的 E 的细化 E'，以及任何 $L > L_0$，都存在 $x' \in E'$，使得 $\rho^*(x_0 - x') = L$。

Bourgain 对 $d = 2$, $\rho^*(x) = |x|$ 情形的证明有两个关键要素。第一个是以下极大定理，它由 Bourgain 对圆形极大定理的证明推出。

定理 5.4. 设 σ 为圆 S^1上的弧长测度，并由关系式 $\widehat{\sigma_s}(\xi) = \widehat{\sigma}(s\xi)$定义 σ_s。设 P_t 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的泊松半群核，因此 $\widehat{P_t}(\xi) = e^{-t|\xi|}$。对于 $p > 2$，存在常数 $C(p) < \infty$ 和 $\alpha(p) > 0$，使得

$$\left|\left| \sup_{s \geq t_0} |(f - (f * P_t) * \sigma_s)| \right|\right|_p \leq C(p) \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha(p)} ||f||_p.$$

若以任意具有非零曲率的对称光滑凸曲线替换 S^1，仍可得到相同结论；这一点可由 [18]推出。在更高维度中，以下结果可由[6]推出。

定理 5.5。设 ρ 是凸对称体 K 上的闵可夫斯基泛函，该凸对称体具有光滑边界，且处处曲率非零。设 ρ^* 如上所述。设 $S_\rho = \{x \in \mathbb{R}^d : \rho^*(x) = 1\}$，且设 σ_ρ 表示曲面测度。设 $\sigma_{\rho,s}$ 表示如上所述的膨胀曲面测度。对于 $d > 2$，存在 $C < \infty$，使得

$$\left|\left|\sup_{s\geq t_0} |(f - (f * P_t) * \sigma_{\rho,s})|\right|\right|_2 \leq C\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{d-2}{2}} ||f||_2.$$

Bourgain 证明中的第二个关键步骤是注意到：如果定理 3.2 在 $d = 2, \rho^*(\xi) = |\xi|$ 的情形下结论不成立，那么存在 $U \subset [0,1]^2, |U| > \epsilon$，以及一个正数序列

$$s_1 > t_1 > s_2 > t_2 > \cdots > s_J > t_J,$$

J 任意大，且满足

$$s_{j+1} < \frac{1}{2}t_j,$$

以及 $x \in U \cap [s_j, 1-s_j]$，$s_j \in (0, 1/2)$，这意味着 $\sup_{s_j<t<s_{j+1}} |(1_{[0,1]^2} - f) * \sigma_t| = 1$。相同的约化也可在维数 $d \geq 3$ 中进行，只需将欧几里得度量替换为 ρ^*。随后利用定理5.4即可得到矛盾。在三维及更高维数中，利用定理5.5以完全相同的方式得到矛盾。

此外，同一论证还可得出稍强一些的结论，即定理5.3中所述：存在一个阈值 $L_0 > 0$，以及一个阈值 $r \in (0, 1)$，并且$x_0 \in E$，使得对于任意一个 E' 的细化 E，其相对密度为 r，以及任意 $L > L_0$，都存在 $x' \in E'$ 使得 $\rho^*(x_0 - x') = L$。这是因为，假设该陈述不成立，就会导出与上述完全相同的陈述，并以同样的方式得到矛盾。

6. Proof of Theorem 1.7

假设 $\mathcal{E}(A)$ 是 $L^2(K)$ 中的一个正交集，具体来说，

$$\int_K e^{2\pi i x\cdot(a-a')}dx = 0 \text{ for all } a \neq a' \in A,$$

其中 K 与定理 1.7 中的定义相同。

第一作者与 Rudnev 在 [13] 中证明，若 A是无限集， A则包含在一条直线上。此外，他们还证明，若 $d \neq 1$ 模 4 同余于 0，则 A 必为有限集。

证明依赖于两个由 $\mathcal{E}(A)$ 的正交性假设推得的估计。第一个估计指出，若 $\mathcal{E}(A)$ 是 $L^2(K)$ 中的正交集，则对所有 $a, a' \in A$,

$$\rho^*(a-a') = \frac{k}{2} + \frac{d-1}{8} + O(|a-a'|^{-1}) \text{ for some integer } k \text{ as } |a-a'| \to \infty. \tag{6.1}$$

T第二个估计指出，若 $a_0, a_1 \in A$, $a_0 \neq a_1$，则对所有 $a \in A$,

$$\rho^*(a_0-a) - \rho^*(a_1-a) = \frac{k}{2} + O(|a|^{-2}) \text{ for some integer } k \text{ as } |a| \to \infty. \tag{6.2}$$

