arXiv:2301.09182v1 [math.RT] 22 Jan 2023

端同态代数的比较

KAZUMA OHARA

Abstract. 设 F 是一个非阿基米德局部域， G 是定义在 F 上的连通约化群。对于 $G(F)$的光滑复表示范畴中的一个 Bernstein 块，我们有两种投射生成元：类型 (K,ρ)的紧诱导表示 $\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)$，以及将 Π^M 抛物诱导得到的表示 $I_P^G(\Pi^M)$，其中 Π^M 是 G的 Levi 子群 M 对应的 Bernstein 块的一个投射生成元。本文构造这两种投射生成元之间的显式同构。此外，我们比较了 [Mor93] 中零深度类型 (K,ρ)的自同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$ 的描述，与 [Sol22], 中自同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G(\Pi^M)\right)$ 的描述；这两种描述均以仿射赫克代数的形式给出。

Contents

1. 引言 1 致谢 4 2. 记号与假设 4 3. 一个显式同构 5 4. Hecke 代数嵌入 10 5. 零深度类型的情形 18 6. Solleveld 的结果回顾 25 7. 主要结果陈述 34 8. 主要定理的一些引理 48 9. Morris 与 Solleveld 的自同态代数比较：极大情形 54 10. Morris 与 Solleveld 的自同态代数比较：一般情形 58 附录 A. 简单仿射根集的子集 74 附录 B. Iwahori-Hecke 代数与仿射 Hecke 代数 78 附录 C. 仿射 Hecke 代数的一个对合 82 附录 D. 类型为 $\widetilde{A_1}$ 83 的仿射 Hecke 代数之间的同态目录 91 参考文献 93

1. Introduction

设 F 是一个非阿基米德局部域， G 是定义在 F 上的连通约化群。正如 [Ber84], 所说明的， $G(F)$ 的光滑复表示范畴 $\mathcal{R}(G(F))$ 分解为若干全子范畴 $\mathcal{R}^{[M,\sigma]_G}(G(F))$ 的乘积 $\prod_{[M,\sigma]_G}\mathcal{R}^{[M,\sigma]_G}(G(F))$，这些子范畴称为 Bernstein 块。Bernstein 块由尖点对的惯性等价类 $[M,\sigma]_G$ 参数化；尖点对由 G 的 Levi 子群 M 以及 $M(F)$ 的不可约超尖点表示 σ 组成。

研究与尖点对惯性等价类 $\mathfrak{s}$ 相关联的块 $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}}(G(F))$ 的方法之一，是运用类型理论。设 $\mathfrak{S}$ 是尖点对惯性等价类的有限集。若 (K,ρ) 由 $G(F)$ 的紧开子群 K 及其不可约光滑表示 (ρ,V_ρ) 组成，则称其为一个 $\mathfrak{S}$-类型；其满子范畴

$$\mathcal{R}^{\mathfrak{S}}(G(F))=\prod_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{S}}\mathcal{R}^{\mathfrak{s}}(G(F))$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 22E50。

恰好是 $\mathcal{R}(G(F))$ 的满子范畴，由那些由其 ρ-等型分量生成的光滑表示组成。在这种情况下，根据 BK98 定理 4.3]，$\mathcal{R}^{\mathfrak{S}}(G(F))$ 等价于紧诱导表示 $\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\Big)$ 的端同态环 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right.$ 的右模范畴。如果我们为尖点对的惯性等价类 $\mathfrak{s}$ 找到一个 $\{\mathfrak{s}\}$-类型 (K,ρ)，便可以利用端同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}^{G(F)}{}_K(\rho)\right)$ 来研究块 $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}}(G(F))$。若一对 (K,ρ) 是尖点对惯性等价类有限集 $\mathfrak{S}$ 中某个 $\mathfrak{S}$- 类型，就称 (K,ρ) 是 G 中的一个类型。人们已构造出多种类型，例如，GL_n 的 [BK 93] 、经典群的 [Ste08、MS14] ，以及分裂群主系列的 [Roc98] 。

在 [MP94] 和 [MP96], 中，Moy 和 Prasad 定义了类型深度的概念，并构造了称为零深度类型的类型。对于一个零深度类型 (K,ρ)，Morris 证明端同态环 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$ 同构于一个由仿射赫克代数 $\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}}$ 扩张而成的代数，该扩张由扭曲群代数 [给出，见 Mor93，定理 7. 12]。我们注意到， [Mor93] 中考察的类型 (K,ρ) 不一定是单元素集 $\mathfrak{S}=\{\mathfrak{s}\}$ 对应的 $\mathfrak{S}$-类型。

另一方面，研究一个块还有另一种方法。令 M 为 G 的 Levi 子群，令 σ 为 $M(F)$ 的一个不可约超尖点表示。我们固定 G 的一个抛物子群 P，其 Levi 因子为 M，幺幂根基为 U。于是，与 G 中一对 (M,σ) 的惯性等价类 $\mathfrak{s}$ 相关联的 Bernstein 块 $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}}(G(F))$ 可按如下方式研究。令 σ_1 为 $\sigma\restriction_{M^1}$ 的一个不可约子表示，其中 M^1 表示 $M(F)$ 的非分歧特征之核的交集。于是，根据 [Roc09，定理 1.8.1.1],，紧诱导表示 $\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)$ 的抛物诱导表示 $I_P^G\left(\mathrm{ind}^{M(F)}{}_{M^1}(\sigma_1)\right)$ 是 $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}}(G(F))$ 的一个原生成元。因此，根据 [Roc09，定理 1.8.2.1]， $\mathcal{R}^{\mathfrak{s}}(G(F))$ 等价于自同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 上的右模范畴。自同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 的结构在 [Sol22] 中得到研究。在某些假设下，Solleveld 证明自同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 同构于一个由仿射赫克代数 $\mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$ 扩张而成的代数，该扩张由扭曲群代数 [给出，见 Sol22，定理 10.9]。

本文比较与类型（K,ρ）相关联的自同态代数 端同态环$_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$，以及由 pro-生成元 $I_P^G\left(\mathrm{ind}^{M(F}{}_{)M^1}(\sigma_1)\right)$得到的自同态代数 端同态环$_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$。特别地，我们比较了 [Mor93, 定理 7.12] 中对 端同态环$_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$的描述，以及 [Sol22, 定理 10.9]中对端同态环 $_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 的描述。

我们简要说明本文的主要结果。设 (K,ρ) 是 [Mor93] 中讨论的一个零深度类型。我们假设 (K,ρ) 满足假设 7.1 和假设 7.3。假设 7.1 是使类型 (K,ρ) 成为某个单点的 $\mathfrak{S}$-类型所必需的。假设 7.3 本质上与 [Sol22, Theorem 10.9] 中所假设的 [Sol22, Working hypothesis 10.2], 相同。在许多情况下，这些假设都成立（见注 6.2 及假设 7.1 后的段落）。由类型 (K,ρ)，我们可以定义一个 Levi 子群 M。记 $K_M=K\cap M(F)$ 和 $\rho_M=\rho\restriction_{K_M}$。于是，我们可以证明，按照 [BK98, Definition 8.1] 的定义，(K,ρ) 是 (K_M,ρ_M) 的一个 G-覆盖。我们构造一个显式同构

$$I_U\colon \mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\to I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right).$$

因此，我们也有一个自同态代数的同构

$$I_U\colon \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)\to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right).$$

在这一部分，我们不必假设假设 7.1、假设 7.3，甚至不必假设 (K,ρ) 是零深度类型。因此，我们可以将该结果应用于任意一对 (K_M,ρ_M) 的 G-覆盖 (K,ρ)。我们还证明，同构 I_U 与单射兼容

$$I_P^G\colon \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right)$$

and

$$t_P\colon \operatorname{End}_{M(F)}\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\to \operatorname{End}_{G(F)}\left(\operatorname{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\right)$$

在 [BK98 推论 7.12] 中定义。

我们定义 σ 的 $M(F)$ 的一个不可约超尖点表示，使得紧诱导表示 $\operatorname{ind}_{K_M}^{M^1}(\rho_M)$ 是 $\sigma\restriction_{M^1}$ 的一个不可约子表示。记作 $\sigma_1=\operatorname{ind}_{K_M}^{M^1}(\rho_M)$。于是，紧诱导的传递性意味着

$$\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\simeq \operatorname{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1).$$

因此，我们有一个同构

$$T_{\rho_M}\colon \operatorname{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right)\to \operatorname{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\operatorname{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right).$$

将其与 I_U 复合，我们得到一个同构

$$T_{\rho_M}\circ I_U\colon \operatorname{End}_{G(F)}\left(\operatorname{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\right)\to \operatorname{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\operatorname{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right).$$

本文的主要目的是比较 $T_{\rho_M}\circ I_U$ 在 [Mor93] 中的左侧描述与 $T_{\rho_M}\circ I_U$ 在 [Sol22] 中的右侧描述。$T_{\rho_M}\circ I_U$ 的左侧是用与带基根数据相关联的仿射赫克代数 $\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}}$ 来描述的

$$\mathcal{R}^{\mathrm{Mor}}=\left(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee,\mathbb{Z}\right),R^{\mathrm{Mor}},\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee,(R^{\mathrm{Mor}})^\vee,\Delta^{\mathrm{Mor}}\right).$$

更确切地说，$\operatorname{End}_{G(F)}\left(\operatorname{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\right)$ 中有一个子代数 $\mathcal{H}(R(J,\rho))$，并且存在一个同构

$$I^{\mathrm{Mor}}\colon \mathcal{H}(R(J,\rho))\to\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}}.$$

另一方面， $T_{\rho_M}\circ I_U$ 的右侧可用与带基根数据相关联的仿射赫克代数$\mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$ 来描述

$$\mathcal{R}^{\mathrm{Sol}}=\left(\left(M_\sigma/M^1\right)^\vee,R^{\mathrm{Sol}},M_\sigma/M^1,(R^{\mathrm{Sol}})^\vee,\Delta^{\mathrm{Sol}}\right).$$

我们有一个子代数 $\mathcal{H}(W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}))$，它包含于 $\operatorname{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\operatorname{ind}^{M(F)_{M^1}}(\sigma_1)\right)\right)$，以及一个同构

$$I^{\mathrm{Sol}}\colon \mathcal{H}\left(W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})\right)\to\mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}.$$

本文的第一个主要结果如下：

定理 1.1（定理 7.15）。存在一个典范识别

$$\begin{cases}R^{\mathrm{Mor}} &= R^{\mathrm{Sol}},\\ \Delta^{\mathrm{Mor}} &= -\Delta^{\mathrm{Sol}}.\end{cases}$$

因此，我们可以将 R^{Mor} 的魏尔群 $W_0(R^{\mathrm{Mor}})$ 与 R^{Sol} 的魏尔群 $W_0(R^{\mathrm{Sol}})$ 识别起来。我们还可以将 R^{Mor} 的基 Δ^{Mor} 所对应的 $W_0(R^{\mathrm{Mor}})$ 中简单反射的集合，与 R^{Sol} 的基 Δ^{Sol} 所对应的 $W_0(R^{\mathrm{Sol}})$ 中简单反射的集合识别起来。对于一个简单反射

$$s\in W_0(R^{\mathrm{Mor}})=W_0(R^{\mathrm{Sol}}),$$

令 $T_{\mathrm{Mor}s}$ 表示 $\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}}$ 中与 s 对应的标准基元素，并令 T_s^{Sol}表示 $\mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$ 中与 s 对应的标准基元素。本文的第二个主要结果如下：

定理 1.2（定理 7.17）。存在一个明确定义的对合

$$\iota\colon \mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}\to\mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$$

使得

$$\left(\iota\circ I^{\mathrm{Sol}}\circ T_{\rho_M}\circ I_U\circ(I^{\mathrm{Mor}})^{-1}\right)(T_s^{\mathrm{Mor}})=T_s^{\mathrm{Sol}}$$

对于与之关联的任意简单反射 s

$$\alpha\in\Delta^{\mathrm{Sol}}=-\Delta^{\mathrm{Mor}}$$

即它不是 R^{Sol} 中 A_1 类型不可约分支的唯一单根，也不是 R^{Sol} 中 C_n $(n\geq 2)$ 类型不可约分支的长根。

我们还描述了与 s 相关的简单反射 T_s^{Mor} 的像

$$\alpha \in \Delta^{\mathrm{Sol}} = -\Delta^{\mathrm{Mor}}$$

that 是类型 A_1 不可约分支中的唯一单根，或是类型 e
C_n $(n \geq 2)$ 不可约分支中的长根（见定理 7.17）。

For

$$\alpha \in R^{\mathrm{Mor}} = R^{\mathrm{Sol}},$$

令 $\theta_{-\alpha^\vee}$ 表示群代数 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee]$ 中对应于 $-\alpha^\vee \in (R^{\mathrm{Mor}})^\vee$ 的元素。注意，$\mathbb{C}[\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee]$ 是仿射赫克代数 $\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}}$ 的子代数。我们还用 $\theta_{\alpha^\vee}$ 表示群代数中的元素

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Sol}})^\vee] \subset \mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$$

对应于 $\alpha^\vee \in (R^{\mathrm{Sol}})^\vee$。然后，我们还证明：

定理 1.3（推论 7.18）。对于

$$\alpha \in R^{\mathrm{Mor}} = R^{\mathrm{Sol}},$$

我们有

$$\left(\iota \circ I^{\mathrm{Sol}} \circ T_{\rho_M} \circ I_U \circ (I^{\mathrm{Mor}})^{-1}\right)(\theta_{-\alpha^\vee}) = \theta_{\alpha^\vee}.$$

我们概述本文的结构。在第 3 节中，我们构造一个同构

$$I_U \colon \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right) \tag{1.1}$$

它对应于 (K_M, ρ_M) 的一个 G-覆盖 (K, ρ)。在第4节中，我们证明同构 (1.1) 与单射相容

$$I_P^G \colon \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right)$$

and

$$t_P \colon \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right).$$

在第 5 节中，我们回顾 [Mor93] 中零深度类型 (K, ρ) 的自同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$ 的描述。我们还将该描述改写为仿射 Hecke 代数的形式。在第6节中，我们回顾 [Sol22] 中自同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 的描述。在第7节中，我们说明如何将同构 (1.1) 右侧与第6节的一个对象联系起来，并陈述本文的主要结果。在第 8 节中，我们准备一些引理来证明主要结果。在第9节中，我们证明当 M 是 G 的极大真 Levi 子群时的主要结果。最后，在第10节中，我们证明一般情形下的主要结果。

致谢。我衷心感谢我的导师 Noriyuki Abe，感谢他给予我的大力支持和宝贵建议。他审阅了草稿，并提出了有益的意见。我获得了东京大学数学科学研究生院 FMSP项目以及日本学术振兴会科学研究费补助金（编号 JP22J22712）的资助。

2. Notation and assumptions

设 F 是一个剩余特征为 p 的非阿基米德局部域，记其剩余域为 k_F。记作 $q_F = |k_F|$。设 ord_F 为 $F^\times$ 上唯一的离散赋值，使得 ord_F 的像为 $\mathbb{Z}$。

设 G 是定义在 F 上的连通约化群。对于连通约化群 H，特别是对于 G 的 Levi 子群，记 $X_{\mathrm{unr}}(H)$ 为 $H(F)$ 的非分歧特征集合，并令

$$H^1 = \bigcap_{\chi \in X_{\mathrm{unr}}(H)} \ker(\chi).$$

对于 G 的抛物子群 P，其 Levi 因子为 M，幺幂根基为 U；令 $\overline{P}$ 表示 P 的对偶抛物子群，$\overline{U}$ 表示 $\overline{P}$ 的幺幂根基。我们定义模函数

$$\delta_P \colon M(F) \to \mathbb{R}_{>0}$$

为 [Ren10, II.3.7]。因此，对于 $U(F)$ 上的任意紧支撑光滑函数 f、 $m \in M(F)$，以及 $U(F)$ 上的哈尔测度 du，有

$$\int_{U(F)} f(mum^{-1})\,du = \delta_P(m) \int_{U(F)} f(u)du.$$

For 设 (π, V) 是 $G(F)$ 的一个光滑表示，记 (π_U, V_U) 为其（未归一化的）雅克 et mod模，关于 P，并记

$$j_U(\pi)\colon V \to V_U$$

为典范商映射。设 (τ, W) 是 $M(F)$ 的一个光滑表示，记

$$\left(\mathrm{Ind}_P^G(\tau), \mathrm{Ind}_P^G(W)\right)$$

为 (τ, W) 关于 P 的（未归一化）抛物诱导表示。这里，我们将 $\mathrm{Ind}_P^G(\tau)$ 实现为作用在

$$\mathrm{Ind}_P^G(W) = \{f\colon G(F) \to W\colon \text{smooth} \mid f(umg) = \tau(m)\cdot f(g)\,(u \in U(F), m \in M(F), g \in G(F))\}.$$

我们分别将归一化雅克函子和归一化抛物诱导函子记为 r_P^G和 I_P^G。因此，对于 $G(F)$ 的一个光滑表示 (π, V)，

$$r_P^G(\pi) = \pi_U \otimes \delta_P^{1/2},$$

对于 $M(F)$ 的光滑表示 (τ, W)，

$$I_P^G(\tau) = \mathrm{Ind}_P^G(\tau \otimes \delta_P^{-1/2}).$$

设 K 是局部可拟群 H 的一个开子群。对于 K 的光滑表示 (ρ, V_ρ)，令

$$\left(\mathrm{ind}_K^H(\rho), \mathrm{ind}_K^H(V_\rho)\right)$$

表示 (ρ, V_ρ) 的紧诱导表示。在此，我们将 $\mathrm{ind}_K^H(\rho)$ 实现为作用在.....上的右正则表示

$$\mathrm{ind}_K^H(V_\rho) = \{f\colon H \to V_\rho\colon \text{模 } K \mid f(kg) \text{ 紧支撑 } = \rho(k)\cdot f(g)\,(k \in K, g \in G(F))\}.$$

设 K 是局部可拟群 H 的一个紧开子群。对于 H 的光滑表示 (π, V) 和 K 的不可约光滑表示 (ρ, V_ρ)，令 $V_{(K,\rho)}$ 表示 V 的 (K, ρ)-等型子空间。若 ρ 是 K 的平凡表示，我们简单地用 V^K 表示 $V_{(K,\rho)}$。

对于局部可拟群的任意光滑表示 (ρ, V_ρ)，令 $(\rho^\vee, V_\rho^\vee)$ 表示 (ρ, V_ρ) 的余对偶表示。

设 K 是群 H 的子群，且 $h \in H$。令 ${}^hK$ 表示子群 hKh^{-1} of$H$。若 ρ 是 K 的表示，则 ${}^h\rho$ 表示 ${}^hK$ 的表示 $x \mapsto \rho(h^{-1}xh)$。有时我们用 $h\rho$ 表示 ${}^h\rho$。如果 $\mathrm{Hom}_{K\cap {}^hK}({}^h\rho, \rho)$ 非零，则称 h 交织 ρ。记

$$I_H(\rho) = \{h \in H \mid h \text{ intertwines } \rho\}.$$

对于群 H，令 $\mathbb{C}[H]$ 表示 H 在 $\mathbb{C}$ 上的群代数，并且

$$\{\theta_h \mid h \in H\}$$

表示 $\mathbb{C}[H]$ 的标准基。

对于域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间 V，令 V^* 表示对偶向量空间

$$V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}).$$

3. An explicit isomorphism

我们回顾 G-覆盖的定义。设 M 是 G 的 Levi 子群， K 是 $G(F)$ 的紧开子群。记作 $K_M = K \cap M(F)$。对于 Levi 因子为 M、幺幂根基为 U 的抛物子群 P，我们也记作 $K_U = K \cap U(F)$ 和 $K_{\overline{U}} = K \cap \overline{U}(F)$。若 K 相对于 U、 M、 $\overline{U}$ 分解，则称

$$K = K_U \cdot K_M \cdot K_{\overline{U}}.$$

设 (ρ, V_ρ) 是 K 的不可约光滑表示，(ρ_M, V_{ρ_M}) 是 K_M 的不可约光滑表示。若对于任意 Levi 因子为 M 的抛物子群 $P = MU$，都有以下关系，则称 (K, ρ) 是 (K_M, ρ_M) 的 G-覆盖：

(1) K 按照 U、M、$\overline{U}$ 分解。(2) K_U 和 $K_{\overline{U}}$ 均包含在 ρ 的核中，且 $\rho\restriction_{K_M} = \rho_M$。(3) 对于 $G(F)$ 的任意不可约光滑表示（π，V），$j_U(\pi)$ 到 $V^{(K,\ \rho)}$ 的限制是一个单射。

G-覆盖的概念最初见于 [BK98，定义 8.1]。这里，我们采用 [Blo97，Th´eor`eme 1] 中给出的重新表述（另见 [GR02，第4节.1] 以及 [KY17，第4节.2]）。在满足 (1) 和 (2) 的情况下，第三个条件等价于以下条件（见 [BK98，命题 7.14]）：

(3')：对于 $G(F)$ 的任意光滑表示（π，V），$j_U(\pi)$ 诱导一个同构

$$V^{(K,\rho)} \to V_U^{(K_M,\rho_M)}.$$

我们注意到，如果 (K, ρ) 是 (K_M, ρ_M) 的 G-覆盖，则 V_ρ 与 ρ 的表示空间等于 V_{ρ_M} 与 ρ_M 的表示空间。

下面将用到以下引理：

引理 3.1. 设 (K, ρ) 是 (K_M, ρ_M) 的 G-覆盖。那么，$(K, \rho^\vee)$ 是 $(K_M, (\rho_M)^\vee)$ 的 G-覆盖。

证明. 显然，$(K,\rho^\vee)$ 满足 G-覆盖的前两个条件。我们将证明 $(K, \rho^\vee)$ 满足第三个条件。设 (π, V) 是 $G(F)$ 的一个不可约（因而可容许）光滑表示。记 $\langle , \rangle$ 为 $V \times V^\vee$ 上典范的 $G(F)$-不变配对。那么，$\langle , \rangle$ 在以下空间上限制为一个完美配对

$$V^{(K,\rho)} \times (V^\vee)^{(K,\rho^\vee)}.$$

另一方面，对于任意具有 Levi 因子 M 和幺幂根基 U 的抛物子群 P，我们可以在以下空间上定义一个典范完美配对 $\langle , \rangle_U$

$$V_U^{(K_M,\rho_M)} \times (V^\vee)_{\overline{U}}^{(K_M,(\rho_M)^\vee)}$$

如下。

令 K^+ 表示 ρ 的核，令 K_M^+ 表示 ρ_M 的核。由于 (K, ρ) 是 (K_M, ρ_M) 的 G-覆盖，我们得到

$$K^+ = K_U \cdot K_M^+ \cdot K_{\overline{U}}.$$

根据 [Ren10，定理 ´eor`eme VI.6.1]，$j_U(\pi)$ 诱导出一个满射

$$V^{K^+} \to V_U^{K_M^+}.$$

此外，根据 [Ren10，命题 VI.6.1]，，此满射有一个典范截面

$$s_P^{K^+} \colon V_U^{K_M^+} \to V^{K^+},$$

因此我们得到一个分解

$$V^{K^+} = \mathrm{im}(s_P^{K^+}) \oplus \ker(j_U(\pi)).$$

类似地，存在一个典范截面

$$s_{\overline{P}}^{K^+} \colon (V^\vee)_{\overline{U}}^{K_M^+} \to (V^\vee)^{K^+}$$

满射的

$$j_{\overline{U}}(\pi^\vee) \colon (V^\vee)^{K^+} \to (V^\vee)_{\overline{U}}^{K_M^+},$$

并得到一个分解

$$(V^\vee)^{K^+} = \mathrm{im}(s_{\overline{P}}^{K^+}) \oplus \ker(j_{\overline{U}}(\pi^\vee)).$$

此外，关于 $\langle , \rangle$，$\mathrm{im}(s_P^{K^+})$ 与 $\ker(j_{\overline{U}}(\pi^\vee))$ 正交，$\mathrm{im}(s_{\overline{P}}^{K^+})$ 与 $\ker(j_U(\pi))$ 也正交（参见 [Ren10，命题 VI.9.6] 的证明）。因此，配对 $\langle , \rangle$ 在

$$\mathrm{im}(s_P^{K^+}) \times \mathrm{im}(s_{\overline{P}}^{K^+}),$$

and

$$([v],[\check{v}]) \mapsto \langle s_P^{K^+}([v]), s_{\overline{P}}^{K^+}([\check{v}])\rangle \tag{3.1}$$

定义了一个完美配对

$$(V_U)^{K_M^+} \times (V^\vee)_{\overline{U}}^{K_M^+}.$$

我们将 $\langle , \rangle_U$ 上的完美配对定义为

$$(V_U)^{(K_M,\rho_M)} \times (V^\vee)_{\overline{U}}^{(K_M,(\rho_M)^\vee)}$$

（3.1）的限制。

现在，我们得到同构

$$\begin{aligned}(V^\vee)^{(K,\rho^\vee)} &\simeq \left(V^{(K,\rho)}\right)^* \\ &\simeq \left(V_U^{(K_M,\rho_M)}\right)^* \\ &\simeq (V^\vee)_{\overline{U}}^{(K_M,(\rho_M)^\vee)}.\end{aligned}$$

这里，第一个同构由 $\langle , \rangle$ 上的完美配对给出

$$V^{(K,\rho)} \times (V^\vee)^{(K,\rho^\vee)},$$

第二个同构由同构给出

$$j_U(\pi)\colon V^{(K,\rho)} \to V_U^{(K_M,\rho_M)}$$

关于 G-覆盖的条件 (3')，第三个同构由完美配对 $\langle , \rangle_U$ on 给出

$$V_U^{(K_M,\rho_M)} \times (V^\vee)_{\overline{U}}^{(K_M,(\rho_M)^\vee)}.$$

$\langle , \rangle_U$ 的构造意味着这些同构的复合与该映射重合

$$j_{\overline{U}}(\pi^\vee)\colon (V^\vee)^{(K,\rho^\vee)} \to (V^\vee)_{\overline{U}}^{(K_M,(\rho_M)^\vee)}.$$

Thus，我们已证明，对于 $G(F)$ 的任意不可约光滑表示 (π, V) 以及抛物 ic
subg群 P（其 Levi 因子为 M，幺幂根基为 U），$j_{\overline{U}}(\pi^\vee)$ 诱导一个同构

$$(V^\vee)^{(K,\rho^\vee)} \to (V^\vee)_{\overline{U}}^{(K_M,(\rho_M)^\vee)}.$$

特别地，将 $j_{\overline{U}}(\pi^\vee)$ 限制到 $(V^\vee)^{(K,\rho^\vee)}$ 是一个单射。由于

$$(\pi, V) \leftrightarrow (\pi^\vee, V^\vee)$$

给出了 $G(F)$ 的不可约光滑表示集合上的一个双射，并且

$$P \leftrightarrow \overline{P}$$

这给出了与 Levi 因子 M 对应的抛物子群集合上的一个双射，因此我们得出 $(K, \rho^\vee)$ 满足条件 (3)，从而它是 $(K_M, (\rho_M)^\vee)$ 的一个 G-覆盖。□

我们固定一个抛物子群 P，其 Levi 因子为 M，幺幂根基为 U。由 (K_M, ρ_M) 的一个 G-覆盖 (K, ρ)，我们得到两类表示：

(1) 紧诱导表示 $\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)$。(2) 抛物诱导表示 $I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$。

根据 [BS20，引理 B.3]，，这两个表示是同构的。然而，[BS20，引理 B.3] 的证明使用了伴随函子的唯一性，而且没有显式描述该同构。我们将沿用 [Dat09，推论 3.6] 的证明中的论证，给出这两个表示之间的一个显式同构。

引理 3.2。映射

$$I_{U,1}\colon f \mapsto [g \mapsto [m \mapsto \delta_P(m)^{1/2} \cdot f(mg)]]$$

给出一个同构

$$\mathrm{ind}_{U(F)K_M}^{G(F)}(\mathrm{Inf}(\rho_M)) \to I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right).$$

这里，

$$(\mathrm{Inf}(\rho_M), V_{\rho_M})$$

表示通过典范映射将 ρ_M 膨胀至 $U(F)K_M$

$$U(F)K_M \to U(F)K_M/U(F) \simeq K_M.$$

证明。直接计算可得映射

$$F \mapsto [g \mapsto (F(g))(1)]$$

给出逆映射。 □

接下来，我们考虑映射

$$I_{U,2}\colon \mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho) \to \mathrm{ind}_{U(F)K_M}^{G(F)}(\mathrm{Inf}(\rho_M))$$

定义为

$$I_{U,2}\colon f \mapsto [g \mapsto \int_{U(F)} f(ug)du].$$

这里，我们在 $U(F)$上使用哈尔测度 du，使得 K_U的体积等于 1。

命题 3.3. 映射$I_{U,2}$ 给出一个同构

$$\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho) \to \mathrm{ind}_{U(F)K_M}^{G(F)}(\mathrm{Inf}(\rho_M)).$$

证明. 我们先准备 $G(F)$上的一些函数空间:

- 令 $C^\infty_{\mathrm{c}}(G(F), \rho)$表示紧支撑光滑函数空间

  $$f\colon G(F) \to V_\rho.$$

  我们定义 K 在 $C^\infty_{\mathrm{c}}(G(F), \rho)$上的表示 l_ρ 如下

  $$(l_\rho(k)\cdot f)(g) = \rho(k)\cdot f(k^{-1}g)$$

  对于 $k \in K$、 $g \in G(F)$和 $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(F), \rho)$。
- 令 $C^\infty_{\mathrm{c}}(U(F)\backslash G(F), \rho_M)$ 表示光滑函数空间

  $$f\colon G(F) \to V_{\rho_M}$$

  这些函数在左侧具有 $U(F)$-不变性，且模 $U(F)$ 紧支撑。我们定义 K_M 在 $C^\infty_{\mathrm{c}}(U(F)\backslash G(F), \rho_M)$ 上的表示 l_{ρ_M} 如下:

  $$(l_{\rho_M}(k)\cdot f)(g) = \rho_M(k)\cdot f(k^{-1}g)$$

  对于 $k \in K_M$、 $g \in G(F)$ 和 $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(U(F)\backslash G(F), \rho_M)$。
- 令 $C^\infty_{\mathrm{c}}(G(F))$ 表示紧支撑光滑函数空间

  $$f\colon G(F) \to \mathbb{C}.$$

  我们定义 $G(F)$ 在 $C^\infty_{\mathrm{c}}(G(F))$ 上的表示 l_{reg} 如下:

  $$(l_{\mathrm{reg}}(g)\cdot f)(h) = f(g^{-1}h)$$

  对于 g、 $h \in G(F)$ 和 $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(G(F))$。
- 令 $C^\infty_{\mathrm{c}}(U(F)\backslash G(F))$ 表示光滑函数空间

  $$f\colon G(F) \to \mathbb{C}$$

  这些函数左侧 $U(F)$-不变，且模 $U(F)$ 紧支撑。我们在 $C^\infty_{\mathrm{c}}(U(F)\backslash G(F))$ 上定义 $M(F)$ 的一个表示 $l_{\mathrm{reg},M}$，如下:

  $$(l_{\mathrm{reg},M}(m)\cdot f)(g) = f(m^{-1}g)$$

  对于 $m \in M(F)$、 $g \in G(F)$ 和 $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(U(F)\backslash G(F))$。

我们还将 K 在 $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F)) \otimes V_{\rho}$ 上的一个表示定义为 $l_{\mathrm{reg}} \restriction_K \otimes \rho$，并将 K_M 在 $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F)) \otimes V_{\rho_M}$ 上的一个表示定义为 $l_{\mathrm{reg},\ M} \restriction_{K_M} \otimes \rho_M$。表示 l_{ρ} 和 l_{reg} 的定义意味着映射

$$f \otimes v \mapsto [g \mapsto f(g) \cdot v]$$

给出一个 K-等变同构

$$(l_{\mathrm{reg}} \restriction_K \otimes \rho,\, C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F)) \otimes V_{\rho}) \to (l_{\rho},\, C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F), \rho)) .$$

另一方面，紧诱导的定义意味着，作为向量空间，我们有

$$\mathrm{ind}_K^{G(F)}(V_{\rho}) = C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F), \rho)^K.$$

因此，我们得到

$$\mathrm{ind}_K^{G(F)}(V_{\rho}) \simeq (C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F)) \otimes V_{\rho})^K$$

as v向量空间。类似地，表示 l_{ρ_M} 和 $l_{\mathrm{reg},\ M}$ 的定义意味着该映射

$$f \otimes v \mapsto [g \mapsto f(g) \cdot v]$$

给出一个 K_M-等变同构

$$(l_{\mathrm{reg},M} \restriction_{K_M} \otimes \rho_M,\, C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F)) \otimes V_{\rho_M}) \to (l_{\rho_M},\, C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F), \rho_M)) .$$

因此，我们得到一个向量空间的同构

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}_{U(F)K_M}^{G(F)}(V_{\rho_M}) &= C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F), \rho_M)^{K_M} \\ &\simeq (C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F)) \otimes V_{\rho_M})^{K_M} . \end{aligned}$$

在这些同构下，映射

$$I_{U,2} \colon \mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho) \to \mathrm{ind}_{U(F)K_M}^{G(F)}(\mathrm{Inf}(\rho_M))$$

被转化为映射

$$I'_{U,2} \colon (C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F)) \otimes V_{\rho})^K \to (C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F)) \otimes V_{\rho_M})^{K_M}$$

定义如下

$$I'_{U,2}(f \otimes v) = [g \mapsto \int_{U(F)} f(ug)du] \otimes v.$$

我们将证明 $I'_{U,\ 2}$ 是一个同构。由于 K 和 K_M 是紧子群，K 在 $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$上的表示 $l_{\mathrm{reg}} \restriction_K$ 以及 K_M 在 $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F))$上的表示$l_{\mathrm{reg},\ M} \restriction_{K_M}$都是半单的。我们记

$$C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F)) = \bigoplus_{\rho'} C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))^{(K,\rho')}$$

and

$$C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F)) = \bigoplus_{\rho'_M} C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F))^{(K_M,\rho'_M)},$$

其中，ρ' 和ρ'_M 分别遍历 K 和 K_M的不可约光滑表示。对于$\rho' \ncong \rho^{\vee}$ 和 $\rho'_M \ncong (\rho_M)^{\vee}$，我们有

$$\left(C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))^{(K,\rho')} \otimes V_{\rho}\right)^K = \{0\},$$

and

$$\left(C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F))^{(K_M,\rho'_M)} \otimes V_{\rho_M}\right)^{K_M} = \{0\},$$

分别。因此，我们得到

$$(C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F)) \otimes V_{\rho})^K = \left(C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))^{(K,\rho^{\vee})} \otimes V_{\rho}\right)^K$$

and

$$(C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F)) \otimes V_{\rho_M})^{K_M} = \left(C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F))^{(K_M,(\rho_M)^{\vee})} \otimes V_{\rho_M}\right)^{K_M} .$$

此外，由于 K相对于 U、M、$\overline{U}$分解，群 K_U和 $K_{\overline{U}}$包含于 ρ和 $\rho^{\vee}$的核中，并且 $\rho \restriction_{K_M} = \rho_M$，我们得到

$$\left(C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))^{(K,\rho^{\vee})} \otimes V_{\rho}\right)^K = \left(C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))^{(K,\rho^{\vee})} \otimes V_{\rho_M}\right)^{K_M,} .$$

那么，该断言可由下文的引理 3.4 得出。 □

引理 3.4（参见 [Dat09，注记 3.4]）。该映射

$$f \mapsto [g \mapsto \int_{U(F)} f(ug)du]$$

诱导出一个同构

$$C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))^{(K,\rho^{\vee})} \to C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F))^{(K_M,(\rho_M)^{\vee})}.$$

证明。回顾一下，我们将 l_{reg} 的一个表示定义在 $G(F)$ 上，取值于 $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$，其定义为

$$(l_{\mathrm{reg}}(g)\cdot f)(h) = f(g^{-1}h)$$

对于 g、$h \in G(F)$ 和 $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))$。该映射

$$C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F)) \to C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F))$$

定义为

$$f \mapsto [g \mapsto \int_{U(F)} f(ug)du]$$

可经由映射

$$j_U(l_{\mathrm{reg}})\colon C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F)) \to C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))_U$$

并诱导一个 K_M-等变同构

$$C_{\mathrm{c}}^{\infty}(G(F))_U \to C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U(F)\backslash G(F)).$$

因此，该断言由引理 3.1 和 G-覆盖的条件 (3') 得出。 □

记

$$I_U := I_{U,1}\circ I_{U,2}\colon \mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho) \to I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right).$$

根据引理 3.2 和命题 3.3，I_U 是一个同构。我们对自同态代数的同构也使用相同的符号 $I_{U,1}$、$I_{U,2}$ 和 I_U

$$\begin{aligned} I_{U,1}\colon \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{U(F)K_M}^{G(F)}(\mathrm{Inf}(\rho_M))\right) &\to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right),\\ I_{U,2}\colon \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right) &\to \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{U(F)K_M}^{G(F)}(\mathrm{Inf}(\rho_M))\right),\\ I_U\colon \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right) &\to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right) \end{aligned}$$

分别由 $I_{U,1}$、$I_{U,2}$ 和 I_U 诱导。

4. Hecke algebra injections

我们采用与第 3 节相同的记号。特别地，设 (K,ρ) 是 (K_M,ρ_M) 的一个 G-覆盖。在第 3 节中，我们构造了一个同构

$$I_U\colon \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right).$$

由于 I_P^G 是一个忠实函子，它给出一个自然嵌入

$$I_P^G\colon \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right).$$

另一方面，存在一个自然嵌入

$$t_P\colon \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$$

定义见 [BK98，推论 7.12]。

我们将说明 t_P 的定义。首先，回顾与 (K,ρ) 相关的 Hecke 代数的定义。令 $\mathcal{H}(G(F),\rho)$ 表示紧支撑函数空间

$$\phi\colon G(F) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\rho)$$

满足

$$\phi(k_1gk_2) = \rho(k_1)\circ\phi(g)\circ\rho(k_2),$$

对于所有 k_1、$k_2 \in K$ 和 $g \in G$（F）。标准卷积乘积

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \int_{G(F)} \phi_1(y) \circ \phi_2(y^{-1}x)dy$$

与 $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}(G(F), \rho)$ 和 $x \in G(F)$ 一起赋予 $\mathcal{H}(G(F), \rho)$ 一个复数域代数结构。我们将 $\mathcal{H}(G(F), \rho)$ 称为与对 (K, ρ) 相关联的 Hecke 代数。这里，我们对 $G(F)$ 上的哈尔测度 dy 进行归一化，使得 K 的体积等于 1。我们注意到，$\mathcal{H}(G(F), \rho)$ 的同构类与用于定义卷积乘积的 $G(F)$ 上的哈尔测度的选取无关。对于 $g \in G(F)$ 和 $\phi \in \mathcal{H}(G(F), \rho)$，有

$$\phi(g) \in \mathrm{Hom}_{K \cap {}^gK}({}^g\rho, \rho).$$

因此，ϕ 的支集包含于 $I_{G(F)}(\rho)$ 中。

注4.1。上文对 $\mathcal{H}(G(F), \rho)$ 的定义不同于 BK98 第 2] 节中对 $\mathcal{H}(G(F), \rho)$ 的定义。更确切地说，我们的 $\mathcal{H}(G(F), \rho)$ 表示 BK98 第 2] 节中的 $\mathcal{H}(G(F), \rho^\vee)$。根据 BK98 的 (2.3)，存在一个典范反同构

$$\mathcal{H}(G(F), \rho) \simeq \mathcal{H}(G(F), \rho^\vee)$$

它会反转函数的支集。因此，经过适当修改后，我们可以将 [BK98] 的结果应用于我们的情形。

根据 [BK98、(2.6)] 和注4.1，存在一个同构

$$\mathcal{H}(G(F), \rho) \simeq \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right). \tag{4.1}$$

我们将上述同构明确写出。对于 $v \in V_\rho$，我们定义 $f_v \in \mathrm{ind}_K^{G(F)}(V_\rho)$ 为

$$f_v(g) = \begin{cases} \rho(g) \cdot v & (g \in K), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

于是，对于 $\Phi \in \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$，对应的元素 $\phi \in \mathcal{H}(G(F), \rho)$ 定义为

$$\phi(g) \cdot v = (\Phi(f_v))(g)$$

对于 $g \in G(F)$ 和 $v \in V_\rho$。反过来，对于 $\phi \in \mathcal{H}(G(F), \rho)$，对应的元素 $\Phi \in \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$ 定义为

$$(\Phi(f))(x) = \int_{G(F)} \phi(y) \cdot f(y^{-1}x)dy$$

对于 $f \in \mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)$ 和 $x \in G(F)$。

同样，我们定义与 (K_M, ρ_M) 相关联的 Hecke 代数 $\mathcal{H}(M(F), \rho_M)$。我们还有一个同构

$$\mathcal{H}(M(F), \rho_M) \simeq \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \tag{4.2}$$

对应于 (4.1)。

接下来，我们回顾正元素的定义 [BK98，定义 6.5]。若元素 $z \in M(F)$ 满足以下条件，则称其相对于 K 和 U 为正：

$$zK_Uz^{-1} \subset K_U,\ z^{-1}K_{\overline{U}}z \subset K_{\overline{U}}.$$

引理 4.2。设 $z \in M(F)$ 相对于 K和 U 为正。那么，我们有

$$\delta_P(z) = \left|K_U / zK_Uz^{-1}\right|.$$

证明。由于 z相对于 K和 U 为正，因此有 $zK_Uz^{-1} \subset K_U$。然后，在方程中将 zK_Uz^{-1} 的特征函数代入 f

$$\int_{U(F)} f(zuz^{-1})\,du = \delta_P(z) \int_{U(F)} f(u)du,$$

我们得到

$$\left|K_U / zK_Uz^{-1}\right| = \delta_P(z).$$

□

令 I^+ 表示正元素 $z \in I_{M(F)}(\rho_M)$ 的集合，并令 $\mathcal{H}^+(M(F)\ \rho_M)$ 表示 $\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$ 中支集包含于 I^+ 的函数空间。根据 [BK98，命题 6.3 (iii)],，对于支集包含于某个 $z \in I_{M(F)}(\rho_M)$ 中的 $\phi \in \mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$，存在唯一函数 $T(\phi) \in \mathcal{H}(G(F)\ \rho)$，其支集包含于 KzK，且满足 $(T(\phi))(z) = \phi(z)$。根据 [BK98，推论 6.12]， $\mathcal{H}^+(M(F)\ \rho_M)$ 是 $\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$ 的子代数，并且 T 诱导出一个单同态

$$T\colon \mathcal{H}^+(M(F), \rho_M) \to \mathcal{H}(G(F), \rho).$$

此外，根据 [BK98, 定理 7.2 (i)] （另见 [BK98, 命题 7.14]）， T 可唯一延拓为一个单同态

$$t\colon \mathcal{H}(M(F), \rho_M) \to \mathcal{H}(G(F), \rho).$$

我们定义

$$t_P\colon \mathcal{H}(M(F), \rho_M) \to \mathcal{H}(G(F), \rho)$$

as

$$t_P(\phi) = t(\phi \cdot \delta_P^{-1/2}),$$

其中 $\phi \cdot \delta_P^{-1/2}$ 表示函数

$$m \mapsto \phi(m)\delta_P(m)^{-1/2}$$

在 $\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$ 中。

注 4.3。我们对 t_P 的定义不同于 [BK98] 中的定义。区别源于我们使用了归一化抛物诱导，而 [BK98] 中使用的是非归一化抛物诱导。

以下对 t_P 的刻画是由 [BK98 定理 7.2 (i)]直接得出的。

引理 4.4. 设

$$t'\colon \mathcal{H}(M(F), \rho_M) \to \mathcal{H}(G(F), \rho)$$

是一个同态，使得

$$t'(\phi) = t_P(\phi) \ \left(= T(\phi \cdot \delta_P^{-1/2})\right)$$

对任意 $\phi \in \mathcal{H}^+(M(F)\ \rho_M)$ 均成立。于是，我们得到 $t' = t_P$。

下面的引理将在后文中使用：

引理 4.5. 假设子空间

$$\mathcal{H}(G(F), \rho)_M = \{\phi \in \mathcal{H}(G(F), \rho) \mid \mathrm{supp}(\phi) \subset K \cdot M(F) \cdot K\}$$

