有限模型论的脐带

Yuri Gurevich

计算机科学与工程，密歇根大学

arXiv:2301.09145v1 [cs.LO] 22 Jan 2023

摘要

模型论诞生并发展为数理逻辑的一个分支。它有各种应用领域，但并不依附于其中任何一个。先验地说，称为有限模型论的研究领域本应只是模型论的一个分支，但事实并非如此。在相当长的一段早期时期里，有限模型论确实依附于一个应用领域——关系数据库管理；当时，数据库提供了研究动机，也是有限模型论的主要应用目标。

可以说，有限模型论甚至更多地受到复杂性理论的推动。但本文探讨的是关系数据库理论如何影响了有限模型论。

这并不是一部严谨的学术史，也没有为所有参与者一一记功。最初，我只打算讲述自己亲历或参与的那些进展。为了让故事连贯，我不得不补充介绍一些其他进展。

1 序言

问[1]：为什么有限模型论属于计算机科学，而模型论却属于数学?

答[2]：让我想想。模型论是数理逻辑的一个分支，而数理逻辑诞生并发展于数学基础领域。有限模型论（FMT）则晚得多才发展起来。在20世纪70年代之前，它还不是一个独立的研究领域。有限模型论主要由计算机科学家发展起来。它过去如此，现在也依然深受复杂性理论影响；传统上，复杂性理论被视为理论计算机科学的一部分（尽管数学家常将其视为数学）。此外，在早期相当长的一段时期内，有限模型论还深受（关系型）数据库理论（DBT）的影响，而数据库理论确确实实属于计算机科学。我怀疑，如果没有数据库理论这层联系，有限模型论就不会成为一个公认的研究领域。从这个意义上说，数据库理论与有限模型论的联系就是有限模型论的脐带。

问： 跟我说说数据库理论对有限模型论的影响。

A: 我会尽力。不过，先说明两点：我不是数据库理论专家；更重要的是，我并不适合撰写一部学术史，为所有参与者一一恰当地致谢。要对一个研究领域作出学术性的叙述，需要一种特殊的才能，而我并不具备这种才能。

[1]Quisani 是我以前的学生。[2]作者

我主要会讲述自己亲眼见证或亲身参与的那些进展。

问： 在你开始讲述之前，我还有最后一个问题。我想，逻辑学家在20世纪70年代之前就研究有限模型了吧?

答： 是的，确实如此。先让我从有限模型论的逻辑学前史讲起。

2 前史

在人类历史上，有限结构很早就与人类息息相关，远在“结构”这一概念被提出之前，甚至早在“定理”这一概念被提出之前。例如，一个有限集无论按什么顺序计数，结果总是相同。这个事实的特殊情形——对于含有2个元素、3个元素等的集合——想必很早就为人所知。古希腊人很可能在“定理”这一概念被提出之前，就已知晓这一普遍事实。

模型论在20世纪初就已有人研究（例如 Skolem 和 Löwenheim），而有限模型论可以说是在20世纪70年代才成为一个独立的研究领域，“有限模型论”这一术语则直到20世纪末才被创造出来。

正如本节其余部分所示，在成为一个独立的研究领域之前，有限模型论就已得到研究和应用。

2.1 BorisA. Trakhtenbrot

在论文 [45] Boris Trakhtenbrot 中，他证明了有限可满足性不可判定。不存在这样的算法：给定一个一阶句子 φ，判断 φ 是否有有限模型。

由此可知，有限有效性不是递归可枚举的，也就是说，在所有有限模型上都有效的一阶句子集合不是递归可枚举的。事实上，令 S 为有限有效句子的集合， S' 为 S的补集。 S' 中的句子有有限反例。由此可知， S' 是递归可枚举的。如果 S 也递归可枚举，那么下面这个（不太可行的）算法就能判断给定句子 φ属于 S 还是 S'：持续枚举 S 句子列表和 S' 句子列表，直到 φ 出现在其中一个列表中。

递归可枚举性的缺失十分重要。这意味着有限有效性不存在合理的演绎系统。这与一般有效性（在任意结构中有效，不一定是有限结构）的情况形成对比；对于一般有效性，则存在这样的演绎系统。

在 [46]1953年发表的论文中，特拉赫滕布罗特强化了他的结果。有限可满足句子的集合与不可满足句子的子集是递归不可分的：不存在一个递归集合，既包含这两个集合中的一个，又与另一个不相交。

由于有限模型论通常被视为理论计算机科学的一部分，因此值得一提的是，特拉赫滕布罗特也是计算机科学的先驱，培养了许多优秀的学生（图1展示了他与其中几位学生的合影）。另请参阅 [2] 。