第一个估计可直接由引理 3.1 得出。第二个估计用到了更精细的贝塞尔展开（参见 [13] 中的引理 1.4）。利用这些估计，作者证明了他们的结论。

在定理 1.7 的假设下，同样的论证可得（6.1）和（6.2）的如下形式:

$$\rho^*(a-a') = \frac{k}{2} + \frac{d-1}{8} + O\left(\frac{\phi(|a-a'|)}{|a-a'|^{\frac{d+1}{2}}}\right) \text{ for some integer } k \text{ as } |a-a'| \to \infty, \tag{6.3}$$

其中（1.5）成立，且（6.2）变为

(6.4)

$$\rho^*(a_0-a) - \rho^*(a_1-a) = \frac{k}{2} + O\left(\frac{\phi(|a|)}{|a|^{\frac{d+1}{2}}} \cdot |a-a'|^{-1}\right) \text{ for some integer } k \text{ as } |a| \to \infty.$$

注意到

$$O\left(\frac{\phi(|a-a'|)}{|a-a'|^{\frac{d+1}{2}}}\right) = o(1), \text{ as } |a-a'| \to \infty,$$

根据假设。同样,

$$O\left(\frac{\phi(|a|)}{|a|^{\frac{d+1}{2}}} \cdot |a-a'|^{-1}\right) = o(|a-a|^{-1}) \text{ as } |a-a'| \to \infty.$$

用于证明主要结果结论的几何观察[13], ，即引理 1.5，并不需要比上述（6.3）和（6.4）更强的条件。证明该论文中的引理 1.5 和命题 1.6 只需这些条件。由此得到以下版本的 Erd˝os 整数距离原理。

定理 6.1。（Erd ˝os 整数距离原理的近似版本）设ρ^* 如上所述，对应于一个具有光滑边界且高斯曲率处处非零的对称凸体 K。设 $A \subset \mathbb{R}^d$、 $d \geq 2$，并假设对于 a、 a_0、 $a_1 \in A$,

$$\rho^*(a-a_0) - \rho^*(a-a_1) = o(|a|^{-1}), \tag{6.5}$$

并且存在常数 c_1、 c_2，使得对于 a、 $a' \in A$,

$$\rho^*(a-a') = c_1 k + c_2 + o(1). \tag{6.6}$$

那么 A 是一条直线的子集。如果 $d \neq 1$ 模 4，则 A 是有限的。

7. 开放问题

本节旨在阐述一些可通过本文的方法及相关思路加以研究的开放问题。

i）本文作者此前已证明（[10]）：若 $g(x) = \chi_{B_d}(x)$，其中 B_d 是二维及更高维空间中的单位球，且 $d \neq 1$ 模 4，则不存在 $S \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$使得 $\{g(x-a)\, e^{2\pi i x\cdot b}\}_{(a,b)\in S}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的正交基。当 $d = 1$ 模 4 时，相关研究仍在进行中。一个值得探讨的问题是，在近似正交的假设下，能否得到相同的结论。

ii）鉴于[12], ，应当可以证明，定理1.2 的结论在假设 ∂K 有一点，且在该点的邻域内光滑并具有非零高斯曲率时，仍然成立。

iii）可以合理地猜想，若 K 是 $\mathbb{R}^d$中的凸体， $d \geq 2$，则存在 $S \subset \mathbb{R}^{2d}$，使得 $\{\chi_K(x-a)\, e^{2\pi i x\cdot b}\}_{(a,b)\in S}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的正交基，当且仅当 K 可通过平移铺砌 $\mathbb{R}^d$；也就是说，当且仅当 K 是 Venkov [20] 和 McMullen [17]分类的那类对称多面体。或许可以结合本文的技巧与[16] 的技巧来解决这个问题；后者最近证明，若 $K \subset \mathbb{R}^d$， $d \geq 2$是凸的，则$L^2(K)$ 具有指数函数正交基，当且仅当 K 可通过平移铺砌 $\mathbb{R}^d$。二维情形此前已在 [12]中得到证明。

iv) 定理 1.2 与定理 1.7 的证明之间的差异，引出了这样一个问题：是否可以强化

Erd˝os 整数距离原理（在 [13], 中得到证明），将逐点（近似）整数距离条件替换为平均版本。例如，若 A 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个无限分离子集， $d \geq 2$, 使得存在常数 c_1， c_2 以及 $p \in [1, \infty)$ ， 满足

$$|a - a'| = c_1 k + c_2 + O(\mathcal{D}(|a - a'|)),$$

with

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{1}{2^j} \int_{2^j}^{2^{j+1}} |\mathcal{D}(t)|^p dt = 0,$$

那么 A是直线的子集吗?