是 $\mathcal{H}(G(F)\ \rho)$ 的一个子代数。设 ϕ 为 $\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$ 中的一个元素，其支集包含于 $K_M z K_M$，其中 $z \in I_{M(F)}(\rho_M)$。于是我们得到

$$t_P(\phi) = \frac{\left|K_M/\left(K_M \cap zK_Mz^{-1}\right)\right|^{1/2}}{\left|K/\left(K \cap zKz^{-1}\right)\right|^{1/2}} T(\phi).$$

特别地，单射 t_P 不依赖于 P的选择。

证明。该引理由 [Roc98，命题 5.1] 以及 [Roc98，注记 5.2]得出。我们注意到， [Roc98]中假设了一些更强的条件。不过， [Roc98] 的结果也可以毫无困难地推广到我们的情形。我们简要说明证明。

设 ϕ 为 $\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$ 中的一个元素，其支集包含于 $K_M z K_M$，其中 $z \in I_{M(F)}(\rho_M)$。根据 [BK98，定理 7.2（ii）], 的证明，存在 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ 使得

$$t_P(\phi) = c \cdot T(\phi). \tag{4.3}$$

我们将证明

$$c = \frac{\left|K_M/\left(K_M \cap zK_Mz^{-1}\right)\right|^{1/2}}{\left|K/\left(K \cap zKz^{-1}\right)\right|^{1/2}}. \tag{4.4}$$

首先，我们考虑正情形，即假设 $z \in I^+$。那么，根据 t_P 的定义可知

$$t_P(\phi) = T\left(\phi \cdot \delta_P^{-1/2}\right) = \delta_P(z)^{-1/2} T(\phi).$$

根据引理 4.2，我们得到

$$c = \delta_P(z)^{-1/2} = \left|K_U / zK_U z^{-1}\right|^{-1/2}.$$

另一方面，由于 K 关于 U、M、$\overline{U}$ 分解，且 z 正规化 U、M、$\overline{U}$，我们有

$$K = K_U \cdot K_M \cdot K_{\overline{U}},$$
$$zKz^{-1} = (zK_U z^{-1}) \cdot (zK_M z^{-1}) \cdot (zK_{\overline{U}} z^{-1}),$$

and

$$K \cap zKz^{-1} = (K_U \cap zK_U z^{-1}) \cdot (K_M \cap zK_M z^{-1}) \cdot (K_{\overline{U}} \cap zK_{\overline{U}} z^{-1}).$$

此外，由于 $z \in I^+$，我们得到

$$K_U \cap zK_U z^{-1} = zK_U z^{-1}$$

and

$$K_{\overline{U}} \cap zK_{\overline{U}} z^{-1} = K_{\overline{U}}.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\frac{\left|K_M / \left(K_M \cap zK_M z^{-1}\right)\right|^{1/2}}{\left|K / \left(K \cap zKz^{-1}\right)\right|^{1/2}} &= \frac{\left|K_M / \left(K_M \cap zK_M z^{-1}\right)\right|^{1/2}}{\left|K_U / \left(K_U \cap zK_U z^{-1}\right)\right|^{1/2} \left|K_M / \left(K_M \cap zK_M z^{-1}\right)\right|^{1/2} \left|K_{\overline{U}} / \left(K_{\overline{U}} \cap zK_{\overline{U}} z^{-1}\right)\right|^{1/2}} \\
&= \frac{\left|K_M / \left(K_M \cap zK_M z^{-1}\right)\right|^{1/2}}{\left|K_U / zK_U z^{-1}\right|^{1/2} \left|K_M / \left(K_M \cap zK_M z^{-1}\right)\right|^{1/2} \left|K_{\overline{U}} / K_{\overline{U}}\right|^{1/2}} \\
&= \left|K_U / zK_U z^{-1}\right|^{-1/2} \\
&= c.
\end{aligned}$$

由此得到方程 (4.4)。

为了证明一般情形下的方程 (4.4) $z \in I_{M(F)}(\rho_M)$，我们在 $\mathcal{H}(G(F)\ \rho)$ 和$\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$上定义范数。固定 $V_\rho = V_{\rho_M}$上的一个 K-不变范数，并令 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\rho)$ 上的算子范数。对于 $\phi \in \mathcal{H}(G(F)\ \rho)$，我们定义 $\|\phi\|_G$为

$$\|\phi\|_G = \left(\int_{G(F)} \|\phi(g)\|^2 \, dg\right)^{1/2}.$$

这里，我们对 $G(F)$ 上的哈尔测度 dg 进行归一化，使得 K 的体积等于 1。直接计算可得

$$\|\phi_1 * \phi_2\|_G \leq \|\phi_1\|_G \|\phi_2\|_G$$

对于 $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}(G(F)\ \rho)$。类似地，我们也为 $\phi \in \mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$定义 $\|\phi\|_M$。于是，方程 (4.4) 可以用范数改写为：

断言 4.6. 方程 (4.4) 等价于

$$\|t_P(\phi)\|_G = \|\phi\|_M. \tag{4.5}$$

证明. 根据 $\|\cdot\|_M$ 的定义可得

$$\|\phi\|_M = \left|K_M z K_M / K_M\right|^{1/2} \cdot \|\phi(z)\|. \tag{4.6}$$

另一方面，比较方程 (4.3) 两边的范数，可得

$$\|t_P(\phi)\|_G = c \cdot \|T(\phi)\|_G. \tag{4.7}$$

此外，根据 T 的定义可知

$$\begin{aligned}
\|T(\phi)\|_G &= |KzK/K|^{1/2} \cdot \|(T(\phi))(z)\| \\
&= |KzK/K|^{1/2} \cdot \|\phi(z)\|.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

比较 (4.6)、(4.7) 与 (4.8)，即可得到所述结论。 □

我们在一般情形下证明方程 (4.5)。设 ζ 是 U、K-正的强正元素，且属于 M 的中心（参见 [BK98，定义 6.16]）。因此，ζ 是一个正元素，并且存在一个正整数 n，使得 $\zeta^n z \in I^+$。用 ζ^n 替换 ζ 后，我们可以假设 $n=1$。令 ϕ_ζ 表示 $\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$ 中支集为 ζK_M 的唯一元素，使得

$$\phi_\zeta(\zeta) = \mathrm{id}_{V_{\rho_M}}.$$

直接计算可得

$$(\phi_\zeta * \phi)(m) = \phi(\zeta^{-1}m) \tag{4.9}$$

对于 $m \in M(F)$。特别地，$\phi_\zeta * \phi$ 的支集包含于 $K_M \zeta z K_M \subset I^+$。因此，正情形的结果蕴含

$$\|t_P(\phi_\zeta * \phi)\|_G = \|\phi_\zeta * \phi\|_M.$$

另一方面，根据 $\|\cdot\|_M$ 的定义和方程 (4.9)，可得

$$\|\phi_\zeta * \phi\|_M = \|\phi\|_M.$$

因此，要证明 (4.5)，只需证明

$$\|t_P(\phi_\zeta * \phi)\|_G = \|t_P(\phi)\|_G.$$

由于 $\zeta \in I^+$，正情形的结果蕴含

$$\|t_P(\phi_\zeta)\|_G = \|\phi_\zeta\|_M = 1.$$

因此，

$$\begin{aligned}\|t_P(\phi_\zeta * \phi)\|_G &= \|t_P(\phi_\zeta) * t_P(\phi)\|_G \\ &\le \|t_P(\phi_\zeta)\|_G \|t_P(\phi)\|_G \\ &= \|t_P(\phi)\|_G.\end{aligned}$$

另一方面，我们可以证明

$$\|t_P(\phi)\|_G \le \|t_P(\phi_\zeta * \phi)\|_G$$

如下。令 $\phi_{\zeta^{-1}}$ 表示 $\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$中支集为 $\zeta^{-1}K_M$且满足

$$\phi_{\zeta^{-1}}(\zeta^{-1}) = \mathrm{id}_{V_{\rho_M}}.$$

那么，$\phi_{\zeta^{-1}}$是 $\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$中的 ϕ_ζ的逆元，因此 $t_P(\phi_{\zeta^{-1}})$是$\mathcal{H}(G(F)\ \rho)$中 $t_P(\phi_\zeta)$的逆元。根据 [BK98，定理 7.2（ii）], 的证明，存在 $c' \in \mathbb{R}_{>0}$ 使得

$$t_P(\phi_{\zeta^{-1}}) = c' \cdot T(\phi_{\zeta^{-1}}).$$

由于 ζ 是 M中心中的正元素，正情形的结果表明

$$\begin{aligned}t_P(\phi_\zeta) &= \frac{\left|K_M/\left(K_M \cap \zeta K_M \zeta^{-1}\right)\right|^{1/2}}{\left|K/\left(K \cap \zeta K \zeta^{-1}\right)\right|^{1/2}} T(\phi_\zeta) \\ &= \left|K/\left(K \cap \zeta K \zeta^{-1}\right)\right|^{-1/2} T(\phi_\zeta).\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}1 &= t_P(\phi_{\zeta^{-1}}) * t_P(\phi_\zeta) \\ &= c' \cdot \left|K/\left(K \cap \zeta K \zeta^{-1}\right)\right|^{-1/2} T(\phi_{\zeta^{-1}}) * T(\phi_\zeta).\end{aligned}$$

比较在 1 处的取值，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{V_\rho} &= c' \cdot \left|K/\left(K \cap \zeta K \zeta^{-1}\right)\right|^{-1/2} \int_{G(F)} \left(T(\phi_{\zeta^{-1}})\right)(g) \circ \left(T(\phi_\zeta)\right)(g^{-1}) dg \\ &= c' \cdot \left|K/\left(K \cap \zeta K \zeta^{-1}\right)\right|^{-1/2} \left|K\zeta^{-1}K/K\right| \mathrm{id}_{V_\rho} \\ &= c' \cdot |K\zeta K/K|^{-1/2} \left|K\zeta^{-1}K/K\right| \mathrm{id}_{V_\rho}.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$c' = |K\zeta K/K|^{1/2} \left|K\zeta^{-1}K/K\right|^{-1} \tag{4.10}$$

回顾一下，我们将 $G(F)$ 上的哈尔测度归一化，使得 K 的体积等于 1。对于 $G(F)$ 的一个开子集 U，用 $\mathrm{vol}(U)$ 表示 U 关于此哈尔测度的体积。于是，我们有

$$\begin{aligned}|K\zeta K/K| &= \mathrm{vol}\,(K\zeta K)\\ &= \mathrm{vol}\left((K\zeta K)^{-1}\right)\\ &= \mathrm{vol}\left(K\zeta^{-1}K\right)\\ &= \left|K\zeta^{-1}K/K\right|.\end{aligned}$$

将其代入方程（4.10），我们得到

$$c' = \left|K\zeta^{-1}K/K\right|^{-1/2}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\left\|t_P(\phi_{\zeta^{-1}})\right\|_G &= \left\|c'\cdot T(\phi_{\zeta^{-1}})\right\|_G\\ &= c'\left\|T(\phi_{\zeta^{-1}})\right\|_G\\ &= c'\left|K\zeta^{-1}K/K\right|^{1/2}\left\|\left(T(\phi_{\zeta^{-1}})(\zeta^{-1})\right)\right\|\\ &= c'\left|K\zeta^{-1}K/K\right|^{1/2}\left\|\phi_{\zeta^{-1}}(\zeta^{-1})\right\|\\ &= c'\left|K\zeta^{-1}K/K\right|^{1/2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

现在，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|t_P(\phi)\right\|_G &= \left\|t_P(\phi_{\zeta^{-1}}) * t_P\left(\phi_\zeta * \phi\right)\right\|_G\\ &\le \left\|t_P(\phi_{\zeta^{-1}})\right\|_G\left\|t_P\left(\phi_\zeta * \phi\right)\right\|_G\\ &= \left\|t_P\left(\phi_\zeta * \phi\right)\right\|_G.\end{aligned}$$

□

我们将 t_P 转化为一个单同态

$$\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\right)$$

通过同构（4.1）和同构（4.2），并用同一符号 t_P 表示它。

现在，我们有两个单射

$$I_P^G\colon \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right)$$

and

$$t_P\colon \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\right).$$

下面的命题指出，这个同构

$$I_U\colon \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right)$$

与这些单射相容。

命题 4.7。以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle t_P} & \circlearrowleft & \Big\downarrow{\scriptstyle I_P^G}\\ \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\right) & \xrightarrow{I_U} & \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right)\end{array}.$$

证明。根据关于 $t' = I_U^{-1} \circ I_P^G$ 的引理 4.4，只需证明

$$I_U(t_P(\Phi)) = I_P^G(\Phi)$$

对于任意的 $\Phi \in \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$，它通过同构（4.2）对应于元素 $\phi \in \mathcal{H}^+(M(F), \rho_M)$。此外，我们可以假设 ϕ 的支集包含于某个 $K_M z K_M$ 中。令 $\phi \in \mathcal{H}^+(M(F), \rho_M)$ 为这样的元素。那么，通过同构（4.2）与 ϕ 对应的元素 $\Phi \in \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$ 定义为

$$(\Phi(f))(x) = \int_{M(F)} \phi(y) \cdot f(y^{-1}x) dy$$

对于 $f \in \mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)$ 和 $x \in M(F)$。

令 F_U 为 $I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$ 的一个元素。记

$$f_U = I_{U,1}^{-1}(F_U)$$

and

$$f = I_U^{-1}(F_U).$$

要证明该命题，只需证明

$$(I_U(t_P(\Phi)))(F_U) = \left(I_P^G(\Phi)\right)(F_U),$$

等价地，

$$I_{U,2}\left((t_P(\Phi))(f)\right) = I_{U,1}^{-1}\left(\left(I_P^G(\Phi)\right)(F_U)\right). \tag{4.11}$$

对任意 $F_U \in I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$。

首先，我们计算 (4.11) 的左端。对于 $x \in G(F)$，有

$$\begin{aligned}
((t_P(\Phi))(f))(x) &= \int_{G(F)} (t_P(\phi))(y) \cdot f(y^{-1}x) dy \\
&= \int_{G(F)} \left(T(\phi \cdot \delta_P^{-1/2})\right)(y) \cdot f(y^{-1}x) dy \\
&= \int_{KzK} \left(T(\phi \cdot \delta_P^{-1/2})\right)(y) \cdot f(y^{-1}x) dy \\
&= \sum_{y \in KzK/K} \left(T(\phi \cdot \delta_P^{-1/2})\right)(y) \cdot f(y^{-1}x) \\
&= \sum_{k \in K/(K \cap zKz^{-1})} \left(T(\phi \cdot \delta_P^{-1/2})\right)(kz) \cdot f(z^{-1}k^{-1}x).
\end{aligned}$$

由于 K 关于 U、M、$\overline{U}$ 分解，且 z 正规化 U、M、$\overline{U}$，因此有

$$K = K_U \cdot K_M \cdot K_{\overline{U}},$$

$$zKz^{-1} = (zK_Uz^{-1}) \cdot (zK_Mz^{-1}) \cdot (zK_{\overline{U}}z^{-1}),$$

and

$$K \cap zKz^{-1} = (K_U \cap zK_Uz^{-1}) \cdot (K_M \cap zK_Mz^{-1}) \cdot (K_{\overline{U}} \cap zK_{\overline{U}}z^{-1}).$$

此外，由于 $z \in I^+$，我们得到

$$K_U \cap zK_Uz^{-1} = zK_Uz^{-1}$$

and

$$K_{\overline{U}} \cap zK_{\overline{U}}z^{-1} = K_{\overline{U}}.$$

因此，我们可以将求和的指标改写为

$$\sum_{k \in K/(K \cap zKz^{-1})} (*)(k) = \sum_{k_M \in K_M/(K_M \cap zK_Mz^{-1})} \sum_{k_U \in K_U/zK_Uz^{-1}} (*)(k_Uk_M).$$

因此，对于 $g \in G(F)$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left(I_{U,2}\left(\left(t_P(\Phi)\right)(f)\right)\right)(g)\\
&=\int_{U(F)}\left(\left(t_P(\Phi)\right)(f)\right)(ug)du\\
&=\int_{U(F)}\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\sum_{k_U\in K_U/zK_Uz^{-1}}\left(T(\phi\cdot\delta_P^{-1/2})\right)(k_Uk_Mz)\cdot f(z^{-1}k_M^{-1}k_U^{-1}ug)du\\
&=\delta_P(z)^{-1/2}\int_{U(F)}\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\sum_{k_U\in K_U/zK_Uz^{-1}}\left(T(\phi)\right)(k_Uk_Mz)\cdot f(z^{-1}k_M^{-1}k_U^{-1}ug)du\\
&=\delta_P(z)^{-1/2}\int_{U(F)}\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\sum_{k_U\in K_U/zK_Uz^{-1}}\left(\rho(k_Uk_M)\circ\left(T(\phi)\right)(z)\right)\cdot f(z^{-1}k_M^{-1}k_U^{-1}ug)du\\
&=\delta_P(z)^{-1/2}\int_{U(F)}\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\sum_{k_U\in K_U/zK_Uz^{-1}}\left(\rho_M(k_M)\circ\phi(z)\right)\cdot f(z^{-1}k_M^{-1}k_U^{-1}ug)du\\
&=\delta_P(z)^{-1/2}\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\sum_{k_U\in K_U/zK_Uz^{-1}}\left(\rho_M(k_M)\circ\phi(z)\right)\cdot\left(\int_{U(F)}f(z^{-1}k_M^{-1}k_U^{-1}ug)du\right)\\
&=\delta_P(z)^{-1/2}\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\sum_{k_U\in K_U/zK_Uz^{-1}}\left(\rho_M(k_M)\circ\phi(z)\right)\cdot\left(\int_{U(F)}f(z^{-1}k_M^{-1}ug)du\right)\\
&=\delta_P(z)^{-1/2}\left|K_U/zK_Uz^{-1}\right|\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\left(\rho_M(k_M)\circ\phi(z)\right)\cdot\left(\int_{U(F)}f(z^{-1}k_M^{-1}ug)du\right)\\
&=\delta_P(z)^{-1/2}\cdot\delta_P(z)\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\left(\rho_M(k_M)\circ\phi(z)\right)\cdot\left(\int_{U(F)}f(z^{-1}k_M^{-1}ug)du\right)\\
&=\delta_P(z)^{1/2}\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\left(\rho_M(k_M)\circ\phi(z)\right)\cdot\left(\int_{U(F)}f(z^{-1}k_M^{-1}ug)du\right).
\end{aligned}
$$

倒数第二个等式使用了引理 4.2。

接下来，我们计算式 (4.11) 的右侧。对于 $g \in G(F)$，有

$$
\begin{aligned}
&\left(I_{U,1}^{-1}\left(\left(I_P^G(\Phi)\right)(F_U)\right)\right)(g)\\
&=\left(\left(\left(I_P^G(\Phi)\right)(F_U)\right)(g)\right)(1)\\
&=\left(\Phi\left(F_U(g)\right)\right)(1)\\
&=\int_{M(F)}\phi(y)\cdot\left(F_U(g)\right)(y^{-1})dy\\
&=\int_{K_MzK_M}\phi(y)\cdot\left(F_U(g)\right)(y^{-1})dy\\
&=\sum_{y\in K_MzK_M/K_M}\phi(y)\cdot\left(F_U(g)\right)(y^{-1})\\
&=\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\phi(k_Mz)\cdot\left(F_U(g)\right)(z^{-1}k_M^{-1})\\
&=\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\left(\rho_M(k_M)\circ\phi(z)\right)\cdot\left(F_U(g)\right)(z^{-1}k_M^{-1})\\
&=\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\left(\rho_M(k_M)\circ\phi(z)\right)\cdot\left(\delta_P(z^{-1}k_M^{-1})^{1/2}\cdot f_U(z^{-1}k_M^{-1}g)\right)\\
&=\delta_P(z)^{-1/2}\sum_{k_M\in K_M/(K_M\cap zK_Mz^{-1})}\left(\rho_M(k_M)\circ\phi(z)\right)\cdot\left(f_U(z^{-1}k_M^{-1}g)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \delta_P(z)^{-1/2} \sum_{k_M \in K_M/(K_M \cap zK_M z^{-1})} (\rho_M(k_M) \circ \phi(z)) \cdot \left(\int_{U(F)} f(uz^{-1}k_M^{-1}g)du \right)$$

$$= \delta_P(z)^{-1/2} \sum_{k_M \in K_M/(K_M \cap zK_M z^{-1})} (\rho_M(k_M) \circ \phi(z)) \cdot \left(\int_{U(F)} f(z^{-1}k_M^{-1}(k_M z u z^{-1} k_M^{-1})g)du \right)$$

$$= \delta_P(z)^{-1/2} \cdot \delta_P(k_M z) \sum_{k_M \in K_M/(K_M \cap zK_M z^{-1})} (\rho_M(k_M) \circ \phi(z)) \cdot \left(\int_{U(F)} f(z^{-1}k_M^{-1}ug)du \right)$$

$$= \delta_P(z)^{-1/2} \cdot \delta_P(z) \sum_{k_M \in K_M/(K_M \cap zK_M z^{-1})} (\rho_M(k_M) \circ \phi(z)) \cdot \left(\int_{U(F)} f(z^{-1}k_M^{-1}ug)du \right)$$

$$= \delta_P(z)^{1/2} \sum_{k_M \in K_M/(K_M \cap zK_M z^{-1})} (\rho_M(k_M) \circ \phi(z)) \cdot \left(\int_{U(F)} f(z^{-1}k_M^{-1}ug)du \right),$$

这等于 $(I_{U,\ 2}((t_P(\Phi))\ (f)))\ (g)$。 □

5. The case of depth-zero types

本节回顾零深度类型（K, ρ）在 [Mor93] 中的自同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$ 的描述。

令 S 为 G 的极大分裂环面，并分别用 $\Phi = \Phi(G,S)$ 和 $\Phi^\vee = \Phi^\vee(G,S)$ 表示相对于 S 的相对根集和相对余根集。令 V 表示 $\Phi^\vee(G,S)$ 的 $\mathbb{R}$-张成。用 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G,S)$ 表示 S 的约化公寓。因此， $\mathcal{A}$ 是一个仿射空间，其平移向量空间为 V。布鲁哈特和蒂茨的工作 [BT72] 将一个仿射根系 $\Phi_{\mathrm{aff}} = \Phi_{\mathrm{aff}}(G,S)$ 与 (G,S) 关联起来，该根系定义在 $\mathcal{A}$ 上（参见 [Tit79，第 1] 节）。对于 $a \in \Phi_{\mathrm{aff}}$，令 Da 表示 a 的梯度。对于一个子集 $\Psi \subset \Phi_{\mathrm{aff}}$，我们记作

$$D\Psi = \{Da \mid a \in \Psi\}.$$

我们注意到

$$D\Phi_{\mathrm{aff}} = \Phi.$$

我们将 A' 记作 $\mathcal{A}$ 上仿射线性函数构成的空间，即由 Φ_{aff} 张成。对于 $\alpha \in \Phi$，令s_α 表示 V 上相应的反射；对于 $a \in \Phi_{\mathrm{aff}}$，令 s_a 表示 $\mathcal{A}$ 上相应的反射。令 W_0 表示根系 Φ 的魏尔群，W_{aff} 表示仿射根系 Φ_{aff}的仿射魏尔群。因此， W_0 由 s_α $(\alpha \in \Phi)$生成，而 W_{aff} 由 s_a $(a \in \Phi_{\mathrm{aff}})$生成。我们将元素 $w \in W_{\mathrm{aff}}$ 的导数 $Dw \in W_0$ 定义为

$$w(x+v) = w(x) + (Dw)(v)$$

对所有 $x \in \mathcal{A}$ 和 $v \in V$均成立。我们还记

$$W = N_G(S)(F)/Z_G(S)(F)_0,$$

其中， $N_G(S)(F)$表示 $G(F)$ 中 S的正规化子，而 $Z_G(S)(F)_0$表示相对于 S， G 中最小半标准利维子群 $Z_G(S)$ 的唯一抛物型子群。我们将 W 的元素在 $N_G(S)(F)$ 中的提升固定为 Mor93，命题 5.2]，并将 $w \in W$ 的提升记作 $\dot{w} \in N_G(S)(F)$。对于包含 $Z_G(S)(F)_0$, 的 $G(F)$ 的子集 H，令 W_H表示子集

$$\left(N_G(S)(F) \cap H\right)/Z_G(S)(F)_0$$

W。根据 [Tit79, 1.2]， W 作用于仿射空间 $\mathcal{A}$。令 ν 表示这一作用。令 G'表示 $G(F)$中由 $G(F)$ 的所有抛物型子群生成的开子群。根据[BT84, 5.2.12]，， ν 在 $W_{G'}$ 上的限制诱导出一个同构

$$W_{G'} \simeq W_{\mathrm{aff}}$$

（另见 [Mor93, 3.2, 3.12]）。我们将 $W_{G'}$ 与 W_{aff} 等同，并将 W_{aff} 视为 W的子群。根据 [Tit79, 1.7]， W_{aff} 是 W的正规子群。我们固定仿射根系 Φ_{aff}的一个室 C，并令 $B \subset \Phi_{\mathrm{aff}}$表示 Φ_{aff} 的相应基。室 C确定了一组正仿射根 Φ^+ 仿射，其

$$\Phi^+_{\mathrm{aff}} = \{a \in \Phi_{\mathrm{aff}} \mid a(x) > 0\ (x \in C)\}.$$

我们假设仿射根系 Φ_{aff} 是不可约的。

注5.1。我们假设 Φ_{aff} 是不可约的，因为 [Mor93] 中已有此假设（参见 [Mor93, 3.14 (a)]）。不过，当 Φ_{aff} 不可约时， [Mor93] 的修正以及我们的结果可以通过逐个分支论证得到。

我们固定一个真子集 $J \subset B$。于是，可以按照 [Mor93, 3.7]，将 J 与 $G(F)$ 的一个抛物型子群 P_J 联系起来。我们还有 P_J 的一个开正规子群 U_J，称为 P_J 的根基，使得商群 P_J/U_J 同构于一个定义在 k_F [上的连通约化群 $\mathbf{M}_J$ 的 k_F-值点群，见 Mor93, 3.13]。我们注意到， P_J 和 U_J 不仅取决于 J，也取决于 B。强调对 B 的依赖关系时，我们写作 $P_J = P_{J、B}$ 和 $U_J = U_{J、B}$。此外，对于包含 J 的 Φ_{aff} 的另一个基 B'，相应的 $G(F)$ 的子群记作 $P_{J、B'}$ 和 $U_{J、B'}$。在 [Mor93, 3.15], 中，Morris 定义了 G 的一个约化子群 $\mathfrak{M}$ 及其抛物型子群

$$\mathcal{M}_J = P_J \cap \mathfrak{M}(F)$$

它们仅依赖于 S 和 J。更确切地说， $\mathcal{M}_J$ 是由以下元素生成的群

$$\{Z_G(S)(F)_0, U_a \mid a \in \Phi_{\mathrm{aff}} \cap A'_J\},$$

其中， A'_J 表示由 J张成的 A' 的子空间，而 U_a 表示 Mor93, 3.12], 中定义的群，它是与 Da对应的根子群 U_{Da} 的一个紧开子群。我们将 $\mathcal{M}_J$的根基记作$\mathcal{U}_J$。于是，根据 Mor93, 3.15], , 包含映射

$$\mathcal{M}_J \to P_J$$

诱导出一个同构

$$\mathcal{M}_J/\mathcal{U}_J \to P_J/U_J \simeq \mathbf{M}_J(k_F).$$

我们将 $\mathbf{M}_J(k_F)$ 与 $\mathcal{M}_J/\mathcal{U}_J$等同，后者不依赖于 B。特别地，对于另一个基 B'，我们可以将$P_{J、B}/U_{J、B}$ 分别与 $P_{J、B'}/U_{J、B'}$ 自然地等同。

设 (ρ, V_ρ) 是 $\mathbf{M}_J(k_F)$ 的一个不可约尖点表示。我们也通过膨胀将 ρ视为 P_J 的一个不可约光滑表示。我们将在 Mor93]中说明端同态环 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_J}^{G(F)}(\rho)\right)$ 的描述。

Morris 在 [Mor93, 4.16] 中定义了 W 的子群 $W(J,\rho)$,

$$W(J,\rho) = \{w \in W \mid wJ = J,\ {}^{\dot{w}}\rho \simeq \rho\}.$$

这里，我们通过膨胀将 ρ 视为 $\mathcal{M}_J$ 的不可约表示。群 $W(J,\rho)$ 有一个子群 $R(J,\rho)$，它同构于仿射根系 $\Gamma'(J,\rho)$ 的仿射魏尔群。我们将解释 $\Gamma'(J,\rho)$ 和 $R(J,\rho)$ 的定义。

当 $|B\backslash J| = 1$ 时，我们令 $\Gamma'(J,\rho) = \emptyset$，且 $R(J,\rho) = \{1\}$。在这种情况下，我们所有的结果都变得平凡。因此，在本文余下部分中，我们假设 $|B\backslash J| > 1$。令 $a \in \Phi_{\mathrm{aff}}\backslash A'_J$ 满足 $J \cup \{a\}$ 包含在 Φ_{aff} 的一个基 B' 中。对于 $* = J$ 或 $* = J \cup \{a\}$，令 W_* 表示由 $s_b\,(b \in *)$ 生成的 W 的子群。令 u 表示 $W_{J\cup\{a\}}$ 中满足以下条件的唯一元素

$$u(J \cup \{a\}) = -(J \cup \{a\}).$$

我们还将满足下式的元素 $t \in W_J$ 定义为

$$tJ = -J.$$

我们定义

$$v[a, J] = ut.$$

对于满足 $v[a,J] \in W(J,\rho)$ 的元素 $a \in \Phi_{\mathrm{aff}}\backslash A'_J$，我们如下定义数值 $p_a \geq 1$（参见 Mor93，第 7.1] 小节）。我们有抛物型子群 $P_{J\cup\{a\},\ B'}$，其根基为 $U_{J\cup\{a\},\ B'}$，与 $J \cup \{a\} \subset B'$ 相关联。我们还有一个定义在 k_F 上的连通约化群 $\mathbf{M}^{J\cup\{a\}}$，使得 $P_{J\cup\{a\},\ B'}/U_{J\cup\{a\},\ B'}$ 同构于 $\mathbf{M}^{J\cup\{a\}}(k_F)$。于是，我们有

$$U_{J\cup\{a\},B'} \subset U_{J,B'} \subset P_{J,B'} \subset P_{J\cup\{a\},B'}.$$

此外，根据 [BT84，定理 4.6.33], , 商群 $P_{J,B'}/U_{J\cup\{a\},B'}$ 可与 $\mathbf{M}$ 的某个抛物子群的 k_F-值点群相识别，该抛物子群的 Levi 因子为 $\mathbf{M}^{J\cup\{a\}}$。我们考虑抛物诱导表示

$$\mathrm{ind}_{P_{J,B'}/U_{J\cup\{a\},B'}}^{\mathbf{M}_{J\cup\{a\}}(k_F)}(\rho)$$

$\mathbf{M}^{J\cup\{a\}}(k_F)$ 的表示。假设 $v[a,J]\in W(J,\rho)$，则该表示分裂为两个不等价不可约表示 ρ_1 和 ρ_2。不妨设 $\dim(\rho_1)\leq\dim(\rho_2)$，并将 p_a 定义为

$$p_a=\frac{\dim(\rho_2)}{\dim(\rho_1)}.$$

根据 [Mor93 第7.1]小节， p_a 不依赖于 B'的选择。我们定义

$$\Gamma(J,\rho)=\{a\in\Phi_{\mathrm{aff}}\backslash A'_J\mid v[a,J]\in W(J,\rho),\ p_a>1\},$$

并令 $R(J,\rho)$ 为 $W(J,\rho)$ 中由所有 $a\in\Gamma(J,\rho)$ 的 $v[a,J]$ 生成的子群。 $v[a,J]$ 的定义意味着， $v[a,J]$ 的任意提升都包含于 $G(F)$ 的一个抛物型子群中。因此，我们有

$$R(J,\rho)\subset W_{G'}=W_{\mathrm{aff}}.$$

特别地，我们有

$$R(J,\rho)\subset W_{G^1}. \tag{5.1}$$

根据 [Mor93 引理 7.2]， $\Gamma(J,\rho)$ 是 $W(J,\rho)$-不变的。因此， $R(J,\rho)$ 是 $W(J,\rho)$ 的一个正规子群。我们将 $\Gamma'(J,\rho)$ 定义为 $\Gamma(J,\rho)$ 在 A'/A'_J 上经自然投影所得的像。我们还定义

$$\Gamma(J,\rho)^+=\Gamma(J,\rho)\cap\Phi^+_{\mathrm{aff}}$$

以及将 $\Gamma'(J,\rho)^+$ 定义为 $\Gamma(J,\rho)^+$ 在 A'/A'_J 上的投影。

我们可以如下将 $\Gamma'(J,\rho)$ 视为欧几里得空间 $\mathcal{A}^J_\Gamma$ 上的一组仿射线性函数。令

$$\mathcal{A}^J=\{x\in\mathcal{A}\mid a(x)=0\ (a\in J)\}.$$

那么， $\mathcal{A}^J$ 是一个仿射空间，其平移向量空间为

$$V^J=\{y\in V\mid\alpha(y)=0\ (\alpha\in DJ)\}.$$

我们还将 V^Γ 定义为

$$V^\Gamma=\{y\in V\mid\alpha(y)=0\ (\alpha\in D\Gamma(J,\rho))\},$$

and

$$V^{J,\Gamma}=V^J\cap V^\Gamma.$$

最后，我们定义

$$\mathcal{A}^J_\Gamma=\mathcal{A}^J/V^{J,\Gamma},$$

它是一个仿射空间，其平移向量空间为

$$V^J_\Gamma=V^J/V^{J,\Gamma}.$$

设 $(,)_0$ 是 V上的一个 W_0-不变内积。对于它在 V的子空间上的限制，我们也使用相同的记号 $(,)_0$。令 $(V^{J,\ \Gamma})^\perp$ 表示 $V^{J,\ \Gamma}$ 在 V^J 中关于 $(,)_0$ 的正交补。那么，自然投影 $V^J\to V^J_\Gamma$ 限制为一个同构

$$(V^{J,\Gamma})^\perp\to V^J_\Gamma. \tag{5.2}$$

我们通过 (5.2) 将 V^J_Γ上的内积 $(,)_0$ 从 $(V^{J,\Gamma})^\perp$ 传递过来，从而在 V^J_Γ上定义一个内积。因此，仿射空间 $\mathcal{A}^J_\Gamma$ 是一个欧几里得空间，并且我们可以将 $\Gamma'(J,\rho^M_0)$自然地视为 $\mathcal{A}^J_\Gamma$上的一组仿射线性函数。此外，我们得到以下结果：

命题 5.2（[Mor93，命题 7.3 (a)]）。集合 $\Gamma'(J,\rho)$ 是 $\mathcal{A}^J_\Gamma$上的一个仿射根系，而 $\Gamma'(J,\rho)^+$ 是 $\Gamma'(J,\rho)$ 的一组正仿射根。对于 $a\in\Gamma(J,\rho)$，令 $s_{a+A'_J}$ 表示 $\mathcal{A}^J_\Gamma$ 上对应于 $a+A'_J\in\Gamma'(J,\rho)$ 的反射，并令 $W_{\mathrm{aff}}(\Gamma'(J,\rho))$ 表示仿射根系 $\Gamma'(J,\rho)$ 的仿射魏尔群。于是， $v[a,J]\in R(J,\rho)$ 对 $\mathcal{A}$ 的作用保持 $\mathcal{A}^J$，并在 $\mathcal{A}^J_\Gamma$ 上诱导出一个定义良好的作用，该作用与 $s_{a+A'_J}$一致。此外，映射

$$v[a,J]\mapsto s_{a+A'_J}$$

定义了一个同构

$$R(J,\rho)\to W_{\mathrm{aff}}\left(\Gamma'(J,\rho)\right).$$

我们还注意到以下几点：

引理 5.3（参见 [How80，定理 6]）。仿射根系 $\Gamma'(J,\rho)$ 是约化的。

证明。设 $a_1, a_2 \in \Gamma(J,\rho)$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得

$$a_1 + A'_J = \lambda\,(a_2 + A'_J)\,. \tag{5.3}$$

对于 $i = 1, 2$，令 A'_i 表示由 $J \cup \{a_i\}$ 张成的 A' 子空间。于是，假设 (5.3) 蕴含 es $A'_1 = A'_2$。因此，我们得到

$$a_2 \in A'_2 = A'_1.$$

由于 $J \cup \{a_1\}$ 包含在 Φ_{aff} 的一个基中，我们可以写成

$$a_2 = m_1 a_1 + \sum_{b\in J} m_b b$$

其系数 m_1、m_b 为有理整数。类似地，我们得到

$$a_1 \in A'_1 = A'_2,$$

并且我们可以写成

$$a_1 = m_2 a_2 + \sum_{b\in J} m'_b b$$

其中有理整数系数为 m_2, m'_b。现在，我们有

$$a_1 = m_1 m_2 a_1 + \sum_{b\in J} (m_2 m_b + m'_b) b.$$

再次利用 $J \cup \{a_1\}$ 包含于 Φ_{aff} 的某个基中的假设，我们得出 $m_1 m_2 = 1$，因此 $m_1, m_2 \in \{\pm 1\}$。由此可知

$$a_1 = m_2 a_2 + \sum_{b\in J} m'_b b \in \pm(a_2 + A'_J),$$

因此 $\lambda = \pm 1$。于是， $\Gamma'(J,\rho)$ 是一个约化仿射根系。 □

推论 5.4。设 $a_1, a_2 \in \Gamma(J,\rho)^+$ 满足

$$a_1 + A'_J = \lambda\,(a_2 + A'_J)$$

对某个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 成立。于是，我们得到 $a_1 = a_2$。特别地，映射

$$\Gamma(J,\rho)^+ \to \Gamma'(J,\rho)^+$$

定义为

$$a \mapsto a + A'_J$$

是单射。

证明。由于 a_1 和 a_2 为正数，Lemma 5.3 的证明中的系数 m_1、m_2、m_b、m'_b 均为非负数。因此，方程

$$a_1 = m_1 m_2 a_1 + \sum_{b\in J} (m_2 m_b + m'_b) b.$$

推出

$$m_1 = m_2 = 1,\ m_b = m'_b = 0\ (b \in J).$$

因此，我们有 $a_1 = a_2$。 □

对于 $a' \in \Gamma'$（J、ρ），令 $D_J(a')$ 表示 a' 的梯度，即在 V_Γ^J 上的一个线性函数。因此，对于 $a \in \Gamma$（J、ρ），我们得到

$$D_J(a + A'_J) = (Da)\restriction_{V^J}.$$

这里，我们将 V_Γ^J 上的线性函数 $D_J(a + A'_J)$ 与 V^J 上在 V^J 上取值为零的线性函数等同，Γ。

令 $B(J,\rho)$ 表示相对于正系 $\Gamma'(J,\rho)^+$ 的 $\Gamma'(J,\rho)$ 的基，并将 $S(J,\rho)$ 定义为 $W_{\mathrm{aff}}(\Gamma'(J,\rho))$ 的子集，如下：

$$S(J,\rho) = \{s_{a'} \mid a' \in B(J,\rho)\}.$$

Let

$$C(J,\rho) = \{w \in W(J,\rho) \mid w(\Gamma(J,\rho)^+) \subset \Gamma(J,\rho)^+\}.$$

根据 [Mor93，命题 7.3 (b)]，，我们有

$$W(J,\rho) = R(J,\rho) \rtimes C(J,\rho).$$

对于 $w \in W(J,\rho)$，Morris 定义了一个元素 $\Phi_w \in$端同态环$_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_J}^{G(F)}(\rho)\right)$，使得经由同构（4.1）对应的元素 $\phi_w \in \mathcal{H}(G(F)\ \rho)$ 的支集为 $P_J\dot{w}P_J$。我们注意到，此处的元素 Φ_w 在 [Mor93 的第 7] 节中记作 T_w。以下定理是 [Mor93]的主要定理：

定理 5.5（[Mor93，定理 7.12]）。自同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_J}^{G(F)}(\rho)\right)$ 有一组基

$$\{\Phi_w \mid w \in W(J,\rho)\}$$

作为一个向量空间。此外，该代数的乘法可描述如下：设$w \in W(J,\rho)$、 $t \in C(J,\rho)$，并令 $v = v[a,J]$ 为一个元素 $a \in \Gamma(J,\rho)^+$，使得 $a + A'_J \in B(J,\rho)$。那么，

(1)
$$\Phi_w\Phi_t = \chi(w,t)\Phi_{wt},$$

(2)
$$\Phi_t\Phi_w = \chi(t,w)\Phi_{tw},$$

(3)
$$\Phi_v\Phi_w = \begin{cases} \Phi_{vw} & (w^{-1}(a) \in \Gamma(J,\rho)^+), \\ p_a\Phi_{vw} + (p_a - 1)\Phi_w & (w^{-1}(a) \in -\Gamma(J,\rho)^+), \end{cases}$$

(4)
$$\Phi_w\Phi_v = \begin{cases} \Phi_{wv} & (wa \in \Gamma(J,\rho)^+), \\ p_a\Phi_{wv} + (p_a - 1)\Phi_w & (wa \in -\Gamma(J,\rho)^+). \end{cases}$$

Here， χ 表示定义在 $W(J,\rho) \times W(J,\rho)$ 上的 2-余循环，见 [Mor93, 7.11]（其中记作 μ ）.

