arXiv:2301.09181v1 [math.SP] 22 Jan 2023

带孔洞区域上的磁性诺伊曼拉普拉斯算子

Diana Barseghyan[1, 2*]、Swanhild Bernstein[3] 和 Baruch Schneider[1]

[1] 俄斯特拉发大学数学系，30.dubna 22，俄斯特拉发70103，捷克共和国[2] 捷克科学院核物理研究所理论物理系，25068 Re˘z，捷克共和国[3] 弗赖贝格工业大学应用分析研究所，Akademiestrasse 6，弗赖贝格 09599，德国 电子邮箱：diana.barseghyan@osu.cz、Swanhild.Bernstein@math.tu-freiberg.de、baruch.schneider@osu.cz

摘要

本文给出了一个移除了小紧集的区域，以及该区域上的磁性诺伊曼拉普拉斯算子。本文的主定理描述了那些不会显著改变谱的孔洞。我们证明，磁性诺伊曼拉普拉斯算子的谱在豪斯多夫距离意义下收敛于定义在未扰动区域上的原算子的谱。

关键词：磁性诺伊曼拉普拉斯算子，谱收敛，带孔洞的定义域。

数学主题分类。主要分类：58J50；次要分类：35P15，47A10。

1 引言

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界区域，且紧集 $K \subset \Omega$。记 $\Omega_K := \Omega \setminus K$。磁性诺伊曼拉普拉斯算子

$$H_{\Omega_K}(A_{\mathrm{magn}}) = (i\nabla + A_{\mathrm{magn}})^2$$

通过二次型定义

$$\int_{\Omega_K} |i\nabla u + A_{\mathrm{magn}} u|^2 dxdy, \quad u \in \mathcal{H}^1(\Omega_K),$$

*通讯作者

其中 A_{magn} 是产生磁场的磁矢势

$$\mathrm{rot}(A_{\mathrm{magn}})(x,y) = B(x,y).$$

然而，在应用中，最好不要对同一磁场限制所对应的磁势使用不同的记号。第一个动机源于超导数学理论中对磁拉普拉斯算子的研究，参见例如 [10]。第二个动机是理解磁拉普拉斯算子与非磁拉普拉斯算子之间在何处存在类比。本文将聚焦于磁拉普拉斯算子相关问题。

人们通常认为，物理情形的微小扰动只会导致谱发生微小变化。对于区域扰动，在狄利克雷边界条件下，这一说法基本成立；而诺伊曼情形则更为微妙。

在诺伊曼情形下，即使是微小扰动也可能导致谱突然变化。例如，当孔洞呈“分裂环”几何形状时，就会观察到这种效应 [11]。分裂环（即使非常小）也可能产生额外的特征值，而这些特征值与未扰动区域上的诺伊曼拉普拉斯算子的特征值毫无共同之处。

具有更一般几何形状的诺伊曼障碍物问题首次出现在 [9] 中。作者要求孔洞满足所谓的“一致延拓性质”。这一要求意味着，定义域中带孔洞的 $\mathcal{H}^1$-函数可以延拓为未扰动区域上的 $\mathcal{H}^1$ 函数，且该延拓算子的范数不依赖于孔洞的直径。在这种情况下，作者证明了谱收敛。

在 [1] 中，研究了带有零勒贝格测度孔洞的区域上的诺伊曼拉普拉斯算子的谱问题。显然，这样的区域不满足一致延拓性质，但在对孔洞作出一些额外假设的条件下，可以证明谱收敛。

在本文中，我们讨论类似的情形：此时无法保证一致延拓性质成立。这里，我们不将孔洞限制为零勒贝格测度。此外，我们还扩展了算子的类别：我们考虑的是磁拉普拉斯算子，而不是拉普拉斯算子。

在介绍我们的结果之前，我们还要提及论文 [8], ，该论文在高维情形下对孔洞的边界施加了诺伊曼边界条件。 [3] 讨论了光滑孔洞的情形。

本文第二节旨在描述那些不会显著改变谱的孔洞的几何形状。更确切地说，我们将关注定义在具有单个孔洞 K_ε （参数 ε 固定）且几何形状“标准”的二维有界区域上的磁性诺伊曼拉普拉斯算子的谱性质。本节将介绍关于 Ω_{K_ε} 上磁性诺伊曼拉普拉斯算子谱收敛的结果，其中 $\varepsilon \to 0$ 以豪斯多夫距离度量，并对 K_ε 的几何形状作出了一些附加假设。第三节将介绍主要

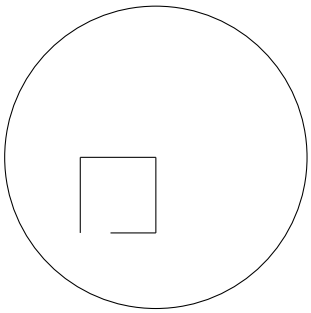

图1：不满足性质*的Ω_K 示例

工具。我们研究算子在变化的希尔伯特空间上的谱收敛。第四节和第五节将证明我们的结果。

2 主要结果

由于我们研究的是区域几何，因此引入附加性质*：对于任意$(x_0, y_0) \in \Omega_K$，以下条件至少有一个成立

- 设 $l(x_0) = \{x = x_0\}$。那么，半直线 $l(x_0) \cap \{y \geq y_0\}$和 $l(x_0) \cap \{y \leq y_0\}$ 中至少有一条与 K没有交点。
- 设 $h(y_0) = \{y = y_0\}$。那么，半直线 $h(y_0) \cap \{x \geq x_0\}$和 $h(y_0) \cap \{x \leq x_0\}$ 中至少有一条与 K没有交点。

我们在以下定理中汇总一些重要结果。

定理 2.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个有界开区域，且 $p \in \Omega$ 是某个固定点。假设 $\mathbb{B}_\varepsilon \subset \Omega$ 是一个球，其中心为 p，半径为$\varepsilon > 0$。设 $K = K(\varepsilon) \subset \mathbb{B}_\varepsilon$ 是一个紧集。此外，假设 Ω_K 满足性质*。设 $H_\Omega(A_{\text{magn}})$ 和 $H_{\Omega_{K_\varepsilon}}(A_{\text{magn}})$ 分别是定义在 Ω 和 Ω_{K_ε} 上的磁性诺伊曼拉普拉斯算子。我们假设，在 Ω 的某个包含 $\mathbb{B}_\varepsilon$ 的子集上，矢量势 A_{magn} 是二阶连续可微的。那么，当 ε 足够小时，存在 $\eta(\varepsilon) > 0$，使得 $\eta(\varepsilon) \to 0$ 随着 $\varepsilon \to 0$ 发生如下谱收敛

$$\overline{d}\left(\sigma_\bullet\left(H_{\Omega_{K_\varepsilon}}(A_{\text{magn}})\right), \sigma_\bullet\left(H_\Omega(A_{\text{magn}})\right)\right) \leq \eta(\varepsilon),$$