图 1：1992年，Boris Trakhtenbrot 与几位昔日学生合影。从左至右：Vladimir Sazonov、Janis Barzdins、Rusins Freivalds、Alexandre Dikovsky、Boris Trakhtenbrot、Mars Valiev、Miroslav Kratko 和 Valery Nepomnyaschy。

20世纪60年代中期，我在新西伯利亚学术城 [50]首次见到特拉赫滕布罗特。当时，他正在主持一场气氛活跃的研讨班，探讨方兴未艾的计算机科学。尽管我们年龄相差悬殊，却成了朋友。我时常前往学术城，在院士 Anatoly Maltsev 主持的代数与逻辑研讨班上作报告。每逢此时，我也会参加特拉赫滕布罗特的研讨班，并与他交谈。我记得，他如何独立于西方同行，引入时间复杂度和空间复杂度的概念（借助所谓的“信号函数”）。我本可以早得多成为一名计算机科学家。但当时，我正从代数转向逻辑，而真正令我着迷的是逻辑。

2.2 DanaScott、Patrick Suppes 和 William W. Tait



（a）Dana S. Scott



（b）William W. Tait



（c）Patrick C. Suppes

很容易看出，纯全称句，也就是形式为

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

其中 Φ 是无量词的，并且在子模型下保持不变：如果 $A \models \varphi$ 且 B 是 A 的子模型，那么 $B \models \varphi$。根据 Łoś-Tarski 定理 [10, 定理 5.2。4], 存在一个

逆命题：任何在子结构下保持不变的句子，都等价于一个全称句。

在 1958 年的论文 [41]，中，Dana Scott 和 Patrick Suppes 猜想，若只考虑有限结构，Łoś-Tarski 定理仍然成立。在 1959 年的论文 [42]，中，William W. Tait 驳斥了他们的猜想。事后看来，他给出的反例相当简单。基本上，它是一个一阶句子，表达的是：具有最小元的线性序也具有最大元。每个有限模型都具有这一性质，因此该性质在有限模型的子模型中得以保留。然而，一个无限模型可能不具有这一性质，尽管它是某个具有这一性质的模型的子模型；最小的例子是把自然数的线性序 ω 作为 $\omega + 1$ 的子模型。

不过，Scott-Suppes 文章的内容不止上文提到的猜想。本节稍后将回到他们的论文。

2.3 Yuri Glebsky 及其学生

在莫斯科举行的 1966年国际数学家大会上，Yuri Glebsky 宣布了一条出人意料的一阶逻辑零一律 [23]。

考虑一个有限的关系符号集 V，并只关注词汇表 V 上的模型，其中论域为 $\{1、2、\ldots、n\}$。对于词汇表 V 中的每个一阶句子 φ，令$B(n)$ 为 n 元模型的总数，$A(n)$ 为满足 φ的此类模型数。零一律指出，对于上述任意 V 和 φ，$\lim_{n\to\infty} A(n) \big/ B(n)$ 均存在，且等于 0 或 1。



图 3：Yuri V. Glebsky

1969年，Glebsky 和他的三位学生——Dmitry I. Kogan、Mark I. Liogonky 和 Vladimir A. Talanov——发表了零一律的证明 [24]。1972年，这篇论文正式译成了英语，但在西方并未引起注意。碰巧，我知道这篇论文 [24]。这并不是因为我多么博学；学问从来不是我的强项。不过，1970年，我曾作为正式反方评审，参加 Liogonky 博士论文的公开答辩。在论文中，Liogonky 证明了，即使结构按同构计数，0-1定律仍然成立

1972年，Ron Fagin 宣布了0-1定律，而在此期间他已独立发现了该定律 [15]。他在论文中给出了该定律的优雅证明 [16] ，并将其发表在 [21]。几年后，我遇到了Fagin，并向他讲述了Glebsky的情况。Fagin感到惊讶，但他找到了那篇1969年的论文的英语译文，事情也就此尘埃落定。

1977年，格列布斯基为救儿子而在伏尔加河溺水身亡。他的学生敬仰他，他的英年早逝令他们悲痛欲绝 [39]。

2.4 其他相关结果

Q: 那么 w 呢 上述相关“史前”结果的集合究竟有多全面 ve?

A: 这肯定不是详尽无遗的。1970年以前有许多与此在某种程度上相关的结果。例如，特拉赫滕布罗特关于递归不可分性的结果，在代数与逻辑领域引发了更微妙的递归不可分性结果。在书中 [8], 介绍了一种适当的归约理论，并证明对于许多自然的一阶句子类 K ，有限可满足 K 句子的集合与不可满足 K 句子的集合是递归不可分的。

此外，至少还有一项非常相关的结果未在上文提及。在评论本文草稿时，Erich Grädel 提醒我注意 Büchi-Elgot-Trakhtenbrot 定理 [5, 11, 47], ；他认为这是第一个描述复杂性结果。该定理指出，在任意有限字母表上，字符串集合可由有限状态自动机接受，当且仅当它可用一元二阶逻辑（MSO）定义。据我所知，这无疑是第一个描述复杂性结果。