我们在 $S(J,\rho)$ 上定义参数函数 q，如下：

$$q_{s_{a+A'_J}} = p_a \tag{5.4}$$

对于 $a \in \Gamma(J,\rho)^+$，使得 $a + A'_J \in B(J,\rho)$。根据推论 5.4，任何满足以下条件的元素 $b \in \Gamma(J,\rho)^+$

$$s_{a+A'_J} = s_{b+A'_J}$$

等于 a。因此，参数 $q_{s_{a+A'_J}}$ 是良定义的。此外，根据 [Mor93，引理 7.2 (b)]，，函数 q 满足附录 B 中的条件 (B.1)。令 $\mathcal{H}(W_{\mathrm{aff}}(\Gamma'(J,\rho))\ q)$ 表示与 Coxeter 系统 $(W_{\mathrm{aff}}(\Gamma'(J,\rho))\ S(J,\rho))$ 及参数函数 q相关联的 Iwahori-Hecke代数。我们将 $\mathcal{H}(W_{\mathrm{aff}}(\Gamma'(J,\rho))\ q)$ 的标准基写作

$$\{T_w^{\mathrm{Mor}} \mid w \in W_{\mathrm{aff}}\left(\Gamma'(J,\rho)\right)\}.$$

于是，我们得到：

推论 5.6. 令 $\mathcal{H}(R(J,\rho))$ 表示由以下元素张成的 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_J}^{G(F)}(\rho)\right)$ 的子空间

$$\{\Phi_w \mid w \in R(J,\rho)\}.$$

于是， $\mathcal{H}(R(J,\rho))$ 是 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_J}^{G(F)}(\rho)\right)$ 的子代数。此外，存在一个同构

$$I^{\mathrm{Mor}}\colon \mathcal{H}(R(J,\rho)) \to \mathcal{H}\left(W_{\mathrm{aff}}\left(\Gamma'(J,\rho)\right), q\right)$$

使得

$$I^{\mathrm{Mor}}\left(\Phi_{v[a,J]}\right) = T^{\mathrm{Mor}}_{s_{a+A'_J}}$$

对所有 $a \in \Gamma(J,\rho)$。

我们用仿射赫克代数的语言改写推论 5.6。我们沿用附录 B 中的记号。仿射根系 $\Gamma'(J,\rho)$ 未必不可约。不过，我们可以逐个分支地论证，将附录 B 的结果应用于这种情况。对于位于与基 $B(J,\rho)$ 对应的室的闭包中的 $\Gamma'(J,\rho)$，固定一个特殊点e。根据定理 B.3，Iwahori-Hecke代数 $\mathcal{H}(W_{\mathrm{aff}}(\Gamma'(J,\rho))\ q)$ 同构于与带基根数据

$$\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}} = \mathcal{H}\left(\mathcal{R}^{\mathrm{Mor}}, \lambda^{\mathrm{Mor}}, (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}, q_F\right)$$

相关联的仿射赫克代数

$$\mathcal{R}^{\mathrm{Mor}} = \left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^{\vee}, \mathbb{Z}\right), R^{\mathrm{Mor}}, \mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^{\vee}, (R^{\mathrm{Mor}})^{\vee}, \Delta^{\mathrm{Mor}}\right),$$

标签函数

$$\lambda^{\mathrm{Mor}}, (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}} \colon \Delta^{\mathrm{Mor}} \to \mathbb{R}_{>0},$$

以及参数 q_F。我们解释带基根数据 $\mathcal{R}^{\mathrm{Mor}}$ 和标签函数 λ^{Mor}，$(\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}$ 的定义（更多细节请参见附录 B 的最后一部分）。令 $\Gamma'(J,\rho)_e$ 表示在 $\Gamma'(J,\rho)$ 中于 e 处取零的仿射根集合，并记

$$\Gamma'(J,\rho)_e^+ = \Gamma'(J,\rho)_e \cap \Gamma'(J,\rho)^+$$

and

$$B(J,\rho)_e = \Gamma'(J,\rho)_e \cap B(J,\rho).$$

我们定义

$$R^{\mathrm{Mor}} = \{D_J(a')/k_{a'} \mid a' \in \Gamma'(J,\rho)_e\}$$

and

$$(R^{\mathrm{Mor}})^{\vee} = \{k_{a'}(D_J(a'))^{\vee} \mid a' \in \Gamma'(J,\rho)_e\},$$

其中 $k_{a'}$ 是满足 $a' + k_{a'} \in \Gamma'(J,\rho)$ 的最小正实数，而 $(D_J(a'))^{\vee}$ 表示根系 $(D_J(\Gamma'(J,\rho)_e))^{\vee}$ 的对偶根系中的余根

$$D_J(\Gamma'(J,\rho)_e) = \{D_J(a') \mid a' \in \Gamma'(J,\rho)_e\},$$

对应于根 $D_J(a') \in D_J(\Gamma'(J,\rho)_e)$。我们用 $W_0\left(R^{\mathrm{Mor}}\right)$ 表示 R^{Mor} 的魏尔群，用 $W_{\mathrm{aff}}\left(R^{\mathrm{Mor}}\right)$ 表示 R^{Mor} 的仿射魏尔群。我们还定义

$$\Delta^{\mathrm{Mor}} = \{D_J(a')/k_{a'} \mid a' \in B(J,\rho)_e\}.$$

最后，我们定义标签函数

$$\lambda^{\mathrm{Mor}}, (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}} \colon \Delta^{\mathrm{Mor}} \to \mathbb{C},$$

as

$$\lambda^{\mathrm{Mor}}\left(D_J(a')/k_{a'}\right) = \log(q_{s_{a'}})/\log(q_F)$$

and

$$(\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}\left(D_J(a')/k_{a'}\right) = \begin{cases} \log(q_{s_{a'}})/\log(q_F) & \left(D_J(a')/k_{a'} \notin 2\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^{\vee}, \mathbb{Z})\right), \\ \log(q_{s_{b'}})/\log(q_F) & \left(D_J(a')/k_{a'} \in 2\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^{\vee}, \mathbb{Z})\right) \end{cases}$$

用于 $a' \in B(J,\rho)_e$。这里，b' 是 $B(J,\rho)\backslash B(J,\rho)_e$ 中与 a' 属于 $\Gamma'(J,\rho)$ 同一不可约分支的唯一元素。对于满足 $a' := a + A'_J \in B(J,\rho)_e$ 的 $a \in \Gamma(J,\rho)^+$，我们记

$$r(a) = D_J(a')/k_{a'}.$$

那么，参数函数 q (5.4) 的定义蕴含

$$\lambda^{\mathrm{Mor}}\left(r(a)\right) = \log(p_a)/\log(q_F) \tag{5.5}$$

and

$$(\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}\left(r(a)\right) = \begin{cases} \log(p_a)/\log(q_F) & \left(r(a) \notin 2\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^{\vee}, \mathbb{Z})\right), \\ \log(p_b)/\log(q_F) & \left(r(a) \in 2\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^{\vee}, \mathbb{Z})\right), \end{cases} \tag{5.6}$$

其中，$b \in \Gamma(J,\rho)^+$ 表示满足 $b + A'_J = b'$ 的唯一元素。特别地，λ^{Mor}、$(\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}$ 取值于 $\mathbb{R}_{>0}$。

我们将 (5.6) 改写如下。令 $a \in \Gamma(J,\rho)^+$ 满足 $a' := a + A'_J \in B(J,\rho)_e$。假设

$$D_J(a')/k_{a'} \in 2\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^{\vee}, \mathbb{Z}).$$

在这种情况下，包含 $D_J(a')/k_{a'}$ 的 R^{Mor} 的不可约分支的类型为 C_n $(n \geq 1)$，且 $n \geq 2$，$D_J(a')/k_{a'}$ 是长根。因此，关于基 Δ^{Mor}，$D_J(a')/k_{a'}$ 与包含 $D_J(a')/k_{a'}$ 的 R^{Mor} 的不可约分支的最高根 ϕ $W_0\left(R^{\mathrm{Mor}}\right)$-共轭。特别地，反射 $s_{1-(D_J(a')/k_{a'})}$ 与反射 $s_{1-\phi}W_0\left(R^{\mathrm{Mor}}\right)$-共轭。另一方面，反射 $s_{1-(D_J(a')/k_{a'})}$ 对应于反射

$$s_{k_{a'}-a'} \in W_{\mathrm{aff}}\left(\Gamma'(J,\rho)\right),$$

而反射 $s_{1-\phi}$ 对应于反射

$$s_{b'} \in W_{\mathrm{aff}}\left(\Gamma'(J,\rho)\right)$$

通过同构 (B.6)（参见同构 (B.6) 后面的段落）。因此，我们得到 $s_{k_{a'}-a'}$ 和 $s_{b'}$ 是 $W_{\mathrm{aff}}(\Gamma'(J,\rho))$-共轭的。于是，我们得到 $k_{a'}-a'$ 和 b' 是 $W_{\mathrm{aff}}(\Gamma'(J,\rho))$-关联的。令 $(k_{a'}-a') \in \Gamma(J,\rho)^+$ 表示满足以下条件的唯一元素

$$\widetilde{(k_{a'}-a')} + A'_J = k_{a'} - a',$$

并记作 $p'_a = p_{(k_{a'}-a')}$。接着，根据命题 5.2 和推论 5.4，我们得到 $(k_{a'}-a')$ 和 b 是 $R(J,\rho)$-关联的，因此 [Mor93, 引理7.2 (b)] 蕴含 $p_b = p'_a$。另一方面，对于满足 $a' = a + A'_J \in B(J,\rho)_e$ 的 $a \in \Gamma(J,\rho)^+$，并且

$$D_J(a')/k_{a'} \notin 2\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee, \mathbb{Z}),$$

我们可以按照.....的情形，以相同方式定义（$k_{a'}-a'$）和 p'_a

$$D_J(a')/k_{a'} \in 2\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee, \mathbb{Z}).$$

在这种情形下，存在 $t \in \mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee \subset W_{\mathrm{aff}}\left(R^{\mathrm{Mor}}\right)$，使得

$$D_J(a')(t)/k_{a'} = 1.$$

于是，我们得到

$$\left(t \cdot s_{D_J(a')/k_{a'}}\right)(D_J(a')/k_{a'}) = 1 - D_J(a')/k_{a'},$$

因此，$D_J(a')/k_{a'}$与 $1-(D_J(a')/k_{a'})$ 是 $W_{\mathrm{aff}}\left(R^{\mathrm{Mor}}\right)$-共轭的。因此，$a'$与 $k_{a'}-a'$是 $W_{\mathrm{aff}}(\Gamma'(J,\rho))$-共轭的。因此，在这种情形下，$a$与$(k_{a'}-a')$是 $R(J,\rho)$-共轭的，故$p_a = p'_a$。现在，我们可以将（5.6）改写为

$$(\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(r(a)) = \log(p'_a)/\log(q_F). \tag{5.7}$$

我们将 $R(J,\rho)$ 的一个子群 $T(J,\rho)$ 定义为

$$T(J,\rho) = \{t \in R(J,\rho) \mid (Dt)\restriction_{V^J} = \mathrm{id}\}.$$

T 对 $T(J,\rho)$ 的定义意味着，对于任意 $t \in T(J,\rho)$，存在 $v(t) \in (V^J,\Gamma)^\perp$，使得 t

$$t(x) = x + \widetilde{v(t)}$$

对所有 $x \in \mathcal{A}^J$。令 $v(t)$ 表示 $v(t)$ 在 V^J_Γ 上的投影。因此，

$$t(x) = x + v(t)$$

对所有 $x \in \mathcal{A}^J_\Gamma$。元素 $t \in T(J,\rho)$ 经由同构映射到 $v(t) \in \mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee \subset V^J_\Gamma$

$$R(J,\rho) \to W_{\mathrm{aff}}\left(\Gamma'(J,\rho)\right)$$

根据命题 5.2，且映射

$$t \mapsto v(t)$$

定义了一个同构

$$T(J,\rho) \to \mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee.$$

结合推论 5.6 与定理 B.3，我们得到:

推论 5.7。存在一个同构

$$I^{\mathrm{Mor}} \colon \mathcal{H}(R(J,\rho)) \to \mathcal{H}^{\mathrm{Mor}}$$

使得

$$I^{\mathrm{Mor}}\left(\Phi_{v[a,J]}\right) = T^{\mathrm{Mor}}_{s_{r(a)}}$$

对于 $a \in \Gamma(J,\rho)^+$ 使得 $a + A'_J \in B(J,\rho)_e$，且

$$I^{\mathrm{Mor}}(\Phi_t) = q^{1/2}_{v(t)} \cdot \theta_{v(t)}$$

对于所有 $a' \in B(J,\rho)_e$，满足 $(D_J(a'))(v(t)) \geq 0$ 的 $t \in T(J,\rho)$。

6. A review of Solleveld's results

本节回顾 [Sol22] 中的结果。设 $P = MU$ 是 G 的一个抛物子群，其 Levi 因子为 M，幺幂根基为 U。令 $N_G(M)(F)$ 表示 M 在 $G(F)$ 中的正规化子。设 (σ, E) 是 $M(F)$ 的一个不可约超尖表示，并令 $\mathfrak{s}_M$ 表示 M 中有序对 (M, σ) 的惯性等价类。取 $\sigma \restriction_{M^1}$ 的一个不可约子表示 σ_1。我们定义

$$M_\sigma = I_{M(F)}(\sigma_1) = \{m \in M(F) \mid^m \sigma_1 \simeq \sigma_1\}.$$

由于 M^1 是 $M(F)$ 的正规子群，且商群 $M(F)/M^1$ 是阿贝尔的，M_σ 与 σ_1 的选择无关。我们作如下假设：

假设 6.1。σ 对 M^1 的限制无重数（参见 [Sol22，工作假设 10.2]）。

注 6.2。根据 [Roc09，注 1.6.1，3], 假设 6.1 在许多情况下成立（另见 [Sol22，工作假设 10.2]之后的段落）：

- 当 M 的极大分裂中心环面的维数为 ≤ 1时，
- 当 M 是准分裂的且 (σ, E) 是泛型的，
- 当 M 是前两条中所述群的直积时。

此外，根据 [Roc09，命题 1.6.1，2], 假设 6.1 成立当且仅当端同态环

$$\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)$$

是交换的。若 σ 是例如在 [Kal19], 中定义的正则超尖点表示，则后一条件成立（参见 [Oha21，推论 5.5]）。

令 A_M 表示 M 的极大分裂中心环面，并令 $X^*(A_M)$（分别为 $X_*(A_M)$）表示 A_M 的特征格（分别为余特征格）。我们记

$$a_M = X_*(A_M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

and

$$a_M^* = X^*(A_M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

令 $\langle , \rangle$ 表示定义在.....上的典范完美配对

$$a_M^* \times a_M.$$

我们定义一个单射

$$H_M \colon M(F)/M^1 \to a_M$$

as

$$\langle \gamma, H_M(m) \rangle = \mathrm{ord}_F(\gamma(m))$$

用于 $m \in M(F)$ 以及 M 的有理特征 γ。注意，$H_M(M_\sigma/M^1)$ 是 a_M 中的一个满秩格。我们通过 H_M 将 M_σ/M^1 视为 a_M 的子集。我们还记

$$\left(M_\sigma/M^1\right)^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_\sigma/M^1, \mathbb{Z}).$$

我们定义一个嵌入

$$H_M^\vee \colon \left(M_\sigma/M^1\right)^\vee \to a_M^*,$$

as

$$\langle H_M^\vee(x), H_M(m) \rangle = x(m)$$

用于 $x \in \left(M_\sigma/M^1\right)^\vee$ 和 $m \in M_\sigma/M^1$。那么，$H_M^\vee$ 的像是 a_M^* 中的一个满秩格。我们也通过 $H_M^\vee$ 将 $\left(M_\sigma/M^1\right)^\vee$ 视为 a_M^* 的子集。

令 $\Sigma(G, A_M)$ 表示 A_M 在 G 的李代数上的伴随表示中出现的非零权集，并令 $\Sigma_{\mathrm{red}}(A_M)$ 表示 $\Sigma(G, A_M)$ 中不可分元素的集合。对于 $\alpha \in \Sigma_{\mathrm{red}}(A_M)$，令 M_α 表示 G 的 Levi 子群，它包含 M 及与 α 相关联的根子群 U_α，且其半单秩比 M 的半单秩大一。令 $\alpha^\vee \in a_M$ 表示唯一一个与极大分裂中心环面 A_{M_α} 的特征正交、且满足以下条件的元素：M_α

$$\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2.$$

我们定义 $\Sigma_{\mathrm{red}}(A_M)$ 的子集 $\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}$ 如下。令 μ^{M_α} 表示 [Wal03, V.2], 中定义的 Harish-Chandra μ 函数，它是 $\mathfrak{s}_M$ 上的有理函数。

注 6.3. 在 [Wal03 中，V.2], 函数 μ^{M_α} 仅定义在一个子集上

$$\mathfrak{s}_{M,0} = \{\sigma \otimes \chi \mid \chi \in X_{\mathrm{unr}}(M),\ \chi \text{ is unitary}\}$$

属于 $\mathfrak{s}_M$。不过，我们可以完全按照在 $\mathfrak{s}_{M,0}$ 上的相同方式，在 $\mathfrak{s}_M$ 上定义 μ^{M_α}。

我们将 $\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}$ 定义为

$$\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu} = \{\alpha \in \Sigma_{\mathrm{red}}(A_M) \mid \mu^{M_\alpha} \text{ has a zero on } \mathfrak{s}_M\}.$$

对于 $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}$，令 s_α 表示

$$W(M_\alpha, M) = \left(N_G(M)(F) \cap M_\alpha(F)\right)/M(F).$$

由于 μ^{M_α} 在 $\mathfrak{s}_M$ 上有一个零点， [Sil79, 5.4.2] 推出 s_α 正规化了某个 $\sigma \otimes \chi$，其中 $\chi \in X_{\mathrm{unr}}(M)$（另见 [Sol22, (3.4)]）。令 $W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})$ 表示.....的子群

$$W(G, M, \mathfrak{s}_M) = \{g \in N_G(M)(F) \mid {}^g\sigma \simeq \sigma \otimes \chi \text{ for some } \chi \in X_{\mathrm{unr}}(M)\}/M(F)$$

由 $s_\alpha\ (\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})$ 生成。根据 [Hei11 的命题 1.3], $\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}$ 是一个约化根系，其魏尔群为 $W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})$。令 $\Sigma(P, A_M)$ 表示 A_M 在 P 的李代数的伴随表示中出现的非零权集合。那么，

$$\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P) := \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu} \cap \Sigma(P, A_M)$$

是 $\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}$ 的一组正根。我们用 $\Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$ 表示与$\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$ 对应的 $\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}$ 的基。我们还定义

$$\Sigma_{\mathrm{red}}(P, A_M) = \Sigma_{\mathrm{red}}(A_M) \cap \Sigma(P, A_M).$$

我们记

$$R(\mathfrak{s}_M) = \{w \in W(G, M, \mathfrak{s}_M) \mid w\left(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)\right) \subset \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)\}.$$

根据 [Sol22 的式（3.2）], ，我们得到

$$W(G, M, \mathfrak{s}_M) = W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}) \rtimes R(\mathfrak{s}_M).$$

对于 $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}$，我们定义元素 $h_\alpha^\vee \in M_\sigma/M^1$ 为

$$(M_\sigma \cap M_\alpha^1)/M^1 \simeq \mathbb{Z}$$

使得 $H_M(h_\alpha^\vee) \in \mathbb{R}_{>0} \cdot \alpha^\vee$ 的唯一生成元。

命题 6.4（[Sol22，命题 3.1]）。对于任意 $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}$，存在唯一的

$$\alpha^\# \in (M_\sigma/M^1)^\vee$$

满足 $H_M^\vee(\alpha^\#) \in \mathbb{R} \cdot \alpha$ 且

$$\langle H_M^\vee(\alpha^\#), H_M(h_\alpha^\vee)\rangle = 2.$$

此外，若记

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\mathfrak{s}_M}^\vee &= \{h_\alpha^\vee \mid \alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}\},\\
\Sigma_{\mathfrak{s}_M} &= \{\alpha^\# \mid \alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}\},\\
\left(\alpha^\#\right)^\vee &= h_\alpha^\vee,
\end{aligned}$$

那么，

$$\left(\left(M_\sigma/M^1\right)^\vee, \Sigma_{\mathfrak{s}_M}, M_\sigma/M^1, \Sigma_{\mathfrak{s}_M}^\vee\right)$$

是一个约化根数据，其魏尔群为 $W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu})$。

抛物子群 P 还确定了正根集 $\Sigma_{\mathfrak{s}_M}(P)$，以及 $\Sigma_{\mathfrak{s}_M}$ 的一组基 $\Delta_{\mathfrak{s}_M}(P)$，即

$$\Sigma_{\mathfrak{s}_M}(P) = \{\alpha^\# \mid \alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)\}$$

and

$$\Delta_{\mathfrak{s}_M}(P) = \{\alpha^\# \mid \alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)\}.$$

从现在起，我们假设表示 (σ, E) 满足 [Sol22，条件 3.2]，，即 (σ, E) 是酉超尖表示，并且

$$\mu^{M_\alpha}(\sigma) = 0$$

对所有 $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}},\ \mu(P)$。我们还假设

$$q_\alpha \geq q_{\alpha *},$$

对所有 $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M},\ \mu$，其中 $q_\alpha q_{\alpha *} \geq 1$ 是 Sol22 (3.7)] 中出现的实数（另见 Sol22 (3.8)] 和 Sol22 (3.11)]）。我们注意到，总可以在 $\mathfrak{s}_M$ 中取这样的表示 σ。

我们定义标签函数

$$\lambda, \lambda^* \colon \Sigma_{\mathfrak{s}_M} \to \mathbb{C}$$

as

$$\lambda(\alpha^\#) = \log(q_\alpha q_{\alpha *}) / \log(q_F),\ \lambda^*(\alpha^\#) = \log(q_\alpha q_{\alpha *}^{-1}) / \log(q_F). \tag{6.1}$$

根据 Sol22 引理 3.3] 和 Sol22 引理 3.4]，，函数 λ, λ^* 在 $\Delta_{\mathfrak{s}_M}(P)$ 上的限制满足附录 B 中的条件 (B.2) 和 (B.3)。我们将与带基根数据相关联的仿射赫克代数记作

$$\mathcal{R}(G, \mathfrak{s}_M) = \left(\left(M_\sigma / M^1\right)^\vee, \Sigma_{\mathfrak{s}_M}, M_\sigma / M^1, \Sigma_{\mathfrak{s}_M}^\vee, \Delta_{\mathfrak{s}_M}(P) \right),$$

参数 q_F 以及标签函数 λ, λ^* 为

$$\mathcal{H}(G, \mathfrak{s}_M) = \mathcal{H}\left(\mathcal{R}(G, \mathfrak{s}_M), \lambda, \lambda^*, q_F\right).$$

关于仿射 Hecke 代数的定义，参见附录 B。我们将根据 Sol22 第 10]节，说明自同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 与仿射赫克代数 $\mathcal{H}(G, \mathfrak{s}_M)$[之间的描述。

首先，我们定义一个单射

$$\mathbb{C}[M_\sigma / M^1] \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$$

如下。我们考虑 $M(F)$ 在 $\mathbb{C}[M(F)/M^1]$ 上的左正则表示。根据 [Sol22, (2.3)]，，存在一个 $M(F)$-等变同构

$$\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma) \to \sigma \otimes \mathbb{C}[M(F)/M^1]. \tag{6.2}$$

我们将

$$\sigma \otimes \mathbb{C}[M(F)/M^1]$$

视为一个 $\mathbb{C}[M(F)/M^1]$-模，其中作用由第二个因子上的左乘给出。由于 $M(F)/M^1$ 是交换的，这个作用与作用在.....上的 $M(F)$-作用相交换

$$\sigma \otimes \mathbb{C}[M(F)/M^1].$$

通过同构 (6.2)，我们将 $\mathbb{C}[M(F)/M^1]$-模结构传递到 $\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma)$ 上。其显式结构如下 [Sol22, (2.6)]:

对于 $\theta_m \in \mathbb{C}[M(F)/M^1]$和 $f \in \mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma)$，元素 $\theta_m \cdot f \in \mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma)$ 定义为

$$(\theta_m \cdot f)(m') = \sigma(m^{-1}) \cdot f(mm')$$

对于 $m' \in M(F)$。我们还利用 I_P^G 的函子性，定义 $\mathbb{C}[M(F)/M^1]$ 在 $I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma)\right)$ 上的作用。$\mathbb{C}[M(F)/M^1]$ 的作用并不保持 $\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)$ 这一 $\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma)$ 的子空间。不过，根据 [Sol22 第10.1] 小节和假设 6.1，该作用在 $\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 上的限制保持 $\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)$。我们通过这一作用将 $\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)$ 视为一个 $\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$-模。于是，我们得到一个映射

$$\mathbb{C}[M_\sigma / M^1] \to \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right). \tag{6.3}$$

根据 [Sol22 引理 10.1] 和假设 6.1，该映射是一个同构（另见 [Sol22 第10节 10.1] 小节的最后一段）。将 (6.3) 与

$$I_P^G \colon \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$$

由忠实函子 I_P^G 提供的单射结合起来，我们得到一个单射

$$\mathbb{C}[M_\sigma/M^1] \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right). \tag{6.4}$$

我们通过 (6.4) 将 $\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 视为 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 的子代数。

我们先为后续使用准备上述结果的一个变体。令 $\mathbb{C}(M(F)/M^1)$ 表示 $\mathbb{C}[M(F)/M^1]$ 的商域，并令 $\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)$ 表示 $\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 的商域。我们考虑 $M(F)$ 在 $\mathbb{C}(M(F)/M^1)$ 上的左正则表示。于是，对第二个因子的左乘作用

$$\sigma \otimes \mathbb{C}(M(F)/M^1)$$

诱导出一个单射

$$\mathbb{C}(M(F)/M^1) \to \mathrm{End}_{M(F)}\left(\sigma \otimes \mathbb{C}(M(F)/M^1)\right).$$

同构 (6.2) 诱导出一个 $\mathbb{C}(M(F)/M^1)$-向量空间同构

$$\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma) \otimes_{\mathbb{C}[M(F)/M^1]} \mathbb{C}(M(F)/M^1) \to \sigma \otimes \mathbb{C}(M(F)/M^1). \tag{6.5}$$

因此，我们还得到一个单射

$$\mathbb{C}(M(F)/M^1) \to \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma) \otimes_{\mathbb{C}[M(F)/M^1]} \mathbb{C}(M(F)/M^1)\right).$$

这里，我们将

$$\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma) \otimes_{\mathbb{C}[M(F)/M^1]} \mathbb{C}(M(F)/M^1)$$

视为一个 $M(F)$-表示，这是通过借助同构 (6.5)，将 $\sigma \otimes \mathbb{C}(M(F)/M^1)$ 上的 $M(F)$-作用转移而来。根据 [Sol22，(10.11)],子空间

$$\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1) \otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]} \mathbb{C}(M_\sigma/M^1)$$

of

$$\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma) \otimes_{\mathbb{C}[M(F)/M^1]} \mathbb{C}(M(F)/M^1)$$

是一个 $M(F)$-子空间，并且在 $\mathbb{C}(M_\sigma/M)$ 的作用下保持不变。因此，[1] 我们有一个单射

$$\mathbb{C}(M_\sigma/M^1) \to \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1) \otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]} \mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right). \tag{6.6}$$

它扩张了 (6.3)，以及一个单射

$$\mathbb{C}(M_\sigma/M^1) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1) \otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]} \mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right) \tag{6.7}$$

利用 I_P^G 的函子性得到。我们还有一个单射

$$\mathbb{C}(M_\sigma/M^1) \to \mathrm{Hom}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right), I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1) \otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]} \mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right) \tag{6.8}$$

通过将（6.7）的像限制到 $I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)$。

现在，我们陈述 [Sol22 第 10]节的主要结果：

定理 6.5（[Sol22，定理 10.9]）。自同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 具有一个 $\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$-基

$$\{J_r T'_w \mid r \in R(\mathfrak{s}_M), w \in W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})\}$$

其中，J_r 和 T'_w 是 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 中由 [Sol22 第 10.2]小节定义的元素。令 $\mathcal{H}(W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}))$ 表示子空间

$$\bigoplus_{w \in W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})} \mathbb{C}[M_\sigma/M^1]T'_w$$

$\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}^{M(F)}{}_{M^1}(\sigma_1)\right)\right)$ 的子空间。则，$\mathcal{H}(W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}))$ 是 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 的子代数，并且存在一个同构

$$\mathcal{H}\left(W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})\right) \to \mathcal{H}(G, \mathfrak{s}_M)$$

它在 $\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 上是恒等映射，并将 $\mathcal{H}(W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}))$的元素 T'_w 映射为$\mathcal{H}(G,\mathfrak{s}_M)$的元素 T_w，对所有 $w \in W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})$均如此。

我们说明 T'_{s_α} 在 $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}(P)$ 中的定义。

引理 6.6. 存在一个 $\widetilde{s_\alpha}$ 从 s_α 到 $I_{M_\alpha^1}(\sigma_1)$ 的提升。

证明。取一个 s_α 的提升 $\widetilde{s_\alpha}'$，使其包含在 $G(F)$ 的某个极大紧子群中（这是可能的，见 [Sol22, 第4.1]小节）。根据 s_α 的定义，可得 $\widetilde{s_\alpha}' \in M_\alpha$。由于 $\widetilde{s_\alpha}'$ 包含在 $G(F)$ 的某个紧子群中，$\widetilde{s_\alpha}'$ 也包含在 M_α^1 中。此外，由于我们假设

$$\mu^{M_\alpha}(\sigma) = 0,$$

[Sil79, 5.4.2] 蕴含 $\widetilde{s_\alpha}'$ 正规化表示 σ （另见 [Sol22, (3.4)]）。由于 σ_1 是 $\sigma \restriction_{M^1}$ 的一个不可约子表示，我们可以取 $m_\alpha \in M(F)$，使得 $m_\alpha \widetilde{s_\alpha}'$ 正规化表示 σ_1。[Hei11, 引理 4.5] 的证明蕴含我们可以取 $M(F)$ 中的 $m_\alpha \cap M_\alpha^1$。于是，$\widetilde{s_\alpha} := m_\alpha \widetilde{s_\alpha}'$ 是 $I_{M_\alpha^1}(\sigma_1)$ 中 s_α 的一个提升。□

固定 $I_{M_\alpha^1}(\sigma_1)$ 中 s_α 的一个提升 $\widetilde{s_\alpha}$。为定义 T'_{s_α}，我们先准备一些算子：

- 对于 G 中另一个以 M 为 Levi 因子的抛物子群 P'，令
$$J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \colon I_P^G\left(\sigma \otimes \mathbb{C}[M(F)/M^1]\right) \to I_{P'}^G\left(\sigma \otimes \mathbb{C}(M(F)/M^1)\right)$$
表示 Harish-Chandra 交织算子 [Sol22，第4节的第4小节1], [Wal03，IV.1]。特别地，我们考虑映射
$$J_{s_\alpha^{-1}(P)|P}(\sigma \otimes \cdot) \colon I_P^G\left(\sigma \otimes \mathbb{C}[M(F)/M^1]\right) \to I_{s_\alpha^{-1}(P)}^G\left(\sigma \otimes \mathbb{C}(M(F)/M^1)\right),$$
其中 $s_\alpha^{-1}(P)$ 表示抛物子群 $s_\alpha^{-1} P s_\alpha$。
- 我们定义
$$\lambda(s_\alpha) \colon I_{s_\alpha^{-1}(P)}^G\left(\sigma \otimes \mathbb{C}(M(F)/M^1)\right) \to I_P^G\left(\widetilde{s_\alpha}\left(\sigma \otimes \mathbb{C}(M(F)/M^1)\right)\right)$$
as
$$f \mapsto [g \mapsto f((\widetilde{s_\alpha})^{-1} g)].$$
- 我们定义
$$\tau_{s_\alpha} \colon \widetilde{s_\alpha}\left(\sigma \otimes \mathbb{C}(M(F)/M^1)\right) \to \widetilde{s_\alpha}\sigma \otimes \mathbb{C}(M(F)/M^1)$$
as
$$e \otimes \theta_m \mapsto e \otimes \theta_{\widetilde{s_\alpha} m \widetilde{s_\alpha}^{-1}}.$$
- 由于我们假设
$$\mu^{M_\alpha}(\sigma) = 0,$$
[Sil79, 5.4.2]表明 $\widetilde{s_\alpha}$ 正规化了 σ （另见 [Sol22, (3.4)]）。因此，存在一个同构
$$\rho_{\sigma, s_\alpha} \colon \widetilde{s_\alpha}\sigma \simeq \sigma,$$
该同构在相差一个非零标量的意义下唯一。我们可以按照 [Sol22, Lemma4.3] 中的方式，规范地选取该同构。

我们定义一个元素

$$J_{s_\alpha} \in \mathrm{Hom}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\sigma \otimes \mathbb{C}[M(F)/M^1]\right), I_P^G\left(\sigma \otimes \mathbb{C}(M(F)/M^1)\right)\right)$$

as

$$J_{s_\alpha} = I_P^G\left(\rho_{\sigma, s_\alpha} \otimes \mathrm{id}\right) \circ I_P^G(\tau_{s_\alpha}) \circ \lambda(s_\alpha) \circ J_{s_\alpha^{-1}(P)|P}(\sigma \otimes \cdot).$$

根据同构 (6.2) 和同构 (6.5)，我们可以将 J_{s_α} 视为.....的一个元素

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma)\right), I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma) \otimes_{\mathbb{C}[M(F)/M^1]} \mathbb{C}(M(F)/M^1)\right)\right).$$

此外，由于我们取 $\widetilde{s_\alpha}$ 作为 s_α 在 $I_{M_\alpha^1}(\sigma_1)$ 中的提升，假设 6.1 和 [Hei11, Lemme 4.5] 的证明表明，J_{s_α} 将子空间

$$I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)$$

of

$$I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma)\right),$$

到该子空间

$$I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1) \otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]} \mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)$$

of

$$I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma) \otimes_{\mathbb{C}[M(F)/M^1]} \mathbb{C}(M(F)/M^1)\right)$$

（另见 [Sol22，引理 10.3]）。因此，我们可以将 J_{s_α} 视为.....的一个元素

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right), I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]}\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right).$$

尽管这里 J_{s_α} 的定义看起来与 Sol22 第 10.2], 小节中的 J_{s_α} 定义不同，但根据 Hei11 的 3.1], , 这两个定义是一致的。

我们将 $f_\alpha \in \mathbb{C}(M_\sigma/M^1)$ 定义为

$$f_\alpha = \frac{(\theta_{h_\alpha^\vee})^2(q_\alpha q_{\alpha *}-1)+\theta_{h_\alpha^\vee}(q_\alpha - q_{\alpha *})}{(\theta_{h_\alpha^\vee})^2-1}.$$

我们将 f_α 视为.....的一个元素

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right), I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]}\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right)$$

通过单射 (6.8)。

我们定义.....的一个元素 T'_{s_α}

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right), I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]}\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right)$$

as

$$T'_{s_\alpha} = \frac{(q_\alpha-1)(q_{\alpha *}+1)}{2}(\theta_{h_\alpha^\vee})^{\epsilon_\alpha}\circ J_{s_\alpha} + f_\alpha,$$

其中， $\epsilon_\alpha \in \{0,1\}$ 表示 [Sol22，引理 10.7 (b)]中定义的数。我们注意到， $\epsilon_\alpha = 0$除非 $q_{\alpha *} > 1$。特别地， $\epsilon_\alpha = 0$ 除非 $\alpha^\#$ 是 $\Sigma_{\mathfrak{s}_M}$ 的 A_1 型不可约分支中的唯一单根，或是 $\Sigma_{\mathfrak{s}_M}$ 的 C_n ($n \geq 2$)型不可约分支中的长根（参见 [Sol22，引理 3.3]）。这里，$(\theta_{h_\alpha^\vee})^{\epsilon_\alpha}\circ J_{s_\alpha}$ 表示.....的元素。

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right), I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]}\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right)$$

通过复合 J_{s_α} 得到

$$(\theta_{h_\alpha^\vee})^{\epsilon_\alpha} \in \mathbb{C}[M_\sigma/M^1] \subset \mathbb{C}(M_\sigma/M^1)$$

视为一个元素的

$$\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]}\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right)$$

经由单射（6.7）。Solleveld 证明了如下结论:

引理 6.7（[Sol22，引理 10.8]）。元素 T'_{s_α} 属于 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$。

回忆一下， M_α 表示包含 M 的 G 的 Levi 子群，以及与 α关联的根子群 U_α；其半单秩比 M的半单秩大一。若存在一个抛物子群 P_α ，其 Levi 因子为 M_α，且 P_α 包含 P，则称 M_α 是相对于 P 的 G 的标准 Levi 子群。注意，在此情形下 $P_\alpha = PM_\alpha$。在上述 T'_{s_α} 的构造中，用 M_α替换 G，即可得到相应的元素

$$(T'_{s_\alpha})^{M_\alpha} \in \mathrm{End}_{M_\alpha(F)}\left(I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right).$$

引理 6.8. 假设 M_α 是相对于 P的 G 的标准 Levi 子群。则可得

$$T'_{s_\alpha} = I_{PM_\alpha}^G\left((T'_{s_\alpha})^{M_\alpha}\right).$$

证明. 令 $J_{s_\alpha}^{M_\alpha}$表示

$$\mathrm{Hom}_{M_\alpha(F)}\left(I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right), I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]}\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right)$$

通过在 J_{s_α}的构造中用 M_α 替换 G 得到。于是有

$$(T'_{s_\alpha})^{M_\alpha} = \frac{(q_\alpha-1)(q_{\alpha *}+1)}{2}(\theta_{h_\alpha^\vee})^{\epsilon_\alpha}\circ J_{s_\alpha}^{M_\alpha} + f_\alpha.$$

在此,

$$\theta_{h_\alpha^\vee},\ f_\alpha \in \mathbb{C}(M_\sigma/M^1)$$

被视为.....的元素

$$\mathrm{End}_{M_\alpha(F)}\left(I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]}\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right)$$

or

$$\mathrm{Hom}_{M_\alpha(F)}\left(I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right),I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]}\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right)$$

通过单射 (6.7) 和 (6.8) 的 M_α-版本。由于这些单射是将单射 (6.6) 与 $I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}$ 复合得到的，抛物归纳的传递性

$$I_P^G\simeq I_{PM_\alpha}^G\circ I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}$$

意味着

$$I_{PM_\alpha}^G\left((T'_{s_\alpha})^{M_\alpha}\right)=\frac{(q_\alpha-1)(q_{\alpha*}+1)}{2}(\theta_{h_\alpha^\vee})^{\epsilon_\alpha}\circ I_{PM_\alpha}^G\left(J_{s_\alpha}\right)+f_\alpha.$$

注意，此处将 $\theta_{h_\alpha^\vee}$ 和 f_α 视为

$$\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]}\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right)$$

or

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right),I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]}\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right).$$

因此，只需证明

$$J_{s_\alpha}=I_{PM_\alpha}^G\left(J_{s_\alpha}^{M_\alpha}\right).$$

回忆一下， J_{s_α} 定义为

$$J_{s_\alpha}=I_P^G\left(\rho_{\sigma,s_\alpha}\otimes\mathrm{id}\right)\circ I_P^G(\tau_{s_\alpha})\circ\lambda(s_\alpha)\circ J_{s_\alpha^{-1}(P)|P}(\sigma\otimes\cdot).$$

根据 [Wal03, IV.1.(14)], ，我们得到

$$J_{s_\alpha^{-1}(P)|P}(\sigma\otimes\cdot)=I_{PM_\alpha}^G\left(J_{s_\alpha^{-1}(P\cap M_\alpha)|P\cap M_\alpha}(\sigma\otimes\cdot)\right).$$

此外，由于 $\widetilde{s_\alpha}$ 包含于 M_α，根据 $\lambda(s_\alpha)$ 的定义，它是由该态射抛物诱导而来

$$\lambda^{M_\alpha}(s_\alpha)\colon I_{s_\alpha^{-1}(P\cap M_\alpha)}^{M_\alpha}\left(\sigma\otimes\mathbb{C}(M(F)/M^1)\right)\to I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\widetilde{s_\alpha}\left(\sigma\otimes\mathbb{C}(M(F)/M^1)\right)\right)$$

对应于 $\lambda(s_\alpha)$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}I_{PM_\alpha}^G\left(J_{s_\alpha}^{M_\alpha}\right)&=I_{PM_\alpha}^G\left(I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\rho_{\sigma,s_\alpha}\otimes\mathrm{id}\right).\circ I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}(\tau_{s_\alpha})\circ\lambda^{M_\alpha}(s_\alpha)\circ J_{s_\alpha^{-1}(P\cap M_\alpha)|P\cap M_\alpha}(\sigma\otimes\cdot)\right)\\&=I_P^G\left(\rho_{\sigma,s_\alpha}\otimes\mathrm{id}\right)\circ I_P^G(\tau_{s_\alpha})\circ\lambda(s_\alpha)\circ J_{s_\alpha^{-1}(P)|P}(\sigma\otimes\cdot)\\&=J_{s_\alpha}.\end{aligned}$$

□

在本节末尾，我们修改用于定义仿射赫克代数 $\mathcal{H}(G,\mathfrak{s}_M)$ 的根数据和标签函数。由于 q_α, $q_{\alpha*}\geq 1$，并且我们假设 $q_\alpha\geq q_{\alpha*}$，标签函数 λ 和 λ^* 取值于 $\mathbb{R}_{\geq 0}$。此外，正如 [Sol22, (3.8)], q_α 后一句所说明的，q_α 大于 1，因此对于任意 $\alpha\in\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}$，我们得到 $\lambda(\alpha^\#)>0$。然而， $\lambda^*(\alpha^\#)=0$ 可能出现，这不利于我们的目的。我们按如下方式定义另一个带基根数据 $\mathcal{R}'(G,\mathfrak{s}_M)$ 和标签函数 λ', $(\lambda^*)'$。对于满足 $\lambda^*(\alpha^\#)>0$ 的 $\alpha\in\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}$，我们定义

$$\begin{cases}(h_\alpha^\vee)' & =h_\alpha^\vee,\\(\alpha^\#)' & =\alpha^\#,\\\lambda'((\alpha^\#)') & =\lambda(\alpha^\#),\\(\lambda^*)'((\alpha^\#)') & =\lambda^*(\alpha^\#).\end{cases}\tag{6.9}$$

设 $\alpha\in\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}$ 满足 $\lambda^*(\alpha^\#)=0$，即 $q_\alpha=q_{\alpha*}$。根据 [Sol22，引理 3.3], ，只有在以下情况下才会出现

$$\alpha^\#\in 2\left(M_\sigma/M^1\right)^\vee.$$

我们定义

$$(h_\alpha^\vee)'=2h_\alpha^\vee,$$

and

$$(\alpha^\#)' = \frac{\alpha^\#}{2}.$$

我们注意到

$$(\alpha^\#)' \in \left(M_\sigma/M^1\right)^\vee.$$

我们定义

$$\begin{aligned}\left(\Sigma'_{\mathfrak{s}_M}\right)^\vee &= \{(h_\alpha^\vee)' \mid \alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}\},\\ \Sigma'_{\mathfrak{s}_M} &= \{(\alpha^\#)' \mid \alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}\},\\ \Delta'_{\mathfrak{s}_M}(P) &= \{(\alpha^\#)' \mid \alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)\},\\ \left((\alpha^\#)'\right)^\vee &= (h_\alpha^\vee)',\end{aligned}$$

and

$$\mathcal{R}'(G,\mathfrak{s}_M) = \left(\left(M_\sigma/M^1\right)^\vee, \Sigma'_{\mathfrak{s}_M}, M_\sigma/M^1, \left(\Sigma'_{\mathfrak{s}_M}\right)^\vee, \Delta'_{\mathfrak{s}_M}(P)\right).$$

引理 6.9. 元组 $\mathcal{R}'(G,\mathfrak{s}_M)$ 是一个带基根数据，其魏尔群为 $W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu})$。

证明. 令 $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}$。我们定义

$$s'_\alpha \colon M_\sigma/M^1 \to M_\sigma/M^1$$

as

$$s'_\alpha(m) = m - \langle(\alpha^\#)', m\rangle(h_\alpha^\vee)'.$$

那么，我们对 $(h_\alpha^\vee)'$ 和 $(\alpha^\#)'$ 的定义意味着 s'_α 与反射

$$s_\alpha \colon M_\sigma/M^1 \to M_\sigma/M^1$$

定义为

$$s_\alpha(m) = m - \langle\alpha^\#, m\rangle h_\alpha^\vee.$$

我们将证明

$$s'_\alpha\left(\left(\Sigma'_{\mathfrak{s}_M}\right)^\vee\right) \subset \left(\Sigma'_{\mathfrak{s}_M}\right)^\vee.$$

令 $\beta \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}$。我们将 $(h_\beta^\vee)' = c \cdot h_\beta^\vee$ 记作 $c \in \{1,2\}$。于是，我们得到

$$\begin{aligned}s'_\alpha((h_\beta^\vee)') &= s_\alpha((h_\beta^\vee)')\\ &= s_\alpha(c \cdot h_\beta^\vee)\\ &= c \cdot s_\alpha(h_\beta^\vee).\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{R}(G,\mathfrak{s}_M)$ 是一个根数据，s_α 保持 $\Sigma_{\mathfrak{s}_M}^\vee$，因此 $s_\alpha(h_\beta^\vee) \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M}^\vee$。此外，根据[Sol22，引理 3.4]，集合

$$\{\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu} \mid q_\alpha = q_{\alpha*}\}$$