其中，$\overline{d}$ 在 (3.9) 中定义，$\sigma_\bullet(\cdot)$ 表示整个谱、本质谱或离散谱。此外，离散谱的重数保持不变。

□

前述结果引出了以下推论：

推论 2.2. 假设 $H_\Omega(A_{\mathrm{magn}})$ 的谱完全离散，记为 $\lambda_k(\Omega)$（按重数重复）。那么，$H_{\Omega_{K_\varepsilon}}(A_{\mathrm{magn}})$ 的本质谱下确界趋于无穷大，并且存在 $\eta_k(\varepsilon) > 0$ 满足$\eta_k(\varepsilon) \to 0$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$|\lambda_k(\Omega) - \lambda_k(\Omega_{K_\varepsilon})| \le \eta_k(\varepsilon)$$

当 ε 足够小时成立。这里，$\lambda_k(\Omega_{K_\varepsilon})$ 表示 $H_{\Omega_{K_\varepsilon}}(A_{\mathrm{magn}})$ 的离散谱（位于本质谱以下），并按重数重复。

推论 2.3. $H_{\Omega_{K_\varepsilon}}(A_{\mathrm{magn}})$ 和 $H_\Omega(A_{\mathrm{magn}})$ 的谱之间的豪斯多夫距离在任意紧区间 $[0, \Lambda]$ 上趋于零。

定理 2.1 的证明基于定理 3.1 以及以下定理：

定理 2.4. 在定理 2.1 的假设下，当 ε 足够小时，算子 $H_\Omega(A_{\mathrm{magn}})$ 和 $H_{\Omega_{K_\varepsilon}}(A_{\mathrm{magn}})$ 的距离为二阶。

3 变化希尔伯特空间上算子谱收敛的主要工具

本节首先回顾一些基本事实，这些事实保证了定义域不同的两个算子之间的谱收敛。更多信息请参阅 [7]。

对于希尔伯特空间 H，其内积为 $(\cdot,\cdot)$，范数为 $\|\cdot\|$，并配备一个非负、无界算子 A，我们关联以下希尔伯特空间尺度

$$H_k := \mathrm{Dom}((A+1)^{k/2}), \quad \|u\|_k := \|(A+1)^{k/2}u\|,\ k \ge 0,$$

其中，1 是恒等算子。

我们认为 (H', A') 是对 (H, A) 的某种扰动，并希望放宽假设，使得谱性质虽不完全相同，但仍然接近。

定义 1。（见 *[7]*）设我们有线性算子

$$\begin{aligned} J &: H \longrightarrow H', \qquad & J_1 &: H_1 \longrightarrow H_1' \\ J' &: H' \longrightarrow H, \qquad & J_1' &: H_1' \longrightarrow H_1. \end{aligned}$$

设 $\delta > 0$ 和 $k \ge 1$。如果满足以下条件，我们称 (H, A) 与 (H', A') 是 δ-近的，阶数为 k：

$$\|Jf - J_1 f\|_0 \le \delta \|f\|_1, \tag{3.1}$$
$$|(Jf, u) - (f, J'u)| \le \delta \|f\|_0 \|u\|_0, \tag{3.2}$$
$$\|u - JJ'u\|_0 \le \delta \|u\|_1, \tag{3.3}$$
$$\|Jf\|_0 \le 2\|f\|_0, \ \ \|J'u\|_0 \le 2\|u\|_0, \tag{3.4}$$
$$\|(f - J'Jf)\|_0 \le \delta \|f\|_1, \tag{3.5}$$
$$\|J'u - J_1'u\|_0 \le \delta \|u\|_1 \tag{3.6}$$
$$|a(f, J_1'u) - a'(J_1 f, u)| \le \delta \|f\|_k \|u\|_1, \tag{3.7}$$

对相应空间中的所有 f, u 均成立。这里， a 和 a' 分别表示与 A 和 A'相关联的半双线性型。

我们用 $d_{\mathrm{Haussdorff}}(A, B)$ 表示子集 $A, B \subset \mathbb{R}$ 之间的豪斯多夫距离

$$d_{\mathrm{Haussdorff}}(A, B) := \max\left\{ \sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A) \right\}, \tag{3.8}$$

其中 $d(a, B) := \inf_{b\in B} |a - b|$。我们定义

$$\overline{d}(A, B) := d_{\mathrm{Hausdorff}}\left((A+1)^{-1}, (B+1)^{-1}\right) \tag{3.9}$$

对于 $[0, \infty$ 的闭子集）。对于下面的结果，该结果源自 O. Post 的工作 [7]，我们有如下关于距离 d 的谱收敛定理。

定理 3.1. *[7]* 存在 $\eta(\delta) > 0$，满足 $\eta(\delta) \to 0$，当 $\delta \to 0$ 时，使得

$$\overline{d}(\sigma_\bullet(A), \sigma_\bullet(A')) \le \eta(\delta) \tag{3.10}$$

对于所有由非负算子和希尔伯特空间组成的对 (H, A) 和 (H', A')，只要它们彼此 δ-接近。这里， $\sigma_\bullet(A)$ 表示 A 的整个谱、本质谱或离散谱。此外，离散谱的重数 σ_{disc} 保持不变，即若 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{disc}}(A)$ 的重数为 $\mu > 0$，则存在属于区间 $(\lambda - \eta(\delta)\ \lambda + \eta(\delta))$ 的算子 A' 的 μ 个特征值（不一定彼此不同）。

□

现在我们来证明定理 2.4。

4 定理 2.4 的证明

我们将这一结论的证明分为若干步骤。

步骤 (i). 映射 J, J', J_1, J_1' 的构造。

容易注意到， $H = L^2(\Omega)$ $H' = L^2(\Omega_{K_\varepsilon})$ $A = A' = (i\nabla + A_{\mathrm{magn}})^2$； H_1, H_1' 对应 Sobolev 空间 $\mathcal{H}^1(\Omega)$ 和 $\mathcal{H}^1(\Omega_{K_\varepsilon})$，以及定义域 $\mathrm{Dom}(H_\Omega(A_{\mathrm{magn}}))$。范数 $\|\cdot\|_0$ 对应于 L^2 范数，并且

$$\|u\|_1 = (\|u\|_0^2 + \|i\nabla u + A_{\mathrm{magn}}u\|_0^2)^{1/2}, \quad \|f\|_2 = (\|(i\nabla + A_{\mathrm{magn}})^2 f + f\|_0^2)^{1/2}.$$

我们对所有 $u \in H$ 定义 $Ju = J_1 u = u|_{\Omega_{K_\varepsilon}}$，并对所有 $u \in H'$ 定义 $J'u = u\chi_{\Omega_{K_\varepsilon}}$。

现在我们来构造映射 J_1'： $H_1' \to H_1$。不失一般性，假设定理 2.1 和定理 2.4 中提到的球 $\mathbb{B}_\varepsilon$ 以原点为中心。令 $\epsilon \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$ 为一个待定的数，并令 $\mathbb{B}_\epsilon \supset \mathbb{B}_\varepsilon$ 为一个同样以原点为中心、半径为 ϵ 的球，$\Omega_\epsilon := \Omega \backslash \mathbb{B}_\epsilon$。