3 数据库理论

埃德加·弗兰克（“特德”）·科德不会进入模型论名人堂。他那个广为人知、简称为 Codd 定理的著名定理 [52], 确实属于优秀的模型论成果，但正如我们下面将要解释的，它对逻辑学家而言并不是什么真正的新发现。然而，他是我们这个故事中的英雄。他发明了用于数据库管理的关系模型，促成了有限模型论作为一个独立研究领域的诞生。

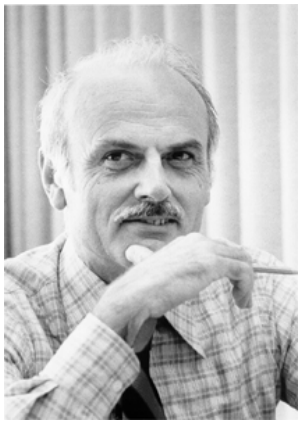


图 4：埃德加·F·科德

对于没有实践经验的理论学家来说，可能很难理解科德的贡献。科德观察到，数据库可以用（一阶）结构 [13, 14]充分表示。然而，结构最初是为表示数据或知识而设计的。

问： 由谁设计?

A: 由如今所谓模型论的奠基者所提出，从 Löwenheim 和 Skolem 开始，包括哥德尔和 Tarski，尤其是 Tarski；例如参见 [43] 。

Q: 数理逻辑是在数学基础的框架内发展起来的。逻辑学家可能只对数学数据感兴趣。

A: 我不明白你所说的数学数据是什么意思。逻辑学家当然不会只关注数值数据。任何数据都可能涉及数学问题，从而成为逻辑学家感兴趣的“数学数据”。

此外，逻辑学家感兴趣的问题并不局限于数学基础。§2.2 中提到的 Scott-Suppes 论文探讨的是测量理论基础。作者预见到了关系数据库：

> “从抽象的角度来看，一组经验数据由指定对象之间的一系列关系构成.....我们将经验数据集视为（有限元的）关系系统” [41, §1]。◁

在文章 [14]，中，Codd 定义了一种无变量的 *关系代数* 和一种 *关系演算*。后者是一阶逻辑的一种形式，包含命题联结词和量词，适用于他的目的。他还证明了一个定理，即 Codd 定理，确立了关系代数的表达能力本质上与一阶逻辑相同。

问： 为什么说“本质上”而不是“字面上”？

答： 数据库查询应当在适当的技术意义上是安全的 [1, §5.3]。例如，任何查询都不应表达无限域中某个有限子集的补集。Codd 定理证明，关系代数的表达能力与一阶逻辑的安全片段相同。

不过，Codd 定理对逻辑学家来说也不是什么新鲜事。早在此之前，Tarski 及其合作者就利用所谓的柱代数，构建了一阶逻辑的一种代数形式 [12, 44, 32]。

问： 如果逻辑学家早已知道这些，那么 Codd 的工作为何如此重要？

答： 简而言之，是工程。将经验数据集视为关系系统，与实际的数据库管理之间有着天壤之别。Codd 的方法注重实用，其成果是一个优于所有竞争方案的数据库管理模型。他于1981年获得图灵奖。

问： 关系数据库管理有哪些优势？

答： 一是简洁：除少量关系符号外，所有信息都由数据值表示。另一个重要优点是语义清晰明确。还有一个重要优点是，关系方法支持高级查询语言。

问： 如果我们着眼于理论而非实践，Codd 的方法有什么新意吗？

A: 是的，确实如此。通常，在逻辑和一般数学中，结构都是静态的。你研究某个特定结构，例如实数域，或某一类结构，例如交换群。但数据库会不断变化，从这个意义上说，它们是动态的。例如，考虑某个组织的薪资数据库。新员工入职，有些员工离开组织，有些员工获得加薪，

等等。为了纳入这种变化，数据库语言应当允许我们以各种方式更新数据库。

问： 你认识 Codd 吗?

答： 不认识；真希望我认识他。Codd 在密歇根大学撰写了博士论文，但那是在20世纪60年代，我还没到那里。他的导师 John Holland 倒是跟我讲过不少 Ted Codd 的事。John 告诉我，Codd 为了在 IBM 推广关系方法，损害了自己的健康。他在 IBM 的抗争在许多地方都有记载，甚至维基百科的条目中也有 [51]。

4 开端

问： 铺垫了这么多之后，你准备好讨论有限模型论本身了吗？如果准备好了，就从开端讲起吧。

答： 我准备好讨论有限模型论了，但从开端讲起颇具挑战。直到1982年我加入密歇根大学、正式成为一名计算机科学家之前，我一直是数学家，关注的事情也大不相同，主要是模型论。因此，为了准备这次讨论，我与专家们通信交流。特别是，我向 Ron Fagin 提出了两个问题:

1. 你认为有限模型论（FMT）是从什么时候开始的？是从你的论文开始的吗？2. “有限模型论”这一术语是谁创造的？又是在什么时候?