是 $W(G,M,\mathfrak{s}_M)$-不变的。因此，

$$(h_\beta^\vee)' = 2h_\beta^\vee$$

当且仅当

$$(s_\alpha(h_\beta^\vee))' = 2s_\alpha(h_\beta^\vee).$$

因此，我们得到

$$(s_\alpha(h_\beta^\vee))' = c \cdot s_\alpha(h_\beta^\vee).$$

因此，我们得到

$$s'_\alpha((h_\beta^\vee)') = (s_\alpha(h_\beta^\vee))' \in \left(\Sigma'_{\mathfrak{s}_M}\right)^\vee.$$

类似地，我们可以证明，作用

$$s'_\alpha \colon \left(M_\sigma/M^1\right)^\vee \to \left(M_\sigma/M^1\right)^\vee$$

定义为

$$s'_\alpha(x) = x - \langle x, (h_\alpha^\vee)'\rangle(\alpha^\#)'$$

保留 $\Sigma'_{\mathfrak{s}_M}$。因此，$\mathcal{R}'(G,\mathfrak{s}_M)$ 是一个根数据。最后一个断言由事实 $s'_\alpha = s_\alpha$ 得出。 □

对于 $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}$ 满足 $\lambda^*(\alpha^\#) = 0$ 的情形，我们定义

$$\lambda'((\alpha^\#)') = (\lambda^*)'((\alpha^\#)') = \lambda(\alpha^\#). \tag{6.10}$$

于是，标签函数 λ'、$(\lambda^*)'$ 满足附录 B 中的条件 (B.2) 和 (B.3)。我们还注意到，对于任意 $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}$，$\lambda'((\alpha^\#)')$、$(\lambda^*)'((\alpha^\#)') > 0$。

Let

$$\mathcal{H}'(G, \mathfrak{s}_M) = \mathcal{H}\left(\mathcal{R}'(G, \mathfrak{s}_M), \lambda', (\lambda^*)', q_F\right)$$

是与带基根数据 $\mathcal{R}'(G, \mathfrak{s}_M)$、参数 q_F 和标签函数 $\lambda', (\lambda^*)'$ 相关联的仿射赫克代数。由于对应于 $(\alpha^\#)'$ 的反射 s'_α 与对应于 $\alpha^\#$ 的反射 s_α 相同，我们得到

$$\mathcal{H}(G, \mathfrak{s}_M) = \mathcal{H}'(G, \mathfrak{s}_M)$$

作为向量空间。

命题 6.10。作为向量空间的恒等映射

$$\mathcal{H}(G, \mathfrak{s}_M) \to \mathcal{H}'(G, \mathfrak{s}_M)$$

是一个 $\mathbb{C}$-代数同构。

证明。只需证明该映射与定义 B.1 的关系 (2) 兼容。设$\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}(P)$ 和 $m \in M_\sigma/M^1$。对于 $\mathcal{H}(G, \mathfrak{s}_M)$，关系 (2) 为

$$\theta_m T_{s_\alpha} - T_{s_\alpha}\theta_{s_\alpha(m)} = \left((q_F{}^{\lambda(\alpha^\#)} - 1) + \theta_{-h_\alpha^\vee}(q_F{}^{(\lambda(\alpha^\#)+\lambda^*(\alpha^\#))/2} - q_F{}^{(\lambda(\alpha^\#)-\lambda^*(\alpha^\#))/2})\right)\frac{\theta_m - \theta_{s_\alpha(m)}}{\theta_0 - \theta_{-2h_\alpha^\vee}}, \tag{6.11}$$

而对于 $\mathcal{H}'(G, \mathfrak{s}_M)$，关系 (2) 为

$$\begin{aligned}&\theta_m T_{s_\alpha} - T_{s_\alpha}\theta_{s_\alpha(m)} \\ &= \left((q_F{}^{\lambda'((\alpha^\#)')} - 1) + \theta_{-(h_\alpha^\vee)'}(q_F{}^{(\lambda'((\alpha^\#)')+(\lambda^*)'((\alpha^\#)'))/2} - q_F{}^{(\lambda'((\alpha^\#)')-(\lambda^*)'((\alpha^\#)'))/2})\right)\frac{\theta_m - \theta_{s_\alpha(m)}}{\theta_0 - \theta_{-2(h_\alpha^\vee)'}}.\end{aligned} \tag{6.12}$$

若 $\lambda^*(\alpha^\#) > 0$,

$$\begin{cases}(h_\alpha^\vee)' & = h_\alpha^\vee, \\ \lambda'((\alpha^\#)') & = \lambda(\alpha^\#), \\ (\lambda^*)'((\alpha^\#)') & = \lambda^*(\alpha^\#).\end{cases}$$

H因此，方程（6.11）与方程（6.12）相同。

考虑 $\lambda^*(\alpha^\#) = 0$ 的情形。那么，方程（6.11）右侧等于

$$(q_F{}^{\lambda(\alpha^\#)} - 1)\ \frac{\theta_m - \theta_{s_\alpha(m)}}{\theta_0 - \theta_{-2h_\alpha^\vee}}.$$

另一方面，在这种情况下，我们有

$$\begin{cases}(h_\alpha^\vee)' & = 2h_\alpha^\vee, \\ \lambda'((\alpha^\#)') & = \lambda(\alpha^\#), \\ (\lambda^*)'((\alpha^\#)') & = \lambda(\alpha^\#).\end{cases}$$

因此，方程（6.12）的右侧等于

$$\begin{aligned}\left((q_F{}^{\lambda(\alpha^\#)} - 1) + \theta_{-2h_\alpha^\vee}(q_F{}^{\lambda(\alpha^\#)} - 1)\right)\frac{\theta_m - \theta_{s_\alpha(m)}}{\theta_0 - \theta_{-4(h_\alpha^\vee)}} &= (q_F{}^{\lambda(\alpha^\#)} - 1)(1 + \theta_{-2h_\alpha^\vee})\frac{\theta_m - \theta_{s_\alpha(m)}}{\theta_0 - \theta_{-4(h_\alpha^\vee)}} \\ &= (q_F{}^{\lambda(\alpha^\#)} - 1)\frac{\theta_m - \theta_{s_\alpha(m)}}{\theta_0 - \theta_{-2h_\alpha^\vee}}.\end{aligned}$$

因此，在这种情况下，方程（6.11）也与方程（6.12）相同。 □

现在，我们得到定理 6.5 的一个修正版:

定理 6.11。自同态代数 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 具有一个 $\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$-基

$$\{J_r T'_w \mid r \in R(\mathfrak{s}_M), w \in W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})\},$$

并且存在一个同构

$$I^{\mathrm{Sol}}\colon \mathcal{H}\left(W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})\right) \to \mathcal{H}'(G,\mathfrak{s}_M)$$

该同构在 $\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 上为恒等映射，并将 $\mathcal{H}(W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}))$ 中的元素 T'_w 映至 $\mathcal{H}'(G,\mathfrak{s}_M)$ 中的元素 T_w。

记作

$$\begin{cases} R^{\mathrm{Sol}} & = \Sigma'_{\mathfrak{s}_M}, \\ \left(R^{\mathrm{Sol}}\right)^\vee & = \left(\Sigma'_{\mathfrak{s}_M}\right)^\vee, \\ \Delta^{\mathrm{Sol}} & = \Delta'_{\mathfrak{s}_M}(P), \\ \mathcal{R}^{\mathrm{Sol}} & = \mathcal{R}'(G,\mathfrak{s}_M), \\ \lambda^{\mathrm{Sol}} & = \lambda', \\ (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}} & = (\lambda^*)', \\ \mathcal{H}^{\mathrm{Sol}} & = \mathcal{H}'(G,\mathfrak{s}_M). \end{cases}$$

我们也将元素 $T_w \in \mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$ 记作 $T_w = T_{\mathrm{Sol}w}$，其中 $w \in W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu})$。

7. Statements of main results

本节陈述本文的主要结果。设 S 是 G的极大分裂环面。我们沿用第 5 节的记号与假设。回顾一下，J 是与（G，S）相关的不可约仿射根系 Φ_{aff} 的固定基B 的一个子集，且满足 $|B\backslash J| > 1$。令 $\mathcal{F}_J$表示 G 在 F 上的约化 Bruhat-Tits 建筑中，包含于 C闭包内且在 Mor93，1.8]的意义下与 J 对应的面。我们作如下假设：

假设 7.1。抛物型子群 P_J 与 G^1中 $\mathcal{F}_J$ 的稳定子相同。

当 G 是半单且单连通时，该假设成立，例如（参见 [Tit79，3.1]）。一般而言，P_J 是 G^1 中 $\mathcal{F}_J$ 的稳定子的有限指数子群。记作 $K = P_J$。我们将 G 的半标准 Levi 子群 M 定义为下列子环面的中心化子

$$\left(\bigcap_{\alpha\in DJ} \ker(\alpha)\right)^\circ$$

S的。根据 [Tit79, 3.5，1], 上述 Levi 子群 M 与 [MP96, 6.3] 中附属于抛物型子群 P_J 的 Levi 子群相同。由于我们假设 $|B\backslash J| > 1$，M是 G的真 Levi 子群。令 $K_M = K \cap M(F)$。根据 [Mor99, 2.1 定理 (i)]，K_M是 $M(F)$的一个极大抛物子群，它与 M在 F上的约化 Bruhat–Tits 建筑 $\mathcal{B}^{\mathrm{red}}(M,F)$的顶点 x_J相关。更确切地说，x_J是满足以下条件的顶点

$$\{x \in \mathcal{A}(M,S) \mid a(x) = 0\ (a \in J)\} = \{x_J\},$$

其中 $\mathcal{A}(M,S)$表示 S在 $\mathcal{B}^{\mathrm{red}}(M,F)$中的约化公寓。此外，假设 7.1 和[Mor99, 2.1 定理 (i)] 蕴含 K_M与 M^1中 x_J的稳定子重合。令 K_M表示 $M(F)$中 x_J的稳定子，也就是 $M(F)$的一个模中心紧开子群。由于 K_M与 M^1中 x_J 的稳定子重合，我们得到

$$K_M = \widetilde{K_M} \cap M^1.$$

我们将 ρ_M 定义为 ρ 在 K_M上的限制。

注 7.2。 [MP96 命题 6.6] 的证明表明，

$$I_{M(F)}(\rho_M) \subset \widetilde{K_M}.$$

因此，$I_{M(F)}(\rho_M)$ 的任意元素都正规化 K_M 和 ρ_M。特别地，$I_{M(F)}(\rho_M)$ 是一个群。

根据 [MP96，命题 6.4] 以及 [MP96，命题 6.7], (K,ρ) 是 (K_M,ρ_M) 的一个 G-覆盖。因此，存在一个同构

$$I_U\colon \operatorname{End}_{G(F)}\left(\operatorname{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)\to \operatorname{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right)$$

在第 3 节中为任意一个具有 Levi 因子 M 的抛物子群 P 构造。稍后我们将固定一个合适的抛物子群 P。上述同构的左侧将在第 5 节中研究。另一方面，该同构的右侧可以与第 6 节中研究的一个对象建立联系，具体如下。取 K_M 的一个不可约光滑表示 $\widetilde{\rho_M}$，使得 $\widetilde{\rho_M}\restriction_{K_M}$ 包含 ρ_M。根据假设 6.1，我们假设：

假设 7.3。 $\widetilde{\rho_M}\restriction_{K_M}$ 中 ρ_M 的重数等于 1。

我们固定一个单射

$$\rho_M\to\widetilde{\rho_M}\restriction_{K_M}. \tag{7.1}$$

根据 [MP96，命题 6.6], ，表示

$$\sigma:=\operatorname{ind}_{\widetilde{K_M}}^{M(F)}(\widetilde{\rho_M})$$

是 $M(F)$ 的一个不可约超尖点表示。令 $\mathfrak{s}_M$ 表示 M 中有序对 (M,σ) 的惯性等价类。如有必要，以适当的 $\chi\in X_{\mathrm{unr}}(M)$ 将 $\widetilde{\rho_M}$ 替换为 $\widetilde{\rho_M}\otimes\chi\restriction_{\widetilde{K_M}}$ 后，我们可以假设 σ 满足 [Sol22，条件 3.2], ，并且

$$q_\alpha\geq q_{\alpha *},$$

对所有 $\alpha\in\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}$。此外，根据注 7.2，我们得到

$$I_{M^1}(\rho_M)=I_{M(F)}(\rho_M)\cap M^1\subset\widetilde{K_M}\cap M^1=K_M.$$

因此，表示

$$\sigma_1:=\operatorname{ind}_{K_M}^{M^1}(\rho_M)$$

也是不可约的。对于 $v\in\widetilde{\rho_M}$，我们定义一个元素 $\widetilde{f}_v\in\operatorname{ind}_{\widetilde{K_M}}^{M(F)}(\widetilde{\rho_M})$ 如下：

$$\widetilde{f}_v(m)=\begin{cases}\widetilde{\rho_M}(m)\cdot v & (m\in\widetilde{K_M}),\\ 0 & (\text{otherwise}).\end{cases}$$

将 $v\in\widetilde{\rho_M}$与 $\widetilde{f}_v$等同后，我们将 $\widetilde{\rho_M}$视为 $\operatorname{ind}_{\widetilde{K_M}}^{M(F)}(\widetilde{\rho_M})\restriction_{\widetilde{K_M}}$的一个 $\widetilde{K_M}$-子表示。对于$v\in\rho_M$，我们还定义一个元素 $f_{v,\ 1}\in\operatorname{ind}_{K_M}^{M^1}(\rho_M)$ 如下：

$$f_{v,1}(m)=\begin{cases}\rho_M(m)\cdot v & (m\in K_M),\\ 0 & (\text{otherwise}).\end{cases}$$

引理 7.4。我们有

$$\operatorname{Hom}_{K_M}(\rho_M,\widetilde{\rho_M})=\operatorname{Hom}_{K_M}\left(\rho_M,\operatorname{ind}_{\widetilde{K_M}}^{M(F)}(\widetilde{\rho_M})\right).$$

证明。右侧计算如下：

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{K_M}\left(\rho_M,\operatorname{ind}_{\widetilde{K_M}}^{M(F)}(\widetilde{\rho_M})\right)&=\operatorname{Hom}_{K_M}\left(\rho_M,\bigoplus_{m\in K_M\backslash M(F)/\widetilde{K_M}}\operatorname{ind}_{K_M\cap{}^m\widetilde{K_M}}^{K_M}({}^m\widetilde{\rho_M})\right)\\&=\operatorname{Hom}_{K_M}\left(\rho_M,\bigoplus_{m\in K_M\backslash M(F)/\widetilde{K_M}}\operatorname{ind}_{K_M\cap{}^mK_M}^{K_M}({}^m\widetilde{\rho_M})\right)\\&=\bigoplus_{m\in K_M\backslash M(F)/\widetilde{K_M}}\operatorname{Hom}_{K_M}\left(\rho_M,\operatorname{ind}_{K_M\cap{}^mK_M}^{K_M}({}^m\widetilde{\rho_M})\right)\\&\simeq\bigoplus_{m\in K_M\backslash M(F)/\widetilde{K_M}}\operatorname{Hom}_{K_M\cap{}^mK_M}\left(\rho_M,{}^m\widetilde{\rho_M}\right).\end{aligned}$$

~由于任意不可约子表示 $\widetilde{\rho_M}\restriction_{K_M}$都同构于某个 K_M-共轭的 ρ_M，由注 7.2 可知

$$\mathrm{Hom}_{K_M\cap {}^m K_M}(\rho_M, {}^m\widetilde{\rho_M}) = \{0\}$$

~除非 $m \in K_M$。因此，我们得到

$$\mathrm{Hom}_{K_M}\left(\rho_M, \mathrm{ind}_{\widetilde{K_M}}^{M(F)}(\widetilde{\rho_M})\right) = \mathrm{Hom}_{K_M}(\rho_M, \widetilde{\rho_M}).$$

□

我们利用单射，将 σ_1 视为 $\sigma\restriction_{M^1}$ 的不可约子表示

$$\sigma_1 \to \sigma\restriction_{M^1}$$

通过与单射 (7.1) 对应的映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{K_M}(\rho_M, \widetilde{\rho_M}) &= \mathrm{Hom}_{K_M}\left(\rho_M, \mathrm{ind}_{\widetilde{K_M}}^{M(F)}(\widetilde{\rho_M})\right)\\ &\simeq \mathrm{Hom}_{M^1}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M^1}(\rho_M), \mathrm{ind}_{\widetilde{K_M}}^{M(F)}(\widetilde{\rho_M})\right)\\ &= \mathrm{Hom}_{M^1}(\sigma_1, \sigma).\end{aligned}$$

因此，对于

$$v \in \rho_M \subset \widetilde{\rho_M}\restriction_{K_M},$$

~元素 $f_{v,\ 1}$ 在 σ_1 中被视为元素 f_v 属于 σ。假设 7.3 意味着 σ 满足假设 6.1。我们还注意到， ρ_M 在 $\sigma\restriction_{K_M}$ 中的重数等于 1。

紧诱导的传递性意味着我们有一个同构

$$T_{\rho_M}\colon \mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M) \to \mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)$$

定义为

$$((T_{\rho_M}(f))(m))(m') = f(m'm)$$

对于 $f \in \mathrm{ind}^{M(F_)}{}_{K_M}(\rho_M)$、 $m \in M(F)$ 和 $m' \in M^1$。对于 $v \in \rho_M$，我们将元素 $f_v \in \mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)$ 定义为

$$f_v(m) = \begin{cases}\rho_M(m)\cdot v & (m \in K_M),\\ 0 & (\text{otherwise}).\end{cases}$$

于是， T_{ρ_M}的定义意味着 $T_{\rho_M}(f_v)$ 的支集包含于 M^1，并且

$$(T_{\rho_M}(f_v))(1) = f_{v,1}.$$

对于由 T_{ρ_M} 诱导的同构，我们使用相同的符号

$$T_{\rho_M}\colon I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \to I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right),$$

$$T_{\rho_M}\colon \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \to \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right),$$

and

$$T_{\rho_M}\colon \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$$

。将 I_U 与 T_{ρ_M}结合起来，我们得到一个同构

$$T_{\rho_M}\circ I_U\colon \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right).$$

我们将比较第 5 节中 $T_{\rho_M}\circ I_U$ 左侧的描述与第6节中 $T_{\rho_M}\circ I_U$ 右侧的描述。

我们如下选取一个与根系 $D_J(\Gamma'(J,\rho)_e)$ 的正系 $D_J(\Gamma'(J,\rho)_e^+)$ 相容的抛物子群 P。Levi 子群 M 的定义表明，向量空间

$$V^J = \{y \in V \mid \alpha(y) = 0\ (\alpha \in DJ)\}$$

在第 5 节中等于

$$a_M = X_*(A_M)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$$

张成的子空间 $\alpha^\vee(\alpha \in \Sigma_{\mathrm{red}}(A_M))$。因此，我们可以将 V^J 上的线性函数视为一个元素

属于 s
留.....张成的子空间

$$a_M^* = X^*(A_M)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$$

由 $\Sigma_{\mathrm{red}}(A_M)$ 张成。特别地，我们可以考虑根系

$$R^{\mathrm{Mor}} = \{D_J(a')/k_{a'} \mid a' \in \Gamma'(J,\rho)_e\}$$

作为 a_M^* 的子集。在此识别下，我们得到

$$\frac{D_J(a+A'_J)}{k_{a+A'_J}} = \frac{(Da)\restriction_{A_M}}{k_{a+A'_J}}$$

对于满足 $a + A'_J \in \Gamma'(J,\rho)_e$ 的 $a \in \Gamma(J,\rho)$。由于 $D_J(\Gamma'(J,\rho)_e^+)$ 是根系 $D_J(\Gamma'(J,\rho)_e)$ 的一个正系，我们可以取 G 的一个抛物子群 P，其 Levi 因子为 M，使得

$$D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e^+\right) = D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e\right) \cap \left(-\Sigma(P,A_M)\right).$$

Ther有多个满足此性质的抛物子群 P 可供选择。然而，单射 n

$$t_P\colon \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\right)$$

第4节中的单射不依赖于 P 的选择:

引理 7.5. 设 G 的另一个抛物子群 P' 的 Levi 因子为 M，使得

$$D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e^+\right) = D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e\right) \cap \left(-\Sigma(P',A_M)\right).$$

于是，我们得到 $t_P = t_{P'}$。

证明。我们将 $d = d(P,P')$ 定义为

$$d(P,P') = \left|\Sigma_{\mathrm{red}}(P,A_M) \cap \left(-\Sigma_{\mathrm{red}}(P',A_M)\right)\right|.$$

于是，我们可以取抛物子群

$$P = P_0, P_1, \cdots, P_d = P'$$

其 Levi 因子为 M，使得

$$D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e^+\right) = D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e\right) \cap \left(-\Sigma(P_i,A_M)\right),$$

对所有 $0 \le i \le d$，并且

$$\left|\Sigma_{\mathrm{red}}(P_i,A_M) \cap \left(-\Sigma_{\mathrm{red}}(P_{i+1},A_M)\right)\right| = 1$$

对所有 $0 \le i \le d-1$。只需证明，对所有 $0 \le i \le d-1$，$t_{P_i} = t_{P_{i+1}}$。因此，我们不妨假设 $d = 1$。我们记

$$\Sigma_{\mathrm{red}}(P,A_M) \cap \left(-\Sigma_{\mathrm{red}}(P',A_M)\right) = \{\alpha\}.$$

回想一下，M_α 表示包含 M 和与 α相关联的根子群U_α 的 G 半标准 Levi 子群，其半单秩比 M高一。我们记作$K_\alpha = K \cap M_\alpha$（$F$）和 $\rho_\alpha = \rho\restriction_{K_\alpha}$。在构造 t_P和 $t_{P'}$时用 M_α替换 G，即可得到单射

$$t_{P\cap M_\alpha}, t_{P'\cap M_\alpha}\colon \mathcal{H}(M(F),\rho_M) \to \mathcal{H}(M_\alpha(F),\rho_\alpha).$$

在构造 t_P和 $t_{P'}$时用 M_α替换 M，同样可以得到单射

$$t_{PM_\alpha}, t_{P'M_\alpha}\colon \mathcal{H}(M_\alpha(F),\rho_\alpha) \to \mathcal{H}(G(F),\rho).$$

根据 [BK98, （8.7）], 我们有

$$t_P = t_{PM_\alpha} \circ t_{P\cap M_\alpha}$$

and

$$t_{P'} = t_{P'M_\alpha} \circ t_{P'\cap M_\alpha}.$$

由于 $PM_\alpha = P'M_\alpha$，只需证明 $t_{P\cap M_\alpha} = t_{P'\cap M_\alpha}$。令 Φ^{M_α}表示 M_α中相对于 S 的相对根集合，并令 Φ^{M_α}仿射 表示由 [BT72]的工作所关联到（M_α， S）的仿射根系。因此，

$$\Phi_{\mathrm{aff}}^{M_\alpha} = \{a \in \Phi_{\mathrm{aff}} \mid Da \in \Phi^{M_\alpha}\}.$$

类似地，我们也定义 Φ^M 和 Φ_{aff}^M。于是， M 的定义蕴含

$$\Phi^M = \Phi \cap \mathbb{R}\cdot(DJ),$$

其中， $\mathbb{R}\cdot(DJ)$ 表示 DJ 的 $\mathbb{R}$-张成。因此，我们得到

$$\Phi_{\mathrm{aff}}^M = \{a \in \Phi_{\mathrm{aff}} \mid Da \in \mathbb{R}\cdot(DJ)\},$$

在附录 A 中记作 $(\Phi_{\mathrm{aff}})_J$。由于 $\Phi^{M_\alpha}{}_{\mathrm{aff}}$ 包含 $(\Phi_{\mathrm{aff}})_J$，根据推论 A.5，我们可以取一个包含 J 的 $\Phi^{M_\alpha}{}_{\mathrm{aff}}$ 的基 B^{M_α}。因此，在 $W(J,\rho)$、$\Gamma(J,\rho)$ 和 $R(J,\rho)$ 的构造中，分别以 M_α 替换 G，并以 ρ_α 替换 ρ，即可定义 $W^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha)$、$\Gamma^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha)$ 和 $R^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha)$。

断言 7.6. 群 $R^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha)$ 是平凡的。

证明。只需证明 $\Gamma^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha)$ 为空。假设 $\Gamma^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha)$ 非空，并取一个元素 $a\in\Gamma^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha)$。根据下文的引理 10.1，$a$ 也包含在 $\Gamma(J,\rho)$ 中。由于 $D_J(\Gamma'(J,\rho))$ 中的任意元素都是 $D_J(\Gamma'(J,\rho)_e^+)$ 中某个元素的标量倍数，因此存在 $c\in\mathbb{R}^\times$ 使得

$$c\cdot D_J(a+A'_J)\in D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e^+\right).$$

那么，我们的假设

$$D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e^+\right)=D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e\right)\cap(-\Sigma(P,A_M))=D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e\right)\cap(-\Sigma(P',A_M))$$

推出

$$c\cdot D_J(a+A'_J)\in(-\Sigma(P,A_M))\cap(-\Sigma(P',A_M)).$$

另一方面，由于 $a\in\Phi^\vee{}^{\alpha}{}_{\mathrm{aff}}$，我们有

$$D_J(a+A'_J)=Da\restriction_{A_M}\in\mathbb{R}\cdot\alpha.$$

因此，存在 $c'\in\mathbb{R}^\times$ 使得

$$c'\cdot\alpha=-c\cdot D_J(a+A'_J)\in\Sigma(P,A_M)\cap\Sigma(P',A_M).$$

然而，由于

$$\alpha\in\Sigma(P,A_M)\cap(-\Sigma(P',A_M)),$$

我们得到

$$c'\cdot\alpha\in\begin{cases}\mathbb{R}_{<0}\cdot\Sigma(P',A_M)\cap\Sigma(P',A_M)=\emptyset & (c'>0),\\ \mathbb{R}_{<0}\cdot\Sigma(P,A_M)\cap\Sigma(P,A_M)=\emptyset & (c'<0),\end{cases}$$

矛盾。 □

现在，方程 $t_{P\cap M_\alpha}=t_{P'\cap M_\alpha}$ 由下文的推论 9.3 得出。 □

我们固定 G 的一个抛物子群 P，其 Levi 因子为 M，使得

$$D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e^+\right)=D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e\right)\cap(-\Sigma(P,A_M)).$$

首先，我们研究交换图的上行

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) & \xrightarrow{T_{\rho_M}} & \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\\
\downarrow{\scriptstyle t_P} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle I_P^G} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle I_P^G}\\
\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\right) & \xrightarrow{I_U} & \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right) & \xrightarrow{T_{\rho_M}} & \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)
\end{array}$$

该图由命题 4.7 得到。回顾一下，我们有同构（4.2）

$$\mathcal{H}(M(F),\rho_M)\simeq\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$$

以及同构（6.3）

$$\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]\simeq\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right).$$

我们研究复合

(7.2)

$$\mathcal{H}(M(F),\rho_M)\xrightarrow{(4.2)}\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\xrightarrow{T_{\rho_M}}\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\xrightarrow{(6.3)}\mathbb{C}[M_\sigma/M^1].$$

令 $m\in M_\sigma$。为避免记号滥用，我们用相同的符号 m 表示 m 在 M_σ/M^1 中的像。元素 $\theta_m\in\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 对应于元素

$$(\Phi^M_{m^{-1}})'\in\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)$$

定义为

$$\left((\Phi^M_{m^{-1}})'(f)\right)(m') = \sigma(m^{-1}) \cdot f(mm')$$

经由同构 (6.3) 对于 $f \in \mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma)$ 和 $m' \in M(F)$。由于我们将 σ_1 定义为

$$\sigma_1 = \mathrm{ind}_{K_M}^{M^1}(\rho_M),$$

自然嵌入

$$I_{M(F)}(\rho_M) \subset M_\sigma$$

诱导一个同构

$$I_{M(F)}(\rho_M)/K_M = I_{M(F)}(\rho_M)/I_{M^1}(\rho_M) \simeq M_\sigma/M^1.$$

我们将群代数 $\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 与 $\mathbb{C}[I_{M(F)}(\rho_M)/K_M]$ 等同。令

$$m \in I_{M(F)}(\rho_M) \subset \widetilde{K_M}.$$

由于 m 将表示 ρ_M 正规化，且表示 ρ_M 在 $\widetilde{\rho_M}\restriction_{K_M}$ 中的重数为 1，$\widetilde{\rho_M}(m^{-1})$ 保持 $\widetilde{\rho_M}$ 的子空间 ρ_M。我们定义

$$\Phi^M_{m^{-1}} \in \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$$

as

$$\left(\Phi^M_{m^{-1}}(f)\right)(m') = \widetilde{\rho_M}(m^{-1}) \cdot f(mm')$$

对于 $f \in \mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)$ 和 $m' \in M(F)$。

引理 7.7. 对于 $m \in I_{M(F)}(\rho_M)$，我们有

$$T_{\rho_M}(\Phi^M_{m^{-1}}) = (\Phi^M_{m^{-1}})'.$$

证明. 只需证明

$$\left(T_{\rho_M} \circ \Phi^M_{m^{-1}}\right)(f) = \left((\Phi^M_{m^{-1}})' \circ T_{\rho_M}\right)(f) \tag{7.3}$$

对于所有 $f \in \mathrm{ind}^{M(F)_{K_M}}(\rho_M)$。由于 $T_{\rho_M} \circ \Phi^M_{m^{-1}}$ 和 $(\Phi^M_{m^{-1}})' \circ T_{\rho_m}$ 是 $M(F)$-等变的，且 $\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)$ 由以下元素生成

$$\{f_v \mid v \in \rho_M\}$$

作为一个 $M(F)$-表示，我们可以假设 $f = f_v$ 对某个 $v \in \rho_M$ 成立。对于 $m' \in M(F)$ 和$m'' \in M^1$，我们有

$$\begin{aligned}\left(\left(\left(T_{\rho_M} \circ \Phi^M_{m^{-1}}\right)(f_v)\right)(m')\right)(m'') &= \left(\Phi^M_{m^{-1}}(f_v)\right)(m''m') \\ &= \widetilde{\rho_M}(m^{-1}) \cdot f_v(mm''m'),\end{aligned}$$

and

$$\left(\left(\left((\Phi^M_{m^{-1}})' \circ T_{\rho_M}\right)(f_v)\right)(m')\right)(m'') = \left(\sigma(m^{-1}) \cdot \left((T_{\rho_M}(f_v))(mm')\right)\right)(m'').$$

由于 f_v的支集包含于 K_M，且 $T_{\rho_M}(f_v)$ 的支集包含于 M^1，因此除非 $m' \in m^{-1}M^1$，否则 (7.3) 两边均为零。令 $m' = m^{-1}m_1$，其中 $m_1 \in M^1$。于是我们得到

$$\begin{aligned}\left(\left(\left(T_{\rho_M} \circ \Phi^M_{m^{-1}}\right)(f_v)\right)(m^{-1}m_1)\right)(m'') &= \widetilde{\rho_M}(m^{-1}) \cdot f_v(mm''m^{-1}m_1) \\ &= \begin{cases}\left(\widetilde{\rho_M}(m^{-1}) \circ \rho_M(mm''m^{-1}m_1)\right) \cdot v & (mm''m^{-1}m_1 \in K_M), \\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases} \\ &= \begin{cases}\widetilde{\rho_M}(m''m^{-1}m_1) \cdot v & (mm''m^{-1}m_1 \in K_M), \\ 0 & (\text{otherwise}),\end{cases}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\left(\left(\left(\left(\Phi_{m^{-1}}^{M}\right)'\circ T_{\rho_M}\right)(f_v)\right)(m^{-1}m_1)\right)(m'') &= \left(\sigma(m^{-1})\cdot\left(\left(T_{\rho_M}(f_v)\right)(m_1)\right)\right)(m'')\\ &= \left(\left(\sigma(m^{-1})\circ\sigma_1(m_1)\right)\cdot\left(\left(T_{\rho_M}(f_v)\right)(1)\right)\right)(m'')\\ &= \left(\sigma(m^{-1}m_1)\cdot f_{v,1}\right)(m'')\\ &= \left(\sigma(m^{-1}m_1)\cdot\widetilde{f_v}\right)(m'')\\ &= \widetilde{f_v}(m''m^{-1}m_1)\\ &= \begin{cases}\widetilde{\rho_M}(m''m^{-1}m_1)\cdot v & (m''m^{-1}m_1\in\widetilde{K_M}),\\ 0 & (\text{otherwise}).\end{cases}\end{aligned}$$

由于 m''、$m_1\in M^1$、$K_M=K_M\cap M^1$ 和 $m\in I_{M(F)}(\rho_M)\subset K_M$，我们有

$$\begin{aligned}mm''m^{-1}m_1\in K_M &\iff mm''m^{-1}m_1\in\widetilde{K_M}\\ &\iff m''m^{-1}m_1\in\widetilde{K_M}.\end{aligned}$$

因此，我们得到 (7.3)。 □

最后，对于 $m\in I_{M(F)}(\rho_M)$，与 $\Phi_{m^{-1}}^{M}$ 通过同构(4.2)对应的 $\mathcal{H}(M(F),\rho_M)$ 中的元素 $\phi_{m^{-1}}^{M}$ 定义为

$$\begin{aligned}\left(\phi_{m^{-1}}^{M}(m')\right)(v) &= \left(\Phi_{m^{-1}}^{M}(f_v)\right)(m')\\ &= \widetilde{\rho_M}(m^{-1})\cdot f_v(mm')\\ &= \begin{cases}\widetilde{\rho_M}(m')\cdot v & (m'\in m^{-1}K_M),\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}\end{aligned}$$

对于 $m'\in M(F)$ 和 $v\in\rho_M$。因此，我们得到：

引理 7.8。对于 $m\in I_{M(F)}(\rho_M)$，令 $\phi_{m^{-1}}^{M}$ 表示与 $\theta_m\in\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 通过同构 (7.2) 对应的 $\mathcal{H}(M(F),\rho_M)$ 中的元素。那么，$\phi_{m^{-1}}^{M}$ 的支集为 $m^{-1}K_M$。

回顾一下，我们将 $T(J,\rho)$ 定义为 $R(J,\rho)$ 的一个子群：

$$T(J,\rho)=\{t\in R(J,\rho)\mid (Dt)\restriction_{V^J}=\mathrm{id}\}.$$

对于 $t\in T(J,\rho)$，$v(t)$ 表示 $(V^{J,\mathrm{r}})^{\perp}\subset V^J\subset a_M$ 中满足以下条件的元素

$$t(x)=x+\widetilde{v(t)}$$

对所有 $x\in\mathcal{A}^J$ 均成立，而 $v(t)$ 表示 $v(t)$ 在 V_Γ^J 上的投影。Levi 子群M 的定义蕴含

$$T(J,\rho)=R(J,\rho)\cap W_{M(F)}.$$

引理 7.9. 典范投影诱导出一个同构

$$W(J,\rho)\cap W_{M(F)}\to I_{M(F)}(\rho_M)/K_M.$$

证明. 由于 $\dot{w}$ 对所有 $w\in W(J,\rho)$ 都与 ρ 交织，因此我们有

$$W(J,\rho)\cap W_{M(F)}\subset W_{I_{M(F)}(\rho_M)}.$$

根据 $K=P_J$ [Mor93, 3.7] 的定义以及 BN对的一般理论，我们有

$$W_{K_M}=W_K=W_J.$$

由于 $W(J,\rho)$ 的任意元素都固定 J，根据 Mor93，引理 2.2] 可知

$$W(J,\rho)\cap W_{K_M}=W(J,\rho)\cap W_J=\{1\}.$$

因此，自然投影诱导出一个单射

$$W(J,\rho)\cap W_{M(F)}\to I_{M(F)}(\rho_M)/K_M.$$

此外，根据 [Mor93，定理 4.15], 该映射是满射。 □

我们将

$$T(J,\rho)=R(J,\rho)\cap W_{M(F)}\subset W(J,\rho)\cap W_{M(F)}$$

作为.....的子群

$$I_{M(F)}(\rho_M)/K_M\simeq M_\sigma/M^1$$

根据引理 7.9。

引理 7.10. 设 $t\in T(J,\rho)$。那么，我们有

$$\widetilde{v(t)}=-H_M(t),$$

其中

$$H_M\colon M(F)/M^1\to a_M$$

表示第6节中定义的映射。

证明。注意，方程 (5.1) 表明， $T(J,\rho)$ 中的元素经由 H_M 映射后，落在由 $\alpha^\vee\,(\alpha\in\Sigma_{\mathrm{red}}(A_M))$ 张成的 a_M 子空间中。令 $Z_G(S)$ 表示相对于 S 的 G 的极小半标准 Levi 子群。对于 $t\in T(J,\rho)\cap W_{Z_G(S)(F)}$， H_M 和 [Tit79, 1.2 (1)] 的定义表明

$$\widetilde{v(t)}=-H_M(t).$$

令 $t\in T(J,\rho)$。由于 $Z_G(S)(F)$ 在 $M(F)/M^1$ 上经自然投影所得的像

$$Z_G(S)(F)\subset M(F)\to M(F)/M^1$$

具有有限指数，因此存在 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ 使得 at

$$t^n\in T(J,\rho)\cap W_{Z_G(S)(F)}.$$

因此，

$$\begin{aligned} n\cdot\widetilde{v(t)}&=\widetilde{v(t^n)}\\ &=-H_M(t^n)\\ &=-n\cdot H_M(t).\end{aligned}$$

⁀因此，我们得到 $v(t)=-H_M(t)$。 □

我们还回顾一下，若元素 $z\in M(F)$ 满足以下条件，则称其相对于 K 和 U 为正

$$zK_Uz^{-1}\subset K_U,\ z^{-1}K_{\overline{U}}z\subset K_{\overline{U}}.$$

引理 7.11. 设 $t\in T(J,\rho)$，满足 $(D_J(a'))\,(v(t))\ge 0$ 对所有 $a'\in B(J,\rho)_e$ 均成立。那么，对于某个具有 Levi 因子 M 和幺幂根基 U' 的 G 的抛物子群 P'， i 对 K 和 U' 是正的，其中 t 的提升 i 满足

$$D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e^+\right)=D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e\right)\cap\left(-\Sigma(P',A_M)\right).$$

证明. 设 $t\in T(J,\rho)$，满足 $(D_J(a'))\,(v(t))\ge 0$ 对所有 $a'\in B(J,\rho)_e$ 均成立。取一个元素 $\lambda\in a_M$，使得

$$\langle\alpha,\lambda\rangle\neq 0$$

对所有 $\alpha\in\Sigma(G,A_M)$ 均成立，并且

$$\langle\alpha,\lambda\rangle>0 \tag{7.4}$$

⁀对所有 $\alpha\in D_J\left(B(J,\rho)_e\right)$ 均成立。 t 的假设意味着 $v(t)$ 属于.....的闭包 set

$$\{x\in a_M\mid\langle\alpha,x\rangle>0\ (\alpha\in D_J\left(B(J,\rho)_e\right))\},$$

⁀因此，我们可以取充分接近 $v(t)$ 的 λ。更确切地说，我们可以假设

$$\langle\alpha,\widetilde{v(t)}\rangle\le 0 \tag{7.5}$$

对所有满足.....的 $\alpha\in\Sigma(G,A_M)$ 均成立

$$\langle\alpha,\lambda\rangle<0.$$

L且 P' 是 G 的抛物子群，其 Levi 因子为 M，幺幂根基为 U'，使得

$$\Sigma(P',A_M)=\{\alpha\in\Sigma(G,A_M)\mid\langle\alpha,\lambda\rangle<0\}.$$

条件 (7.4) 意味着

$$D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e^+\right) \subset D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e\right) \cap \left(-\Sigma(P',A_M)\right).$$

Since $D_J(\Gamma'(J,\rho)_e^+)$ 和 $D_J(\Gamma'(J,\rho)_e) \cap (-\Sigma(P',A_M))$ 是 $D_J(\Gamma'(J,\rho)_e$ 中的正根集合), we o得到

$$D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e^+\right) = D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e\right) \cap \left(-\Sigma(P',A_M)\right).$$

我们将证明 $\dot{t}$ 相对于 K 和 U' 是正的。根据 [Tit79, 3.1], , 我们可以取 $y \in \mathcal{F}_J \subset \mathcal{A}^J$ 使得

$$P_J = G(F)_{y,0},$$

where $G(F)_{y,\ 0}$ 表示与 y [MP96, 3.1, 3.2] 中关联的 $G(F)$ 的抛物型子群。该 n, we o得到

$$\begin{aligned} \dot{t}K_{U'}\dot{t}^{-1} &= \dot{t}(G(F)_{y,0} \cap U'(F))\dot{t}^{-1} \\ &= G(F)_{t\cdot y,0} \cap U'(F) \\ &= G(F)_{y+\widetilde{v(t)},0} \cap U'(F). \end{aligned}$$

条件 (7.5) 意味着

$$\langle \alpha, \widetilde{v(t)} \rangle \leq 0$$

对所有 $\alpha \in \Sigma(P', A_M)$ 均成立。因此，根据抛物型子群 [MP96, 3.1, 3.2] 的定义可知 $\dot{t}K_{U'}\dot{t}^{-1} \subset K_{U'}$。类似地，我们可以证明 $\dot{t}^{-1}K_{\overline{U}'}\dot{t} \subset K_{\overline{U}'}$。□

注 7.12. 设 P' 是 G 的一个抛物子群，其 Levi 因子为 M，幺幂根基为U'。设 $m \in W(J,\rho) \cap W_{M(F)}$，使得

$$\langle \alpha, H_M(m) \rangle \geq 0$$

对所有 $\alpha \in \Sigma(P', A_M)$ 均成立。于是，引理 7.10 和引理 7.11 的证明表明，m 的提升 $\dot{m}$ 相对于 K 和 U' 是正的。

C结合引理 7.5、引理 7.8 和引理 7.11，我们得到以下推论 s.