我们先为光滑函数构造映射 J_1'。对于任意 $v \in C^\infty(\Omega_{K_\varepsilon})$，定义

$$J_1' v := \begin{cases} v, & \text{on} \quad \Omega_\epsilon, \\ \frac{r}{\epsilon}\tilde{v}(\epsilon, \varphi), & \text{on} \quad \mathbb{B}_\epsilon, \end{cases}$$

其中 $\tilde{v}(r, \varphi) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$。

现在我们来为任意 $u \in H_1'$ 构造映射 $J_1' u$。采用 [4, Thm.2, 5.3.2]，中所述的逼近方法，对于固定的、趋于零的序列 $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$，我们构造序列 $v_{\eta_k} \in C^\infty(\Omega_{K_\varepsilon})$，使其满足

$$\|u - v_{\eta_k}\|_1 < \eta_k \|u\|_1. \tag{4.11}$$

需要指出的是，根据稍后将证明的不等式 (4.18) 和 (4.28)，对于任意光滑函数 v

$$\|J_1' v\|_1^2 = \int_\Omega |i\nabla J_1' v + A_{\mathrm{magn}} J_1' v|^2 \, dx\, dy + \int_\Omega |J_1' v|^2 \, dx\, dy$$
$$\leq 2\int_\Omega |\nabla J_1' v|^2 \, dxdy + 2\||A_{\mathrm{magn}}|\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_\Omega |J_1' v|^2 \, dx\, dy \leq \overline{C}(\varepsilon)\|v\|_1^2,$$

其中 $\overline{C}(\varepsilon)$ 是某个常数。

因此，利用空间 H_1 的稠密性，我们能够定义

$$J_1' u = \lim_{k\to\infty} J_1' v_{\eta_k}. \tag{4.12}$$

步骤 (ii)。映射 J、 J'、 J_1、 J_1' 满足条件 (3.1)-(3.7)。

事实上，估计 (3.1)-(3.4) 在 $\delta = 0$ 下成立。

现在我们证明 (3.5)，即在定理 2.4 所述假设下，当 ε 足够小时，不等式 (3.5) 满足 $\delta = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$。

根据我们的构造，我们有

$$\|f - J'Jf\|_0^2 = \int_\Omega |f - J'f\chi_{\Omega_{K_\varepsilon}}|^2 \, dx\, dy = \int_\Omega |f - f\chi_{\Omega_{K_\varepsilon}}|^2 \, dx\, dy$$
$$= \int_{K_\varepsilon} |f|^2 \, dx\, dy \le \int_{B_\varepsilon} |f|^2 \, dx\, dy. \qquad (4.13)$$

为了继续推进，我们需要使用以下引理（证明见附录），并将其应用于 $\Gamma_\varepsilon = \emptyset$:

引理 4.1. 假设定理 2.1 的条件成立。为避免误解，我们将 B_ε 内部的紧致孔洞记为 Γ_ε。那么，对于任意函数 $u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma_\varepsilon)$，有如下不等式

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma_\varepsilon} |u(x,y)|^2 \, dx\, dy \le C_1 \varepsilon \int_{\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon} (|i\nabla u + A_{\mathrm{magn}} u|^2 + |u|^2) \, dx\, dy,$$

其中， $C_1 > 0$ 是一个常数，取决于 $\mathbb{B}_\epsilon$ 的边界与 Ω 的边界之间的距离以及磁势 A_{magn}。

由引理 4.1 和 (4.13)，我们证明了 (3.5)。

利用 (4.12) 以及 $C^\infty(\Omega_{K_\varepsilon})$ 在 Sobolev 空间 $\mathcal{H}^1(\Omega_{K_\varepsilon})$ 中的完备性，只需对 $u \in C^\infty(\Omega_{K_\varepsilon})$ 证明 (3.6)。

考虑到 $J'u = 0$ 在 K_ε 上以及 $J_1'u = u$ 在 $\Omega \setminus \mathbb{B}_\epsilon$ 上，有

$$\|J'u - J_1'u\|_0^2 = \int_{\Omega_{K_\varepsilon}} |u - J_1'u|^2 \, dx\, dy + \int_{K_\varepsilon} |J_1'u|^2 \, dx\, dy$$
$$= \int_{\mathbb{B}_\epsilon \setminus K_\varepsilon} |u - J_1'u|^2 \, dx\, dy + \int_{K_\varepsilon} |J_1'u|^2 \, dx\, dy$$
$$\le 2 \int_{\mathbb{B}_\epsilon \setminus K_\varepsilon} |u|^2 \, dx\, dy + 2 \int_{\mathbb{B}_\epsilon} |J_1'u|^2 \, dx\, dy + \int_{K_\epsilon} |J_1'u|^2 \, dx\, dy. \qquad (4.14)$$

为了估计 (4.14) 右端的第一个积分，我们对 $\Gamma_\varepsilon = K_\varepsilon$ 应用引理 4.1。

现在来考察 (4.14) 右端的第二项。转换为极坐标后，得到

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |J_1'u|^2 \, dx\, dy = \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} r \left| \frac{r}{\epsilon} \tilde{u}(\epsilon, \varphi) \right|^2 \, dr\, d\varphi$$
$$\le \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} r |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 \, dr\, d\varphi \le \epsilon \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 \, dr\, d\varphi$$
$$= \epsilon^2 \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 \, d\varphi.$$

考虑到 $\epsilon \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 \, d\varphi$ 与曲线积分 $\int_{\partial \mathbb{B}_\epsilon} |u|^2_{\partial \mathbb{B}_\epsilon} \, d\mu$ 相同，其中 $|u|_{\partial \mathbb{B}_\epsilon}$ 是 $|u|$ 在圆 $\partial \mathbb{B}_\epsilon$ 上的迹，上述

界满足

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |J_1' u|^2 \, dx \, dy \le \epsilon \int_{\partial \mathbb{B}_\epsilon} |u|^2_{\partial \mathbb{B}_\epsilon} \, d\mu. \tag{4.15}$$

上述估计所需的适当界由以下迹不等式 [4] 保证：

引理 4.2. 设 $v \in \mathcal{H}^1(\Omega \backslash \mathbb{B})$，其中 $\mathbb{B}$ 是一个球，其中心位于原点，半径为 $\tau > 0$。那么存在一个常数 $C_2 > 0$，它取决于 Ω 的直径以及 $\mathbb{B}$ 的边界与 Ω 的边界之间的距离，使得

$$\int_{\partial \mathbb{B}} |v|^2_{\partial \mathbb{B}} \, d\mu \le C_2 \int_{\Omega \backslash \mathbb{B}} (|\nabla v|^2 + |v|^2) \, dx \, dy.$$