“尽管特拉赫滕布罗特定理是第一个重要成果，”Ron于2022年11月9日回复道，“[我] 确实认为，我的博士论文开启了有限模型论这一领域。由于我有偏见，我联系了Moshe [Vardi] （我也抄送了他）。他说，他完全同意特拉赫滕布罗特取得了第一个重大成果，而我的论文则开启了有限模型论这一领域。”

A 几天后，Moshe向我概述了他对早期历史的看法。

“20世纪70年代，有三条彼此独立的研究路线:

a. 1970年：Codd的论文——关系数据库理论的开端。b. 1973年：Fagin的博士论文《有限结构模型论的贡献》，他在其中证明了Σ_1^1 =NP、0-1定律，以及可达性无法用 [存在] MSO定义。c. 1980年：Immerman的博士论文《一阶可表达性作为一种新的复杂性度量》。

20世纪80年代初的研究建立在这三大支柱之上，尽管当时并未明确属于有限模型论。例如，Immerman 和 Vardi 在1982年的论文便以这些支柱为基础，但没有强调有限性这一特征。您在20世纪80年代发表的论文提出了有限性问题，并推动有限模型论成为一个定义明确的领域。”——Moshe Vardi，2022年12月17日

问： 你觉得这样说合理吗?

A: 完全同意。Ron 的论文 [16] 确实开创了先河；相关成果发表在五篇论文中: [17, 18, 19, 20, 21]。我已经提到过他对 0-

1 定律的优雅证明 [21]。另一个重要成果是，无向图的连通性无法用存在单子二阶逻辑 [18]表达；由于该逻辑可以表达非连通性，因此可表达性质的集合在补集运算下并不封闭。著名的 Fagin 定理指出，在有限结构上，存在二阶逻辑的表达能力恰好等同于 NP 复杂性类 [17]。我上面提到过，Büchi-Elgot-Trakhtenbrot 定理是第一个描述复杂性方面的成果。但 Fagin 定理才真正开启了描述复杂性理论。它讨论的不是有限自动机，而是最重要的复杂性类之一——NP。

就关系数据库理论而言，Ron 的论文发表时机恰到好处。Codd 于 1970年 和 1972年 分别发表的论文 [13]和 [14]为数据库管理的关系模型奠定了基础，为新兴的有限模型论提供了研究动机和应用背景。在另一封日期为 2022年12月17日 的信中，Ron 写信告诉我："[W]1975年，我从 IBM Watson 调到 IBM 圣何塞时，Ted Codd 成了我的导师，这促使我专门撰写有关关系数据库理论的论文。"

在 20世纪70年代 和 20世纪80年代初，有许多与有限模型论相关的数据库理论研究。我认识几位既是数据库理论专家、也是有限模型论专家的人——Serge Abiteboul、Phokion Kolaitis、Victor Vianu 和 Moshe Vardi；他们可以为你详细介绍相关情况。对于偏好逻辑的读者来说，[1] 是一本很好的数据库理论教材。后来将在我们的故事中发挥作用的一篇对有限模型论颇有影响的数据库理论论文，是 Ashok Chandraand David Harel 合著的文章 [9] 。

1980年，Neil Immerman 为其博士论文 [33] 答辩；研究结果发表于 [34, 35]。我问 Neil 是什么引领他走上有限模型论（FMT）之路。

> "Fagin 对 NP 的刻画，以及他证明连通性不属于单子存在二阶逻辑（monadic SOE） [存在单子二阶逻辑]，给了我启发。"Neil 回答道，"我觉得要证明全元数二阶逻辑的下界太难了，但一阶下界或许更容易处理。这激励我在博士论文中研究这一领域，并提出了我所称的'一阶可表达性'。后来，Hartmanis [Neil 的导师]建议用'描述复杂性'这个更吸引人的名称。"——Neil Immerman，2022年12月20日

在1982年 STOC 上，Immerman 和 Vardi 提出了后来被称为 Immerman-Vardi 定理的各自版本；他们证明，在有序结构上，一阶逻辑的最小不动点扩展能够刻画多项式时间——这通常被视为最重要的复杂性类 [36, 48]。Immerman 后来成为描述复杂性理论的领军人物，或许应该说是其中的领军人物；他既是贡献者，也是积极的倡导者。关于这一主题，可参见他的著作 [37] 。

问： Vardi 提到的你的贡献呢?