推论 7.13。设 $t \in T(J,\rho)$，使得对于所有 $a' \in B(J,\rho)_e$，都有 $(D_J(a'))(v(t)) \geq 0$。令 ϕ_t^M表示 $\mathcal{H}(M(F), \rho_M)$ 中与

$$\theta_{t^{-1}} \in \mathbb{C}[I_{M(F)}(\rho_M)/K_M] = \mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$$

通过同构（7.2）对应的元素。我们也用 Φ_t^M表示 $\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$ 中通过同构（4.2）与 ϕ_t^M 对应的元素。那么，存在 $c(t) \in \mathbb{C}^\times$，使得

$$(I^{\mathrm{Mor}} \circ t_P)(\Phi_t^M) = c(t) \cdot \theta_{v(t)}.$$

证明。根据引理 7.11，对于某个 G 的抛物子群 P'，其 Levi 因子为 M，幺幂根基为 U'， $\dot{t}$ 相对于 K 和 U' 是正的，并且

$$D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e^+\right) = D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e\right) \cap \left(-\Sigma(P',A_M)\right).$$

根据引理 7.5，我们有 $t_P = t_{P'}$。因此，用 P'替换 P 后，不妨设 $\dot{t}$ 相对于 K 和 U 是正的。根据引理 7.8， ϕ_t^M 的支集包含于 $\dot{t}K_M$。因此，根据 t_P 的定义， $t_P(\phi_t^M)$ 的支集包含于 $K\dot{t}K$。于是，存在 $c'(t) \in \mathbb{C}^\times$，使得

$$t_P\left(\Phi_t^M\right) = c'(t) \cdot \Phi_t.$$

这里， Φ_t 表示定理 5.5 中出现的 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$的元素。另一方面，由于对于所有 $a' \in B(J,\rho)_e$， t 都满足 $(D_J(a'))(v(t)) \geq 0$，根据推论 5.7 可得

$$I^{\mathrm{Mor}}(\Phi_t) = q_{v(t)}^{1/2} \cdot \theta_{v(t)}.$$

因此，我们得到

$$\left(I^{\mathrm{Mor}} \circ t_P\right)(\Phi_t^M) = c(t) \cdot \theta_{v(t)}$$

for

$$c(t) = c'(t) \cdot q_{v(t)}^{1/2}.$$

□

推论 7.14。通过映射， $\mathbb{C}[\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee]$ 的像

$$\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}} \xrightarrow{(I^{\mathrm{Mor}})^{-1}} \mathcal{H}(R(J,\rho)) \xrightarrow{T_{\rho_M}\circ I_U} \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$$

包含于端同态环 $M(F)$ $\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)$ 在 I_P^G 下的像中。此外，对于 $t \in T(J,\rho)$，存在 $c(t) \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$\left(I^{\mathrm{Sol}} \circ T_{\rho_M} \circ I_U \circ (I^{\mathrm{Mor}})^{-1}\right)\left(\theta_{v(t)}\right) = c(t)^{-1} \cdot \theta_{t^{-1}}.$$

若 t 满足对所有 $a' \in B(J,\rho)_e$ 都成立的 $(D_J(a'))\,(v(t)) \geq 0$，则数值 $c(t)$ 与推论 7.13 中出现的数值相同。

证明。设 $t \in T(J,\rho)$，使得

$$(D_J(a'))\,(v(t)) \geq 0 \tag{7.6}$$

对所有 $a' \in B(J,\rho)_e$ 均成立。我们采用与推论 7.13 相同的记号。由命题 4.7 和推论 7.13 可得

$$\begin{aligned}\left(T_{\rho_M} \circ I_U \circ (I^{\mathrm{Mor}})^{-1}\right)(\theta_{v(t)}) &= c(t)^{-1} \cdot \left(T_{\rho_M} \circ I_U \circ t_P\right)(\Phi_t^M) \\ &= c(t)^{-1} \cdot \left(T_{\rho_M} \circ I_P^G\right)(\Phi_t^M) \\ &= c(t)^{-1} \cdot \left(I_P^G \circ T_{\rho_M}\right)(\Phi_t^M).\end{aligned}$$

此外，由于 $\phi_t^M \in \mathcal{H}(M(F),\rho_M)$ 通过同构（7.2）对应于 $\theta_{t^{-1}} \in \mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$，并通过同构（4.2）对应于 Φ_t^M，因此 $T_{\rho_M}(\Phi_t^M)$ 通过（6.3）对应于 $\theta_{t^{-1}}$。于是，由定理 6.11 可得

$$\left(I^{\mathrm{Sol}} \circ I_P^G \circ T_{\rho_M}\right)(\Phi_t^M) = \theta_{t^{-1}}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\left(I^{\mathrm{Sol}} \circ T_{\rho_M} \circ I_U \circ (I^{\mathrm{Mor}})^{-1}\right)(\theta_{v(t)}) &= c(t)^{-1} \cdot \left(I^{\mathrm{Sol}} \circ I_P^G \circ T_{\rho_M}\right)(\Phi_t^M) \\ &= c(t)^{-1} \cdot \theta_{t^{-1}}.\end{aligned}$$

由于 $T(J,\rho)$ 中的任意元素都可以写成满足 (7.6) 的 $T(J,\rho)$ 中两个元素之差，并且

$$t \mapsto v(t)$$

定义了一个同构

$$T(J,\rho) \to \mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee,$$

我们便得到所述结论。 □

我们将证明，对于推论 7.18 中的所有 $t \in T(J,\rho)$，都有 $c(t) = 1$。

接下来，我们比较 $T_{\rho_M} \circ I_U$ 两边的“有限部分”。以下定理是本文的主要结果之一。

定理 7.15. 作为复数域的子集，我们有

$$\begin{cases} R^{\mathrm{Mor}} &= R^{\mathrm{Sol}}, \\ \Delta^{\mathrm{Mor}} &= -\Delta^{\mathrm{Sol}}. \end{cases}$$

这里，我们将复数域视为通过以下方式嵌入另一个复数域的子集

$$H_M^\vee \colon \left(M_\sigma/M^1\right)^\vee \to a_M^*.$$

注 7.16. 定理 7.15 的对偶也成立。利用同构 (5.2)，我们考虑根系

$$(R^{\mathrm{Mor}})^\vee = \{k_{a'}(D_J(a'))^\vee \mid a' \in \Gamma'(J,\rho)_e\}$$

在 V_Γ^J 中作为 $(V^{J,\,\Gamma})^\perp$ 中的根系。特别地，我们将 $(R^{\mathrm{Mor}})^\vee$ 视为 a_M 的子集。我们还通过以下方式将 $(R^{\mathrm{Sol}})^\vee$ 视为 a_M 的子集

$$H_M \colon M_\sigma/M^1 \to a_M.$$

因此，根据定理 7.15，作为 a_M 的子集，我们有

$$\begin{cases}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee &= (R^{\mathrm{Sol}})^\vee,\\ (\Delta^{\mathrm{Mor}})^\vee &= -(\Delta^{\mathrm{Sol}})^\vee,\end{cases}$$

其中，$(\Delta^{\mathrm{Mor}})^\vee$ 和 $(\Delta^{\mathrm{Sol}})^\vee$ 定义为

$$(\Delta^{\mathrm{Mor}})^\vee = \{k_{a'}(D_J(a'))^\vee \mid a' \in B(J,\rho)_e\}$$

and

$$(\Delta^{\mathrm{Sol}})^\vee = \{(h_\alpha^\vee)' \mid \alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)\}.$$

我们将 R^{Mor} 的魏尔群 $W_0(R^{\mathrm{Mor}})$与 R^{Sol} 的魏尔群 $W_0(R^{\mathrm{Sol}})$ 视为同一群。因此，定理 7.15 的第二个断言表明，关于基 Δ^{Mor} 的 $W_0(R^{\mathrm{Mor}})$ 中的简单反射集合，与关于基Δ^{Sol}的 $W_0(R^{\mathrm{Sol}})$ 中的简单反射集合相同。

设 $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$。为简便起见，我们记

$$\alpha' = (\alpha^\#)' \in \Delta^{\mathrm{Sol}} = -\Delta^{\mathrm{Mor}}$$

and

$$(\alpha')^\vee = (h_\alpha^\vee)' \in (\Delta^{\mathrm{Sol}})^\vee = -(\Delta^{\mathrm{Mor}})^\vee.$$

回想一下，为了定义$T'_{s_\alpha} \in \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$，我们必须在 $I_{M_\alpha^1}(\sigma_1)$ 中选取反射 $s_\alpha \in W_0(R^{\mathrm{Sol}})$ 的一个提升 $\widetilde{s_\alpha}$。我们如下固定提升 $\widetilde{s_\alpha}$。令 $a \in \Gamma(J,\rho)^+$，使得$a + A'_J \in B(J,\rho)_e$，并且

$$r(a) = -\alpha' \in \Delta^{\mathrm{Mor}}.$$

我们固定 $\widetilde{s}$ 在 $N_G(S)(F)$ 中的一个提升。由于 $v[a,J] \in W(J,\rho)$ 固定 J，根据 M 的定义可知 $\widetilde{s} \in N_G(M)(F)$。根据 $W(J,\rho)$ 的定义还可知，$\widetilde{s}$ 交织 $\rho_M = \rho\restriction_{K_M}$，因此将该表示正规化

$$\sigma_1 = \mathrm{ind}_{K_M}^{M^1}(\rho_M).$$

由于

$$\begin{aligned} Da\restriction_{A_M} &= D_J(a + A'_J)\\ &= k_{a+A'_J} \cdot r(a)\\ &= -k_{a+A'_J} \cdot \alpha'\\ &\in \mathbb{R}^\times \cdot \alpha, \end{aligned}$$

我们有

$$W_{J\cup\{a\}} \subset W_{M_\alpha}(F)\backslash W_{M(F)}.$$

因此，根据 $v[a,J]$ 的定义可知，$\widetilde{s}$ 包含于 $M_\alpha(F)\backslash M(F)$ 中。由此可得，$\widetilde{s}$ 在 $N_G(M)(F)/M(F)$ 上的像等于 s_α，也就是

$$W(M_\alpha, M) = \left(N_G(M)(F) \cap M_\alpha(F)\right)/M(F).$$

此外，根据 $v[a,J]$ 的定义，元素 $\widetilde{s}$ 包含于 $M_\alpha(F)$ 的一个抛物型子群中。特别地，我们有 $\widetilde{s} \in M_\alpha^1$。因此，我们可以取 $I_{M_\alpha^1}(\sigma_1)$ 中反射 s_α 的提升 $\widetilde{s_\alpha}$ 作为 $\widetilde{s_\alpha} = \widetilde{s}$。

对于与元素 $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M\text{相关的}\mu}(P)$ 的简单反射 $s = s_\alpha$，我们将 $T_{\mathrm{Sol}s\text{定义为}0} \in \mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$

$$T_{s,0}^{\mathrm{Sol}} = q_F^{\left(-\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \cdot \left(\theta_{(\alpha')^\vee} T_s^{\mathrm{Sol}} - (q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')} - 1)\theta_{(\alpha')^\vee}\right)$$

（见附录 D）。

现在，我们陈述第二个主要定理。令 $\epsilon = \epsilon_\alpha \in \{0,1\}$ 表示在 [Sol22，引理 10.7 (b)] 中定义的数。

定理 7.17。 $\mathcal{H}(R(J,\rho))$ 通过同构得到的像

$$T_{\rho_M} \circ I_U \colon \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$$

包含在 $\mathcal{H}(W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}))$ 中。此外，对于一个简单反射

$$s = s_\alpha \in W_0(R^{\mathrm{Mor}}) = W_0(R^{\mathrm{Sol}})$$

与元素 $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$ 相关联， T_{Mors} 经复合所得的像

$$\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}} \xrightarrow{(I^{\mathrm{Mor}})^{-1}} \mathcal{H}(R(J,\rho)) \xrightarrow{T_{\rho_M}\circ I_U} \mathcal{H}\left(W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})\right) \xrightarrow{I^{\mathrm{Sol}}} \mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$$

当 $\epsilon_\alpha = 0$ 时等于 $\iota\left(T_s^{\mathrm{Sol}}\right)$，而当 $\epsilon_\alpha = 1$ 时等于 $\iota\left(T_s^{\mathrm{Sol}}, 0\right)$，其中

$$\iota\colon \mathcal{H}^{\mathrm{Sol}} \to \mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$$

表示附录 C 中定义的对合。我们还得到

$$\begin{cases} \lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') & = \lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha'), \\ (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') & = (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha') \end{cases}$$

当 $\epsilon_\alpha = 0$ 时，且

$$\begin{cases} \lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') & > (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'), \\ \lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') & = (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'), \\ (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') & = \lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') \end{cases}$$

当 $\epsilon_\alpha = 1$ 时。

B通过使用定理 7.15、注 7.16 和定理 7.17，我们可以将推论 7.14 进一步细化如下 s.

Cor论 7.18。推论 7.14 中出现的 $c(t) \in \mathbb{C}^\times$ 等于 1。因此，对于 y $t \in T(J,\rho)$，我们有

$$\left(\iota \circ I^{\mathrm{Sol}} \circ T_{\rho_M} \circ I_U \circ (I^{\mathrm{Mor}})^{-1}\right)\left(\theta_{v(t)}\right) = \theta_t.$$

证明。回想一下，我们利用同构 (5.2)，将 $(R^{\mathrm{Mor}})^\vee$ 视为 a_M 的一个子集。因此，对于 $t \in T(J,\rho)$，

$$v(t) \in \mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee$$

被视为

$$-H_M(t) = \widetilde{v(t)} \in a_M,$$

and

$$t \mapsto \widetilde{v(t)}$$

定义了一个同构

$$T(J,\rho) \to (\mathbb{Z}R^{\mathrm{Mor}})^\vee = (\mathbb{Z}R^{\mathrm{Sol}})^\vee.$$

由于

$$(\Delta^{\mathrm{Sol}})^\vee = \{(\alpha')^\vee \mid \alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)\}$$

是 $(R^{\mathrm{Sol}})^\vee$ 的一组基，只需证明

$$\left(\iota \circ I^{\mathrm{Sol}} \circ T_{\rho_M} \circ I_U \circ (I^{\mathrm{Mor}})^{-1}\right)\left(\theta_{-(\alpha')^\vee}\right) = \theta_{(\alpha')^\vee}$$

对所有 $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}(P)$ 都成立。我们记 $c = c((\alpha')^\vee)$。令

$$s = s_\alpha \in W_0(R^{\mathrm{Mor}}) = W_0(R^{\mathrm{Sol}})$$

表示与 α 关联的简单反射。则元素 T_s^{Mor} 满足

(7.7)

$$\theta_{-(\alpha')^\vee} T_s^{\mathrm{Mor}} - T_s^{\mathrm{Mor}} \theta_{(\alpha')^\vee} = (q_F^{\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')} - 1)\theta_{-(\alpha')^\vee} + q_F^{(\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha'))/2} - q_F^{(\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') - (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha'))/2}.$$

首先，考虑 $\epsilon_\alpha = 0$ 的情形。根据推论 7.14 和定理 7.17，通过比较 (7.7) 两边在

$$\iota \circ I^{\mathrm{Sol}} \circ T_{\rho_M} \circ I_U \circ (I^{\mathrm{Mor}})^{-1},$$

我们得到

$$\begin{aligned} & c^{-1} \cdot \theta_{(\alpha')^\vee} T_s^{\mathrm{Sol}} - c \cdot T_s^{\mathrm{Sol}} \theta_{-(\alpha')^\vee} \\ & \quad = c^{-1} \cdot (q_F^{\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')} - 1)\theta_{(\alpha')^\vee} + q_F^{(\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha'))/2} - q_F^{(\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') - (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha'))/2}. \end{aligned}$$

因此，我们有

(7.8)

$$\theta_{(\alpha')^\vee} T_s^{\mathrm{Sol}} = c^2 \cdot T_s^{\mathrm{Sol}} \theta_{-(\alpha')^\vee} + (q_F^{\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')} - 1)\theta_{(\alpha')^\vee} + c\left(q_F^{(\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha'))/2} - q_F^{(\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') - (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha'))/2}\right).$$

另一方面，元素 T_s^{Sol}满足

$$\theta_{(\alpha')^\vee}T_s^{\mathrm{Sol}}-T_s^{\mathrm{Sol}}\theta_{-(\alpha')^\vee}=(q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1)\theta_{(\alpha')^\vee}+q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}-q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')-(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2},$$

因此我们有

(7.9)

$$\theta_{(\alpha')^\vee}T_s^{\mathrm{Sol}}=T_s^{\mathrm{Sol}}\theta_{-(\alpha')^\vee}+(q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1)\theta_{(\alpha')^\vee}+q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}-q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')-(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}.$$

根据定理 7.17，我们有

$$\begin{cases}\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') & =\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')>0,\\ (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') & =(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')>0.\end{cases}$$

T于是，比较 (7.8) 和 (7.9) 右侧的常数项，我们有 $c=$ 1.

接下来，我们考虑 $\epsilon_\alpha=1$ 的情形。根据推论 7.14 和定理 7.17，通过比较 (7.7) 两边的像

$$\iota\circ I^{\mathrm{Sol}}\circ T_{\rho_M}\circ I_U\circ(I^{\mathrm{Mor}})^{-1},$$

我们得到

$$\begin{aligned}&c^{-1}\cdot\theta_{(\alpha')^\vee}T_{s,0}^{\mathrm{Sol}}-c\cdot T_{s,0}^{\mathrm{Sol}}\theta_{-(\alpha')^\vee}\\&\quad=c^{-1}\cdot(q_F^{\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')}-1)\theta_{(\alpha')^\vee}+q_F^{(\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha'))/2}-q_F^{(\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')-(\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha'))/2}\end{aligned}$$

因此，我们有

(7.10)

$$\theta_{(\alpha')^\vee}T_{s,0}^{\mathrm{Sol}}=c^2\cdot T_{s,0}^{\mathrm{Sol}}\theta_{-(\alpha')^\vee}+(q_F^{\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')}-1)\theta_{(\alpha')^\vee}+c\left(q_F^{(\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha'))/2}-q_F^{(\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')-(\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha'))/2}\right).$$

另一方面，$T_{s,0}^{\mathrm{Sol}}$ 的定义意味着

$$\begin{aligned}&q_F^{\left(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')-(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2}\cdot\left(\theta_{(\alpha')^\vee}T_{s,0}^{\mathrm{Sol}}-T_{s,0}^{\mathrm{Sol}}\theta_{-(\alpha')^\vee}\right)\\&=\theta_{(\alpha')^\vee}\left(\theta_{(\alpha')^\vee}T_s^{\mathrm{Sol}}-(q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1)\theta_{(\alpha')^\vee}\right)-\left(\theta_{(\alpha')^\vee}T_s^{\mathrm{Sol}}-(q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1)\theta_{(\alpha')^\vee}\right)\theta_{-(\alpha')^\vee}\\&=\theta_{(\alpha')^\vee}\left(\theta_{(\alpha')^\vee}T_s^{\mathrm{Sol}}-T_s^{\mathrm{Sol}}\theta_{-(\alpha')^\vee}\right)-(q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1)(\theta_{2(\alpha')^\vee}-1)\\&=\theta_{(\alpha')^\vee}\left((q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1)\theta_{(\alpha')^\vee}+q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}-q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')-(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}\right)-(q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1)(\theta_{2(\alpha')^\vee}-1)\\&=\left(q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}-q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')-(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}\right)\theta_{(\alpha')^\vee}+q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1.\end{aligned}$$

因此，我们有

(7.11)

$$\theta_{(\alpha')^\vee}T_{s,0}^{\mathrm{Sol}}=T_{s,0}^{\mathrm{Sol}}\theta_{-(\alpha')^\vee}+(q_F^{(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1)\theta_{(\alpha')^\vee}+q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}-q_F^{(-\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}.$$

根据定理 7.17，我们有

$$\begin{cases}\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') & =(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')>0,\\ (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') & =\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')>0.\end{cases}$$

T于是，比较 (7.10) 和 (7.11) 右侧的常数项，我们得到 $c=1$. □

我们还可以从定理 7.17 得到以下推论。

推论 7.19。设 $\alpha\in\Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$。设 $a\in\Gamma(J,\rho)^+$ 满足 $r(a)=-\alpha'$。那么，数量ϵ_α 以及参数 q_α 和 $q_{\alpha*}$ 可计算为

$$\begin{cases}\epsilon_\alpha & =0,\\ q_\alpha & =p_a^{1/2}\cdot(p'_a)^{1/2},\\ q_{\alpha*} & =p_a^{1/2}\cdot(p'_a)^{-1/2}\end{cases}$$

若 $p_a > p'_a$，且

$$\begin{cases} \epsilon_\alpha & = 1, \\ q_\alpha & = p_a^{1/2} \cdot (p'_a)^{1/2}, \\ q_{\alpha *} & = p_a^{-1/2} \cdot (p'_a)^{1/2} \end{cases}$$

若 $p_a < p'_a$。若 $p_a = p'_a$，则有 $\epsilon_\alpha = 0$，并且有两种可能：

$$\begin{cases} q_\alpha & = p_a, \\ q_{\alpha *} & = 1 \end{cases}$$

and

$$q_\alpha = q_{\alpha *} = p_a^{1/2}.$$

注 7.20. 根据 [Sol22，引理 3.3]，$q_{\alpha *} = 1$ 除非 $\alpha^\#$ 是 $\Sigma_{\mathfrak{s}_M}$ 的某个 A_1 型不可约分支中的唯一单根，或是 $\Sigma_{\mathfrak{s}_M}$ 的某个 C_n $(n \geq 2)$ 型不可约分支中的长根。若 $q_{\alpha *} = 1$，推论 7.19 意味着

$$p_a = p'_a = q_\alpha.$$

推论 7.19 的证明。首先，我们假设 $\epsilon_\alpha = 0$。然后，定理 7.17 意味着

$$\begin{cases} \lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') & = \lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha'), \\ (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') & = (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha') \end{cases} \tag{7.12}$$

若 $q_\alpha > q_{\alpha *}$，则由 (6.1) 和 (6.9) 可得

$$\begin{aligned} q_\alpha &= q_F^{\left(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \\ &= q_F^{\left(\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')\right)/2} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} q_{\alpha *} &= q_F^{\left(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') - (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \\ &= q_F^{\left(\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') - (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')\right)/2}. \end{aligned}$$

然后，根据 (5.5) 和 (5.7)，我们有

$$\begin{cases} q_\alpha & = p_a^{1/2} \cdot (p'_a)^{1/2}, \\ q_{\alpha *} & = p_a^{1/2} \cdot (p'_a)^{-1/2}. \end{cases} \tag{7.13}$$

若 $q_\alpha = q_{\alpha *}$，则由 (6.1) 和 (6.10) 可得

$$\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') = (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')$$

and

$$q_\alpha = q_{\alpha *} = q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')/2} = q_F^{\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')/2}.$$

注意，在这种情况下，我们还有

$$\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') = (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')$$

那么，根据 (5.5) 和 (5.7)，我们有

$$q_\alpha = q_{\alpha *} = p_a^{1/2} = (p'_a)^{1/2}. \tag{7.14}$$

接下来，我们考虑 $\epsilon_\alpha = 1$ 的情形。根据定理 7.17，我们有

$$\begin{cases} \lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') & > (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'), \\ \lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') & = (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'), \\ (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') & = \lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha'). \end{cases}$$

如果 $q_\alpha = q_{\alpha *}$，则 (6.10) 意味着

$$\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') = (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'),$$

这就产生了矛盾。因此，我们有 $q_\alpha > q_{\alpha *}$。接着，(6.1) 和 (6.9) 意味着

$$\begin{aligned} q_\alpha &= q_F^{\left(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \\ &= q_F^{\left((\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')+\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')\right)/2} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} q_{\alpha *} &= q_F^{\left(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')-(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \\ &= q_F^{\left((\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')-\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha')\right)/2}. \end{aligned}$$

因此，由 (5.5) 和 (5.7) 可得

$$\begin{cases} q_\alpha &= p_a^{1/2} \cdot (p'_a)^{1/2}, \\ q_{\alpha *} &= p_a^{-1/2} \cdot (p'_a)^{1/2}. \end{cases} \tag{7.15}$$

现在我们证明这个推论。共有三种可能：(7.13)、(7.14) 和 (7.15)。注意到 $p_a, p'_a > 1$ 和 $q_\alpha \geq q_{\alpha *} \geq 1$。因此，当 $p_a > p'_a$ 时只能出现 (7.13)，而当 $p_a < p'_a$ 时只能出现 (7.15)。假设 $p_a = p'_a$。若 $\epsilon_\alpha = 1$，则有

$$\lambda^{\mathrm{Mor}}(-\alpha') = (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha') < \lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') = (\lambda^*)^{\mathrm{Mor}}(-\alpha'),$$

因此 $p_a < p'_a$，矛盾。由此可得 $\epsilon_\alpha = 0$，且有两种可能：(7.13) 和 (7.14)。（□）

参数 p_a 在 [Lus84 的第 8] 节中进行了研究。特别地，根据 [Lus84，定理 8.6]，，如果 $\mathbf{M}^{J\cup\{a\}}$ 的中心是连通的，那么参数 p_a 是 q_F 的幂。在这种情况下，推论 7.19 表明 q_α 和 $q_{\alpha *}$ 是 $q_F^{1/2}$ 的幂（参见 [Lus20, 1.(a)] 和 [Sol21b，猜想A]）。

8. Some lemmas for main theorems

本节中，我们准备一些引理，用于在后续各节证明定理 7.15 和定理 7.17。我们沿用第7节中的记号。令 $a \in \Gamma(J, \rho)$，并固定 s，它是 $v[a, J]$ 在 $N_G(S)(F)$ 中的一个提升。注意，Levi 子群 M 的定义意味着 $W_{J\cup\{a\}} \not\subset W_{M(F)}$。因此，我们得到 $s \notin M(F)$。

引理 8.1。元素 s 正规化 M、K_M 和 ρ_M。

证明。由于 $v[a, J] \in R(J, \rho) \subset W(J, \rho)$，元素 s 交织 ρ 并固定 J。因此，它也固定 Levi 子群 M 和子集

$$\{x \in \mathcal{A}(G, S) \mid a(x) = 0 \ (a \in J)\}$$

$\mathcal{A}(G, S)$ 中的子集。K_M 的定义意味着，对于上述集合中的任意元素 x，我们有

$$K_M = G(F)_{x,0} \cap M(F),$$

其中，$G(F)_{x,0}$ 表示与 x [MP96, 3.1, 3.2] 相关联的 $G(F)$ 的抛物型子群。因此，我们得到 s 正规化了 K_M。由于 s 交织 ρ，故得证。□

引理 8.2. 元素 s 不属于 $P(F) \cdot K$。

证明。假设 $s \in P(F) \cdot K$。记

$$s = muk \ (m \in M(F), u \in U(F), k \in K).$$

设 $s' = m^{-1}s$。那么，对于任意 $m_1 \in M(F)$，有

$$(s')^{-1} m_1 s' = k^{-1} u^{-1} m_1 u k = k^{-1} u^{-1} (m_1 u m_1^{-1}) m_1 k.$$

记

$$k = k_U \cdot k_{\overline{U}} \cdot k_M \ (k_U \in K_U, k_M \in K_M, k_{\overline{U}} \in K_{\overline{U}}),$$

并令

$$m' = (s')^{-1} m_1 s' \in M(F)$$

and

$$u' = u^{-1}(m_1 u m_1^{-1}) \in U(F).$$

于是，我们得到

$$k_U \cdot k_{\overline{U}} \cdot (k_M m') = \left(u'(m_1 k_U m_1^{-1})\right) \cdot \left(m_1 k_{\overline{U}} m_1^{-1}\right) \cdot m_1 k_M.$$

因此，

$$\begin{cases} k_U & = u'(m_1 k_U m_1^{-1}), \\ k_{\overline{U}} & = m_1 k_{\overline{U}} m_1^{-1}, \\ k_M m' & = m_1 k_M. \end{cases}$$

最后一个方程表明， $s' k_M^{-1}$ 与 $M(F)$中的任意 m_1 都可交换。特别地， $s' k_M^{-1}$ 与 A_M中的任意元素都可交换。因此，我们得到 $s' k_M^{-1} \in M(F)$。由此可得

$$s = ms' = m(s' k_M^{-1}) k_M \in M(F),$$

矛盾。 □

我们记 $P_s = s^{-1} P s$和 $U_s = s^{-1} U s$。

引理 8.3. 设 $m \in M(F)$满足

$$U(F) m s \cap K s K \neq \emptyset.$$

于是，我们有 $m \in K_M$。此外，设 $m \in K_M$, $u \in U(F)$，以及 $k, k' \in K$，使得

$$ums = k^{-1} s k'.$$

记

$$k = k_{\overline{U}} \cdot k_M \cdot k_U \ (k_U \in K_U, k_M \in K_M, k_{\overline{U}} \in K_{\overline{U}})$$

and

$$k' = k'_{\overline{U_s}} \cdot k'_M \cdot k'_{U_s} \ (k'_{U_s} \in K_{U_s}, k'_M \in K_M, k'_{\overline{U_s}} \in K_{\overline{U_s}}).$$

于是，我们有

$$k_M m = s k'_M s^{-1}.$$

证明。设 $u \in U(F)$ 和 $k, k' \in K$，使得

$$ums = k^{-1} s k' \in U(F) m s \cap K s K.$$

于是，我们有

$$kum = s k' s^{-1}.$$

注意到

$$s k' s^{-1} = (s k'_{\overline{U_s}} s^{-1}) \cdot (s k'_M s^{-1}) \cdot (s k'_{U_s} s^{-1})$$

and

$$s k'_{\overline{U_s}} s^{-1} \in \overline{U}(F), \ s k'_{U_s} s^{-1} \in U(F).$$

于是，我们有

$$k_{\overline{U}} \cdot k_M m \cdot (m^{-1}(k_U u) m) = (s k'_{\overline{U_s}} s^{-1}) \cdot (s k'_M s^{-1}) \cdot (s k'_{U_s} s^{-1}),$$

因此

$$\begin{cases} k_{\overline{U}} & = s k'_{\overline{U_s}} s^{-1}, \\ k_M m & = s k'_M s^{-1}, \\ m^{-1}(k_U u) m & = s k'_{U_s} s^{-1}. \end{cases}$$

最后一个结论由第二个方程得出。根据引理 8.1， s 正规化 K_M。因此，我们得到

$$m = k_M^{-1} \cdot (s k'_M s^{-1}) \in K_M.$$

□

N现在，假设存在 $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}(P)$，使得 s 也是 th 在 $I_{M_\alpha^1}(\sigma_1)$ 中的一个提升 e simple 反射

$$s_\alpha \in N_G(M)(F)/M(F)$$

与 α 相关。我们将 s_α 和 $v[a, J]$ 视为 $s_\circ$ 令 $\epsilon = \epsilon_\alpha \in \{0, 1\}$ 表示 Sol22 的引理 10.7 (b)] 中定义的数。令 Φ_s 表示定理 5.5 中出现的 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$ 的元素，令 T'_s 表示引理 6.7 中出现的 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 的元素。

引理 8.4. 假设存在 b_0、$b' \in \mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$，使得

$$(T_{\rho_M} \circ I_U)(\Phi_s) = b_0 \cdot T'_s + b'. \tag{8.1}$$

于是，存在 $c' \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$b_0 = c' \cdot (\theta_{h_\alpha^\vee})^{-\epsilon}.$$

我们证明引理 8.4。设 $v \in V_\rho = V_{\rho_M}$。我们将 $f_v^G \in \mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)$ 和 $f_v^M \in \mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)$ 定义为

$$f_v^G(g) = \begin{cases} \rho(g) \cdot v & (g \in K), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

and

$$f_v^M(m) = \begin{cases} \rho_M(m) \cdot v & (m \in K_M), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

分别。记

$$F_{v,U} = I_U\left(f_v^G\right) \in I_P^G\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$$

and

$$F'_{v,U} = (T_{\rho_M} \circ I_U)\left(f_v^G\right) \in I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right).$$

将 $F'_{v,\,U}$ 代入方程 (8.1)，并比较在 s 处的取值，可得

$$\left(\left((T_{\rho_M} \circ I_U)(\Phi_s)\right)\left(F'_{v,U}\right)\right)(s) = b_0 \cdot \left(\left(T'_s\left(F'_{v,U}\right)\right)(s)\right) + b' \cdot \left(F'_{v,U}(s)\right). \tag{8.2}$$

这里，我们通过同构 (6.3) 将 b_0、b' 视为 $\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)$ 的元素。

首先，我们计算方程 (8.2) 的左端。令 ϕ_s 表示 $\mathcal{H}(G(F), \rho)$ 中通过同构（4.1）与 Φ_s 对应的元素。注意到，ϕ_s 的支集包含于 KsK 上。此外，同构（4.1）的定义意味着

$$\left(\Phi_s\left(f_v^G\right)\right)(x) = \phi_s(x) \cdot v \tag{8.3}$$

对所有 $x \in G(F)$ 均成立。记 $\phi_s(s) \cdot v = v_s$，并将 $f_{v_s}^M \in \mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)$ 定义为

$$f_{v_s}^M(m) = \begin{cases} \rho_M(m) \cdot v_s & (m \in K_M), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

于是，方程 (8.2) 的左端计算如下：

引理 8.5. 存在 $c_1 \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$\left(\left((T_{\rho_M} \circ I_U)(\Phi_s)\right)\left(F'_{v,U}\right)\right)(s) = c_1 \cdot T_{\rho_M}\left(f_{v_s}^M\right).$$

证明. 由于

$$\left(\left((T_{\rho_M} \circ I_U)(\Phi_s)\right)\left(F'_{v,U}\right)\right)(s) = T_{\rho_M}\left(\left(I_U\left(\Phi_s(f_v^G)\right)\right)(s)\right),$$

只需证明

$$\left(\left(I_U(\Phi_s)\right)\left(F_{v,U}\right)\right)(s) = c_1 \cdot f_{v_s}^M.$$

对于某个 $c_1 \in \mathbb{C}^\times$。

对于 $m \in M(F)$，我们有

$$\begin{aligned} \left(\left(\left(I_U(\Phi_s)\right)\left(F_{v,U}\right)\right)(s)\right)(m) &= \left(I_U\left(\Phi_s\left(f_v^G\right)\right)(s)\right)(m) \\ &= \delta_P(m)^{1/2} \int_{U(F)} \left(\Phi_s\left(f_v^G\right)\right)(ums)du. \end{aligned}$$

根据方程（8.3），被积函数除非满足以下条件，否则为零

$$U(F)ms \cap KsK \neq \emptyset.$$

因此，由引理 8.3 可知

$$\left(\left(\left(I_U(\Phi_s)\right)\left(F_{v,U}\right)\right)(s)\right)(m) = 0$$

除非 $m \in K_M$。令 $m \in K_M$和 $u \in U(F)$ 满足

$$ums \in KsK.$$

我们记

$$ums = k^{-1}sk'$$

对于某些 k、$k' \in K$，其分解为

$$k = k_{\overline{U}} \cdot k_M \cdot k_U \ (k_U \in K_U, k_M \in K_M, k_{\overline{U}} \in K_{\overline{U}})$$

and

$$k' = k'_{\overline{U_s}} \cdot k'_M \cdot k'_{U_s} \ (k'_{U_s} \in K_{U_s}, k'_M \in K_M, k'_{\overline{U_s}} \in K_{\overline{U_s}}).$$

那么，引理 8.3 也意味着

$$k_M m = s k'_M s^{-1}.$$

由于 K_U、$K_{\overline{U}}$、K_{U_s} 和 $K_{\overline{U_s}}$ 都包含在 ρ 的核中，因此我们有

$$\begin{aligned}
\left(\Phi_s\left(f_v^G\right)\right)(ums) &= \left(\Phi_s\left(f_v^G\right)\right)\left(k^{-1}sk'\right) \\
&= \phi_s(k^{-1}sk') \cdot v \\
&= \left(\rho(k^{-1}) \circ \phi_s(s) \circ \rho(k')\right) \cdot v \\
&= \left(\rho(k_M^{-1}) \circ \phi_s(s) \circ \rho(k'_M)\right) \cdot v \\
&= \phi_s(k_M^{-1}sk'_M) \cdot v \\
&= \phi_s(ms) \cdot v \\
&= \rho_M(m) \cdot (\phi_s(s) \cdot v) \\
&= \rho_M(m) \cdot v_s \\
&= f_{v_s}^M(m).
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
(((I_U(\Phi_s))(F_{v,U}))(s))(m) &= \delta_P(m)^{1/2} \int_{U(F)} \Phi_s\left(f_v^G\right)(ums)du \\
&= \delta_P(m)^{1/2} \cdot c(m) \cdot f_{v_s}^M(m) \\
&= c(m) \cdot f_{v_s}^M(m),
\end{aligned}$$

其中，$c(m)$ 表示该集合的体积

$$U(F) \cap KsKs^{-1}m^{-1}.$$

根据引理 8.1，对于 $m \in K_M$，我们有

$$KsKs^{-1}m^{-1} = KsK(s^{-1}m^{-1}s)s^{-1} = KsKs^{-1},$$

因此，$c(m)$ 与 m 无关。记作 $c_1 = c(m)$。于是，我们得到

$$((I_U(\Phi_s))(F_{v,U}))(s) = c_1 \cdot f_{v_s}^M.$$

□

接下来，我们计算方程 (8.2) 右侧。根据 I_U 的定义，对于 $g \in G(F)$ 和 $m \in M(F)$，我们有

$$(F_{v,U}(g))(m) = \delta_P(m)^{1/2} \int_{U(F)} f_v^G(umg)du.$$

由于 f_v^G 的支集包含于 K，被积函数除非.....否则为零

$$g \in P(F) \cdot K.$$

因此，我们有

$$\operatorname{supp}(F_{v,U}), \operatorname{supp}\left(F'_{v,U}\right) \subset P(F) \cdot K. \tag{8.4}$$

特别地，引理 8.2 蕴含

$$F'_{v,U}(s) = 0. \tag{8.5}$$

因此，方程 (8.2) 的第二项消失。我们计算方程 (8.2) 的第一项。

引理 8.6. 存在 $c_2 \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$\left(T'_s\left(F'_{v,U}\right)\right)(s) = c_2 \cdot (\theta_{h_\alpha^\vee})^\epsilon \cdot T_{\rho_M}\left(f_{v_s}^M\right).$$

证明. 回顾一下， T'_s 定义为

$$T'_s = \frac{(q_\alpha - 1)(q_{\alpha *} + 1)}{2}(\theta_{h^\vee_\alpha})^\epsilon \circ J_s + f_\alpha,$$

对于某个 $f_\alpha \in \mathbb{C}(M_\sigma/M^1)$。根据 (8.5)，我们有

$$\left(T'_s\left(F'_{v,U}\right)\right)(s) = \frac{(q_\alpha - 1)(q_{\alpha *} + 1)}{2}(\theta_{h^\vee_\alpha})^\epsilon \cdot \left(\left(J_s\left(F'_{v,U}\right)\right)(s)\right). \tag{8.6}$$

我们还回顾一下， J_s 定义为复合

$$J_s = I_P^G\left(\rho_{\sigma,s} \otimes \mathrm{id}\right) \circ I_P^G(\tau_s) \circ \lambda(s) \circ J_{s^{-1}(P)|P}(\sigma \otimes \cdot).$$

根据 [Sol22, (4.3)], , 我们有

$$\begin{aligned}\left(\left(\lambda(s) \circ J_{s^{-1}(P)|P}(\sigma \otimes \cdot)\right)\left(F'_{v,U}\right)\right)(s) &= \int_{(U(F)\cap U_s(F))\backslash U_s(F)} F'_{v,U}(u')du' \\ &= \int_{\overline{U}(F)\cap U_s(F)} F'_{v,U}(u')du'.\end{aligned} \tag{8.7}$$

根据方程 (8.4)，被积函数除非.....否则为零

$$\begin{aligned}u' &\in P(F)\cdot K \cap \overline{U}(F) \cap U_s(F) \\ &= P(F)\cdot K_{\overline{U}} \cap \overline{U}(F) \cap U_s(F) \\ &= K_{\overline{U}} \cap U_s(F).\end{aligned}$$

我们计算 $F'_{v,\ U}(u')$，其中 $u' \in K_{\overline{U}} \cap U_s(F)$。令 $u' \in K_{\overline{U}} \cap U_s(F)$ 和 $m \in M(F)$。于是，我们有

$$\left(F_{v,U}\left(u'\right)\right)(m) = \delta_P(m)^{1/2}\int_{U(F)} f_v^G\left(umu'\right)du.$$

被积函数不为零，除非

$$umu' \in K = K_U \cdot K_M \cdot K_{\overline{U}},$$

这等价于 $u \in K_U$和 $m \in K_M$。然后，由 f_v^G的定义可得

$$\left(F_{v,U}\left(u'\right)\right)(m) = \begin{cases}\rho_M(m)\cdot v & (m \in K_M), \\ 0 & (\text{otherwise}).\end{cases}$$

因此，我们得到 $F_{v,\ U}(u') = f_v^M$和 $F'_{v,\ U}(u') = T_{\rho_M}\left(f_v^M\right)$，对任意 $u' \in K_{\overline{U}} \cap U_s(F)$ 均成立。然后，方程 (8.7) 蕴含

$$\left(\left(\lambda(s) \circ J_{s^{-1}(P)|P}(\sigma \otimes \cdot)\right)\left(F'_{v,U}\right)\right)(s) = c_3 \cdot T_{\rho_M}\left(f_v^M\right),$$

其中 c_3 表示 $K_{\overline{U}} \cap U_s(F)$ 的体积。现在，我们有

$$\begin{aligned}\left(J_s\left(F'_{v,U}\right)\right)(s) &= \left(\left(I_P^G\left(\rho_{\sigma,s}\otimes\mathrm{id}\right)\circ I_P^G(\tau_s)\circ\lambda(s)\circ J_{s^{-1}(P)|P}(\sigma\otimes\cdot)\right)\left(F'_{v,U}\right)\right)(s) \\ &= \left(\left(\rho_{\sigma,s}\otimes\mathrm{id}\right)\circ\tau_s\right)\left(\left(\left(\lambda(s)\circ J_{s^{-1}(P)|P}(\sigma\otimes\cdot)\right)\left(F'_{v,U}\right)\right)(s)\right) \\ &= c_3\left(\left(\rho_{\sigma,s}\otimes\mathrm{id}\right)\circ\tau_s\right)\left(T_{\rho_M}\left(f_v^M\right)\right).\end{aligned}$$

为计算此式，我们必须回顾如何将 $T_{\rho_M}\left(f_v^M\right)$ 视为 $\sigma \otimes \mathbb{C}[M(F)/M^1]$的一个元素。根据 T_{ρ_M}的定义， $T_{\rho_M}\left(f_v^M\right)$的支集包含于 M^1，并且满足

$$\left(T_{\rho_M}\left(f_v^M\right)\right)(1) = f_{v,1}^M,$$

其中 $f_{v,\ 1}^M$ 是.....的元素

$$\sigma_1 = \mathrm{ind}_{K_M}^{M^1}(\rho_M)$$

定义为

$$f_{v,1}^M(m) = \begin{cases}\rho_M(m)\cdot v & (m \in K_M), \\ 0 & (\text{otherwise}).\end{cases}$$

回想一下，我们将 σ_1 视为 M^1-的一个不可约子表示

$$\sigma = \mathrm{ind}_{\widetilde{K_M}}^{M(F)}(\widetilde{\rho_M}),$$

而元素 $f_v^M{}_{,1} \in \sigma_1$ 与定义如下的元素 $f_v^M \in \sigma$ 相对应

$$\widetilde{f_v^M}(m) = \begin{cases} \widetilde{\rho_M}(m) \cdot v & (m \in \widetilde{K_M}), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

于是，我们可以将 $T_{\rho_M}\left(f_v^M\right)$ 视为 $\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma)$中支集位于 M^1的元素，并且满足

$$\left(T_{\rho_M}\left(f_v^M\right)\right)(1) = \widetilde{f_v^M}.$$

此外，为了定义 J_s，我们通过同构 (6.2) 将 $\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma)$与 $\sigma \otimes \mathbb{C}[M(F)/M^1]$ 等同。根据 [Sol22，(2.3)]， $T_{\rho_M}\left(f_v^M\right)$ 与元素

$$\widetilde{f_v^M} \otimes \theta_1 \in \sigma \otimes \mathbb{C}[M(F)/M^1].$$

因此，我们得到

$$\left((\rho_{\sigma,s} \otimes \mathrm{id}) \circ \tau_s\right)\left(T_{\rho_M}\left(f_v^M\right)\right) = \rho_{\sigma,s}\left(\widetilde{f_v^M}\right) \otimes \theta_1.$$

回想一下，$\rho_{\sigma,\ s}$ 是这个一维向量空间的一个元素

$$\mathrm{Hom}_{M(F)}({}^s\sigma, \sigma).$$

由于 s 正规化 ρ_M，且 ρ_M 在 $\sigma\restriction_{K_M}$ 中的重数等于 1，因此 $\rho_{\sigma,\ s}$ 在${}^s\rho_M$ 上的限制包含于这个一维空间

$$\mathrm{Hom}_{K_M}({}^s\rho_M, \rho_M).$$

这里，我们通过映射将 ${}^s\rho_M$ 和 ρ_M 识别为 ${}^s\sigma$ 的 K_M-子表示和 σ 的 K_M-子表示

$$v' \mapsto \widetilde{f_{v'}^M}$$

分别对应 $v' \in V_{\rho_M} = V_{{}^s\rho_M}$。因此，存在 $c_4 \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$\rho_{\sigma,s}\restriction_{{}^s\rho_M} = c_4 \cdot \phi_s(s).$$

特别地，我们得到

$$\rho_{\sigma,s}\left(\widetilde{f_v^M}\right) = c_4 \cdot \widetilde{f_{v_s}^M}.$$

那么，我们的识别方式 (6.2) 表明，元素

$$\rho_{\sigma,s}\left(\widetilde{f_v^M}\right) \otimes \theta_1 = c_4 \cdot \left(\widetilde{f_{v_s}^M} \otimes \theta_1\right) \in \sigma \otimes \mathbb{C}[M(F)/M^1]$$