下面证明，对于任意 $v \in \mathcal{H}^1(\omega)$ $\omega \subset \mathbb{R}^2$ 和磁矢势 A，有

$$\int_\omega (|\nabla v|^2 + |v|^2) \, dx \, dy \le C_3(A) \int_\omega (|i\nabla v + Av|^2 + |v|^2) \, dx \, dy, \tag{4.16}$$

其中 $C_3(A)$ 由 (4.17) 给出。

事实上，由于

$$\int_\omega |i\nabla v + Av|^2 \, dx \, dy \ge \frac{1}{2} \int_\omega |\nabla v|^2 \, dx \, dy - 2 \| |A| \|^2_\infty \int_\omega |v|^2 \, dx \, dy$$

then

$$\int_\omega (|\nabla v|^2 + |v|^2) \, dx \, dy \le 2 \int_\omega |i\nabla v + Av|^2 \, dx \, dy + (4 \| |A| \|^2_\infty + 1) \int_\omega |v|^2 \, dx \, dy,$$

这就达到了我们的目的，其中

$$C_3(A) = \max\{2, 4 \| |A| \|^2_\infty + 1\}. \tag{4.17}$$

不等式（4.15）结合引理 4.2、（4.16）以及 $\epsilon \le 2\varepsilon$ 可得

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |J_1' u|^2 \, dx \, dy \le 2 C_2 C_3 \varepsilon \|u\|_1^2, \tag{4.18}$$

其中

$$C_3 = C_3(A_{\text{magn}}). \tag{4.19}$$

由于

$$\int_{K_\varepsilon} |J_1' u|^2 \, dx \, dy \le \int_{B_\epsilon} |J_1' u|^2 \, dx \, dy$$

then

$$\int_{K_\varepsilon} |J_1' u|^2 \, dx \, dy \le 2 C_2 C_3 \varepsilon \|u\|_1^2.$$

将上述不等式与（4.18）和引理 4.1 结合起来，可得（4.14）右端的估计如下

$$\|J'u - J_1'u\|_0^2 \le 2C_2C_3\varepsilon\|u\|_1^2$$

由此可证得 (3.6)，其中 $\delta = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$。

现在我们给出估计 (3.7) 的证明，即在定理 2.4 所述假设下，当 ε 足够小时，不等式 (3.7) 对 $k = 2$ 和 $\delta = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/6})$ 成立。

我们有

$$\begin{aligned}
&|a(f, J_1'u) - a'(J_1f, u)| \\
&= \left| \int_{\Omega} (i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f)\overline{(i\nabla(J_1'u) + A_{\mathrm{magn}} J_1'u)}\, dx\, dy - \int_{\Omega_{K_\varepsilon}} (i\nabla(J_1f) + A_{\mathrm{magn}} J_1 f)\overline{(i\nabla u + A_{\mathrm{magn}} u)}\, dx\, dy \right| \\
&\quad = \left| \int_{\Omega_{\mathbb{B}_\epsilon}} (i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f)\overline{(i\nabla u + A_{\mathrm{magn}} u)}\, dx\, dy + \int_{\mathbb{B}_\epsilon} (i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f)\overline{(i\nabla(J_1'u) + A_{\mathrm{magn}} J_1'u)}\, dx\, dy \right. \\
&\qquad \left. - \int_{\Omega_{\mathbb{B}_\epsilon}} (i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f)\overline{(i\nabla u + A_{\mathrm{magn}} u)}\, dx\, dy - \int_{\mathbb{B}_\epsilon \setminus K_\varepsilon} (i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f)\overline{(i\nabla u + A_{\mathrm{magn}} u)}\, dx\, dy \right| \\
&\quad = \left| \int_{\mathbb{B}_\epsilon} (i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f)\overline{(i\nabla(J_1'u) + A_{\mathrm{magn}} J_1'u)}\, dx\, dy - \int_{\mathbb{B}_\epsilon \setminus K_\varepsilon} (i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f)\overline{(i\nabla u + A_{\mathrm{magn}} u)}\, dx\, dy \right| \\
&\le \left| \int_{\mathbb{B}_\epsilon} (i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f)\overline{(i\nabla(J_1'u) + A_{\mathrm{magn}} J_1'u)}\, dx\, dy \right| + \left| \int_{\mathbb{B}_\epsilon \setminus K_\varepsilon} (i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f)\overline{(i\nabla u + A_{\mathrm{magn}} u)}\, dx\, dy \right| \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

我们来估计 (4.20) 的各项。从第一项开始，可得

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{B}_\epsilon} (i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f)\overline{(i\nabla(J_1'u) + A_{\mathrm{magn}} J_1'u)}\, dx\, dy \right| \\
&\le \left(\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f|^2\, dx\, dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |i\nabla(J_1'u) + A_{\mathrm{magn}} J_1'u|^2\, dx\, dy \right)^{1/2} \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

处理上述不等式右端的第一项，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f|^2\, dx\, dy &\le 2\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |\nabla f|^2\, dx\, dy + 2\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |A_{\mathrm{magn}}|^2 |f|^2\, dx\, dy \\
&\le 2\int_{B_\epsilon} |\nabla f|^2\, dx\, dy + 2\||A_{\mathrm{magn}}|\|_\infty^2 \int_{B_\epsilon} |f|^2\, dx\, dy. \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

(4.22) 中的第一项和第二项可通过以下引理进行估计（证明见附录）：

引理 4.3. 对任意函数 g ∈定义域($H_\Omega(A_{\mathrm{magn}})$)，以下估计成立

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |\nabla g|^2 \, dx\, dy \le C_5 \epsilon^{4/3} \int_\Omega |(i\nabla + A_{\mathrm{magn}})^2 g + g|^2 \, dx\, dy,$$

其中常数 C_5 取决于 Ω 和磁势 A_{magn}。

引理 4.4. 对任意 $g \in$ 定义域($H_\Omega(A_{\mathrm{magn}})$)，以下不等式成立

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |g|^2 \, dx\, dy \le C_6 \epsilon^{4/3} \int_\Omega |(i\nabla + A_{\mathrm{magn}})^2 g + g|^2 \, dx\, dy,$$

其中常数 C_6 取决于 Ω 和磁势 A_{magn}。

结合 $\epsilon \le 2\varepsilon$ 这一事实，可将 (4.22) 的右端估计如下

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f|^2 \, dx\, dy \le 2^{4/3} C_7 \varepsilon^{4/3} \int_\Omega |(i\nabla + A_{\mathrm{magn}})^2 f + f|^2 \, dx\, dy = 2^{4/3} C_7 \varepsilon^{4/3} \|f\|_2^2 \tag{4.23}$$