答： 下一节我会详细谈谈这件事。在这里，先让我提一下最早的一个结果：在有限域上的一种自然解释下，一个函数是原始递归的，当且仅当它是对数空间可计算的；它是一般递归的，当且仅当它是多项式时间可计算的 [27]。

问： Fagin 回答了你的第二个问题吗?

答： 是的。他写道："我不知道（Moshe 也不知道）是谁创造了'有限模型论'这个术语。Moshe 说他会调查一下。"Moshe 当天就给我们回了信，让我很惊讶。他写道

：“我找到的第一篇标题中使用了有限模型论的论文是 [30]。Ron 随后发表了 [22]。所以看来，创造这个术语的功劳应归于 Yuri[3]。”

问： 这个术语是你创造的吗?

答： 并非有意为之。与 Moshe 和 Ron 不同，我不属于数据库界。我来自模型论，而“有限模型论”这个术语，对于研究有限模型的模型论学者来说，自然而然就会想到。当然，这个术语有可能早就有人使用过，只不过没有出现在论文标题中。

5 成为有限的重要性

问： 你是如何接触到关系数据库的?

答： 在 FOCS 1982 上，Moshe Vardi 发表了《关系数据库的分解》，其中充分运用了 Beth 可定义性定理 [49]。我担心该定理在限制到有限结构时可能不再成立，于是问他，他的数据库是否可能是无限的。他说是。

问： 无限数据库！这太疯狂了。

A: 而且有点贵。

Q: 没错。

A: 我觉得一阶逻辑可能不太适合数据库。

Q: 是什么让你产生了这个想法?

A: 我此前研究有序阿贝尔群（有序阿贝尔群）的经历。在我的博士论文[25], 中，我证明了有序阿贝尔群的一阶理论的可判定性，解决了 Tarski 提出的问题。但有序阿贝尔群代数很少是一阶的。因此，我将可判定性推广到了有序阿贝尔群的单子二阶理论，其中集合变量的取值范围是凸子群 [26]。扩展后的有序阿贝尔群理论基本涵盖了当时的有序阿贝尔群文献，同时可判定性的证明也变得更简单。显然，一阶逻辑并不适合有序阿贝尔群。

参加完 FOCS 会议回家后，我为一些著名的经典逻辑定理构造了反例，包括有限情形下的 Beth 可定义性定理，也就是说，只考虑有限结构的情形 [28]。在此过程中，我发现 William Tait 已经给出了 §2.2 中所述的 Łoś-Tarski 定理的反例。

问： 是否有某个经典定理，你原以为它在有限情形下会失效，却始终找不到反例?

答： 有，林登定理 [38]。它指出，一阶句子 $\varphi(P)$ 关于 P 是单调的，当且仅当它等价于一个句子 $\psi(P)$ ，其中 P 只以正向形式出现。后来，Miki Ajtai 和我证明了它在有限情形下不成立 [4]。

问： Codd 为什么力求达到一阶逻辑的表达能力?

[3]我擅自将网址替换成了参考文献中的引用

答： 我想，这相当自然。一阶逻辑的表达能力比较强。许多关系查询都可以用一阶逻辑表达。此外，一阶逻辑也是标准逻辑教科书所讲的逻辑。还能有什么选择呢？命题逻辑实在太弱，而二阶逻辑的表达能力又过于强大。

问： 不过，据我所知，一阶逻辑是在数学基础的框架下发展起来的，而无限结构在其中不可或缺。

答： 确实如此。此外，在基础框架中，一阶逻辑能够提供完备的演绎系统也很重要：一个句子可证，当且仅当它有效。事实上，一阶逻辑最初就是作为一种演绎系统引入的。所有可证句子都是有效的，这一点显而易见。哥德尔完备性定理则证明了所有有效句子都是可证的。正如我们在 §2.1 中看到的，有限有效性不是递归可枚举的。因此，不存在这样一种逻辑演算：一个句子可证，当且仅当它在所有有限结构上都有效。

问： 实际上，一阶可表达性是否曾被证明是不足够的？

答： 是的。不存在这样的 一阶查询（甚至不存在存在单元二阶查询）：给定任意关系 R，它能返回 R [18] 的传递闭包；而数据库管理需要传递闭包 [53]。

问： 如果一阶表达能力不够，你能怎么办？也许可以选取一个恰当的二阶逻辑片段。

答： 可以，不过换个角度来思考会更方便，比如传递闭包或最小不动点算子 [3]。

问： 但是什么为你指引方向呢？

答： 啊，这正是关键所在。答案是计算复杂性。

问： 它们之间具体有什么联系？

答： 说来话长。我给你推荐这篇论文 [28]。

6 元有限结构

问： 你说自己并非有意创造“有限模型论”这个术语。你有没有有意创造过某个术语？

答： 当然，而且不止一次。其中一个术语与我们当前的谈话有关：元有限。

问： 嗯，你不可能半怀孕，或者说，也不可能半无限。我想你不会声称数据库是元有限的吧，毕竟你刚才还声称它们是有限的。

答： 我确实认为数据库是元有限的。让我解释一下。数据库在任何给定时刻都只包含有限条记录（关系中的元组）。从这个意义上说，它完全是有限的。正如我们在第 3 节所见，它也是动态的。不过，数据库往往隐含地涉及静态无限结构。