被识别为元素

$$c_4 \cdot T_{\rho_M}\left(f_{v_s}^M\right) \in \mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1) \subset \mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma).$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} \left(J_s\left(F'_{v,U}\right)\right)(s) &= c_3\left(\left(\rho_{\sigma,s} \otimes \mathrm{id}\right) \circ \tau_s\right)\left(T_{\rho_M}\left(f_v^M\right)\right) \\ &= c_3 \cdot \left(\rho_{\sigma,s}\left(\widetilde{f_v^M}\right) \otimes \theta_1\right) \\ &= c_3 c_4 \cdot T_{\rho_M}\left(f_{v_s}^M\right). \end{aligned}$$

将其代入方程 (8.6)，得到

$$\left(T'_s\left(F'_{v,U}\right)\right)(s) = c_2 \cdot (\theta_{h_\alpha^\vee})^\epsilon \cdot T_{\rho_M}\left(f_{v_s}^M\right),$$

其中

$$c_2 = c_3 c_4 \cdot \frac{(q_\alpha - 1)(q_{\alpha *} + 1)}{2}.$$

□

将方程 (8.5)、引理 8.5 和引理 8.6 代入方程 (8.2)，得到

$$c_1 \cdot T_{\rho_M}\left(f_{v_s}^M\right) = b_0 \cdot c_2 \cdot (\theta_{h_\alpha^\vee})^\epsilon \cdot T_{\rho_M}\left(f_{v_s}^M\right).$$

我们注意到， c_1 和 c_2 均独立于 $v \in V_{\rho_M}$。由于

$$\left\{T_{\rho_M}\left(f_{v_s}^M\right) \mid v \in V_{\rho_M}\right\}$$

生成了 $\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)$ 作为 $M(F)$-表示，因此我们有

$$c_1 = b_0 \cdot c_2 \cdot (\theta_{h_\alpha^\vee})^\epsilon \in \mathbb{C}[M_\sigma/M^1] \simeq \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right),$$

因此

$$b_0 = c' \cdot (\theta_{h_\alpha^\vee})^{-\epsilon}$$

for

$$c' = c_1 \cdot c_2^{-1}.$$

9. Comparison of Morris and Solleveld's endomorphism algebras: maximal case

本节中，当 M 是 G的极大真 Levi 子群时，我们证明定理 7.15 和定理 7.17。设 M 是 G的极大真 Levi 子群，也就是说，我们假设$|B\backslash J| = 2$。

命题 9.1。群 $R(J,\rho)$ 是平凡群，当且仅当群 $W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})$ 是平凡群。

首先，我们证明以下结论：

引理 9.2。假设群 $R(J,\rho)$ 是平凡群。那么，子空间

$$\mathcal{H}(G(F),\rho)_M = \{\phi \in \mathcal{H}(G(F),\rho) \mid \mathrm{supp}(\phi) \subset K \cdot M(F) \cdot K\}$$

是 $\mathcal{H}(G(F),\rho)$ 的子代数。

证明。由于 $R(J,\rho)$ 是平凡的，

$$W(J,\rho) = G(J,\rho)$$

于是，由定理 5.5 可知，$\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$ 同构于扭曲群代数$\mathbb{C}[W(J,\rho),\chi]$。通过同构（4.1），我们将 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$ 与 $\mathcal{H}(G(F),\rho)$ 视为同一对象。对于 $w \in W(J,\rho)$，令 ϕ_w 表示 $\mathcal{H}(G(F),\rho)$ 中与定理 5.5 中出现的 Φ_w 对应的元素。因此， ϕ_w 的支集包含于 $K\dot{w}K$。取 w_1, $w_2 \in W(J,\rho)$ 使得

$$\dot{w}_i \in K \cdot M(F) \cdot K \ (i = 1, 2).$$

只需证明

$$\mathrm{supp}(\phi_{w_1} * \phi_{w_2}) \subset K \cdot M(F) \cdot K.$$

$M(F)$ 的伊wahori 分解表明

$$K \cdot M(F) \cdot K = K \cdot (N_G(S)(F) \cap M(F)) \cdot K.$$

因此，存在

$$w_i^M \in W_{M(F)} \, (i = 1, 2)$$

使得

$$\dot{w}_i \in K \cdot (\dot{w_i^M}) \cdot K.$$

回忆一下， W_J 表示由 s_b ($b \in J$)生成的 W 的子群。根据 M 的定义， W_J 包含于 $W_{M(F)}$中。根据 [Mor93, 3.11]（另见 [Mor93, 3.22]），典范嵌入

$$N_G(S)(F) \to G(F)$$

诱导出一个双射

$$W_J\backslash W/W_J \to K\backslash G(F)/K.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} w_i &\in W_J \cdot w_i^M \cdot W_J \\ &\subset W_J \cdot W_{M(F)} \cdot W_J \\ &= W_{M(F)}. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(\phi_{w_1} * \phi_{w_2}) &= \mathrm{supp}(\chi(w_1, w_2)\phi_{w_1 w_2}) \\ &\subset K \cdot \dot{w}_1 \dot{w}_2 \cdot K \\ &\subset K \cdot M(F) \cdot K. \end{aligned}$$

□

推论 9.3. 假设 $R(J,\rho)$ 是平凡的。设 ϕ 是 $\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$ 中的一个元素，其支集包含于某个 $z\in I_{M(F)}(\rho_M)$ 的 K_MzK_M 中。那么，我们得到

$$t_P(\phi)=\frac{\left|K_M/\left(K_M\cap zK_Mz^{-1}\right)\right|^{1/2}}{\left|K/\left(K\cap zKz^{-1}\right)\right|^{1/2}}T(\phi).$$

特别地， t_P 不依赖于对 P的选择。

证明。由引理 4.5 和引理 9.2 可得。 □

命题 9.1 的证明。假设 $R(J,\rho)$是平凡的，而 $W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu})$是非平凡的。通过同构（4.1），我们将端同态环 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$ 识别为 $\mathcal{H}(G(F)\ \rho)$，并沿用引理 9.2 证明中的相同记号。

由于 M是 G的极大真 Levi 子群， $W(G,M,\mathfrak{s}_M)$的阶至多为 2。因此，假设 $W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu})$是非平凡的，这意味着 $W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu})$的阶为 2，且 $R(\mathfrak{s}_M)$是平凡的。我们记

$$W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})=\{1,s\}.$$

因此， s是与$\Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$中的唯一根 α相对应的反射。我们记作

$$\alpha'=(\alpha^{\#})'\in\Delta^{\mathrm{Sol}}$$

and

$$(\alpha')^{\vee}=(h_\alpha^{\vee})'\in(\Delta^{\mathrm{Sol}})^{\vee}.$$

根据定理 6.11，存在一个同构

$$I^{\mathrm{Sol}}\colon\ \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)=\mathcal{H}\left(W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})\right)\to\mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}.$$

现在我们有如下交换图表:

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{H}(M(F),\rho_M) & \xrightarrow{(7.2)} & \mathbb{C}[M_\sigma/M^1]\\ \Big\downarrow{\scriptstyle t_P} & \circlearrowleft & \Big\downarrow\\ \mathcal{H}(G(F),\rho) & \xrightarrow{I^{\mathrm{Sol}}\circ T_{\rho_M}\circ I_U} & \mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}.\end{array}$$

我们通过 t_P将 $\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$与其像视为相同。于是，推论 9.3 表明

$$\mathcal{H}(M(F),\rho_M)=\bigoplus_{w\in W(J,\rho)\cap W_{M(F)}}\mathbb{C}\cdot\phi_w.$$

注意到， $\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$是交换的，因为它与 $\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$同构。在这种情况下，由于 $\mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$作为 $\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$-模是秩 2 的自由模， $\mathcal{H}(G(F)\ \rho)$作为 $\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$-模也秩 2 的自由模。特别地,

$$\mathcal{H}(M(F),\rho_M)\subsetneq\mathcal{H}(G(F),\rho).$$

取一个元素

$$\widetilde{s}\in W(J,\rho)\backslash W_{M(F)}.$$

那么，定理 5.5 中对 $\mathcal{H}(G(F)\ \rho)$ 的描述表明

$$\mathcal{H}(M(F),\rho_M)*\phi_{\widetilde{s}}=\phi_{\widetilde{s}}*\mathcal{H}(M(F),\rho_M),$$

and

$$\mathcal{H}(G(F),\rho)=\mathcal{H}(M(F),\rho_M)\oplus\mathcal{H}(M(F),\rho_M)*\phi_{\widetilde{s}}. \tag{9.1}$$

记作

$$\left(I^{\mathrm{Sol}}\circ T_{\rho_M}\circ I_U\right)^{-1}\left(T_s^{\mathrm{Sol}}\right)=\phi_0^M+\phi_1^M*\phi_{\widetilde{s}}$$

对于某个

$$\phi_0^M,\phi_1^M\in\mathcal{H}(M(F),\rho_M).$$

我们也分别记作

$$\left(I^{\mathrm{Sol}}\circ T_{\rho_M}\circ I_U\right)^{-1}(\theta_{(\alpha')^{\vee}})=\phi_+\in\mathcal{H}(M(F),\rho_M)$$

and

$$\left(I^{\mathrm{Sol}}\circ T_{\rho_M}\circ I_U\right)^{-1}(\theta_{-(\alpha')^{\vee}})=\phi_-\in\mathcal{H}(M(F),\rho_M),$$

。定义 B.1 的关系式 (2) 对 $\mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$ 意味着

$$\begin{aligned}(9.2)\quad &\theta_{(\alpha')^\vee}T_s^{\mathrm{Sol}}-T_s^{\mathrm{Sol}}\theta_{-(\alpha')^\vee}\\ &=\left((q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1)+\theta_{-(\alpha')^\vee}(q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}-q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')-(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2})\right)\frac{\theta_{(\alpha')^\vee}-\theta_{-(\alpha')^\vee}}{\theta_0-\theta_{-2(\alpha')^\vee}}.\end{aligned}$$

左侧映射到

$$\phi_+*(\phi_0^M+\phi_1^M*\phi_{\tilde{s}})-(\phi_0^M+\phi_1^M*\phi_{\tilde{s}})*\phi_-=\phi_0^M*(\phi_+-\phi_-)+\phi_1^M*(\phi_+*\phi_{\tilde{s}}-\phi_{\tilde{s}}*\phi_-)$$

通过 $\left(I^{\mathrm{Sol}}\circ T_{\rho_M}\circ I_U\right)^{-1}$。另一方面，(9.2) 的右侧映射到

$$\left((q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1)+\phi_-(q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}-q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')-(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2})\right)\frac{\phi_+-\phi_-}{1-(\phi_-)^2}\in\mathcal{H}(M(F),\rho_M)$$

通过 $\left(I^{\mathrm{Sol}}\circ T_{\rho_M}\circ I_U\right)^{-1}$。比较分解 (9.1) 中的 $\mathcal{H}(M(F),\rho_M)$-因子，我们得到 in

$$\begin{aligned}&\phi_0^M*(\phi_+-\phi_-)\\ &\qquad=\left((q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1)+\phi_-(q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}-q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')-(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2})\right)\frac{\phi_+-\phi_-}{1-(\phi_-)^2},\end{aligned}$$

因此

$$(9.3)\quad \phi_0^M=\left((q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1)+\phi_-(q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2}-q_F^{(\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')-(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha'))/2})\right)\frac{1}{1-(\phi_-)^2}$$

然而，由于 $\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')>0$ 且 $(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')>0$，将其视为

$$\mathcal{H}(M(F),\rho_M)\simeq\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$$

$\mathbb{C}$ 上代数环面的正则函数环，(9.3) 的右侧在 $\phi_-=1$ 处有一个极点，因此它不包含于 $\mathcal{H}(M(F),\rho_M)$ 中，矛盾。

反过来，假设 $R(J,\rho)$ 非平凡，而 $W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})$ 平凡。根据推论 7.14，$\mathbb{C}[\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee]$ 经由复合映射的像

$$T_{\rho_M}\circ I_U\circ(I^{\mathrm{Mor}})^{-1}\colon\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}}\to\mathcal{H}(R(J,\rho))\subset\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)\to\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$$

包含于

$$\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]\subset\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right).$$

因此，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[\mathbb{Z}(R^{\mathrm{Mor}})^\vee] & \longrightarrow & \mathbb{C}[M_\sigma/M^1]\\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow\\ \mathcal{H}^{\mathrm{Mor}} & \longrightarrow & \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right).\end{array}$$

由于 $R(J,\rho)$ 非平凡，$\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}}$ 非交换。因此，$\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 也非交换。特别地，我们有

$$\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]\subsetneq\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right).$$

因此，$R(\mathfrak{s}_M)$ 是非平凡的。我们记

$$R(\mathfrak{s}_M)=\{1,r\}.$$

根据定理 6.11,

$$\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)=\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]\oplus\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]J_r.$$

此外，根据 [Sol22，定理 10.6 (a)], ，我们得到

$$\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]J_r=J_r\mathbb{C}[M_\sigma/M^1].$$

那么，在“ $R(J,\rho)$ 的情形是平凡的，而 $W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})$ 是非平凡的”这一证明中，将 $\mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$ 替换为 $\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}}$，并将 $\mathcal{H}(G(F),\rho)$ 替换为 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$，即可得到矛盾。□

If

$$R(J,\rho)=W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})=\{1\},$$

定理 7.15 和定理 7.17 是平凡的。假设 $R(J,\rho)$ 和 $W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})$ 都是非平凡的。令 α 表示 $\Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$ 中的唯一元素，并令 s_α 表示与 α 相关联的简单反射。于是，我们有

$$N_G(M)(F)/M(F)=W(G,M,\mathfrak{s}_M)=W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})=\{1,s_\alpha\}.$$

我们也将 a 记作满足下式的 $\Gamma(J,\rho)^+$ 中的唯一元素

$$B(J,\rho)_e=\{a+A'_J\}.$$

那么，

$$D_J(a+A'_J)=Da\restriction_{A_M}$$

是 α的一个标量倍数。我们固定 $v[a,J]$ 在 $N_G(S)(F)$中的一个提升 s。根据引理 8.1， s正规化 M。由于 $s\notin M(F)$， s 在 $N_G(M)(F)/M(F)$ 上的投影是元素 s_α。因此，元素 s 也是 s_α 的一个提升。我们将 s_α 和 $v[a,J]$ 认作 s。令 $\epsilon=\epsilon_\alpha\in\{0,1\}$ 表示 Sol22 中引理 10.7 (b)定义的数。令 Φ_s 表示定理 5.5 中出现的 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)\right)$的元素，并令 T'_s表示引理 6.7 中出现的 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$ 的元素。根据定理 6.11，我们可以写成

$$\left(T_{\rho_M}\circ I_U\right)(\Phi_s)=b_0\cdot T'_s+b' \tag{9.4}$$

对某些 b_0、$b'\in\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$。于是，引理 8.4 推出：

命题 9.4. 存在 $c'\in\mathbb{C}^\times$ 和 $b'\in\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 使得

$$\left(T_{\rho_M}\circ I_U\right)(\Phi_s)=c'\cdot(\theta_{h_\alpha^\vee})^{-\epsilon}\cdot T'_s+b'.$$

现在，当 M 是极大的，且 $R(J,\rho)$ 和$W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})$ 均非平凡时，我们证明定理 7.15 和定理 7.17。我们考虑映射

$$\iota\circ I^{\mathrm{Sol}}\circ T_{\rho_M}\circ I_U\circ(I^{\mathrm{Mor}})^{-1}\colon\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}}\to\mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}.$$

根据推论 7.14，对于 $t\in T(J,\rho)$，存在 $c(t)\in\mathbb{C}^\times$ 使得

$$\left(\iota\circ I^{\mathrm{Sol}}\circ T_{\rho_M}\circ I_U\circ(I^{\mathrm{Mor}})^{-1}\right)\left(\theta_{v(t)}\right)=c(t)^{-1}\cdot\theta_t.$$

特别地，我们取 $t=t_0$ 使得

$$v(t_0)=k_{a+A'_J}\left(D_J(a+A'_J)\right)^\vee.$$

我们通过同构 (5.2) 将 $v(t_0)$ 与 $v(t_0)$ 识别。根据引理 7.10，我们有

$$v(t_0)=-H_M(t_0).$$

由于 $a+A'_J\in B(J,\rho)_e\subset\Gamma'(J,\rho)^+_e$，元素 α 属于 $\Delta_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}(P)\ \subset\Sigma(P,A_M)$，并且抛物子群 P 满足

$$D_J\left(\Gamma'(J,\rho)^+_e\right)=D_J\left(\Gamma'(J,\rho)_e\right)\cap\left(-\Sigma(P,A_M)\right),$$

我们有

$$\begin{aligned}H_M(t_0)&=-v(t_0)\\&=-k_{a+A'_J}\left(D_J(a+A'_J)\right)^\vee\\&\in\mathbb{R}_{>0}\cdot\alpha^\vee.\end{aligned}$$

由于 $h_\alpha^\vee$ 是 $(M_\sigma\cap G^1)/M^1$ 的唯一生成元，且满足 $H_M(h_\alpha^\vee)\in\mathbb{R}_{>0}\cdot\alpha^\vee$，因此存在一个正整数 m，使得 $t_0=m\cdot h_\alpha^\vee$。接着，存在 $n\in(1/2)\cdot\mathbb{Z}$，使得 $t_0=n\cdot(h_\alpha^\vee)'$。我们注意到，定理 7.15 等价于断言 $n=1$。

首先，我们假设 $\epsilon=0$。然后，根据推论 7.14 和命题 9.4，以及推论 5.7 和定理 6.11，我们得到映射

$$\iota\circ I^{\mathrm{Sol}}\circ T_{\rho_M}\circ I_U\circ(I^{\mathrm{Mor}})^{-1}\colon\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}}\to\mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$$

满足推论 D.5 对 $k=0$ 的条件。因此，在这种情况下，定理 7.15 和定理 7.17 可由推论 D.5 推出。

接下来，我们假设 $\epsilon = 1$。注意到

$$\begin{cases}(h_\alpha^\vee)' = h_\alpha^\vee & (q_\alpha > q_{\alpha *}),\\ (h_\alpha^\vee)' = 2h_\alpha^\vee & (q_\alpha = q_{\alpha *}).\end{cases}$$

于是，根据推论 7.14 和命题 9.4，以及推论 5.7 和定理 6.11，我们得到该映射

$$\iota \circ I^{\mathrm{Sol}} \circ T_{\rho_M} \circ I_U \circ (I^{\mathrm{Mor}})^{-1} \colon \mathcal{H}^{\mathrm{Mor}} \to \mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$$

满足推论 D.5 对于 $k = 1$ 或 $k = 1/2$的条件。根据推论 D.5，我们有$k = 1$，因此 $(h_\alpha^\vee)' = h_\alpha^\vee$ 和 $q_\alpha > q_{\alpha *}$。于是，(6.1) 和 (6.9) 蕴含

$$q_{\alpha *} = q_F^{\left(\lambda^{\mathrm{Sol}}\left((h_\alpha^\vee)'\right) - (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}\left((h_\alpha^\vee)'\right)\right)/2}.$$

由于 $\epsilon = 0$ 除非 $q_{\alpha *} > 1$，我们有

$$\lambda^{\mathrm{Sol}}\left((h_\alpha^\vee)'\right) > (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}\left((h_\alpha^\vee)'\right).$$

现在，定理 7.15 和定理 7.17 的其余结论也可由推论 D.5 得出。

10. Comparison of Morris and Solleveld's endomorphism algebras: general case

本节中，我们证明一般情形下的定理 7.15 和定理 7.17。首先，我们证明定理 7.15。回忆一下，R^{Mor} 和 R^{Sol} 是定义在 a_M^* 中的根系，其定义如下

$$R^{\mathrm{Mor}} = \{D_J(a')/k_{a'} \mid a' \in \Gamma'(J,\rho)_e\}$$

and

$$R^{\mathrm{Sol}} = \{(\alpha^\#)' \mid \alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)\}.$$

我们还回顾一下，对于 $\alpha \in \Sigma_{\mathrm{red}}(A_M)$，$M_\alpha$ 表示包含 M 和与 α 对应的根子群 U_α 的 G 的 Levi 子群，其半单秩比 M 的半单秩大一。我们记作 $K_\alpha = K \cap M_\alpha(F)$ 和 $\rho_\alpha = \rho \restriction_{K_\alpha}$。令 Φ^{M_α} 表示 M_α 中相对于 S 的相对根集合，并令 $\Phi^{M_\alpha}\mathrm{aff}$ 表示由 [BT72] 的工作所关联到 (M_α, S) 的仿射根系。根据推论 A.5，我们可以取 $\Phi^{M_\alpha}\mathrm{aff}$ 的一个包含 J 的基 B^{M_α}，并可分别在 $W(J,\rho)$ 和 $\Gamma(J,\rho)$ 的定义中用 M_α 替换 G、用 ρ_α 替换 ρ，从而定义 $W^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha)$ 和 $\Gamma^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha)$（参见引理 7.5 的证明）。由于 $J \subset \Phi^{M_\alpha}\mathrm{aff}$，我们有 $\mathcal{M}_J \subset M_\alpha(F)$。因此，$W(J,\rho)$ 的定义意味着

$$W^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha) = W(J,\rho) \cap W_{M_\alpha(F)}.$$

我们还有如下结论：

引理 10.1. 我们有

$$\Gamma^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha) = \Gamma(J,\rho) \cap \Phi_{\mathrm{aff}}^{M_\alpha}.$$

证明。设 $a \in \Phi^{M_\alpha}\mathrm{aff}$，使得 $Da \restriction_{A_M}$ 非平凡。则，$Da \restriction_{A_M}$ 是 α的标量倍数，而 M_α 的定义意味着

$$\Phi^{M_\alpha} = \Phi \cap \mathbb{R} \cdot D(J \cup \{a\}),$$

因此

$$\Phi_{\mathrm{aff}}^{M_\alpha} = \{b \in \Phi_{\mathrm{aff}} \mid Db \in \mathbb{R} \cdot D(J \cup \{a\})\},$$

其中 $\mathbb{R} \cdot D(J \cup \{a\})$ 表示 $D(J \cup \{a\})$ 的 $\mathbb{R}$-张成空间。根据引理 A.1 和引理 A.3，存在一个包含 $J \cup \{a\}$ 的 Φ_{aff} 的基 B'，当且仅当存在一个包含 $J \cup \{a\}$的 $\Phi^{M_\alpha}\mathrm{aff}$的基 B^{M_α}。我们假设 a 满足这些条件。于是，我们可以定义元素

$$v[a,J] \in W_{M_\alpha(F)}.$$

由于

$$W^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha) = W(J,\rho) \cap W_{M_\alpha(F)},$$

$v[a,J] \in W(J,\rho)$当且仅当 $v[a,J] \in W^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha)$。此外，在 Mor93, 3.15], 中用 $J \cup \{a\}$ 替换 J，我们得到复数域 M_α 的一个约化子群的抛物型子群 $\mathcal{M}_{J\cup\{a\}}$，其根基为 $\mathcal{U}_{J\cup\{a\}}$，使得典范嵌入

$$\mathcal{M}_{J\cup\{a\}} \to P_{J\cup\{a\},B'}$$

诱导一个同构

$$\mathcal{M}_{J\cup\{a\}}/\mathcal{U}_{J\cup\{a\}} \to P_{J\cup\{a\},B'}/U_{J\cup\{a\},B'} \simeq \mathbf{M}_{J\cup\{a\}}(k_F).$$

H因此，我们可以计算 p_a 在 $\mathcal{M}_{J\cup\{a\}} \subset M_\alpha(F)$ 中的值。于是， $\Gamma(J,\rho)$ 的定义意味着

$$\Gamma^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha) = \Gamma(J,\rho) \cap \Phi^{M_\alpha}_{\mathrm{aff}}.$$

□

令 $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}$。我们将证明 $(\alpha^\#)' \in R^{\mathrm{Mor}}$。令 $(\Gamma^{M_\alpha})'(J,\rho_\alpha)$ 表示$\Gamma^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha)$ 在 A'/A'_J 上的像。我们定义

$$\begin{cases} V^{\Gamma^{M_\alpha}} & = \{y \in V \mid \alpha(y) = 0\ (\alpha \in D\Gamma^{M_\alpha}(J,\rho))\}, \\ V^{J,\Gamma^{M_\alpha}} & = V^J \cap V^{\Gamma^{M_\alpha}}, \\ \mathcal{A}^J_{\Gamma^{M_\alpha}} & = \mathcal{A}^J/V^{J,\Gamma^{M_\alpha}}. \end{cases}$$

在命题 5.2 中用 M_α 替换 G ，可得 $(\Gamma^{M_\alpha})'(J,\rho_\alpha)$ 是 $\mathcal{A}^J_{\Gamma^{M_\alpha}}$上的仿射根系。令 $[e]$ 表示 e 经自然投影映射到 $\mathcal{A}^J_{\Gamma^{M_\alpha}}$ 上的像

$$\mathcal{A}^J_\Gamma \to \mathcal{A}^J_{\Gamma^{M_\alpha}}.$$

由于 e 是 $\Gamma'(J,\rho)$ 的特殊点， $[e]$ 是 $(\Gamma^{M_\alpha})'(J,\rho_\alpha)$ 的特殊点。令 $(\Gamma^{M_\alpha})'(J,\rho_\alpha)_{[e]}$ 表示 $(\Gamma^{M_\alpha})'(J,\rho_\alpha)$ 中在 $[e]$ 处取值为零的仿射根集合。那么，我们有

$$(\Gamma^{M_\alpha})'(J,\rho_\alpha)_{[e]} = \Gamma'(J,\rho)_e \cap (\Gamma^{M_\alpha})'(J,\rho_\alpha).$$

由于 M 是 M_α 的极大 Levi 子群，将 G 替换为 M_α 后，定理 7.15 仍然成立。我们定义

$$(R^{\mathrm{Mor}})^{M_\alpha} = \{D_J(a')/k_{a'} \mid a' \in (\Gamma')^{M_\alpha}(J,\rho)_{[e]}\}$$

and

$$(R^{\mathrm{Sol}})^{M_\alpha} = \{(\alpha^\#)' \mid \alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu} \cap \Sigma(M_\alpha, A_M)\},$$

where $\Sigma(M_\alpha, A_M)$ 表示伴随表示中出现的非零权的集合 of A_M 于 M_α 的李代数上。根据关于 M_α 的定理 7.15，我们有

$$(\alpha^\#)' \in (R^{\mathrm{Sol}})^{M_\alpha} = (R^{\mathrm{Mor}})^{M_\alpha} \subset R^{\mathrm{Mor}}.$$

另一方面，设 $a \in \Gamma(J,\rho)$ 满足 $a' = a + A'_J \in \Gamma'(J,\rho)_e$。我们将证明

$$D_J(a')/k_{a'} \in R^{\mathrm{Sol}}.$$

记

$$\alpha = \begin{cases} D_J(a') & (D_J(a') \in \Sigma_{\mathrm{red}}(A_M)), \\ D_J(a')/2 & (D_J(a') \notin \Sigma_{\mathrm{red}}(A_M)). \end{cases}$$

我们使用与上文相同的记号。因此，我们有

$$a \in \Gamma(J,\rho) \cap \Phi^{M_\alpha}_{\mathrm{aff}}.$$

根据引理 10.1，我们有 $a \in \Gamma^{M_\alpha}(J,\rho_\alpha)$，因此

$$a' \in (\Gamma')^{M_\alpha}(J,\rho)_{[e]}.$$

于是，根据关于 M_α 的定理 7.15，我们有

$$D_J(a')/k_{a'} \in (R^{\mathrm{Mor}})^{M_\alpha} = (R^{\mathrm{Sol}})^{M_\alpha} \subset R^{\mathrm{Sol}}.$$

因此，我们得到 $R^{\mathrm{Mor}} = R^{\mathrm{Sol}}$。令 $(R^{\mathrm{Mor}})^+$ 表示相对于基 Δ^{Mor} 的 R^{Mor} 的正根集合，并令 $(R^{\mathrm{Sol}})^+$ 表示相对于基 Δ^{Sol} 的 R^{Sol} 的正根集合。因此，我们有

$$(R^{\mathrm{Mor}})^+ = \{D_J(a')/k_{a'} \mid a' \in \Gamma'(J,\rho)^+_e\}$$

and

$$(R^{\mathrm{Sol}})^+ = \{(\alpha^\#)' \mid \alpha \in \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)\}.$$

我们对抛物子群 P 的选取意味着，若 $a' \in \Gamma'(J,\rho)^+_e$，则有

$$D_J(a')/k_{a'} \in -(R^{\mathrm{Sol}})^+.$$

因此，我们得到 $(R^{\mathrm{Mor}})^+ = -(R^{\mathrm{Sol}})^+$，故 $\Delta^{\mathrm{Mor}} = -\Delta^{\mathrm{Sol}}$。

接下来，我们证明定理 7.17。设 $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$。记 $\alpha' = (\alpha^{\#})'$ 和 $(\alpha')^{\vee} = (h_{\alpha}^{\vee})'$，并令 s_α 表示相应的反射。我们也将 $-\alpha' \in \Delta^{\mathrm{Mor}}$ 和 $s_\alpha \in W_0\left(R^{\mathrm{Mor}}\right)$视为。设 $a \in \Gamma(J,\rho)^+$，使得 $r(a) = -\alpha'$。我们固定 $v[a,J]$ 在 $N_G(S)(F)$中的一个提升 s，它也是 s_α 在 $I_{M_\alpha^1}(\sigma_1)$中的一个提升。我们将 s_α 和 $v[a,J]$ 与 s等同。首先，假设 $a \in B$，且 M_α 是关于 P的标准 Levi 子群。于是， PM_α 是 G的一个抛物子群，其 Levi 因子为 M_α。令 U^{M_α}表示 PM_α的幺幂根基，并令 $\overline{U^{M_\alpha}}$表示 PM_α的对偶抛物子群 $\overline{P}M_\alpha$ 的幺幂根基。令 $P_{J\cup\{a\}} = P_{J\cup\{a\},B}$ 表示与 $J\cup\{a\} \subset B$相关联的 $G(F)$的抛物型子群，并令 $U_{J\cup\{a\}}$ 表示其根基。

引理 10.2。我们有

$$K \cap U^{M_\alpha}(F) = P_{J\cup\{a\}} \cap U^{M_\alpha}(F)$$

and

$$K \cap \overline{U^{M_\alpha}}(F) = P_{J\cup\{a\}} \cap \overline{U^{M_\alpha}}(F).$$

证明。由于 $r(a) = -\alpha'$，Levi 子群 M_α 与子环面的中心化子重合

$$\left(\bigcap_{\beta\in D(J\cup\{a\})} \ker(\beta)\right)^{\circ}$$

S。此外，根据 [Tit79, 3.5.1], ，Levi 子群 M_α 与 [MP96, 6.3] 中附属于抛物型子群 $P_{J\cup\{a\}}$ 的 Levi 子群相同。因此， [MP96, 命题 6.4]推出典范嵌入

$$P_{J\cup\{a\}} \cap M_\alpha(F) \to P_{J\cup\{a\}}$$

诱导一个同构

$$(P_{J\cup\{a\}} \cap M_\alpha(F))/(U_{J\cup\{a\}} \cap M_\alpha(F)) \to P_{J\cup\{a\}}/U_{J\cup\{a\}}.$$

因此，我们得到

$$P_{J\cup\{a\}} = (P_{J\cup\{a\}} \cap M_\alpha(F)) \cdot U_{J\cup\{a\}}. \tag{10.1}$$

此外，根据 [BT72, 6.4.48], ，我们有

$$U_{J\cup\{a\}} = \left(U_{J\cup\{a\}} \cap U^{M_\alpha}(F)\right) \cdot \left(U_{J\cup\{a\}} \cap M_\alpha(F)\right) \cdot \left(U_{J\cup\{a\}} \cap \overline{U^{M_\alpha}}(F)\right).$$

结合 (10.1)，我们得到

$$P_{J\cup\{a\}} = \left(U_{J\cup\{a\}} \cap U^{M_\alpha}(F)\right) \cdot \left(P_{J\cup\{a\}} \cap M_\alpha(F)\right) \cdot \left(U_{J\cup\{a\}} \cap \overline{U^{M_\alpha}}(F)\right).$$

因此，我们有

$$P_{J\cup\{a\}} \cap U^{M_\alpha}(F) = U_{J\cup\{a\}} \cap U^{M_\alpha}(F)$$

and

$$P_{J\cup\{a\}} \cap \overline{U^{M_\alpha}}(F) = U_{J\cup\{a\}} \cap \overline{U^{M_\alpha}}(F).$$

由于

$$U_{J\cup\{a\}} \subset U_J \subset P_J = K \subset P_{J\cup\{a\}},$$

我们得到所述结论。 □

推论 10.3. 元素 s正规化群 $K \cap U^{M_\alpha}(F)$ 和 $K \cap \overline{U^{M_\alpha}}(F)$。

证明。由于 s是 $v[a,J] \in W_{J\cup\{a\}}$的一个提升，因此它包含于 $P_{J\cup\{a\}} \cap M_\alpha(F)$ 中。因此，结论由引理 10.2 得出。 □

根据 [BK98, （8.7）],我们有

$$t_P = t_{PM_\alpha} \circ t_{P\cap M_\alpha},$$

其中

$$t_{P\cap M_\alpha} \colon \mathcal{H}(M(F),\rho_M) \to \mathcal{H}(M_\alpha(F),\rho_\alpha).$$

表示在 t_P 的构造中将 G 替换为 M_α 所得到的单射，并且

$$t_{PM_\alpha} \colon \mathcal{H}(M_\alpha(F),\rho_\alpha) \to \mathcal{H}(G(F),\rho).$$

表示在 t_P 的构造中将 M 替换为 M_α 所得到的单射。此外，在 I_U 的构造中将 G 替换为 M_α，我们得到同构

$$I_{U\cap M_\alpha}\colon \operatorname{ind}_{K_\alpha}^{M_\alpha(F)}(\rho_\alpha)\to I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right),$$

并在 I_U的构造中将 M 替换为 M_α，我们得到同构

$$I_{U^{M_\alpha}}\colon \operatorname{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\to I_{PM_\alpha}^{G}\left(\operatorname{ind}_{K_\alpha}^{M_\alpha(F)}(\rho_\alpha)\right).$$

根据命题 4.7，将 G 或 M 替换为 M_α，我们得到以下交换图：

(10.2)
$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{End}_{M(F)}\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \operatorname{End}_{M(F)}\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\\
\downarrow{\scriptstyle t_{P\cap M_\alpha}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}}\\
\operatorname{End}_{M_\alpha(F)}\left(\operatorname{ind}_{K_\alpha}^{M_\alpha(F)}(\rho_\alpha)\right) & \xrightarrow{I_{U\cap M_\alpha}} & \operatorname{End}_{M_\alpha(F)}\left(I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right),
\end{array}$$

(10.3)
$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{End}_{M_\alpha(F)}\left(\operatorname{ind}_{K_\alpha}^{M_\alpha(F)}(\rho_\alpha)\right) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \operatorname{End}_{M_\alpha(F)}\left(\operatorname{ind}_{K_\alpha}^{M_\alpha(F)}(\rho_\alpha)\right)\\
\downarrow{\scriptstyle t_{PM_\alpha}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle I_{PM_\alpha}^{G}}\\
\operatorname{End}_{G(F)}\left(\operatorname{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\right) & \xrightarrow{I_{U^{M_\alpha}}} & \operatorname{End}_{G(F)}\left(I_{PM_\alpha}^{G}\left(\operatorname{ind}_{K_\alpha}^{M_\alpha(F)}(\rho_\alpha)\right)\right).
\end{array}$$

此外，根据 I_U 的定义可轻易得出，复合

$$I_{PM_\alpha}^{G}\left(I_{U\cap M_\alpha}\right)\circ I_{U^{M_\alpha}}\colon \operatorname{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\to I_P^G\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$$

与 I_U一致。这里我们使用典范同构

$$I_P^G\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\simeq I_{PM_\alpha}^{G}\left(I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right)$$

定义如下

$$f\mapsto[g\mapsto[m\mapsto\delta_{PM_\alpha}(m)^{1/2}\cdot f(mg)]]$$

以识别它们。因此，结合 (10.2) 和 (10.3)，并利用平凡图表

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{End}_{M_\alpha(F)}\left(\operatorname{ind}_{K_\alpha}^{M_\alpha(F)}(\rho_\alpha)\right) & \xrightarrow{I_{U\cap M_\alpha}} & \operatorname{End}_{M_\alpha(F)}\left(I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\operatorname{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)\\
\downarrow{\scriptstyle I_{PM_\alpha}^{G}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle I_{PM_\alpha}^{G}}\\
\operatorname{End}_{G(F)}\left(I_{PM_\alpha}^{G}\left(\operatorname{ind}_{K_\alpha}^{M_\alpha(F)}(\rho_\alpha)\right)\right) & \xrightarrow{I_{PM_\alpha}^{G}(I_{U\cap M_\alpha})} & \operatorname{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right),
\end{array}$$

我们得到以下交换图：

(10.4)
$$\begin{array}{ccccc}
\operatorname{End}_{M(F)}\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \operatorname{End}_{M(F)}\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) & \xrightarrow{T_{\rho_M}} & \operatorname{End}_{M(F)}\left(\operatorname{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\\
\downarrow{\scriptstyle t_{P\cap M_\alpha}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}}\\
\operatorname{End}_{M_\alpha(F)}\left(\operatorname{ind}_{K_\alpha}^{M_\alpha(F)}(\rho_\alpha)\right) & \xrightarrow{I_{U\cap M_\alpha}} & \operatorname{End}_{M_\alpha(F)}\left(I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right) & \xrightarrow{T_{\rho_M}} & \operatorname{End}_{M_\alpha(F)}\left(I_{P\cap M_\alpha}^{M_\alpha}\left(\operatorname{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)\\
\downarrow{\scriptstyle t_{PM_\alpha}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle I_{PM_\alpha}^{G}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle I_{PM_\alpha}^{G}}\\
\operatorname{End}_{G(F)}\left(\operatorname{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\right) & \xrightarrow{I_U} & \operatorname{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\operatorname{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)\right) & \xrightarrow{T_{\rho_M}} & \operatorname{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\operatorname{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right).
\end{array}$$

令 Φ_s 表示定理 5.5 中出现的 $\operatorname{End}_{G(F)}\left(\operatorname{ind}_{K}^{G(F)}(\rho)\right)$ 的元素。我们也有 $\operatorname{End}_{M_\alpha(F)}\left(\operatorname{ind}^{M_\alpha(F)K_\alpha}(\rho_\alpha)\right)$ 的类似描述。特别地，我们有元素 $\Phi_s^{M_\alpha}$，它属于

$\mathrm{End}_{M_\alpha(F)}\left(\mathrm{ind}^{M_\alpha(F)K_\alpha}(\rho_\alpha)\right)$，使得通过 (4.1) 的 M_α-版本与 $\Phi_s^{M_\alpha}$ 对应的元素 $\phi_s^{M_\alpha} \in \mathcal{H}(M_\alpha(F)$ $\rho_\alpha)$ 的支集包含于 $K_\alpha s K_\alpha$，并且满足

$$(\Phi_s^{M_\alpha})^2 = (p_a - 1)\Phi_s^{M_\alpha} + p_a.$$

命题10.4. 我们有

$$t_{PM_\alpha}\left(\Phi_s^{M_\alpha}\right) = \Phi_s.$$

证明. 根据推论 10.3， s正规化 $K \cap U^{M_\alpha}(F)$ 和 $K \cap \overline{U^{M_\alpha}}(F)$。特别地，相对于 K， s 是正的，且相对于 U^{M_α} 也是正的。因此，根据 t_{PM_α} 的定义，存在 $c \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$t_{PM_\alpha}\left(\Phi_s^{M_\alpha}\right) = c \cdot \Phi_s.$$

由于 $\Phi_s^{M_\alpha}$ 和 Φ_s 满足相同的二次关系

$$(\Phi_s^{M_\alpha})^2 = (p_a - 1)\Phi_s^{M_\alpha} + p_a$$

and

$$\Phi_s^2 = (p_a - 1)\Phi_s + p_a,$$

我们有 $c = 1$。 □

现在，我们证明当 $a \in B$ 和 M_α 是相对于 P 的标准 Levi 子群时的定理 7.17。由于标签函数可以在 M_α 中计算，后一个断言可由第9节的结果推出。只需证明前一个断言。利用推论 5.7 和定理 6.11，我们将其改写为：

定理 10.5. 设 $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$，其中 M_α 是相对于 P 的标准 Levi 子群。我们还假设，元素 $a \in \Gamma(J,\rho)^+$ 满足 $r(a) = -\alpha'$ 包含于 B。令

$$s = s_\alpha \in W_0(R^{\mathrm{Mor}}) = W_0(R^{\mathrm{Sol}})$$

表示与元素 α 相关联的简单反射。于是有

$$\left(T_{\rho_M} \circ I_U\right)(\Phi_s) = \begin{cases} q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')} - 1 - T'_s & (\epsilon_\alpha = 0), \\ -q_F^{\left(-\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \cdot \theta_{-(\alpha')^\vee} T'_s & (\epsilon_\alpha = 1). \end{cases}$$

证明. 我们已在第9节证明了定理 10.5 的 M_α 版本：

$$\left(T_{\rho_M} \circ I_{U \cap M_\alpha}\right)(\Phi_s^{M_\alpha}) = \begin{cases} q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')} - 1 - (T'_s)^{M_\alpha} & (\epsilon_\alpha = 0), \\ -q_F^{\left(-\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \cdot \theta_{-(\alpha')^\vee} (T'_s)^{M_\alpha} & (\epsilon_\alpha = 1). \end{cases} \tag{10.5}$$

接着，根据交换图表(10.4)，结合引理 6.8 和命题10.4，由 (10.5) 可得定理 10.5。□

为了去掉 $a \in B$ 和 M_α 是相对于 P 的标准 Levi 子群这一条件，我们使用交织算子。回顾一下， $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M}$ $\mu(P)$。

引理 10.6. 存在一个抛物子群 P'，其 Levi 因子为 M，使得 M_α 关于 P'是标准 Levi 子群，并且

$$\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P) = \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P').$$

证明. 对于一个 Levi 因子为 M的抛物子群 P'，令 $\Delta(P')$ 表示关于 P'的 $\Sigma(G,A_M)$ 的基。因此，$\Sigma(P',A_M)$ 的任意元素都可以写成 $\Delta(P')$ 中元素的线性组合，系数均为非负有理整数。我们还注意到，若$\alpha \in \Delta(P')$，则 M_α关于 P'是标准的。对于 $w \in W(G,M,\mathfrak{s}_M)$，我们定义

$$N(w,P') = \{\beta \in \Sigma_{\mathrm{red}}(P',A_M) \mid w(\beta) \in -\Sigma_{\mathrm{red}}(P',A_M)\}.$$

要证明引理 10.6，只需证明以下断言：

断言 10.7. 若 $\alpha \notin \Delta(P)$，则存在一个抛物子群 P'，其 Levi 因子为 M，使得

$$\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P) = \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P'),$$

and

$$N(s_\alpha,P') \subsetneq N(s_\alpha,P).$$

我们证明该断言。假设 $\alpha \notin \Delta(P)$。那么，存在

$$\alpha \neq \beta \in \Delta(P) \cap N(s_\alpha, P).$$

由于$\alpha \in \Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$,

$$N(s_\alpha, P) \cap \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu} = \{\alpha\}.$$

特别地，我们有$\beta \notin \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}$。我们取抛物子群 P'，其 Levi 因子为 M，使得

$$\Sigma_{\mathrm{red}}(P', A_M) = (\Sigma_{\mathrm{red}}(P, A_M) \backslash \{\beta\}) \cup \{-\beta\}.$$

由于$\beta \notin \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}$，我们得到

$$\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P) = \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P').$$