其中 $C_7 = 2C_5 + 2\||A_{\mathrm{magn}}|\|_\infty^2 C_6$。

接下来 f继续证明 (4.21) 的一个上界，我们需要估计积分 $\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |i\nabla(J_1' u) + A_{\mathrm{magn}} J_1' u|^2 \, dx\, dy$。有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |i\nabla(J_1' u) + A_{\mathrm{magn}} J_1' u|^2 \, dx\, dy &\le 2\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |\nabla(J_1' u)|^2 \, dx\, dy + 2\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |A_{\mathrm{magn}}|^2 |J_1' u|^2 \, dx\, dy \\ &\le 2\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |\nabla(J_1' u)|^2 \, dx\, dy + 2\||A_{\mathrm{magn}}|\|_\infty^2 \int_{\mathbb{B}_\epsilon} |J_1' u|^2 \, dx\, dy\end{aligned} \tag{4.24}$$

将 (4.24) 右端的第一个积分转换为极坐标后，得到

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |\nabla J_1' u|^2 \, dx\, dy = \int_{\mathbb{B}_\epsilon} \left(\left| \frac{\partial (J_1' u)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial (J_1' u)}{\partial y} \right|^2 \right) dx\, dy \\ &= \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} r \left| \frac{1}{\epsilon} \tilde{u}(\epsilon, \varphi) \, \cos\varphi - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}(\epsilon, \varphi) \, \sin\varphi \right|^2 dr\, d\varphi \\ &+ \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} r \left| \frac{1}{\epsilon} \tilde{u}(\epsilon, \varphi) \, \sin\varphi + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}(\epsilon, \varphi) \, \cos\varphi \right|^2 dr\, d\varphi \\ &\le \frac{4}{\epsilon} \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} \left(|\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}(\epsilon, \varphi) \right|^2 \right) dr\, d\varphi \\ &= 4\int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 d\varphi + 4\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}(\epsilon, \varphi) \right|^2 d\varphi.\end{aligned} \tag{4.25}$$

如同式 (3.6) 的证明中所指出的，

$$4\int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\epsilon, \varphi)|^2 \, d\varphi = \frac{4}{\epsilon} \int_{\partial \mathbb{B}_\epsilon} |u|^2_{\partial \mathbb{B}_\epsilon} \, d\mu,$$

利用引理 4.2 和式 (4.16)，可作如下估计：

$$4\int_0^{2\pi} |\tilde{u}(\epsilon,\varphi)|^2\,d\varphi \le \frac{4}{\epsilon} C_4 C_3 \|u\|_1^2. \tag{4.26}$$

为得到 4.25 中第二项的上界，我们使用以下辅助引理（证明见附录）：

引理 4.5. 设 $\mathbb{B}_{2\varepsilon}$ 和 $\mathbb{B}_\varepsilon$ 是以原点为中心、半径分别为 ε 和 2ε 的球。设 $g \in \mathcal{H}^1(\mathbb{B}_{2\varepsilon} \setminus \mathbb{B}_\varepsilon)$。那么存在 $\tau \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$，使得

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi}(\tau,\varphi)\right|^2 d\varphi \le 4\int_{\mathbb{B}_{2\varepsilon}\setminus\mathbb{B}_\varepsilon} (|\nabla g|^2 + |g|^2)\,dx\,dy,$$

其中 $\tilde{g}(r,\varphi) := g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$。

现在我们可以选取数 ϵ。对 $g = u$ 应用引理 4.5。若上述引理中提到的 τ 属于区间 $(\varepsilon, 3\varepsilon/2]$，则我们将 ϵ 取为 $(\varepsilon, 3\varepsilon/2]$ 中所有此类数的上确界。反之，若 $\tau \in (3\varepsilon/2, 2\varepsilon)$，则令 ϵ 为此类数的下确界。由于 u 是光滑函数，因此不等式 (4.5) 在 $\tau = \epsilon$ 下成立。

将此结果与 (4.16) 结合可得

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}(\epsilon,\varphi)\right|^2 d\varphi \le 4C_3\|u\|_1^2. \tag{4.27}$$

因此，由 (4.25)、(4.26) 和 (4.27) 可得

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |\nabla J_1' u|^2\,dx\,dy \le \frac{4}{\epsilon}(C_4C_3 + 16C_3)\|u\|_1^2. \tag{4.28}$$

根据 (4.18)、(4.24)、(4.28) 以及 $\epsilon \ge \varepsilon/2$ 这一事实，我们得到

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |i\nabla(J_1'u) + A_{\mathrm{magn}} J_1' u|^2\,dx\,dy \le \left(\frac{8}{\epsilon}(C_4C_3+16C_3) + 4\||A_{\mathrm{magn}}|\|_\infty^2 C_4C_3\varepsilon\right)\|u\|_1^2. \tag{4.29}$$

最后，将 (4.23) 和上述估计代入不等式 (4.21)，可得

$$\left|\int_{\mathbb{B}_\epsilon} (i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f)\overline{(i\nabla(J_1'u) + A_{\mathrm{magn}} J_1' u)}\,dx\,dy\right| \le 2^{13/6}(C_7C_3(C_4{+}16))^{1/2}\varepsilon^{1/6}\|f\|_2\|u\|_1.$$

现在考虑 (4.20) 中的第二项。根据 (4.23)，有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{B}_\epsilon\setminus K_\varepsilon} (i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f)\overline{(i\nabla u + A_{\mathrm{magn}} u)}\,dx\,dy\right| \\
&\le \left(\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |i\nabla f + A_{\mathrm{magn}} f|^2 dx dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{B}_\epsilon\setminus K_\varepsilon} |i\nabla u + A_{\mathrm{magn}} u|^2\,dx\,dy\right)^{1/2} \\
&\le 2^{2/3}(C_5)^{1/2}\varepsilon^{2/3}\|f\|_2\|u\|_1.
\end{aligned}$$

因此，当 ε 足够小时，不等式 (3.7) 的右端满足

$$\text{r.h.s.}(3.7) = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1/6}\right) \|f\|_2 \|u\|_1,$$

至此，证明结束。 □

5 附录

本节给出引理 4.1、4.3–4.5 的证明。由于我们的证明思路只是对 [1, 附录], 中证明的略作修改，因此对于相同的部分，我们将引用 [1] 。

5.1 引理 4.1 的证明

我们将使用以下结果：

引理 5.1. /证明将在本节末尾给出/ 设 $\Omega_{\Gamma_\varepsilon}$ 是满足性质*的一个开域。那么，对于任意 $u \in \mathcal{H}^1(\Omega_{\Gamma_\varepsilon})$，以及几乎任意的 $(x_0, y_0) \in \Omega_{\Gamma_\varepsilon}$，以下结论成立：

$$|u(x_0,y_0)| \le C_8 \left(\int_{l(x_0)\setminus\Gamma_\varepsilon} \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,z)\right|^2 dz + \int_{l(x_0)\setminus\Gamma_\varepsilon} |u(x_0,z)|^2\, dz \right)^{1/2}, \quad (5.1)$$
$$\textit{if} \quad (x_0,y_0) \quad \textit{satisfies first condition of } \boldsymbol{property}^*$$

$$|u(x_0,y_0)| \le C_8 \left(\int_{h(y_0)\setminus\Gamma_\varepsilon} \left|\frac{\partial u}{\partial z}(z,y_0)\right|^2 + \int_{h(y_0)\setminus\Gamma_\varepsilon} |u(z,y_0)|^2\, dz \right)^{1/2}, \quad (5.2)$$
$$\textit{if} \quad (x_0,y_0) \quad \textit{satisfies second condition of } \boldsymbol{property}^*,$$