问： 我们 在 §3 中被视为薪资数据库。它是否涉及一个无限结构？

A: 是的，对薪资数据库的查询可能会返回一个数字，比如平均薪资，而这个数字并未出现在数据库中。这个新数字从何而来？它来自有理数的无限结构。

问： 其中涉及的无限结构，在数学上是什么？

答： 问得好。Erich Grädel 和我曾研究过这个问题 [31]。在我们的形式化定义中，元有限结构由以下部分组成：

1. 一个主要部分，即一个有限结构；2. 一个次要部分，即一个（通常是无限的）结构，例如实数算术；以及 3. 从主要部分到次要部分的“权重”函数。

问： 我想我明白薪资数据库如何构成一个元有限结构了。主要部分是员工集合，次要部分是有理数算术，而唯一的权重函数为员工指定各自的薪资。但平均薪资要怎么计算呢？

答： 在这个例子中，次要部分应当是扩展有理数算术，其中的算术运算应用于有限多重集。具体来说，我们可以求出所有员工的薪资总额和员工人数。

问： 这与有限模型论有什么关系？

答： 量词仅允许作用于主要部分。

我们研究了元有限结构理论，其中大部分数学工作由 Erich 完成。我们发现，有限模型论中的许多结果在元有限模型论中依然成立，有时甚至以不止一种形式成立。

问： 您是否将元有限模型论视为一个独立的研究领域？

答： 不。在我看来，它属于称为有限模型论的研究领域。

7 泛型性

问： 我想，至少针对多项式时间复杂度来设计逻辑，应该已经实现了。

A: 不完全是。这里出现了一个难题。传统上用于定义复杂性类的计算模型是图灵机模型。图灵机的输入是字符串。你的算法可能处理图或其他结构，但你必须将输入结构编码为字符串，才能为图灵机提供输入。我们需要一种更通用的计算模型，能够直接处理结构；而将输入结构替换为与之同构的结构，不应影响计算。

Q: 在我看来，这像是一种只有数学家才会想到的泛化。这到底和查询语言有什么关系？

A: 用数据库理论的术语来说，查询语言应当是通用的，这意味着它们应当抽象掉数据库的物理层。关于这一点，我们来

将直接处理结构的更一般的计算模型称为通用的；也将根据通用计算模型定义的多项式时间称为通用的。

问： 从物理层抽象出来是什么意思?

答： 为简单起见，考虑一个只包含一个关系的数据库。该关系是一个元组集合。集合中的元素没有顺序。因此，询问第一个元组的查询毫无意义。另一方面，在承载该数据库的计算机内存中，元组是按某种顺序存储的。

问： 很好，那就利用这个顺序，增强查询语言的表达能力。具体来说，查询第一个元组会返回一个特定的元组。

答： 但这种顺序是偶然的。它因数据库主机而异。在不同的主机上，查询第一个元组可能会返回不同的元组。

在 [9], Chandra 和 Harel 提出了一个重要问题。固定一种标准的结构二进制字符串编码，并将一台图灵机 M *generic* 称为泛型的，若结构集合 S 满足以下条件： M 接受 S 的标准字符串编码，则该集合在同构下封闭。Chandra 和 Harel 提出的问题是：泛型图灵机的集合是否递归？如果答案是正向的，那么这些优秀的图灵机就构成一种泛型计算模型。

在 [29], 中，我猜想，Chandra-Harel 问题的答案是否定的，而且不存在任何合理的（满足某些最低条件的）逻辑能够刻画结构上的一般多项式时间问题。这个问题至今仍未解决。

实际上，情况有点奇怪。在 [6, 7]中定义了一种逻辑——称为 BGS（以作者的名字命名）——使得每个可由 BGS 定义的结构性质都是一般多项式时间可计算的，而我们并不知道任何无法由 BGS 定义的一般多项式时间性质。

问： 你认为 BGS 能刻画一般多项式时间吗?

答： 不，我认为很可能不能。在 [40], 中，Ben Rossman 几乎构造出了一个结构集合，它可以在一般多项式时间内计算，但无法由 BGS 定义。他构造了一个一般多项式时间可计算的函数，该函数 (a) 给定一个有限向量空间，构造出它的对偶空间；(b) 无法由 BGS 定义。

8 后记

问： 你现在是否已经涵盖了你亲历或参与过的所有 DBT/FMT 发展?