此外，根据 P' 的定义可知

$$N(s_\alpha, P') = N(s_\alpha, P) \backslash \{\beta\}.$$

因此，我们得到了所要证明的结论。 □

我们固定这样一个 P'。根据 [Sol22，命题 4.2 (a)], , Harish-Chandra 的交织算子 $J_{P'|P}$ 没有极点。因此，它限制为一个 $G(F)$-等变同构

$$J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \colon I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right) \to I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right).$$

$J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot)$ [Sol22，子节 4.1] 的定义表明

$$J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \circ I_P^G(b) = I_{P'}^G(b) \circ J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \tag{10.6}$$

对所有 $b \in \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)$均成立。

我们定义

$$T'_{s,P'} \in \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$$

在定义中将 P' 替换为 P

$$T'_s = T'_{s,P} \in \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right).$$

见引理 6.7。于是，我们有如下结论:

引理 10.8。我们有

$$T'_{s,P'} = J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \circ T'_{s,P} \circ (J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot))^{-1}.$$

证明。回顾一下， T'_s 定义为

$$T'_s = \frac{(q_\alpha - 1)(q_{\alpha *} + 1)}{2}(\theta_{h_\alpha^\vee})^{\epsilon_\alpha} \circ J_s + f_\alpha,$$

对某个 $f_\alpha \in \mathbb{C}(M_\sigma/M^1)$。记 $J_s = J_{s,P}$，并定义

$$J_{s,P'} \in \mathrm{Hom}_{G(F)}\left(I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right), I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1) \otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]} \mathbb{C}(M_\sigma/M^1)\right)\right)$$

将 $J_{s,P}$ 的定义中的 P替换为 P'，即可得到。于是我们有

$$T'_{s,P'} = \frac{(q_\alpha - 1)(q_{\alpha *} + 1)}{2}(\theta_{h_\alpha^\vee})^{\epsilon_\alpha} \circ J_{s,P'} + f_\alpha.$$

根据 (10.6)，只需证明

$$J_{s,P'} = J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \circ J_{s,P} \circ (J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot))^{-1}.$$

J_s 的定义意味着

$$J_{s,P} = I_P^G\left(\rho_{P,\sigma,s} \otimes \mathrm{id}\right) \circ I_P^G(\tau_s) \circ \lambda(s) \circ J_{s^{-1}(P)|P}(\sigma \otimes \cdot)$$

and

$$J_{s,P'} = I_{P'}^G\left(\rho_{P',\sigma,s} \otimes \mathrm{id}\right) \circ I_{P'}^G(\tau_s) \circ \lambda(s) \circ J_{s^{-1}(P')|P'}(\sigma \otimes \cdot).$$

由于正规化的

$$\rho_{\sigma,s} \colon {}^s\sigma \simeq \sigma,$$

在 [Sol22 中，引理 4.3] 取决于 P，我们分别将 $\rho_{\sigma,\ s}$、$J_{s,\ P}$、$J_{s,\ P'}$ 和 $\rho_{P,\ \sigma,\ s}$、$\rho_{P',\ \sigma,\ s}$ 记作。由于空间 $\mathrm{Hom}_{M(F)}({}^s\sigma, \sigma)$ 是一维的，存在 $c_1 \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$\rho_{P',\sigma,s} = c_1 \cdot \rho_{P,\sigma,s}. \tag{10.7}$$

$J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot)$ [Sol22, 第4节.1] 的定义意味着

$$J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \circ I_P^G(\rho_{P,\ \sigma,\ s} \otimes \mathrm{id}) \circ I_P^G(\tau_s) \circ \lambda(s) = I_{P'}^G(\rho_{P,\ \sigma,\ s} \otimes \mathrm{id}) \circ I_{P'}^G(\tau_s) \circ \lambda(s) \circ J_{s^{-1}(P')|s^{-1}(P)}(\sigma \otimes \cdot). \tag{10.8}$$

此外，根据 [Wal03, IV.3 (4)] 和 [Wal03, V.2], , 存在 $c_2 \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$J_{s^{-1}(P')|s^{-1}(P)}(\sigma \otimes \cdot) \circ J_{s^{-1}(P)|P}(\sigma \otimes \cdot) = c_2 \cdot \left(\prod_\beta \mu^{M_\beta}(\sigma \otimes \cdot)^{-1} \right) J_{s^{-1}(P')|P}(\sigma \otimes \cdot),$$

其中 μ^{M_β} 表示 Harish-Chandra 的 μ-函数 [Wal03, V.2], , 且 β 遍历

$$\Sigma_{\mathrm{red}}(P, A_M) \cap \left(-\Sigma_{\mathrm{red}}(s^{-1}(P), A_M)\right) \cap \Sigma_{\mathrm{red}}(s^{-1}(P'), A_M).$$

由于我们假设

$$\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P) = \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P'),$$

我们有

$$\left(-\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(s^{-1}(P))\right) \cap \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(s^{-1}(P')) = \emptyset.$$

因此，乘积中出现的所有 β 都包含在 $\Sigma_{\mathrm{red}}(A_M) \backslash \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\ \mu}$ 中。根据 [Hei11，命题 1.6], , 对于这样的 β， μ^{M_β} 是常数。因此，我们得到存在 $c_3 \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$J_{s^{-1}(P')|s^{-1}(P)}(\sigma \otimes \cdot) \circ J_{s^{-1}(P)|P}(\sigma \otimes \cdot) = c_3 \cdot J_{s^{-1}(P')|P}(\sigma \otimes \cdot). \tag{10.9}$$

类似地，我们可以证明存在 $c_4 \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$J_{s^{-1}(P')|P'}(\sigma \otimes \cdot) \circ J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) = c_4 \cdot J_{s^{-1}(P')|P}(\sigma \otimes \cdot). \tag{10.10}$$

将 (10.8) 与 (10.9) 结合，我们得到

$$\begin{aligned} J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \circ J_{s,P} &= J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \circ I_P^G(\rho_{P,\sigma,s} \otimes \mathrm{id}) \circ I_P^G(\tau_s) \circ \lambda(s) \circ J_{s^{-1}(P)|P}(\sigma \otimes \cdot) \\ &= I_{P'}^G(\rho_{P,\sigma,s} \otimes \mathrm{id}) \circ I_{P'}^G(\tau_s) \circ \lambda(s) \circ J_{s^{-1}(P')|s^{-1}(P)}(\sigma \otimes \cdot) \circ J_{s^{-1}(P)|P}(\sigma \otimes \cdot) \\ &= c_3 \cdot I_{P'}^G(\rho_{P,\sigma,s} \otimes \mathrm{id}) \circ I_{P'}^G(\tau_s) \circ \lambda(s) \circ J_{s^{-1}(P')|P}(\sigma \otimes \cdot). \end{aligned}$$

另一方面，方程 (10.7) 和方程 (10.10) 蕴含

$$\begin{aligned} J_{s,P'} \circ J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) &= I_{P'}^G(\rho_{P',\sigma,s} \otimes \mathrm{id}) \circ I_{P'}^G(\tau_s) \circ \lambda(s) \circ J_{s^{-1}(P')|P'}(\sigma \otimes \cdot) \circ J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \\ &= c_4 \cdot I_{P'}^G(\rho_{P',\sigma,s} \otimes \mathrm{id}) \circ I_{P'}^G(\tau_s) \circ \lambda(s) \circ J_{s^{-1}(P')|P}(\sigma \otimes \cdot) \\ &= c_1 c_4 \cdot I_{P'}^G(\rho_{P,\sigma,s} \otimes \mathrm{id}) \circ I_{P'}^G(\tau_s) \circ \lambda(s) \circ J_{s^{-1}(P')|P}(\sigma \otimes \cdot). \end{aligned}$$

现在，我们得出

$$J_{s,P'} = c_5 \cdot J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \circ J_{s,P} \circ (J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot))^{-1},$$

其中

$$c_5 = c_1 c_4 c_3^{-1}.$$

根据 [Sol22，引理 10.7 (a)], 比较两边在点 $\sigma_+ \in \mathfrak{s}_M$ 处的留数，我们得到 $c_5 = 1$。□

接下来，我们在 $\mathrm{ind}_K^{G(F)}(\rho)$ 上定义一个交织算子。令 $\Phi_{\mathrm{aff},\ \mathrm{red}}$ 表示 Φ_{aff} 中不可分元素的集合，并记

$$\Phi^+_{\mathrm{aff,red}} = \Phi_{\mathrm{aff,red}} \cap \Phi^+_{\mathrm{aff}}.$$

由于 $\Gamma(J, \rho)$ 中的任意元素都包含在 Φ_{aff} 的一个基中，因此我们有

$$\Gamma(J, \rho) \subset \Phi_{\mathrm{aff,red}}.$$

对于 $w \in W$，记

$$N(w) = \{a \in \Phi^+_{\mathrm{aff,red}} \mid wa \in -\Phi^+_{\mathrm{aff,red}}\}.$$

我们还定义

$$l(w) = |N(w)|$$

对于 $w \in W$。

设 B_1、B_2 是 Φ_{aff} 的基，其中包含 J。于是，我们可以定义抛物型子群 $P_{J,\ B_i}$，其根基为 $U_{J,\ B_i}$，与 $J \subset B_i$ 相关联，其中 $i = 1,\ 2$。我们定义

$$\theta_{B_2|B_1} \colon \operatorname{ind}_{P_{J,B_1}}^{G(F)}(\rho) \to \operatorname{ind}_{P_{J,B_2}}^{G(F)}(\rho)$$

as

$$\left(\theta_{B_2|B_1}(f)\right)(g) = \int_{U_{J,B_2}} f(u'g)du'$$

对于 $f \in \operatorname{ind}_{P_J}^{G(F)}{}_{,\ B_1}(\rho)$ 和 $g \in G(F)$。这里，我们在 $U_{J,\ B_2}$ 上使用哈尔测度，使得 $U_{J,\ B_2}$ 的体积等于 1。设 $w \in W$ 满足 $wJ \subset B$。那么，我们有

$$P_{J,w^{-1}B} = {}^{\dot{w}^{-1}}P_{wJ,B}$$

and

$$\theta_{w^{-1}B|B} = \lambda(\dot{w}^{-1}) \circ \theta_{\rho,\dot{w}}, \tag{10.11}$$

其中

$$\lambda(\dot{w}^{-1}) \colon \operatorname{ind}_{P_{wJ,B}}^{G(F)}({}^{\dot{w}}\rho) \to \operatorname{ind}_{P_{J,w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho)$$

定义为

$$f \mapsto [g \mapsto f(\dot{w}g)],$$

and

$$\theta_{\rho,\dot{w}} \colon \operatorname{ind}_{P_{J,B}}^{G(F)}(\rho) \to \operatorname{ind}_{P_{wJ,B}}^{G(F)}({}^{\dot{w}}\rho)$$

表示在 [Mor93，第 5.3] 小节中定义的映射。

引理10.9. 令 $w \in W$ 使得 $wJ \subset B$，且 $v \in W(J,\rho)$。假设

$$N(v^{-1}) \cap N(w) \cap \Gamma(J,\rho) = \emptyset.$$

则存在 $c(w,v) \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$\theta_{v^{-1}w^{-1}B|v^{-1}B} \circ \theta_{v^{-1}B|B} = c(w,v) \cdot \theta_{v^{-1}w^{-1}B|B}.$$

证明. 根据（10.11），我们有

$$\begin{cases} \theta_{v^{-1}B|B} & = \lambda(\dot{v}^{-1}) \circ \theta_{\rho,\dot{v}}, \\ \theta_{v^{-1}w^{-1}B|B} & = \lambda(\dot{v}^{-1}\dot{w}^{-1}) \circ \theta_{\rho,\dot{w}\dot{v}}. \end{cases}$$

此外，$\theta_{v^{-1}w^{-1}B|v^{-1}B}$ 的定义意味着

$$\theta_{v^{-1}w^{-1}B|v^{-1}B} = \lambda(\dot{v}^{-1}\dot{w}^{-1}) \circ \theta_{\dot{v}\rho,\dot{w}} \circ \lambda(\dot{v}),$$

其中

$$\lambda(\dot{v}) \colon \operatorname{ind}_{P_{J,v^{-1}B}}^{G(F)}(\rho) \to \operatorname{ind}_{P_{vJ,B}}^{G(F)}({}^{\dot{v}}\rho)$$

表示定义为 $f \mapsto [g \mapsto f(\dot{v}^{-1}g)]$, 的映射

$$\theta_{\dot{v}\rho,\dot{w}} \colon \operatorname{ind}_{P_{vJ,B}}^{G(F)}({}^{\dot{v}}\rho) \to \operatorname{ind}_{P_{wvJ,B}}^{G(F)}({}^{\dot{w}\dot{v}}\rho)$$

表示 Mor93 第 5.3], 小节中定义的映射，并

$$\lambda(\dot{v}^{-1}\dot{w}^{-1}) \colon \operatorname{ind}_{P_{wvJ,B}}^{G(F)}({}^{\dot{w}\dot{v}}\rho) \to \operatorname{ind}_{P_{J,v^{-1}w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho)$$

表示定义为如下形式的映射

$$f \mapsto [g \mapsto f(\dot{w}\dot{v}g)].$$

那么，该结论由 Mor93 引理 7.5] 得出。 □

我们还有引理10.9的一个变体。

L理10.10。设 $w \in W$ 满足 $wJ \subset B$，且 $v \in W$ 满足 $vwJ \subset B$。假设 t

$$N(v) \cap N(w^{-1}) \cap w\Gamma(J,\rho) = \emptyset.$$

那么，存在 $c'(v,w) \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$\theta_{w^{-1}v^{-1}B|w^{-1}B} \circ \theta_{w^{-1}B|B} = c'(v,w) \cdot \theta_{w^{-1}v^{-1}B|B}.$$

证明。与引理10.9的证明相同的论证表明

$$\theta_{w^{-1}B|B} = \lambda(\dot{w}^{-1}) \circ \theta_{\rho,\dot{w}},$$
$$\theta_{w^{-1}v^{-1}B|w^{-1}B} = \lambda(\dot{w}^{-1}\dot{v}^{-1}) \circ \theta_{\dot{w}\rho,\dot{v}} \circ \lambda(\dot{w}),$$

and

$$\theta_{w^{-1}v^{-1}B|B} = \lambda(\dot{w}^{-1}\dot{v}^{-1}) \circ \theta_{\rho,\dot{v}\dot{w}}.$$

因此，我们可以将该断言改写为

$$\theta_{\dot{w}\rho,\dot{v}} \circ \theta_{\rho,\dot{w}} = c'(v,w) \cdot \theta_{\rho,\dot{v}\dot{w}}.$$

我们对 $l(v)$ 使用归纳法来证明这一点。若 $l(v) = 0$，则

$$l(vw) = l(v) + l(w),$$

由 [Mor93, 命题 5.10] 可得该断言。

假设 $l(v) > 0$。根据 [Mor93, 1.6 (b)], ，我们可以取一个元素 $a \in N(v) \cap B$。记 $v_0 = v[a, wJ]$ 和 $v' = vv_0^{-1}$。于是，根据 [Mor93, 引理 2.5(a)],

$$l(v) = l(v') + l(v_0),$$

这等价于

$$N(v) = N(v_0) \cup v_0^{-1}N(v').$$

根据 [Mor93，命题 5.10], ，我们有

$$\theta_{\dot{v}_0\dot{w}\rho,\dot{v}'} \circ \theta_{\dot{w}\rho,\dot{v}_0} = \theta_{\dot{w}\rho,\dot{v}}. \tag{10.12}$$

由于

$$N(v_0) \subset N(v),$$

该假设意味着

$$N(v_0) \cap N(w^{-1}) \cap w\Gamma(J,\rho) = \emptyset.$$

根据 [Mor93，引理 2.4]， $a \in N(v_0)$，因此我们有

$$a \notin N(w^{-1}) \cap w\Gamma(J,\rho).$$

于是，根据 [Mor93，引理 7.4], ，存在 $c'(v_0, w) \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$\theta_{\dot{w}\rho,\dot{v}_0} \circ \theta_{\rho,\dot{w}} = c'(v_0,w) \cdot \theta_{\rho,\dot{v}_0\dot{w}}. \tag{10.13}$$

结合 (10.12) 和 (10.13)，我们得到

$$\begin{aligned}\theta_{\dot{w}\rho,\dot{v}} \circ \theta_{\rho,\dot{w}} &= \theta_{\dot{v}_0\dot{w}\rho,\dot{v}'} \circ \theta_{\dot{w}\rho,\dot{v}_0} \circ \theta_{\rho,\dot{w}} \\ &= c'(v_0,w) \cdot \theta_{\dot{v}_0\dot{w}\rho,\dot{v}'} \circ \theta_{\rho,\dot{v}_0\dot{w}}.\end{aligned} \tag{10.14}$$

为了使用归纳假设，我们将证明

$$N(v') \cap N(w^{-1}v_0^{-1}) \cap v_0w\Gamma(J,\rho) = \emptyset.$$

由于,

$$N(w^{-1}v_0^{-1}) \subset N(v_0^{-1}) \cup v_0N(w^{-1}),$$

只需证明

$$N(v') \cap N(v_0^{-1}) \cap v_0w\Gamma(J,\rho) = \emptyset$$

and

$$N(v') \cap v_0N(w^{-1}) \cap v_0w\Gamma(J,\rho) = \emptyset.$$

设 $b \in N(v') \cap N(v_0^{-1})$。那么,

$$-v_0^{-1}(b) > 0,\ v_0(-v_0^{-1}b) = -b < 0,\ , v(-v_0^{-1}(b)) = -v'(b) > 0,$$

因此

$$-v_0^{-1}(b) \in N(v_0) \backslash N(v).$$

然而，由于

$$N(v) = N(v_0) \cup v_0^{-1}N(v'),$$

$N(v_0)$ 包含于 $N(v)$ 中，矛盾。因此，我们得出结论:

$$N(v') \cap N(v_0^{-1}) \cap v_0w\Gamma(J,\rho) \subset N(v') \cap N(v_0^{-1}) = \emptyset.$$

接下来，我们将证明

$$N(v') \cap v_0N(w^{-1}) \cap v_0w\Gamma(J,\rho) = \emptyset.$$

由于

$$v_0^{-1}N(v') \subset N(v_0) \cup v_0^{-1}N(v') = N(v),$$

并且我们假设

$$N(v) \cap N(w^{-1}) \cap w\Gamma(J,\rho) = \emptyset,$$

我们得到

$$v_0^{-1}N(v') \cap N(w^{-1}) \cap w\Gamma(J,\rho) = \emptyset.$$

因此，我们得到

$$N(v') \cap v_0N(w^{-1}) \cap v_0w\Gamma(J,\rho) = v_0\left(v_0^{-1}N(v') \cap N(w^{-1}) \cap w\Gamma(J,\rho)\right) = \emptyset.$$

记作 $w' = v_0w$。那么，归纳假设表明存在 $c'(v',w') \in \mathbb{C}^\times$使得

$$\theta_{\dot{w}'\rho,\dot{v}'} \circ \theta_{\rho,\dot{w}'} = c'(v',w') \cdot \theta_{\rho,\dot{v}'\dot{w}'}. \tag{10.15}$$

这里需要注意， w' 的提升 $\dot{w}'$ 不一定等于 v_0 的提升 $\dot{v}_0$ 与 w的提升 $\dot{w}$ 的乘积。我们记作

$$t = (\dot{w}')^{-1}\dot{v}_0\dot{w}.$$

根据 [Mor93, 引理 6.3 (a)], ，我们有

$$\theta_{\rho,\dot{v}_0\dot{w}} = \theta_{\rho,\dot{w}'t} = \rho(t^{-1}) \circ \theta_{\rho,\dot{w}'},$$

根据 [Mor93, 引理 6.3 (c)], ，我们有

$$\begin{aligned}
\theta_{\dot{v}_0\dot{w}\rho,\dot{v}'} &= \theta_{\dot{w}'t\rho,\dot{v}'} \\
&= \theta_{(\dot{w}'t(\dot{w}')^{-1})\dot{w}'\rho,\dot{v}'} \\
&= (\dot{w}'\rho)(\dot{w}'t^{-1}(\dot{w}')^{-1}) \circ \theta_{\dot{w}'\rho,\dot{v}'} \circ (\dot{w}'\rho)(\dot{w}'t(\dot{w}')^{-1}) \\
&= \rho(t^{-1}) \circ \theta_{\dot{w}'\rho,\dot{v}'} \circ \rho(t).
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\theta_{\dot{v}_0\dot{w}\rho,\dot{v}'} \circ \theta_{\rho,\dot{v}_0\dot{w}} &= \theta_{\dot{v}_0\dot{w}\rho,\dot{v}'} \circ \rho(t^{-1}) \circ \theta_{\rho,\dot{w}'} \\
&= \rho(t^{-1}) \circ \theta_{\dot{w}'\rho,\dot{v}'} \circ \theta_{\rho,\dot{w}'}.
\end{aligned}$$

将其与 (10.15) 结合，并再次使用 [Mor93, 引理 6.3 (a)] ，我们得到

$$\begin{aligned}
\theta_{\dot{v}_0\dot{w}\rho,\dot{v}'} \circ \theta_{\rho,\dot{v}_0\dot{w}} &= \rho(t^{-1}) \circ \theta_{\dot{w}'\rho,\dot{v}'} \circ \theta_{\rho,\dot{w}'} \\
&= c'(v',w') \cdot \rho(t^{-1}) \circ \theta_{\rho,\dot{v}'\dot{w}'} \\
&= c'(v',w') \cdot \rho(t^{-1}) \circ \theta_{\rho,\dot{v}'\dot{v}_0\dot{w}t^{-1}} \\
&= c'(v',w') \cdot \theta_{\rho,\dot{v}'\dot{v}_0\dot{w}} \\
&= c'(v',w') \cdot \theta_{\rho,\dot{v}\dot{w}}.
\end{aligned} \tag{10.16}$$

对于最后一个等式，我们用到了这一事实

$$\dot{v} = \dot{v}'\dot{v}_0,$$

它可由此推出

$$l(v) = l(v') + l(v_0)$$

and 我们对提升的选择（见 [Mor93，命题 5.2]）。现在，将 (10.14) 与 (10.16) 结合，we obtain

$$\theta_{\dot{w}\rho,\dot{v}} \circ \theta_{\rho,\dot{w}} = c'(v_0,w) \cdot c'(v',w') \cdot \theta_{\rho,\dot{v}\dot{w}}.$$

□

推论 10.11。设 $w \in W$ 使得 $wJ \subset B$ 且

$$N(w) \cap \Gamma(J,\rho) = N(w) \cap -\Gamma(J,\rho) = \emptyset.$$

那么，映射

$$\theta_{w^{-1}B|B}\colon \operatorname{ind}_{P_{J,B}}^{G(F)}(\rho) \to \operatorname{ind}_{P_{J,w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho).$$

是一个同构。

证明。由于

$$N(w)\cap -\Gamma(J,\rho)=\emptyset,$$

我们得到

$$N(w^{-1})\cap w\Gamma(J,\rho)=-w\left(N(w)\cap -\Gamma(J,\rho)\right)=\emptyset.$$

那么，将 $v=w^{-1}$ 代入引理10.10，我们得到

$$\theta_{B|w^{-1}B}\circ\theta_{w^{-1}B|B}=c'(w^{-1},w)\cdot\theta_{B|B}=c'(w^{-1},w)\cdot\mathrm{id}_{\mathrm{ind}_{P_{J,B}}^{G(F)}(\rho)} \tag{10.17}$$

另一方面，在引理10.10中用 $w^{-1}B$ 替换 B，并用 w^{-1} 替换 w，我们得到

$$\theta_{wv^{-1}w^{-1}B|B}\circ\theta_{B|w^{-1}B}\in\mathbb{C}^\times\cdot\theta_{wv^{-1}w^{-1}B|B}$$

对于所有满足 $vw^{-1}J\subset w^{-1}B$ 且.....的 $v\in W$

$$w^{-1}N(v)\cap w^{-1}N(w)\cap w^{-1}\Gamma(J,\rho).$$

由于

$$N(w)\cap\Gamma(J,\rho)=\emptyset,$$

我们可以取 $v=w$。于是，得到

$$\theta_{w^{-1}B|B}\circ\theta_{B|w^{-1}B}=c\cdot\theta_{w^{-1}B|w^{-1}B}=c\cdot\mathrm{id}_{\mathrm{ind}_{P_{J,w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho)} \tag{10.18}$$

对某个 $c\in\mathbb{C}^\times$。结合 (10.17) 与 (10.18)，得到该推论。 □

推论 10.12。设 $w\in W$ 满足 $wJ\subset B$ 且

$$N(w)\cap\Gamma(J,\rho)=N(w)\cap -\Gamma(J,\rho)=\emptyset.$$

*The*n，对于任意 $v\in W(J,\rho)$，存在 $c''(w,v)\in\mathbb{C}^\times$，使得下图交换 *s:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{ind}_{P_{J,B}}^{G(F)}(\rho) & \xrightarrow{\theta_{w^{-1}B|B}} & \mathrm{ind}_{P_{J,w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \theta_{v^{-1}B|B}} & \circlearrowleft & \Big\downarrow{\scriptstyle c''(w,v)\cdot\theta_{v^{-1}w^{-1}B|w^{-1}B}} \\
\mathrm{ind}_{P_{J,v^{-1}B}}^{G(F)}(\rho) & \xrightarrow{\theta_{v^{-1}w^{-1}B|v^{-1}B}} & \mathrm{ind}_{P_{J,v^{-1}w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho).
\end{array}$$

证明。记 $v'=wvw^{-1}$。由于

$$N(w)\cap\Gamma(J,\rho)=\emptyset,$$

引理10.9 表明

$$\theta_{v^{-1}w^{-1}B|v^{-1}B}\circ\theta_{v^{-1}B|B}=c(w,v)\cdot\theta_{v^{-1}w^{-1}B|B}.$$

另一方面，假设

$$N(w)\cap -\Gamma(J,\rho)=\emptyset$$

意味着

$$N(w^{-1})\cap w\Gamma(J,\rho)=-w\left(N(w)\cap -\Gamma(J,\rho)\right)=\emptyset,$$

因此，引理10.10意味着

$$\theta_{w^{-1}(v')^{-1}B|w^{-1}B}\circ\theta_{w^{-1}B|B}=c'(v',w)\cdot\theta_{w^{-1}(v')^{-1}B|B}.$$

由于

$$v'w=wvw^{-1}w=wv,$$

我们得到关于 的推论

$$c''(w,v)=c(w,v)\cdot c'(v',w)^{-1}.$$

□

下面的引理断言，我们可以取 $w\in W$，使得 $a\in w^{-1}B$ 和 w 满足上述假设：

引理10.13。存在 $w\in W$ 使得 $w(J\cup\{a\})\subset B$ 并且

$$N(w)\cap\Gamma(J,\rho)=N(w)\cap -\Gamma(J,\rho)=\emptyset.$$

证明。根据 [Mor93，定理 2.11 (b)], , 存在 $w \in W_{\mathrm{aff}}$ 使得 $w(J \cup \{a\}) \subset B$，并且

$$l(v[a, J]) = l(wv[a, J]w^{-1}) + 2l(w)$$

（另见 [Mor93 的命题 7.6] 的证明）。具体而言，我们可以取 w 为

$$w = v[a_r, J_r] \cdots v[a_1, J_1],$$

其中 $a_i \in B$、 $J = J_1$ 和

$$J_{i+1} = v[a_i, J_i]J_i \subset B$$

对于 $1 \leq i \leq r-1$，并且我们有

$$l(w) = \sum_{i=1}^{r} l(v[a_i, J_i]).$$

由于 $a + A'_J \in B(J, \rho)$， [Mor93 的命题 7.6] 的证明表明

$$N(w) \cap \Gamma(J, \rho) = \emptyset.$$

我们将证明

$$N(w) \cap -\Gamma(J, \rho) = \emptyset.$$

由于 $\Gamma'(J, \rho)$ 是一个仿射根系， $\Gamma'(J, \rho) = -\Gamma'(J, \rho)$，因此

$$-\Gamma(J, \rho) \subset \Gamma(J, \rho) + A'_J.$$

因此，如果

$$N(w) \cap -\Gamma(J, \rho) \neq \emptyset,$$

我们有

$$(N(w) + A'_J) \cap \Gamma(J, \rho) \neq \emptyset.$$

另一方面，根据下面的引理 10.14，我们有

$$(N(w) + A'_J) \cap \Phi_{\mathrm{aff,red}} = N(w).$$

由于 $\Gamma(J, \rho) \subset \Phi_{\mathrm{aff,\ red}}$，我们有

$$\begin{aligned} N(w) \cap \Gamma(J, \rho) &= (N(w) + A'_J) \cap \Phi_{\mathrm{aff,red}} \cap \Gamma(J, \rho) \\ &= (N(w) + A'_J) \cap \Gamma(J, \rho) \\ &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

矛盾。因此，我们得出结论:

$$N(w) \cap -\Gamma(J, \rho) = \emptyset.$$

□

引理 10.14. 假设元素 $w \in W$ 可写为

$$w = v[a_r, J_r] \cdots v[a_1, J_1],$$

其中，对于所有 $1 \leq i \leq r$， $J_i \cup \{a_i\} \subset B$，并且

$$J_{i+1} = v[a_i, J_i]J_i$$

对于 $1 \leq i \leq r-1$。我们还假设

$$l(w) = \sum_{i=1}^{r} l(v[a_i, J_i]).$$

那么，我们有

$$(N(w) + A'_{J_1}) \cap \Phi_{\mathrm{aff,red}} = N(w),$$

其中 A'_{J_1} 表示由 J_1张成的 A' 子空间。

证明。我们通过对 r使用归纳法来证明该引理。当 $r=0$、 $N(w)=N(1)=\emptyset$ 时，该方程显然成立。假设 $r\geq 1$。那么，

$$w=w'v[a_1,J_1],$$

其中

$$w'=v[a_r,J_r]\cdots v[a_2,J_2].$$

由于我们假设

$$l(w)=\sum_{i=1}^{r}l(v[a_i,J_i]),$$

我们有

$$l(w)=l(w')+l(v[a_1,J_1]),$$

因此

$$N(w)=N(v[a_1,J_1])\cup v[a_1,J_1]^{-1}N(w'). \tag{10.19}$$

根据 [Mor93，引理 2.4]，

$$N\left(v[a_1,J_1]\right)=(A'_{J_1\cup\{a_1\}}\cap\Phi_{\mathrm{aff,red}})\backslash A'_{J_1},$$

其中， $A'_{J_1\cup\{a_1\}}$ 表示由 $J_1\cup\{a_1\}$张成的 A' 子空间。因此，我们有

$$\left(N\left(v[a_1,J_1]\right)+A'_{J_1}\right)\cap\Phi_{\mathrm{aff,red}}=N(v[a_1,J_1]). \tag{10.20}$$

此外，归纳假设推出

$$(N(w')+A'_{J_2})\cap\Phi_{\mathrm{aff,red}}=N(w').$$

由于

$$J_2=v[a_1,J_1]J_1,$$

我们得到

$$\begin{aligned}(v[a_1,J_1]^{-1}N(w')+A'_{J_1})\cap\Phi_{\mathrm{aff,red}}&=v[a_1,J_1]^{-1}\left((N(w')+A'_{J_2})\cap\Phi_{\mathrm{aff,red}}\right)\\&=v[a_1,J_1]^{-1}N(w').\end{aligned} \tag{10.21}$$

现在，由 (10.19)、(10.20) 和 (10.21) 可得

$$\begin{aligned}(N(w)+A'_{J_1})\cap\Phi_{\mathrm{aff,red}}&=\left((N(v[a_1,J_1])\cup v[a_1,J_1]^{-1}N(w'))+A'_{J_1}\right)\cap\Phi_{\mathrm{aff,red}}\\&=\left(\left(N(v[a_1,J_1])+A'_{J_1}\right)\cup\left(v[a_1,J_1]^{-1}N(w')+A'_{J_1}\right)\right)\cap\Phi_{\mathrm{aff,red}}\\&=\left(\left(N(v[a_1,J_1])+A'_{J_1}\right)\cap\Phi_{\mathrm{aff,red}}\right)\cup\left(\left(v[a_1,J_1]^{-1}N(w')+A'_{J_1}\right)\cap\Phi_{\mathrm{aff,red}}\right)\\&=N(v[a_1,J_1])\cup v[a_1,J_1]^{-1}N(w')=N(w).\end{aligned}$$

□

我们固定 $w\in W$，使得 $w(J\cup\{a\})\subset B$ 并且

$$N(w)\cap\Gamma(J,\rho)=N(w)\cap-\Gamma(J,\rho)=\emptyset.$$

对于 $v\in W(J,\rho)$，令

$$\Phi_v=\Phi_{v,B}\in\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_{J,B}}^{G(F)}(\rho)\right)$$

表示定理 5.5 中出现的元素。根据 [Mor93、第 5.4 小节、第7节.7]以及方程 (10.11)，存在

$$T(v)\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_J}({}^{\dot{v}}\rho,\rho)$$

使得

$$\Phi_{v,B}=T(v)\circ\lambda(\dot{v})\circ\theta_{v^{-1}B|B}.$$

这里，我们将 $T(v)$ 与.....中的元素等同

$$\mathrm{Hom}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_{J,B}}^{G(F)}({}^{\dot{v}}\rho),\mathrm{ind}_{P_{J,B}}^{G(F)}(\rho)\right)$$

定义为

$$(T(v)f)(g)=T(v)\left(f(g)\right)$$

对于 $f \in \mathrm{ind}_{P_J B}^{G(F)}(\dot{v}\rho)$ 和 $g \in G(F)$。用 $w^{-1}B$ 替换 B 后，我们也能得到类似的 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_J w^{-1}B}^{G(F)}(\rho)\right)$ 的描述以及该元素

$$\Phi_{v,w^{-1}B} \in \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_{J,w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho)\right)$$

对应于 $\Phi_{v,B}$。

注 10.15. 由于

$$N(w) \cap \Gamma(J,\rho) = N(w) \cap -\Gamma(J,\rho) = \emptyset,$$

我们有

$$\Gamma(J,\rho) \cap w^{-1}\left(\Phi_{\mathrm{aff}}^{+}\right) = \Gamma(J,\rho) \cap \Phi_{\mathrm{aff}}^{+}.$$

因此，如果我们用 $w^{-1}B$ 替换 B，$\Gamma(J,\rho)^{+}$ 和 $\Gamma'(J,\rho)^{+}$ 不会改变。

我们还有

$$\Phi_{v,w^{-1}B} = T'(v) \circ \lambda(\dot{v}) \circ \theta_{v^{-1}w^{-1}B|w^{-1}B}$$

对于某个

$$T'(v) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_J}(\dot{v}\rho,\rho).$$

由于 $T(v)$ 和 $T'(v)$ 是一维向量空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_J}(\dot{v}\rho,\rho)$ 的元素，因此存在$c(v) \in \mathbb{C}^{\times}$ 使得

$$T(v) = c(v) \cdot T'(v).$$

$\theta_{w^{-1}B|B}$ 的定义表明

$$\theta_{w^{-1}B|B} \circ T(v) \circ \lambda(\dot{v}) = T(v) \circ \lambda(\dot{v}) \circ \theta_{v^{-1}w^{-1}B|v^{-1}B} \in \mathrm{Hom}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_{J,v^{-1}B}}^{G(F)}(\rho), \mathrm{ind}_{P_{J,w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho)\right).$$

那么，根据推论 10.12，我们有

$$\begin{aligned}
\theta_{w^{-1}B|B} \circ \Phi_{v,B} &= \theta_{w^{-1}B|B} \circ T(v) \circ \lambda(\dot{v}) \circ \theta_{v^{-1}B|B} \\
&= T(v) \circ \lambda(\dot{v}) \circ \theta_{v^{-1}w^{-1}B|v^{-1}B} \circ \theta_{v^{-1}B|B} \\
&= c''(w,v) \cdot T(v) \circ \lambda(\dot{v}) \circ \theta_{v^{-1}w^{-1}B|w^{-1}B} \circ \theta_{w^{-1}B|B} \\
&= c(v) \cdot c''(w,v) \cdot T'(v) \circ \lambda(\dot{v}) \circ \theta_{v^{-1}w^{-1}B|w^{-1}B} \circ \theta_{w^{-1}B|B} \\
&= c(v) \cdot c''(w,v) \cdot \Phi_{v,w^{-1}B} \circ \theta_{w^{-1}B|B}.
\end{aligned}$$

我们对映射 $\theta_{w^{-1}B|B}$ 使用相同的符号

$$\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_{J,B}}^{G(F)}(\rho)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_{J,w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho)\right)$$

由同构诱导

$$\theta_{w^{-1}B|B} \colon \mathrm{ind}_{P_{J,B}}^{G(F)}(\rho) \to \mathrm{ind}_{P_{J,w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho)$$

（见推论 10.11）。那么，上述计算表明：

命题 10.16. 对于任意 $v \in W(J,\rho)$，存在 $c'''(w,v) \in \mathbb{C}^{\times}$ 使得

$$\theta_{w^{-1}B,B}\left(\Phi_{v,B}\right) = c'''(w,v) \cdot \Phi_{v,w^{-1}B}.$$

此外，对于元素 $v \in R(J,\rho)$，我们有：

推论 10.17. 对于任意 $v \in R(J,\rho)$，我们有

$$\theta_{w^{-1}B,B}\left(\Phi_{v,B}\right) = \Phi_{v,w^{-1}B}.$$

证明. 比较 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_J B}^{G(F)}(\rho)\right)$ 的乘法规则与定理 5.5 中 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_J w^{-1}B}^{G(F)}(\rho)\right)$ 的乘法规则，我们得出 $c'''(w,v) = 1$ 对所有 $v \in R(J,\rho)$ 均成立。□

由于 K_M 是与顶点 x_J 相关联的极大抛物子群，且不依赖于 B 的选择，因此我们有

$$K_M = P_{J,B} \cap M(F) = P_{J,w^{-1}B} \cap M(F).$$

因此，我们得到单射

$$t_{P,w^{-1}B} \colon \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_{J,w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho)\right)$$

将构造中的 B 替换为 $w^{-1}B$ 后

$$t_P = t_{P,B} \colon \mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right) \to \mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_{J,B}}^{G(F)}(\rho)\right).$$

推论 10.18. 设 $m \in M_\sigma/M^1$，并设 $\Phi_m^M \in$端同态环$_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$表示经由 (6.3) 和 T_{ρ_M} 与 $\theta_{m^{-1}} \in \mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 对应的元素。则存在 $c(w, \Phi_m^M) \in \mathbb{C}^\times$，使得

$$\theta_{w^{-1}B|B}\left(t_{P,B}(\Phi_m^M)\right) = c(w, \Phi_m^M) \cdot t_{P,w^{-1}B}(\Phi_m^M).$$

证明. 回忆一下，典范嵌入

$$I_{M(F)}(\rho_M) \to M_\sigma$$

诱导出一个同构

$$I_{M(F)}(\rho_M)/K_M \to M_\sigma/M^1.$$

此外，根据引理 7.9，典范商映射

$$W(J,\rho) \cap W_{M(F)} \to I_{M(F)}(\rho_M)/K_M$$

是一个双射。我们将它们认同。我们定义

$$W(J,\rho)^{M,+} = \{m \in W(J,\rho) \cap W_{M(F)} \mid \langle \alpha, H_M(m)\rangle \geq 0 \ (\alpha \in \Sigma(P, A_M))\}.$$

根据注 7.12，对于任意 $m \in W(J,\rho)^{M,+}$，提升 $\dot{m}$ 相对于 $(P_{J,B}, U)$ 和 $(P_{J,w^{-1}B}, U)$ 是正的。我们将其视为

$$\mathbb{C}[W(J,\rho) \cap W_{M(F)}] = \mathbb{C}[I_{M(F)}(\rho_M)/K_M] = \mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$$

$\mathcal{H}(M(F), \rho_M)$ 和 端同态环$_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$，通过 (4.2) 和 (7.2) 建立对应关系。对于 $m \in W(J,\rho) \cap W_{M(F)}$，令 $\phi_m^M \in \mathcal{H}(M(F), \rho_M)$ 和 $\Phi_m^M \in$端同态环$_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$表示与 $\theta_{m^{-1}} \in \mathbb{C}[W(J,\rho) \cap W_{M(F)}]$相对应的元素。根据引理 7.8，$\phi_m^M$的支集包含于 $\dot{m}K_M$。由于群 $W(J,\rho) \cap W_{M(F)}$由

$$\{m^{-1} \mid m \in W(J,\rho)^{M,+}\},$$

只需证明

$$\theta_{w^{-1}B|B}\left(t_{P,B}(\Phi_m^M)\right) \in \mathbb{C}^\times \cdot t_{P,w^{-1}B}(\Phi_m^M)$$

对所有 $m \in W(J,\rho)^{M,+}$。由于 $\dot{m}$ 相对于 $(P_{J,B}, U)$ 和 $(P_{J,w^{-1}B}, U)$ 为正，因此存在$c(m, B)$ $c(m, w^{-1}B) \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$t_{P,B}(\Phi_m^M) = c(m, B) \cdot \Phi_{m,B}$$

and

$$t_{P,w^{-1}B}(\Phi_m^M) = c(m, w^{-1}B) \cdot \Phi_{m,w^{-1}B}.$$

于是，结论由命题 10.16 得出。 □

回忆一下，我们固定了一个抛物子群 P'，其 Levi 因子为 M，使得 M_α 相对于 P' 是标准的，并且

$$\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P) = \Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P').$$

结合 $J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot)$ 和 $\theta_{w^{-1}B|B}$，我们得到以下图表：

命题 10.19。存在 $b(w, P') \in \mathbb{C}[M_\sigma/M^1]^\times$，使得以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ind}_{P_{J,B}}^{G(F)}(\rho) & \xrightarrow{T_{\rho_M} \circ I_U} & I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \theta_{w^{-1}B|B}} & \circlearrowleft & \Big\downarrow{\scriptstyle b(w,P') \circ J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot)} \\ \mathrm{ind}_{P_{J,w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho) & \xrightarrow{T_{\rho_M} \circ I_{U'}} & I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right). \end{array}$$

在这里，我们通过 (6.4) 将 $b(w, P')$ 视为 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}^{M(F)}{}_{M^1}(\sigma_1)\right)\right)^\times$ 的一个元素。

证明。我们通过 (6.3) 和 T_{ρ_M} 将 $\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 与 $\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)$ 以及 $\mathrm{End}_{M(F)}\left(\mathrm{ind}_{K_M}^{M(F)}(\rho_M)\right)$ 识别。根据方程（10.6）、命题 4.7、推论 10.18 和引理 7.5，对于任意 $\theta_m \in \mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$，我们有

$$\begin{aligned}
&T_{\rho_M}\circ I_{U'}\circ\theta_{w^{-1}B|B}\circ(T_{\rho_M}\circ I_U)^{-1}\circ J_{P'|P}(\sigma\otimes\cdot)^{-1}\circ I_{P'}^G(\theta_m)\\
&=T_{\rho_M}\circ I_{U'}\circ\theta_{w^{-1}B|B}\circ(T_{\rho_M}\circ I_U)^{-1}\circ I_P^G(\theta_m)\circ J_{P'|P}(\sigma\otimes\cdot)^{-1}\\
&=T_{\rho_M}\circ I_{U'}\circ\theta_{w^{-1}B|B}\circ t_{P,B}(\theta_m)\circ(T_{\rho_M}\circ I_U)^{-1}\circ J_{P'|P}(\sigma\otimes\cdot)^{-1}\\
&=c(w,\theta_m)\cdot T_{\rho_M}\circ I_{U'}\circ t_{P,w^{-1}B}(\theta_m)\circ\theta_{w^{-1}B|B}\circ(T_{\rho_M}\circ I_U)^{-1}\circ J_{P'|P}(\sigma\otimes\cdot)^{-1}\\
&=c(w,\theta_m)\cdot T_{\rho_M}\circ I_{U'}\circ t_{P',w^{-1}B}(\theta_m)\circ\theta_{w^{-1}B|B}\circ(T_{\rho_M}\circ I_U)^{-1}\circ J_{P'|P}(\sigma\otimes\cdot)^{-1}\\
&=c(w,\theta_m)\cdot I_{P'}^G(\theta_m)\circ T_{\rho_M}\circ I_{U'}\circ\theta_{w^{-1}B|B}\circ(T_{\rho_M}\circ I_U)^{-1}\circ J_{P'|P}(\sigma\otimes\cdot)^{-1}.
\end{aligned}$$

因此，该元素

$$T_{\rho_M}\circ I_{U'}\circ\theta_{w^{-1}B|B}\circ(T_{\rho_M}\circ I_U)^{-1}\circ J_{P'|P}(\sigma\otimes\cdot)^{-1}\in\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)^\times$$

与任意元素 $\theta_m\in\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 仅相差一个常数便可交换。根据 [Sol22, 定理 10.6 (a)], ,

$$\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)\otimes_{\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]}\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)$$

与任意元素 $\theta_m\in\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]$ 仅相差一个常数便可交换的元素，属于 $\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&T_{\rho_M}\circ I_{U'}\circ\theta_{w^{-1}B|B}\circ(T_{\rho_M}\circ I_U)^{-1}\circ J_{P'|P}(\sigma\otimes\cdot)^{-1}\\
&\qquad\in\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)^\times\cap\mathbb{C}(M_\sigma/M^1)=\mathbb{C}[M_\sigma/M^1]^\times.
\end{aligned}$$

□

我们对映射 $J_{P'|P}(\sigma\otimes\cdot)$ 使用相同的符号

$$\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)\to\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)$$

该映射由同构诱导

$$J_{P'|P}(\sigma\otimes\cdot)\colon I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\to I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right).$$

推论 10.20。我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_{J,B}}^{G(F)}(\rho)\right) & \xrightarrow{T_{\rho_M}\circ I_U} & \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)\\
\downarrow{\scriptstyle \theta_{w^{-1}B|B}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}\left(b(w,P')\right)\circ J_{P'|P}(\sigma\otimes\cdot)}\\
\mathrm{End}_{G(F)}\left(\mathrm{ind}_{P_{J,w^{-1}B}}^{G(F)}(\rho)\right) & \xrightarrow{T_{\rho_M}\circ I_{U'}} & \mathrm{End}_{G(F)}\left(I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right),
\end{array}$$

其中，$\mathrm{Ad}\left(b(w,P')\right)$ 表示 $b(w,P')$ 在 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_{P'}^G\left(\mathrm{ind}^{M(F)}{}_{M^1}(\sigma_1)\right)\right)$ 上的共轭作用

.