其中， $C_8 > 0$ 是一个常数，取决于 Ω 的直径以及点 (x_0, y_0) 到 Ω 边界的距离。

鉴于上述关于任意 $(x, y) \in \mathbb{B}_\epsilon \setminus \Gamma_\varepsilon$ 的结果

$$\begin{aligned} |u(x,y)|^2 \le{}& C_8^2 \left(\int_{l(x)\setminus\Gamma_\varepsilon} \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,z)\right|^2 dz + \int_{l(x)\setminus\Gamma_\varepsilon} |u(x,z)|^2\, dz \right) \\ &+ C_8^2 \left(\int_{h(y)\setminus\Gamma_\varepsilon} \left|\frac{\partial u}{\partial z}(z,y)\right|^2 dz + \int_{h(y)\setminus\Gamma_\varepsilon} |u(z,y)|^2\, dz \right). \end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_\epsilon\setminus\Gamma_\varepsilon}|u(x,y)|^2\,dx\,dy &\le C_8^2\int_{\mathbb{B}_\epsilon\setminus\Gamma_\varepsilon}\int_{l(x)\setminus\Gamma_\varepsilon}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial z}(x,z)\right|^2+|u(x,z)|^2\right)dz\,dx\,dy\\ &\quad+C_8^2\int_{\mathbb{B}_\epsilon\setminus\Gamma_\varepsilon}\int_{h(y)\setminus\Gamma_\varepsilon}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial z}(z,y)\right|^2+|u(z,y)|^2\right)dz\,dx\,dy\\ &\le C_8^2\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\int_{\{y:(x,y)\in\mathbb{B}_\epsilon\setminus\Gamma_\varepsilon\}}\int_{l(x)\setminus\Gamma_\varepsilon}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial z}(x,z)\right|^2+|u(x,z)|^2\right)dz\,dx\,dy\\ &\quad+C_8^2\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\int_{\{x:(x,y)\in\mathbb{B}_\epsilon\setminus\Gamma_\varepsilon\}}\int_{h(y)\setminus\Gamma_\varepsilon}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial z}(z,y)\right|^2+|u(z,y)|^2\right)dz\,dy\,dx\\ &\le 2C_8^2\epsilon\int_{\Omega\setminus\Gamma_\varepsilon}(|\nabla u|^2+2|u|^2)\,dx\,dy\le 4C_8^2\epsilon\int_{\Omega\setminus\Gamma_\varepsilon}(|\nabla u|^2+|u|^2)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

结合 (4.16) 以及 $\epsilon\le 2\varepsilon$ 这一事实，即可证明该引理。

□

5.2 引理 4.3 的证明

为继续证明，我们需要以下辅助材料 [6, 引理 4.9]:

引理 5.2. 设 $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ 为一个凸集，并设 G 和 Q 为 Π 中的任意可测集，满足 $\mu(G)\neq 0$。那么，对所有 $v\in\mathcal{H}^1(\Pi)$，以下不等式成立:

$$\begin{aligned}&\int_Q|v|^2\,dx\,dy \qquad (5.1)\\ &\le\frac{2\mu(Q)}{\mu(G)}\int_G|v|^2\,dx\,dy+\frac{C(n)(d(\Pi))^{n+1}(\mu(Q))^{1/n}}{\mu(G)}\int_\Pi|\nabla v|^2\,dx\,dy,\end{aligned}$$

其中， $d(\Pi)$是 Π的参数， μ 是 $\mathbb{R}^n$上的勒贝格测度，而常数 $C(n)$仅取决于 $\mathbb{R}^n$的维数。

设 $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ 为凸集， G 和 Q 为 Π 中的任意可测集，且 $\mu(G)\neq 0$。对 $Q=\mathbb{B}_\epsilon$ 和 $G=\Pi=G_\epsilon$ 应用引理 (5.2)，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_\epsilon}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^2dx\,dy\le\frac{2\mu(\mathbb{B}_\epsilon)}{\mu(G_\epsilon)}\int_{G_\epsilon}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^2dx\,dy\\ &+\frac{C(2)(d(G_\epsilon))^3(\mu(\mathbb{B}_\epsilon))^{1/2}}{\mu(G_\epsilon)}\int_{G_\epsilon}\left|\nabla\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right|^2dx\,dy\\ &=\frac{2\mu(\mathbb{B}_\epsilon)}{\mu(G_\epsilon)}\int_{G_\epsilon}\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^2dx\,dy+\frac{C(2)(d(G_\epsilon))^3(\mu(\mathbb{B}_\epsilon))^{1/2}}{\mu(G_\epsilon)}\int_{G_\epsilon}\left(\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right|^2\right)dx\,dy\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}_\epsilon}\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|^2 dx\,dy \le \frac{2\mu(\mathbb{B}_\epsilon)}{\mu(G_\epsilon)}\int_{G_\epsilon}\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|^2 dx\,dy\\
&+\frac{C(2)(d(G_\epsilon))^3(\mu(\mathbb{B}_\epsilon))^{1/2}}{\mu(G_\epsilon)}\int_{G_\epsilon}\left|\nabla\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right|^2 dx\,dy\\
&=\frac{2\mu(\mathbb{B}_\epsilon)}{\mu(G_\epsilon)}\int_{G_\epsilon}\left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|^2 dx\,dy+\frac{C(2)(d(G_\epsilon))^3(\mu(\mathbb{B}_\epsilon))^{1/2}}{\mu(G_\epsilon)}\int_{G_\epsilon}\left(\left|\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right|^2\right)dx\,dy.
\end{aligned}$$

结合上述不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}_\epsilon}|\nabla g|^2\,dx\,dy \le \frac{2\mu(\mathbb{B}_\epsilon)}{\mu(G_\epsilon)}\int_{G_\epsilon}|\nabla g|^2\,dx\,dy\\
&+\frac{C(2)(d(G_\epsilon))^3(\mu(\mathbb{B}_\epsilon))^{1/2}}{\mu(G_\epsilon)}\int_{G_\epsilon}\left(\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|^2+2\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|^2\right)dx\,dy\\
&\le\frac{(\mu(\mathbb{B}_\epsilon))^{1/2}}{\mu(G_\epsilon)}\left(2(\mu(\mathbb{B}_\epsilon))^{1/2}+C(2)(d(G_\epsilon))^3\right)\|g\|^2_{\mathcal{H}^2(G_\epsilon)}\\
&=\frac{\sqrt{\pi}\epsilon}{\mu(G_\epsilon)}\left(2\sqrt{\pi}\epsilon+C(2)(d(G_\epsilon))^3\right)\|g\|^2_{\mathcal{H}^2(G_\epsilon)}.
\end{aligned}$$