答： 不是。有一个问题是逻辑编程语言，具体来说是 Prolog 和 Datalog。这个问题错综复杂，完全值得单独讨论。

Q： 有限模型论是否已与数据库管理脱离了脐带 ?

A: 是的。Moshe Vardi 于2022年11月24日写信告诉我：“数据库理论是有限模型论的一大推动力，但后来有限模型论从 PODS [数据库系统原理研讨会——这是理论数据库系统领域最重要的国际会议] 转向了 LICS [ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会], ，这是一个关于数学基础的会议。”

Q: 有限模型论仍然是一个独立的研究领域吗?

A: 研究领域在某种程度上也是社群。我认为，尽管有限模型论内部的社会联系和社群纽带十分紧密，它正逐渐不再是一个独立的研究领域。不过，我并非回答这个问题的合适人选，因为很久以前我就转向了其他研究领域。

致谢

撰写这篇短文期间，我与 Anuj Dawar、Ron Fagin、Erich Grädel、Neil Immerman、Mark Liogonky、Ben Rossman 和 Moshe Vardi 交换了信件。他们及时的回复给了我很大帮助。我还与 Andreas Blass 讨论了本文的各个方面，获益良多。最后，Boris Trakhtenbrot 与其学生的照片承蒙特拉赫滕布罗特家族档案提供；Dana Scott 和 William Tait 的照片分别由 Scott 和 Tait 提供；Patrick Suppes 的照片来自古根海姆基金会；Yuri Glebsky 和 Edgar Codd 的照片则来自维基百科。

参考文献

[1] Serge Abiteboul、Richard Hall 和 Victor Vianu，《数据库基础》，Addison-Wesley，1995[2] Arnon Avron、Nachum Dershowitz 和 Alexander Rabinovich，《Boris A. Trakhtenbrot：学术谱系与著作》，载于《计算机科学的支柱：献给 Boris (Boaz) Trakhtenbrot 的论文集——值其 85 岁寿辰》，《计算机科学讲义》 4800，46–57，施普林格，2008[3] Alfred V. Aho 和 Jeffrey D. Ullman，《数据检索语言的普适性》，*ACM* 编程语言原理研讨会 6，110–117，1979[4] Miklos Ajtai 和 Yuri Gurevich，《单调与正向》，计算机协会杂志 34，1004–1015，1987[5] J. Richard Büchi，《弱二阶算术与有限自动机》，数学逻辑与数学基础杂志 （现为《数学逻辑季刊》）6，66–92，1960[6]Andreas Blass、Yuri Gurevich 和 Saharon Shelah，《无选择多项式时间》，《纯粹与应用逻辑年刊》100，141–187，1999[7] Andreas Blass、Yuri Gurevich 和 Saharon Shelah，《无序结构上的多项式时间计算》，《符号逻辑杂志》67:3，1093–1125，2002[8] Egon Börger、Erich Grädel 和 Yuri Gurevich，《经典判定问题》，施普林格，1997[9]Ashok Chandra 和 David Harel，《关系查询的结构与复杂性》，《计算机与系统科学杂志》25，99–128，1982

[10] 陈忠昌和 H. Jerome Keisler，《模型论》，第 3 版，爱思唯尔，1990[11] Calvin C. Elgot，《有限自动机设计的判定问题及相关算术》，美国数学会汇刊 98，21–52，1961[12] Louise H. Chin 和 Alfred Tarski，《关于射影代数的评述》，美国数学会通报 54:1，80–81，1948[13] 埃德加·F·科德，《大型共享数据库的数据关系模型》，*ACM* 通讯 13:6，377–387，1970[14] ———，《数据库子语言的关系完备性》，载于 R. Rustin（编），《库朗计算机科学研讨会第六届：数据库系统》，65–98，Prentice-Hall，1972[15] 罗纳德·费金，《有限模型上的概率》，美国数学会通告 A714，摘要 72T-E90，1972[16] ———，《对有限结构模型论的贡献》，加州大学伯克利分校，1973年6月[17] ———，《广义一阶谱与多项式时间可识别集》，载于 Richard M Karp（编），《计算复杂性》，*SIAM–AMS* 论文集 7，43–73，美国数学会，1974[18] ———，《单子广义谱》，数学逻辑与数学基础杂志 （现为《数学逻辑季刊》）21，89–96，1975[19] ———，《双重谱的双基数刻画》，同上，第 121–122 页[20] ———，《谱层次》，同上，第 123–134 页[21] ———，《有限模型上的概率》，《符号逻辑杂志》41:1，50–58，1976[22] ———，《有限模型论：个人视角》，《理论计算机科学》116，3–31，1993[23] Yuri V. Glebsky，《谓词公式可满足性的定量估计》，*1966*年国际数学家大会短篇科学报告摘要 第 1 节，第 32 页，莫斯科，1966（俄语）[24] Yuri V. Glebsky、Dmitry I. Kogan、Mark I. Liogonky、Vladimir A. Talanov，《受限谓词演算中公式的取值范围与可满足性度》，控制论（现为控制论与系统分析）5:2，142–154，俄语版 1969，英语译本 1972[25] Yuri Gurevich，《有序阿贝尔群的初等性质》，代数与逻辑 3:1，5–39，1964（俄语），美国数学会译丛46，165–192，1965[26] ———，《有序阿贝尔群的扩张理论》，数学逻辑年刊 12，193–228，1977