如果这类结论成立，就应当能显著加强定理 1.2。直观地说，这个想法如下（为简便起见，以二维情形说明）。固定 a_0、 a_1、 $a_0 \neq a_1$。那么 A 中 90% 的点到 a_0的距离几乎都是 $c_1 k + c_2$ ， 对于 a_1也同样如此。由此可知，81% 的点落在有限条双曲线上，这些双曲线的焦点是 a_0 和 a_1。现在选取一个不在经过 a_0 和 a_1 的直线上的 a_2 ， 并针对 a_1以及那些相对于a_2而言几乎是平移缩放整数的点，重复同样的操作。焦点为 a_0、 a_1 的双曲线与焦点为 a_1、 a_2 的双曲线相交有限次（交点数取决于这两对点之间的距离），这表明所得子集 $A' \subset A$ （至少包含 72.9% 的点）是某条直线的子集。现在，我们用同样的点 a_0、 a_1、 a_2 ，针对 A'的补集，重复同样的操作。这种方法或许可以用来证明 $A = A_{good} + A_{bad}$，其中A_{good} 是某条直线的子集，而 A_{bad} 可以任意稀疏。这可能会带来定理 1.2 的另一种证明。能否得出 A_{bad} 为空集，是一个值得研究的有趣问题。

References

[1] A.Beurling，局部调和分析及其在微分算子中的一些应用，《基础科学的近期进展》，学术出版社 1 (1966)。4[2] J. Bourgain，正密度集合的 Szemeredi 型定理，发表于 $\mathbb{R}^k$，以色列数学杂志 54(1986)，第 3 期，307–316。8，10[3] J. Bourgain，平面上凸曲线的平均值与极大算子，J. Analyse Math. 47 (1986)，69–85。8[4] H. Furstenberg、Y. Katznelson 和 B. Weiss，遍历理论与正密度集合中的构形《拉姆齐理论数学》，184–198，Algorithms Combin.，5，施普林格，柏林，(1990)。8[5] I. Gelfand 和 G. Shilov，广义函数，第 1 卷，学术出版社，(1958)。2

[6] A. Greenleaf，主曲率与调和分析，印第安纳大学数学杂志 30 (1981)，第 4 期，519–537。8, 11[7] C. Herz，与凸集相关的傅里叶变换，数学年刊 (2) 75 (1962) 81–92。2, 7[8] A. Iosevich 和 M. Kolountzakis，关于傅里叶谱与指数系统的 Weyl 型公式，美国数学会会刊 134 (2006)，第 11 期，3267–3274。4[9] A. Iosevich 和 A. Mayeli，关于完备与不完备指数系统，即将在美国数学会会刊发表。1, 4[10] A. Iosevich 和 A. Mayeli，凸性上的 Gabor 正交基，离散分析 (2018)，论文编号 19，共 11 页。13[11] A. Iosevich、N. H. Katz 和 S. Pedersen，傅里叶基与 Erd ¨os 的距离问题。数学研究快报，6，251–255，(2001)。3[12] A. Iosevich、N. H. Katz 和 T. Tao，具有曲率点的凸体不具有傅里叶基，美国数学杂志，123，115–120，(2001)。1, 3, 13[13] A. Iosevich 和 M. Rudnev，正交指数函数的组合方法，国际数学研究通知 (2003)，第 50 期，2671–2685。1, 5, 6, 12, 14[14] A. Iosevich 和 E. Sawyer，齐次曲面上的振荡积分与极大平均，杜克数学杂志 82 (1996)，第 1 期，103–141。9[15] A. Iosevich 和 S. Pedersen，谱隙有多大？太平洋数学杂志 192 (2000)，第 2 期，307–314。4[16] N. Lev、M. Matolcsi，所有维数下凸域的 Fuglede 猜想均成立，数学学报，第 228 卷 (2022)，第 2 期，页码：385–420。13[17] P. McMullen，可通过平移铺砌空间的凸体，Mathematika，27 (1):113–121，(1980)。13[18] G. Mockenhaupt、A. Seeger 和 C. D. Sogge，傅里叶积分算子的局部平滑化与 Carleson-Sjolin 估计，美国数学会杂志 6 (1993)，第 1 期，65–130。11[19] E. M. Stein，极大函数 I：球面平均，美国国家科学院院刊 73 (1976)，第 7 期，2174–2175。8[20] B. A. Venkov，关于一类欧几里得多面体，列宁格勒大学学报 Ser. Mat. Fiz. Him.，9(2):11–31，(1954)。13

Department of Mathematics, University of Rochester, Rochester, NY电子邮箱：iosevich@math.rochester.edu

City University of New York, NY电子邮箱：amayeli@gc.cuny.edu