令我们选取 $G_\epsilon=\{r:\ 0\le r\le\epsilon^{1-\alpha}\}$，其中一些 $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 稍后再确定。容易看出 $\mathbb{B}_\epsilon\subset G_\epsilon$。于是，上述不等式变为

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_\epsilon}|\nabla g|^2\,dx\,dy &\le 2\epsilon\left(\epsilon^{2\alpha-1}+\frac{4C(2)}{\sqrt{\pi}}\epsilon^{1-\alpha}\right)\|g\|^2_{\mathcal{H}^2(G_\epsilon)}\\
&\le 2\max\left\{1,\frac{4C(2)}{\sqrt{\pi}}\right\}\epsilon\left(\epsilon^{2\alpha-1}+\epsilon^{1-\alpha}\right)\|g\|^2_{\mathcal{H}^2(G_\epsilon)}.
\end{aligned}\tag{5.2}$$

我们考察区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上的函数 $F(\alpha):=\epsilon^{2\alpha}+\epsilon^{2-\alpha}$。它在 $\alpha_0=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\ln 2\ln\epsilon$ 处取得最小值，且取值为 $F(\alpha_0)=\epsilon^{4/3}\left(\frac{1}{4^{1/3}}+2^{1/3}\right)$。现在我们在不等式 (5.2) 中取 $\alpha=\alpha_0$。于是

$$\int_{\mathbb{B}_\epsilon}|\nabla g|^2\,dx\,dy\le 2\epsilon^{4/3}\left(\frac{1}{4^{1/3}}+2^{1/3}\right)\max\left\{1,\frac{4C(2)}{\sqrt{\pi}}\right\}\|g\|^2_{\mathcal{H}^2(G_\epsilon)}.\tag{5.3}$$

我们应用内部正则性定理 [2]：

定理 5.3.（内部正则性定理。）假设 $h\in\mathcal{H}^1(\Omega)$ 是一个弱解，满足 $Lh=w$，其中 L 是 Ω 上具有 C^1 光滑系数的椭圆算子。假设 $w\in L^2(\Omega)$。那么 $h\in\mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，并且对于每个 $\Omega_0\subset\Omega$，都存在一个常数 $c=c(\Omega_0)$，它与 h 和 w 无关，使得：

$$\|h\|_{\mathcal{H}^2(\Omega_0)}\le c\left(\|h\|_{L^2(\Omega)}+\|w\|_{L^2(\Omega)}\right).\tag{5.4}$$

结合磁势 A_{magn} 在 G_ϵ 上二阶连续可微这一事实，并注意到 $\epsilon \le 2\varepsilon$ 通过 $\|g\|_2$ 对 (5.2) 右端进行估计如下

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |\nabla g|^2 \, dx\, dy \\ &\le 2^{10/3}\varepsilon^{4/3}c^2\left(\frac{1}{4^{1/3}}+2^{1/3}\right)\max\left\{1,\frac{4C(2)}{\sqrt{\pi}}\right\}\int_\Omega \left(|(i\nabla + A_{\mathrm{magn}})^2 g|^2 + |g|^2\right)\, dx\, dy.\end{aligned}$$

上述不等式结合以下引理即可完成证明:

引理 5.4. *[证明将在本节末尾给出]* 对于任意 $z \in$定义域$(H_\Omega(A_{\mathrm{magn}}))$，以下估计成立

$$\int_\Omega |(i\nabla + A_{\mathrm{magn}})^2 z + z|^2 \, dx\, dy \ge \int_\Omega (|(i\nabla + A_{\mathrm{magn}})^2 z|^2 + |z|^2)\, dx\, dy.$$

□

5.3 引理 4.4 的证明

采用与上一小节相同的记号，利用引理 5.2 并重复类似的计算，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_\epsilon} |g|^2 \, dx\, dy &\le 2\epsilon^{4/3}\left(\frac{1}{4^{1/3}}+2^{1/3}\right)\max\left\{1,\frac{4C(2)}{\sqrt{\pi}}\right\}\|g\|^2_{\mathcal{H}^1(G_\epsilon)} \\ &\le 2\epsilon^{4/3}\left(\frac{1}{4^{1/3}}+2^{1/3}\right)\max\left\{1,\frac{4C(2)}{\sqrt{\pi}}\right\}\|g\|^2_{\mathcal{H}^2(G_\epsilon)}. \qquad (5.1)\end{aligned}$$

我们以与上一小节类似的方式完成证明。

□

5.4 引理 4.5 的证明

我们首先证明以下辅助结论：存在 $\tau \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$ 使得

$$\int_0^{2\pi} \left|\nabla g(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi)\right|^2 \, d\varphi \le \frac{1}{\varepsilon^2}\|g\|_1^2. \qquad (5.2)$$

我们反设：对于任意 $r \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$，都有

$$\int_0^{2\pi} \left|\nabla g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\right|^2 \, d\varphi > \frac{1}{\varepsilon^2}\|g\|_1^2.$$

在积分 $\int_{\mathbb{B}_{2\varepsilon}\setminus\mathbb{B}_\varepsilon} |\nabla g|^2 \, dx\, dy$ 中改用极坐标，并利用上述界，我们得到

$$\int_{\mathbb{B}_{2\varepsilon}\setminus\mathbb{B}_\varepsilon} |\nabla g|^2 \, dx\, dy = \int_\varepsilon^{2\varepsilon}\int_0^{2\pi} r\left|\nabla g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\right|^2 \, d\varphi\, dr > \|g\|_1^2.$$

这与上述不等式左侧不超过 $\|g\|_1^2$这一事实相矛盾。因此，至少存在一个数 $\tau \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$，使得

$$\int_0^{2\pi} |\nabla g(\tau\cos\varphi, \tau\sin\varphi)|^2 \, d\varphi \le \frac{1}{\varepsilon^2}\|g\|_1^2. \tag{5.3}$$

鉴于函数 $\tilde{g}(r,\varphi) = g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ 的导数表示式

$$\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \varphi}(\tau,\varphi) = -\tau\frac{\partial g}{\partial x}(\tau\cos\varphi,\tau\sin\varphi)\sin\varphi + \tau\frac{\partial g}{\partial y}(\tau\cos\varphi,\tau\sin\varphi)\cos\varphi$$

以及柯西不等式，我们得出

$$\left|\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial \varphi}(\tau,\varphi)\right| \le 2\varepsilon\left|\nabla g(\tau\cos\varphi,\tau\sin\varphi)\right|.$$

因此，利用 (5.3)，我们得到

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial \tilde{g}}{\partial\varphi}(\tau,\varphi)\right|^2 d\varphi \le 4\varepsilon^2\int_0^{2\pi}\left|\nabla g(\tau\cos\varphi,\tau\sin\varphi)\right|^2 d\varphi \le 4\|g\|_1^2,$$