[27] ———, 《可行函数代数》, 载于 FOCS 1982, *IEEE*计算机科学基础研讨会 24 210–214 1982[28] ———, 《面向计算复杂性的逻辑》, 载于 M. Richter 等（编）, 《计算与证明理论》, 施普林格数学讲义1104 175–216 1984[29] ———, 《逻辑与计算机科学的挑战》, 载于 E. Börger（编）, 《理论计算机科学的当前趋势》1–57, 计算机科学出版社, 1988[30] ———, 《论有限模型论》, 载于 S. R. Buss 和 P.J. Scott（编）, 《可行数学》211–219, Birkhäuser, 1990[31] ———, 《元有限模型论》, 信息与计算140:1 26–81 1998[32] Tomasz Imieliński 和 Witold Lipski, Jr., 《数据关系模型与柱代数》, 《计算机与系统科学杂志》28 80–102 1984[33] Neil Immerman, 《一阶可表达性作为一种新的复杂度度量》, 康奈尔大学博士论文, 1980[34] ———, 《量词数量优于纸带单元数量》, 《计算机与系统科学杂志》22 384–406 1981[35] ———, 《一阶可表达性的上界与下界》, 同上, 25 76–98 1982[36] ———, 《可在多项式时间内计算的关系查询》, 载于 1982年 STOC, 计算理论研讨会14 147–152 1982[37] ———, 《描述复杂性》, 施普林格, 1999[38] Roger C. Lyndon, 《谓词演算中的插值定理》, 《太平洋数学杂志》9 155–164 1959[39] Mark I. Liogonky 和 Vladimir A. Talanov, 《关于由 Yuri V. Glebsky 发现的 0-1 定律, 以及下诺夫哥罗德国立大学数理逻辑与代数系取得的相关结果》, 《高等教育数学》12 93–102 2014（俄语）, 似乎没有英语译本[40] Benjamin Rossman, 《无选择计算与对称性》, 载于 A. Blass、N. Dershowitz 和 W. Reisig（编）, 《逻辑与计算领域：献给 Yuri Gurevich 七十寿辰的论文集》, 施普林格计算机科学讲义6300 565–580 2010[41] Dana Scott 和 Patrick Suppes, 《测量理论的基础方面》, 《符号逻辑杂志》 23:2 113–128 1958[42] William W. Tait, 《Scott 和 Suppes 猜想的一个反例》, 《符号逻辑杂志》24:1 15–16 1959[43]阿尔弗雷德·塔斯基, 《形式化语言中的真理概念》, 《哲学研究》I 261–405 1935。英译本见《逻辑、语义学与元数学》152–279, 牛津大学出版社, 1956

[44] 阿尔弗雷德·塔斯基和 Frederick B. Thompson, 《柱代数的一些一般性质》, 《美国数学会通报》58:1 p. 65 1952[45] Boris A. Trakhtenbrot, 《有限类上可判定性问题不存在算法》, 《苏联科学院院刊》70:4 569–572 1950（俄语）, 《美国数学会译丛》第2辑 23 1–6 1963[46] ———, 《论递归可分性》, 《苏联科学院院刊》88 953—956 1953, 俄语。暂无英语译本, 但 Andrzej Mostowski 在《符号逻辑杂志》19:1 p. 60 1954 中有一篇内容丰富的评论[47] ———, 《有限自动机与一元谓词逻辑》, 《西伯利亚数学杂志》3 103–131 1962（俄语）, 《美国数学会译丛》第2辑 59 23—55 1966[48] Moshe Vardi, 《关系查询语言的复杂性》, 载于 1982年 STOC, 计算理论研讨会14 137–146 1982[49] ———, 《关系数据库的分解》, 载于 FOCS 1982, *IEEE*计算机科学基础研讨会23 176–185 1982[50] 维基百科贡献者, 《学术城》, https://en.wikipedia.org/w/index.php?&oldid=1122095807[51] ———, 《埃德加·F·科德》, https://en.wikipedia.org/w/index.php?&oldid=1125454029[52] ———, 《Codd 定理》, https://en.wikipedia.org/w/index.php?&oldid=1068162856 [53] Moshe M. Zloof, 《示例查询：一种数据库语言》, 《*IBM*系统杂志》16 324–343 1977