至此，证明完成。 □

5.5 引理5.1的证明

设 $(x_0,y_0) \in \Omega_{\Gamma_\varepsilon}$。假设性质*的第一个条件成立。设 $y_1(x_0)$ 为 $l(x_0)$ 与 Ω 的边界的交点。不失一般性，设 $y_1(x_0) < y_0$，且区间 $(y_1(x_0), y_0)$ 不含来自 Γ_ε 的点。容易验证，存在 $y_2(x_0) \in (y_1(x_0), y_0)$，使得

$$|u(x_0,y_0)| \le \frac{1}{\sqrt{y_0 - y_1(x_0)}}\sqrt{\int_{y_1(x_0)}^{y_0}|u(x_0,z)|^2\,dz}.$$

因此

$$\begin{aligned}
|u(x_0,y_0)|^2 &= \left|u(x_0,y_2(x_0)) + \int_{y_2(x_0)}^{y_0}\frac{\partial u}{\partial z}(x_0,z)\,dz\right|^2 \\
&\le 2|u(x_0,y_2(x_0))|^2 + 2(y_0 - y_2(x_0))\int_{y_2(x)}^{y}\left|\frac{\partial u}{\partial z}(x,z)\right|^2 dy \\
&\le \frac{2}{y_0 - y_1(x_0)}\int_{y_1(x_0)}^{y_0}|u(x_0,z)|^2\,dz + 2(y_0 - y_2(x_0))\int_{y_2(x_0)}^{y_0}\left|\frac{\partial u}{\partial z}(x_0,z)\right|^2 dz \\
&\le \frac{2}{\mathrm{dist}((x_0,y_0),\partial\Omega)}\int_{y_1(x_0)}^{y_0}|u(x_0,z)|^2\,dz + 2\mathrm{diam}(\Omega)\int_{y_1(x_0)}^{y_0}\left|\frac{\partial u}{\partial z}(x_0,z)\right|^2 dz \\
&\le \frac{2}{\mathrm{dist}((x_0,y_0),\partial\Omega)}\int_{l(x_0)\setminus\Gamma_\varepsilon}|u(x_0,z)|^2\,dz + 2\mathrm{diam}(\Omega)\int_{l(x_0)\setminus\Gamma_\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial z}(x_0,z)\right|^2 dz,
\end{aligned}$$

其中 diam(Ω) 是 Ω 的直径，而 dist((x0, y0) ∂Ω) 是 (x0, y0) 与 Ω 边界之间的距离。这就证明了 (5.1)，其中

$$C_8 = \left(\max \left\{ \frac{2}{\operatorname{dist}((x_0, y_0), \partial\Omega)}, 2\operatorname{diam}(\Omega) \right\} \right)^{/2}.$$

当（x_0, y_0）满足性质* 的第二个条件时，也可以用类似的方法进行研究。重复相同的思路，即可得到（5.2）成立。 □

5.6 引理5.4的证明

不难验证

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u + u|^2 \, dx\, dy \\ &= \int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u|^2 \, dx\, dy + 2\int_\Omega |i\nabla u + A_{\text{magn}} u|^2 \, dx\, dy + \int_\Omega |u|^2 \, dx\, dy \\ &\geq \int_\Omega |u|^2 \, dx\, dy. \end{aligned} \tag{5.4}$$

我们分两种情况讨论：

$$\int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u|^2 \, dx\, dy \geq 4\int_\Omega |u|^2 \, dx\, dy, \tag{5.5}$$

$$\int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u|^2 \, dx\, dy < 4\int_\Omega |u|^2 \, dx\, dy. \tag{5.6}$$

从第一种情况出发，并利用（5.4），可得

$$\begin{aligned} &\sqrt{\int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u + u|^2 \, dx\, dy} \geq \sqrt{\int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u|^2 \, dx\, dy} - \sqrt{\int_\Omega |u|^2 \, dx\, dy} \\ &\geq \frac{1}{2}\sqrt{\int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u|^2 \, dx\, dy} \geq \frac{1}{4}\sqrt{\int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u|^2 \, dx\, dy} + \frac{1}{2}\sqrt{\int_\Omega |u|^2 \, dx\, dy} \\ &\geq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u|^2 \, dx\, dy} + \sqrt{\int_\Omega |u|^2 \, dx\, dy} \right). \end{aligned}$$

因此，我们得到如下界

$$\int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u + u|^2 \, dx\, dy \geq \frac{1}{16}\left(\int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u|^2 \, dx\, dy + \int_\Omega |u|^2 \, dx\, dy \right). \tag{5.7}$$

现在考虑情形（5.6）。由不等式（5.4）可得

$$\begin{aligned} \int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u + u|^2 \, dx\, dy &\geq \int_\Omega |u|^2 \, dx\, dy \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2 \, dx\, dy + \frac{1}{8}\int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u|^2 \, dx\, dy \\ &\geq \frac{1}{8}\left(\int_\Omega |(i\nabla + A_{\text{magn}})^2 u|^2 \, dx\, dy + \int_\Omega |u|^2 \, dx\, dy \right). \end{aligned}$$

结合上述估计与（5.7），引理得证。

□

资助

D.B. 和 B.S. 的研究得到了捷克-波兰项目 BPI/PST/2021/1/00031 的支持。此外，D.B. 感谢捷克科学基金会（GACR）通过项目 21-07129S 提供的资助。

参考文献

[1] D. Barseghyan、B. Schneider 和 L.H. Hai，《受扰动区域中的诺伊曼拉普拉斯算子》，地中海数学杂志，2022，19(126)，1–17。[2]L. Beck，《椭圆正则性理论》，施普林格国际出版公司，瑞士，2016。[3] D.I. Borisov、P. Exner，《通过几何扰动逼近二维区域中的点相互作用》，数学科学通报（2022），2250003。[4] L. C. Evans，《偏微分方程》，美国数学会，2010。[5] P. Grisvard，《非光滑区域中的椭圆问题》，皮特曼，波士顿，1985。[6] V.A. Marchenko、E.Ya. Khruslov，《偏微分方程的均匀化》，数学物理进展，第46卷，比克豪泽，波士顿，2006。[7] O. Post，《准一维空间的谱收敛》，亨利·庞加莱年刊，7（2006），933–973。[8] D. I. Borisov、A. I. Mukhametrakhimova，《带小孔多维区域中椭圆算子的范数预解式收敛》，《数学科学杂志》，2018，第232卷，第3期，283–298。[9] A. Colette、O. Post，《剧烈扰动流形：范数预解式收敛与谱收敛》，谱理论杂志，第11卷，第1期，2021，229–279。

[10] D. Saint-James、G. Sarma 和 E. J. Thomas。《II型超导》。培格曼，牛津，1969 年。[11] B. Schweizer，《小型亥姆霍兹共振器的低频谱》，《英国皇家学会会刊 A：数学、物理与工程科学》：20140339，2015 年。

[12] S. Fournais、B. Helffer，关于最低磁性 Neumann 特征值的不等式，《数学物理快报》109(9)，1683–1700（2019）。