现在，我们去掉定理 10.5 中关于 $a\in B$ 和 M_α 相对于P 是标准 Levi 子群的条件：

定理 10.21。设

$$s=s_\alpha\in W_0(R^{\mathrm{Mor}})=W_0(R^{\mathrm{Sol}})$$

是与元素 $\alpha\in\in\Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$ 相关联的简单反射。那么，我们有

$$\left(T_{\rho_M}\circ I_U\right)(\Phi_s)=\begin{cases}q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')}-1-T_s' & (\epsilon_\alpha=0),\\ -q_F^{\left(-\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')+(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2}\cdot\theta_{-(\alpha')^\vee}T_s' & (\epsilon_\alpha=1).\end{cases}$$

证明。由于 $a \in w^{-1}B$，且 M_α 相对于 P' 是标准的，定理 10.5 表明

$$(T_{\rho_M} \circ I_{U'})(\Phi_{s,w^{-1}B}) = \begin{cases} q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')} - 1 - T'_{s,P'} & (\epsilon_\alpha = 0), \\ -q_F^{\left(-\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \cdot \theta_{-(\alpha')^\vee} T'_{s,P'} & (\epsilon_\alpha = 1). \end{cases} \tag{10.22}$$

Acc根据推论 10.20、推论 10.17、方程（10.22）、方程（10.6）和引理 10。 8, we have

$$\begin{aligned}
(T_{\rho_M} \circ I_U)(\Phi_{s,B}) &= \left(\left(\mathrm{Ad}\left(b(w,P')\right) \circ J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot)\right)^{-1} \circ T_{\rho_M} \circ I_{U'} \circ \theta_{w^{-1}B|B} \right)(\Phi_{s,B}) \\
&= \left(\left(\mathrm{Ad}\left(b(w,P')\right) \circ J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot)\right)^{-1} \circ T_{\rho_M} \circ I_{U'} \right)(\Phi_{s,w^{-1}B}) \\
&= \begin{cases} \left(\mathrm{Ad}\left(b(w,P')\right) \circ J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot)\right)^{-1} \left(q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')} - 1 - T'_{s,P'} \right) & (\epsilon_\alpha = 0), \\ \left(\mathrm{Ad}\left(b(w,P')\right) \circ J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot)\right)^{-1} \left(-q_F^{\left(-\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \cdot \theta_{-(\alpha')^\vee} T'_{s,P'} \right) & (\epsilon_\alpha = 1) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \circ \mathrm{Ad}\left(b(w,P')\right)\right)^{-1} \left(q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')} - 1 - T'_{s,P'} \right) & (\epsilon_\alpha = 0), \\ \left(J_{P'|P}(\sigma \otimes \cdot) \circ \mathrm{Ad}\left(b(w,P')\right)\right)^{-1} \left(-q_F^{\left(-\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \cdot \theta_{-(\alpha')^\vee} T'_{s,P'} \right) & (\epsilon_\alpha = 1) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathrm{Ad}\left(b(w,P')\right)^{-1} \left(q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')} - 1 - T'_{s,P} \right) & (\epsilon_\alpha = 0), \\ \mathrm{Ad}\left(b(w,P')\right)^{-1} \left(-q_F^{\left(-\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \cdot \theta_{-(\alpha')^\vee} T'_{s,P} \right) & (\epsilon_\alpha = 1). \end{cases}
\end{aligned}$$

在最后两项中，我们将 $b(w,P')$ 视为 $\mathrm{End}_{G(F)}\left(I_P^G\left(\mathrm{ind}_{M^1}^{M(F)}(\sigma_1)\right)\right)^\times$ 的一个元素。由于$b(w,P') \in \mathbb{C}[M_\sigma/M^1]^\times$，且 M_σ/M^1 是有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模，我们可以写成

$$b(w,P')^{-1} = c \cdot \theta_m$$

对于某些 $c \in \mathbb{C}^\times$ 和 $m \in M_\sigma/M^1$。于是，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}\left(b(w,P')\right)^{-1}\left(T'_{s,P}\right) &= \theta_m \cdot T'_{s,P} \cdot \theta_{-m} \\
&= \theta_m \left(\theta_{-s(m)} T'_{s,P} - \left(\theta_{-s(m)} T'_{s,P} - T'_{s,P} \theta_{-m} \right) \right) \\
&= \theta_{m-s(m)} T'_{s,P} - \theta_m \left(\theta_{-s(m)} T'_{s,P} - T'_{s,P} \theta_{-m} \right) \\
&\in \theta_{m-s(m)} T'_{s,P} + \mathbb{C}[M_\sigma/M^1].
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$(T_{\rho_M} \circ I_U)(\Phi_{s,B}) \in \begin{cases} q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')} - 1 - \theta_{m-s(m)} T'_{s,P} + \mathbb{C}[M_\sigma/M^1] & (\epsilon_\alpha = 0), \\ -q_F^{\left(-\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \cdot \theta_{-(\alpha')^\vee} \theta_{m-s(m)} T'_{s,P} + \mathbb{C}[M_\sigma/M^1] & (\epsilon_\alpha = 1). \end{cases}$$

注意，当 $\epsilon_\alpha = 1$ 时，我们有 $(\alpha')^\vee = h_\alpha^\vee$ （见第9节最后一段）。于是，根据引理 8.4，我们得到 $\theta_{m-s(m)} \in \mathbb{C}^\times$，因此 $m = s(m)$。所以，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}\left(b(w,P')\right)^{-1}\left(T'_{s,P}\right) &= \theta_{m-s(m)} T'_{s,P} - \theta_m \left(\theta_{-s(m)} T'_{s,P} - T'_{s,P} \theta_{-m} \right) \\
&= T'_{s,P},
\end{aligned}$$

and

$$(T_{\rho_M} \circ I_U)(\Phi_s) = \begin{cases} q_F^{\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha')} - 1 - T'_s & (\epsilon_\alpha = 0), \\ -q_F^{\left(-\lambda^{\mathrm{Sol}}(\alpha') + (\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}(\alpha')\right)/2} \cdot \theta_{-(\alpha')^\vee} T'_s & (\epsilon_\alpha = 1). \end{cases}$$

□

Appendix A. Subsets of a set of simple affine roots

设 E 是一个有限维实欧几里得空间。令 V 表示其平移向量空间，令 A' 表示 E 上仿射线性函数的向量空间。设 $\Phi_{\mathrm{aff}} \subset A'$ 是一个仿射根

系，参见 E [Mac72，第 2] 节。我们固定 Φ_{aff} 的一个室 C，并令 B 表示 Φ_{aff} 的相应基。对于一个仿射根 a，令 Da 表示其梯度，也就是说，

$$Da\colon V \to \mathbb{R}$$

是一个线性函数，使得

$$a(x+v) = a(x) + (Da)(v)$$

对所有 $x \in E$ 和 $v \in V$ 均成立。对于子集 $\Psi \subset \Phi_{\mathrm{aff}}$，我们记作

$$D\Psi = \{Da \mid a \in \Psi\}.$$

我们定义

$$H_a = \{x \in E \mid a(x) = 0\}$$

and

$$H_a^+ = \{x \in E \mid a(x) > 0\}.$$

对于下文中的其他仿射根系，我们也使用与上述类似的记号。

设 $J \subset B$，使得 DJ 线性无关。我们将 V 的一个子空间 V^J 定义为

$$V^J = \{v \in V \mid \alpha(v) = 0 \ (\alpha \in DJ)\}.$$

记作

$$E_J = E/V^J,$$

这是一个平移向量空间为 V/V^J 的仿射空间。由于 DJ 线性无关，因此我们有

$$\dim(E_J) = |DJ|.$$

令 $(V^J)^\perp$ 表示 V 中 V^J 的正交补。那么，自然投影 $V \to V/V^J$ 限制为一个同构

$$(V^J)^\perp \to V/V^J. \tag{A.1}$$

我们将 $(V^J)^\perp$ 上的内积定义为 V 上内积的限制。我们还通过 (A.1) 将 $(V_J)^\perp$ 上的内积传递到 V/V^J 上，从而定义 V/V^J 上的内积。于是，E_J 是一个实欧几里得空间。令 $\mathbb{R}\cdot(DJ)$ 表示 V^* 中 DJ 的 $\mathbb{R}$-张成空间。我们定义

$$(\Phi_{\mathrm{aff}})_J = \{a \in \Phi_{\mathrm{aff}} \mid Da \in \mathbb{R}\cdot(DJ)\}.$$

于是，$(\Phi_{\mathrm{aff}})_J$ 是 E_J 上的仿射根系。

引理 A.1. 存在 $(\Phi_{\mathrm{aff}})_J$ 的一个基 B_J，使得 $J \subset B_J$。

证明。只需证明，对于任意 $a \in J$，存在一个 C_J of E_J 的室，使得 H_a 是 C_J 的一面墙。令

$$E^J = \{x \in E \mid a(x) = 0 \ (a \in J)\}.$$

断言 A.2。设 $a \in \Phi_{\mathrm{aff}}$ 是一个仿射根，且对于任意 $x \in E^J$，$a(x) = 0$。那么，我们可以写成

$$a = \sum_{b_i \in J} c_i b_i$$

其中 c_i 是有理整数系数，且这些系数全都非负或全都非正。

证明。由于 B 是根系 R 的基，我们可以写成

$$a = \sum_{b_i \in B} c_i b_i$$

具有有理整数系数 c_i，这些系数全都非负或全都非正。我们将证明，$c_i = 0$ 除非 $b_i \in J$。假设对于某个 $b_i \in B\backslash J$，有 $c_i \neq 0$。由于 B 是与室 C 对应的 Φ_{aff} 的一个基，因此存在 C 的一个顶点 x_i，使得

$$b_i(x_i) > 0$$

and

$$b_j(x_i) = 0$$

对于任意 $j \neq i$。由于 $b_i \notin J$，第二个方程推出 $x_i \in E^J$，因此 $a(x_i) = 0$。然而，我们可以计算如下:

$$a(x_i) = \sum_{b_j \in B} c_j b_j(x_i) = c_i b_i(x_i) \neq 0,$$

这就产生了矛盾。 □

令 E_J^J 表示 E^J 在 E_J 上的像，即

$$E_J^J = \{x \in E_J \mid a(x) = 0 \ (a \in J)\}.$$

由于 DJ 线性无关，且 $|DJ|$ 等于 E_J 的维数，因此 E_J^J 是单点集。记作

$$E_J^J = \{x_J\}.$$

我们还记作

$$E_J^+ = \{x \in E_J \mid a(x) > 0 \ (a \in J)\}.$$

我们在 E_J 中取一个开球 U，其中心为 x_J，使得

$$U \cap H_a = \emptyset$$

对于满足 $a(x_J) \neq 0$ 的任意 $a \in (\Phi_{\mathrm{aff}})_J$。由于 $x_J \in \overline{E_J^+}$，我们可以取一个元素 $y \in U \cap E_J^+$。由于 $y \in U$，对于满足 $a(x_J) \neq 0$ 的任意 $a \in (\Phi_{\mathrm{aff}})_J$，$a(y) \neq 0$。另一方面，我们可以如下证明，对于满足 $a(x_J) = 0$ 的任意 $a \in (\Phi_{\mathrm{aff}})_J$，$a(y) \neq 0$。设 $a \in (\Phi_{\mathrm{aff}})_J \subset \Phi_{\mathrm{aff}}$ 是一个满足 $a(x_J) = 0$ 的仿射根。作为 E 上的仿射函数，对于任意 $x \in E^J$，$a(x) = 0$。于是，断言 A.2 表明我们可以写成

$$a = \sum_{b_i \in J} c_i b_i$$

其有理整数系数 c_i 全都非负或全都非正。由于 $y \in E_J^+$，

$$b_i(y) > 0$$

对于任意 $b_i \in J$。因此,

$$a(y) = \sum_{b_i \in J} c_i b_i(y) \begin{cases} > 0 & (c_i \geq 0 \text{ for all } i), \\ < 0 & (c_i \leq 0 \text{ for all } i). \end{cases}$$

这里注意到，至少有一个 c_i 非零，因为 a 是一个仿射根。因此，我们得出，对于任意 $a \in (\Phi_{\mathrm{aff}})_J$，$a(y) \neq 0$，故 y属于 $(\Phi_{\mathrm{aff}})_J$的一个室 C_J。由于 C_J是 $(\Phi_{\mathrm{aff}})_J$ 中包含 y的一个室，且 $y \in E_J^+$, C_J 包含于 E_J^+。另一方面，由于 $U \cap E_J^+$ 是一个凸子集

$$E_J \backslash \bigcup_{a \in (\Phi_{\mathrm{aff}})_J} H_a$$

包含 y, $U \cap E_J^+$ 包含于 C_J。

我们将证明，对于任意 $a \in J$，H_a 是 C_J 的一面墙。令 $a \in J$。只需证明存在 $z \in H_a$ 以及 E_J 中的 z 的一个开邻域 W，使得

$$W \cap C_J = W \cap H_a^+.$$

我们记

$$H_{J,a}^+ = \{x \in E_J \mid a(x) = 0, \ b(x) > 0 \ (b \in J \backslash \{a\})\}.$$

由于 $x_J \in \overline{H_{J,\,a}^+}$，我们可以取一个元素 $z \in U \cap H_{J,\,a}^+$。我们取E_J 中 z 的一个开邻域 W，使得

$$W = U \cap \left(\bigcap_{b \in J \backslash \{a\}} H_b^+ \right).$$

那么,

$$W \cap E_J^+ = W \cap H_a^+.$$

由于

$$U \cap E_J^+ \subset C_J \subset E_J^+,$$

我们得出结论

$$W \cap C_J = W \cap U \cap C_J = W \cap U \cap E_J^+ = W \cap E_J^+ = W \cap H_a^+.$$

□

我们将证明引理 A.1 的一个“逆命题”。设 $J' \subset \Phi_{\text{aff}}$，使得 DJ' 线性无关。在这里，我们不假设 J' 是 Φ_{aff}的一组基的子集。我们按上述方式定义 $V^{J'}$、$E_{J'}$和 $(\Phi_{\text{aff}})_{J'}$。

引理 A.3. 假设存在一个包含 J' 的 $\Phi_{\text{aff}J'}$ 的基 $B_{J'}$。那么，存在一个包含 J'的 Φ_{aff} 的基 B'。

证明. 我们将证明，存在一个 Φ_{aff} 的室 C'，使得对于任意$b \in J'$， H_b 都是 C' 的一面墙。我们写作

$$E^{J'} = \{x \in E \mid b(x) = 0 \ (b \in J')\}.$$

断言 A.4. 设 $a \in \Phi_{\text{aff}}$ 是一个仿射根，满足对于任意 $x \in E^{J'}$， $a(x) = 0$。那么，我们可以写成

$$a = \sum_{b_i \in J'} c_i b_i$$

其中 c_i 的系数均为有理整数，且全都非负或全都非正。

证明. 由于 $E^{J'}$ 在平移 $V^{J'}$ 下保持不变， Da 在 $V^{J'}$ 上消失。因此，我们得到$Da \in \mathbb{R} \cdot (DJ')$，等价地，有 $a \in (\Phi_{\text{aff}})_{J'}$。由于 $B_{J'}$ 是 $(\Phi_{\text{aff}})_{J'}$ 的一组基，我们可以写成

$$a = \sum_{b_i \in B_{J'}} c_i b_i$$

其系数为有理整数 c_i，且全为非负或非正。我们将证明，除非 $b_i \in J'$，否则$c_i = 0$。设对某个 $b_i \in B_{J'} \backslash J'$有 $c_i \neq 0$。我们取室中与基 $B_{J'}$ 对应的一个顶点 x_i $E_{J'}$，使得

$$b_i(x_i) > 0$$

and

$$b_j(x_i) = 0$$

对任意 $j \neq i$都成立。我们将 x_i 与其在 E中的提升相对应。由于 $b_i \notin B_{J'}$，第二个方程推出$x_i \in E^{J'}$，因此 a（x_i）$= 0$。然而，我们可以计算如下：

$$a(x_i) = \sum_{b_j \in B_{J'}} c_j b_j(x_i) = c_i b_i(x_i) \neq 0,$$

矛盾。 □

我们还记

$$E^{J',+} = \{x \in E \mid b(x) > 0 \ (b \in J')\}.$$

设 $x_{J'} \in E^{J'}$ 为满足以下条件的点：

$$a(x_{J'}) \neq 0$$

对任意满足 $a \in \Phi_{\text{aff}}$ 的

$$E^{J'} \not\subset H_a.$$

我们取一个以 $x_{J'}$ 为中心的 E 中的开球 U，使得

$$U \cap H_a = \emptyset$$

对于任意满足以下条件的
$a \in \Phi_{\text{aff}}$

$$E^{J'} \not\subset H_a.$$

由于 $x_{J'} \in \overline{E^{J',\,+}}$，我们可以取一个元素 $y \in U \cap E^{J',\,+}$。由于 $y \in U$，对于任意满足以下条件的 $a(y) \neq 0$

$$E^{J'} \not\subset H_a.$$

此外，我们可以证明，对于任意满足以下条件的 $a \in \Phi_{\text{aff}}$， $a(y) \neq 0$

$$E^{J'} \subset H_a$$

如下。设 $a \in \Phi_{\text{aff}}$ 是一个仿射根，使得对于任意 $x \in E^{J'}$， $a(x) = 0$。那么，断言 A.4 表明我们可以写成

$$a = \sum_{b_i \in J'} c_i b_i$$

其中有理整数系数 c_i 均为非负或非正。由于 $y \in E^{J'}$, $^+$,

$$b_i(y) > 0$$

对于任意 $b_i \in J'$。因此,

$$a(y) = \sum_{b_i \in J'} c_i b_i(y) \begin{cases} > 0 & (c_i \geq 0 \text{ for all } i), \\ < 0 & (c_i \leq 0 \text{ for all } i). \end{cases}$$

Here，我们注意到至少有一个 c_i 非零，因为 a 是一个仿射根。因此，我们得出结论 t $a(y) \neq 0$对于任意 $a \in \Phi_{\mathrm{aff}}$，因此 y 包含于 Φ_{aff} 的一个室 C' 中。

然后，与引理 A.1 的证明相同的论证表明，对于任意$b \in J'$， H_b 是 C' 的一面墙。□

推论 A.5。设 $J \subset B$ 使得 DJ 线性无关，并设 Φ'_{aff} 是 Φ_{aff} 的一个包含 $(\Phi_{\mathrm{aff}})_J$ 的子系统。那么，存在一个包含 J 的 Φ'_{aff} 的基。

证明。根据引理 A.1，存在一个包含 J 的 $(\Phi_{\mathrm{aff}})_J$ 的基 B_J。另一方面，将 Φ_{aff} 替换为 Φ'_{aff}，并在引理 A.3 中取 $J' = J$，可得存在一个包含 J 的 Φ'_{aff} 的基。□

Appendix B. Iwahori-Hecke algebras and affine Hecke algebras

本附录遵循 [Sol21a]，说明 Iwahori-Hecke 代数和仿射赫克代数的定义。

首先，我们回顾仿射型 Iwahori-Hecke 代数的定义，参见 [Sol21a，第 1 节。2]。设E 为有限维实欧几里得空间， V 表示其平移向量空间。设 A' 表示 E上的仿射线性函数向量空间。设 $\Phi_{\mathrm{aff}} \subset A'$ 为 E上的仿射根系。为简单起见，我们假设 Φ_{aff} 不可约且约化。我们使用与附录 A 相同的记号。对于 $a \in \Phi_{\mathrm{aff}}$，设 s_a 表示 E上的相应反射，并令$W_{\mathrm{aff}} = W_{\mathrm{aff}}(\Phi_{\mathrm{aff}})$表示 Φ_{aff}的仿射魏尔群。因此， W_{aff}由 $s_a(a \in \Phi_{\mathrm{aff}})$生成。群 W_{aff} 还作用于 A' 上，作用方式如下:

$$(w(f))(x) = f(w^{-1}(x))$$

对于 $w \in W_{\mathrm{aff}}$、 $f \in A'$和 $x \in E$，且该作用稳定 Φ_{aff}。我们将元素 $w \in W_{\mathrm{aff}}$ 的导数 Dw 定义为线性映射

$$Dw \colon V \to V$$

使得

$$w(x + v) = w(x) + (Dw)(v)$$

对于所有 $x \in E$ 和 $v \in V$。根据 [Mac72，(1.5)]，对于 $a \in \Phi_{\mathrm{aff}}$，我们有

$$Ds_a = s_{Da},$$

其中 s_{Da} 表示关于 Da 的 V 上的反射。

我们固定 Φ_{aff} 的一个室 C，并令 B 表示 Φ_{aff} 的相应基。我们将 W_{aff} 的子集 $S_{\mathrm{aff}} = S(\Phi_{\mathrm{aff}}, B)$ 定义为

$$S_{\mathrm{aff}} = \{s_b \mid b \in B\}.$$

那么，$(W_{\mathrm{aff}}, S_{\mathrm{aff}})$ 是一个仿射型 Coxeter 系统。令 l 表示相对于 S_{aff} 的 W_{aff} 上的长度函数。

Let

$$q \colon S_{\mathrm{aff}} \to \mathbb{C}$$

是一个满足 $s \mapsto q_s$ 的函数

(B.1) $$q_{s_1} = q_{s_2} \text{ if } s_1, s_2 \in S_{\mathrm{aff}} \text{ are conjugate in } W_{\mathrm{aff}}.$$

对于具有约化表达式 $w \in W_{\mathrm{aff}}$ 的

$$w = s_1 s_2 \cdots s_r \ (s_i \in S_{\mathrm{aff}}),$$

我们定义

$$q_w = q_{s_1} q_{s_2} \cdots q_{s_r}.$$

条件 (B.1) 意味着 q_w 是良定义的。

与 Coxeter 系统 $(W_{\mathrm{aff}}, S_{\mathrm{aff}})$ 及参数函数 q 相关联的 Iwahori-Hecke代数 $\mathcal{H}(W_{\mathrm{aff}}, q)$ 是唯一的 $\mathbb{C}$-代数，其生成元为

$$\{T_s \mid s \in S_{\mathrm{aff}}\}$$

以及关系：

二次关系：对于所有 $s \in S_{\mathrm{aff}}$，我们有

$$(T_s + 1)(T_s - q_s) = 0.$$

辫关系：对于所有满足 st 在 W_{aff} 中的阶为 $m < \infty$ 的 s、$t \in S_{\mathrm{aff}}$，我们有

$$\underbrace{T_s T_t T_s \cdots}_{m\,\text{terms}} = \underbrace{T_t T_s T_t \cdots}_{m\,\text{terms}}.$$

对于具有约化表达式的 $w \in W_{\mathrm{aff}}$

$$w = s_1 s_2 \cdots s_r \ (s_i \in S_{\mathrm{aff}}),$$

我们定义

$$T_w = T_{s_1} T_{s_2} \cdots T_{s_r}.$$

上面的关系 (B) 表明 T_w 是良定义的。此外，集合

$$\{T_w \mid w \in W_{\mathrm{aff}}\}$$

是 $\mathcal{H}(W_{\mathrm{aff}}, q)$ 的一组向量空间基。

接下来，我们回顾仿射 Hecke 代数的定义 [Sol21a，第 1 节3]。设

$$\mathcal{R} = (X, R, Y, R^\vee, \Delta)$$

为带基根数据，也就是说，

- X 和 Y 是有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模，并带有一个完美配对
$$\langle , \rangle \colon X \times Y \to \mathbb{Z},$$
- R 是 X 中的约化根系，
- $R^\vee$ 是 Y中的 R 的对偶根系，并存在一个双射
$$R \to R^\vee, \ \alpha \mapsto \alpha^\vee$$
使得
$$\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2,$$
- Δ 是 R的基。

对于 $\alpha \in R$，令

$$s_\alpha \colon Y \to Y$$

表示反射

$$y \mapsto y - \langle \alpha, y \rangle \alpha^\vee,$$

它稳定 $R^\vee$。令 $W_0 = W_0(R)$表示 R的魏尔群，即由 s_α $(\alpha \in R)$生成。

群 W_0 也作用于 X，其作用为

$$\langle w(x), y \rangle = \langle x, w^{-1} y \rangle$$

对于 $w \in W_0$、$x \in X$和 $y \in Y$，该作用保持 R不变。对于 $\alpha \in R$ 和 $x \in X$，我们有 e

$$s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha.$$

基 Δ 确定了一组简单反射 ons

$$S_0 = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$$

在 W_0中。于是，(W_0, S_0)是一个有限 Coxeter 系统。我们固定一个实数 q > 1，并令

$$\lambda, \lambda^* \colon \Delta \to \mathbb{C}$$

是满足以下条件的函数

(B.2) if $\alpha, \beta \in \Delta$ are W_0-associate, $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$, and $\lambda^*(\alpha) = \lambda^*(\beta)$,

and

(B.3) if $\alpha \notin 2X$, $\lambda(\alpha) = \lambda^*(\alpha)$.

对于 $\alpha \in \Delta$，我们定义

$$q_{s_\alpha} = \mathbf{q}^{\lambda(\alpha)}.$$

那么，这个参数函数满足：

$$q_{s_1} = q_{s_2} \text{ if } s_1, s_2 \in S_0 \text{ are conjugate in } W_0.$$

我们可以像仿射情形一样，定义与有限 Coxeter 系统 (W_0, S_0) 及参数函数 q 相关的 Iwahori-Hecke 代数 $\mathcal{H}(W_0, q)$。

定义 B.1（[Sol21a，定义 1.6]）。与$\mathcal{R}, \lambda, \lambda^*, \mathbf{q}$ 相关的仿射赫克代数 $\mathcal{H}(\mathcal{R}, \lambda, \lambda^*, \mathbf{q})$ 是如下向量空间

$$\mathbb{C}[Y] \otimes \mathcal{H}(W_0, q)$$

其乘法规则如下：

(1) $\mathbb{C}[Y]$ 和 $\mathcal{H}(W_0, q)$ 嵌入为子代数；(2) 对于 $\alpha \in \Delta$ 和 $y \in Y$，

$$\theta_y T_{s_\alpha} - T_{s_\alpha} \theta_{s_\alpha(y)} = \left((\mathbf{q}^{\lambda(\alpha)} - 1) + \theta_{-\alpha^\vee} (\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)+\lambda^*(\alpha))/2} - \mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)-\lambda^*(\alpha))/2}) \right) \frac{\theta_y - \theta_{s_\alpha(y)}}{\theta_0 - \theta_{-2\alpha^\vee}}.$$

注 B.2. 上文对仿射赫克代数 $\mathcal{H}(\mathcal{R}, \lambda, \lambda^*, \mathbf{q})$ 的定义不同于 [Sol21a, 定义 1.6]。我们定义的 $\mathcal{H}(\mathcal{R}, \lambda, \lambda^*, \mathbf{q})$ 表示 [Sol21a, 定义 1.6] 中与对偶根数据相关联的仿射赫克代数

$$\mathcal{R}^\vee = (Y, R^\vee, X, R, \Delta^\vee),$$

其中 $\Delta^\vee$ 表示对偶基

$$\Delta^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$$

的对偶基。

在本附录的最后，我们将说明仿射型 Iwahori-Hecke代数的 Bernstein 表示。设 Φ_{aff} 是实欧几里得空间 E 上的一个不可约约化仿射根系，且该空间维数有限。我们采用与本附录第一部分相同的记号。我们在那里定义了与仿射 Coxeter 系统 $(W_{\mathrm{aff}}, S_{\mathrm{aff}})$ 及参数函数 q 相关联的 Iwahori-Hecke代数 $\mathcal{H}(W_{\mathrm{aff}}, q)$。我们将把 $\mathcal{H}(W_{\mathrm{aff}}, q)$ 描述为一个仿射赫克代数。从现在起，假设参数函数 q 取值于 $\mathbb{R}_{>0}$。

根据 [Mac72, 命题 6.1.(1)], $D\Phi_{\mathrm{aff}}$ 是 V^*中的有限根系。令 $(D\Phi_{\mathrm{aff}})^\vee$表示 V中 $D\Phi_{\mathrm{aff}}$ 的对偶根系，并令 $W_0 = W_0(D\Phi_{\mathrm{aff}})$ 表示$D\Phi_{\mathrm{aff}}$的魏尔群。于是， [Mac72, 命题 6.1.(3)] 推出映射

$$D\colon w \mapsto Dw$$

定义了一个同态

$$D\colon W_{\mathrm{aff}} \to W_0,$$

且 D 的核是 W_{aff}中由平移构成的子群 T。

设 e 是 Φ_{aff} 中的一个特殊点，按 [Mac72 第 6] 节的定义，且属于室 C的闭包。令 $(\Phi_{\mathrm{aff}})_e$ 表示 Φ_{aff} 中在 e处取值为零的仿射根集合，并令 $(W_{\mathrm{aff}})_e$表示 W_{aff}中 e的稳定子。我们还定义

$$B_e = (\Phi_{\mathrm{aff}})_e \cap B.$$

注意到

$$B_e = B \backslash \{b\},$$

其中 $b = b_e$ 是 B 中满足下式的唯一元素

$$b(e) > 0$$

（参见 [Mac72，第 4] 节）。根据 [Mac72，命题 5.1], $(\Phi_{\mathrm{aff}})_e$ 是一个有限根系，其基为 B_e，而 $(W_{\mathrm{aff}})_e$是 $(\Phi_{\mathrm{aff}})_e$ 的魏尔群。根据 [Mac72，命题 6.4],$D(\Phi_{\mathrm{aff}})_e$ 是 $D\Phi_{\mathrm{aff}}$ 的不可约根集合，并且我们有一个根系同构

$$D\colon (\Phi_{\mathrm{aff}})_e \to D(\Phi_{\mathrm{aff}})_e.$$

此外， [Mac72，命题6.2（2）] 表明该同态

$$D\colon W_{\mathrm{aff}} \to W_0$$

限制为一个同构

$$D\colon (W_{\mathrm{aff}})_e \to W_0.$$

因此，我们得到

$$W_{\mathrm{aff}} = T \rtimes (W_{\mathrm{aff}})_e. \tag{B.4}$$

F或 $a \in (\Phi_{\mathrm{aff}})_e$，令 k_a表示满足 $a+k_a \in \Phi_{\mathrm{aff}}$ 的最小正实数。根据 g to [Mor93, 1.9], 存在这样的 k_a ，并且我们有

$$\{l \in \mathbb{R} \mid a + l \in \Phi_{\mathrm{aff}}\} = \{k_a n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

我们定义

$$R = \{Da/k_a \mid a \in (\Phi_{\mathrm{aff}})_e\}.$$

由 [Bou68, Chapter VI, Section 2.5, Proposition 8] 的证明可知， R 是 V^* 中的约化根系。由于 R 的每个元素都是 $D\Phi_{\mathrm{aff}}$ 中某个根的标量倍数，并且 $D(\Phi_{\mathrm{aff}})_e$ 包含 $D\Phi_{\mathrm{aff}}$ 的一组基，因此根系 R 的魏尔群等于 W_0。我们将 R 在 V 中的对偶根系 $R^\vee$ 定义为

$$R^\vee = \{k_a(Da)^\vee \mid a \in (\Phi_{\mathrm{aff}})_e\},$$

其中，$(Da)^\vee$表示与根系 R $D\Phi_{\mathrm{aff}}$中的根 $Da \in D\Phi_{\mathrm{aff}}$相对应的余根。令 $\mathbb{Z}R^\vee$表示 V中由 $R^\vee$ 张成的 $\mathbb{Z}$。我们将证明 $T = \mathbb{Z}R^\vee$。对于 $a \in (\Phi_{\mathrm{aff}})_e$， $a + k_a$ 也包含在 Φ_{aff}中，因此我们有

$$k_a(Da)^\vee = s_a \circ s_{a+k_a} \in W_{\mathrm{aff}},$$

其中， $k_a(Da)^\vee$ 表示平移 $k_a(Da)^\vee \subset V$。因此，我们得到 $R^\vee \subset T$。此外， [Bou68，第六章第 2.5 节命题 8] 的最后一项断言蕴含

$$W_{\mathrm{aff}} = \mathbb{Z}R^\vee \rtimes (W_{\mathrm{aff}})_e.$$

将其与 (B.4) 比较，可得 $T = \mathbb{Z}R^\vee$。

对于 $\alpha \in R$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，我们在 V 上定义反射 $s_{\alpha+k}$ 如下

$$s_{\alpha+k}(x) = x - \alpha(x)\alpha^\vee - k\alpha^\vee$$

对于 $x \in V$。这里， $\alpha^\vee \in R^\vee$ 表示与 $\alpha \in R$相对应的余根。我们将 R 的仿射魏尔群 $W_{\mathrm{aff}}(R)$定义为由 $s_{\alpha+k}$ 生成的、作用于 V上的仿射变换群，其中 $\alpha \in R$ 且$k \in \mathbb{Z}$ [Bou68，第六章第 2.1 节，定´义 1]。群 $W_{\mathrm{aff}}(R)$也作用于 V上的仿射线性函数空间$A'(V)$，作用方式如下

$$(w(f))(v) = f(w^{-1}(v))$$

对于 $w \in W_{\mathrm{aff}}(R)$、 $f \in A'(V)$ 和 $v \in V$。根据 [Bou68 第六章第 2.1 节命题 1], ，我们得到

$$W_{\mathrm{aff}}(R) = \mathbb{Z}R^\vee \rtimes W_0.$$

作为仿射空间，我们有一个同构

$$E \simeq V \tag{B.5}$$

定义为

$$e + v \mapsto v.$$

We i通过 (B.5)，将 E 上的仿射变换与 V 上的仿射变换相对应。于是，w e obta在同构中

$$W_{\mathrm{aff}} \simeq W_{\mathrm{aff}}(R). \tag{B.6}$$

更明确地说，同构 (B.6) 描述如下

$$W_{\mathrm{aff}} = \mathbb{Z}R^\vee \rtimes (W_{\mathrm{aff}})_e \xrightarrow{(\mathrm{id},D)} \mathbb{Z}R^\vee \rtimes W_0 = W_{\mathrm{aff}}(R).$$

我们通过同构 (B.6) 将 W_{aff} 与 $W_{\mathrm{aff}}(R)$ 识别。特别地，我们将 W_0 视为 W_{aff}的子群。我们通过同构 (B.6) 描述简单反射 $s \in S_{\mathrm{aff}}$ 的像。对于 $a \in B_e$，简单反射 $s_a \in S_{\mathrm{aff}}$ 对应于反射 $s_{Da/k_a} \in W_0$。另一方面，由于 s_b 是关于室 C 中不包含 e的唯一一面墙的反射，因此简单反射 s_b 对应于反射 $s_{1-\phi}$，其中 ϕ 是根系 R 相对于基

$$\Delta = \{Da/k_a \mid a \in B_e\}$$

（参见 [Mac72，例 4.7]）。

我们考虑一个带基根数据

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Phi_{\mathrm{aff}}, e) = \{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}R^\vee, \mathbb{Z}), R, \mathbb{Z}R^\vee, R^\vee, \Delta\}.$$

我们还固定一个实数 $\mathbf{q} > 1$。我们定义标签函数

$$\lambda, \lambda^* \colon \Delta \to \mathbb{C}$$

as

$$\lambda(Da/k_a) = \log(q_{s_a})/\log(\mathbf{q}),$$

and

$$\lambda^*(Da/k_a) = \begin{cases} \log(q_{s_a})/\log(\mathbf{q}) & (Da/k_a \notin 2\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}R^\vee, \mathbb{Z})), \\ \log(q_{s_b})/\log(\mathbf{q}) & (Da/k_a \in 2\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}R^\vee, \mathbb{Z})) \end{cases}$$

对于 $a \in B_e$。我们注意到，条件

$$Da/k_a \in 2\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}R^\vee, \mathbb{Z})$$

仅当 R 的类型为 A_1，或 R 的类型为 C_n $(n \geq 2)$ 且 Da/k_a 是一个长根时才成立。标签函数 λ, λ^* 满足条件（B.2）和条件（B.3）。我们定义与 $\mathcal{R}, \lambda, \lambda^*, \mathbf{q}$ 相关联的仿射赫克代数$\mathcal{H}(\mathcal{R}, \lambda, \lambda^*, \mathbf{q})$。

定理 B.3（[Sol21a，定理 1.8]）。存在唯一一个同构

$$\mathcal{H}(W_{\mathrm{aff}}, q) \to \mathcal{H}(\mathcal{R}, \lambda, \lambda^*, \mathbf{q})$$

使得:

- 在 $\mathcal{H}(W_0, q)$ 上为恒等映射,
- 对于满足 $(Da)(y)$ 的 $y \in T = \mathbb{Z}R^\vee \subset V$，对所有 $a \in B_e$，它将 T_y 映射为 $q_y^{1/2} \cdot \theta_y$。

Appendix C. An involution of an affine Hecke algebra

我们使用与附录 B 相同的记号。设 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{R}, \lambda, \lambda^*, \mathbf{q})$ 为与带基根数据相关联的仿射赫克代数

$$\mathcal{R} = (X, R, Y, R^\vee, \Delta),$$

标签函数 λ, λ^* 以及参数 $\mathbf{q}$。在本附录中，我们定义 $\mathcal{H}$ 上的一个 $\mathbb{C}$-代数自同构 ι。

我们定义

$$\iota_Y \colon \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[Y]$$

as

$$\theta_y \mapsto \theta_{-y}.$$

由于 Y 是阿贝尔的， ι_Y 是 $\mathbb{C}[Y]$的代数自同构。我们还定义

$$\iota_0 \colon \mathcal{H}(W_0, q) \to \mathcal{H}(W_0, q)$$

as

$$T_w \mapsto (-1)^{l(w)} q_w T_{w^{-1}}^{-1}.$$

二次关系

$$(T_s + 1)(T_s - q_s) = 0$$

推出

$$T_s^{-1} = \frac{T_s - (q_s - 1)}{q_s},$$

因此

$$(-1)^{l(s)} q_s T_{s^{-1}}^{-1} = q_s - 1 - T_s$$

对于 $s \in S_0$。元素 $q_s - 1 - T_s$ 满足二次关系

$$((q_s - 1 - T_s) + 1)((q_s - 1 - T_s) - q_s) = (T_s - q_s)(T_s + 1) = 0.$$

此外，对于 w_1，$w_2 \in W_0$ 满足 $l(w_1w_2) = l(w_1) + l(w_2)$，我们有 $l(w_2^{-1}w_1^{-1}) = l(w_2^{-1}) + l(w_1^{-1})$，并且

$$\begin{aligned}\left((-1)^{l(w_1)}q_{w_1}T_{w_1^{-1}}^{-1}\right)\left((-1)^{l(w_2)}q_{w_2}T_{w_2^{-1}}^{-1}\right) &= (-1)^{l(w_1)+l(w_2)}q_{w_1}q_{w_2}T_{w_1^{-1}}^{-1}T_{w_2^{-1}}^{-1}\\ &= (-1)^{l(w_1w_2)}q_{w_1w_2}(T_{w_2^{-1}}T_{w_1^{-1}})^{-1}\\ &= (-1)^{l(w_1w_2)}q_{w_1w_2}T_{w_2^{-1}w_1^{-1}}^{-1}\\ &= (-1)^{l(w_1w_2)}q_{w_1w_2}T_{(w_1w_2)^{-1}}^{-1}.\end{aligned}$$

特别地，映射 ι_0 与 $\mathcal{H}(W_0, q)$ 的辫关系相容。因此，我们得到映射 ι_0 是 $\mathcal{H}(W_0, q)$ 的代数自同构。

我们定义

$$\iota := \iota_Y \otimes \iota_0 \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

引理 C.1. 映射 ι 是 $\mathcal{H}$的代数同构。

证明. 只需证明 ι 与定义 B.1 中的关系 (2) 相容。设 $\alpha \in \Delta$和 $y \in Y$。为简便起见，记 $s = s_\alpha$。我们需要证明的方程是

$$\theta_{-y}(q_s-1-T_s)-(q_s-1-T_s)\theta_{-s(y)} = \left((\mathbf{q}^{\lambda(\alpha)}-1)+\theta_{\alpha^\vee}(\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)+\lambda^*(\alpha))/2}-\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)-\lambda^*(\alpha))/2})\right)\frac{\theta_{-y}-\theta_{-s(y)}}{\theta_0-\theta_{2\alpha^\vee}},$$

下面的计算证明了这一点:

$$\begin{aligned}(\mathrm{LHS}) &= (q_s-1)(\theta_{-y}-\theta_{-s(y)})-(\theta_{-y}T_s-T_s\theta_{-s(y)})\\ &= (q_s-1)(\theta_{-y}-\theta_{-s(y)})-\left((\mathbf{q}^{\lambda(\alpha)}-1)+\theta_{-\alpha^\vee}(\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)+\lambda^*(\alpha))/2}-\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)-\lambda^*(\alpha))/2})\right)\frac{\theta_{-y}-\theta_{-s(y)}}{\theta_0-\theta_{-2\alpha^\vee}}\\ &= \left((\mathbf{q}^{\lambda(\alpha)}-1)(\theta_0-\theta_{-2\alpha^\vee})-(\mathbf{q}^{\lambda(\alpha)}-1)-\theta_{-\alpha^\vee}(\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)+\lambda^*(\alpha))/2}-\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)-\lambda^*(\alpha))/2})\right)\frac{\theta_{-y}-\theta_{-s(y)}}{\theta_0-\theta_{-2\alpha^\vee}}\\ &= -\left(\theta_{-2\alpha^\vee}(\mathbf{q}^{\lambda(\alpha)}-1)+\theta_{-\alpha^\vee}(\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)+\lambda^*(\alpha))/2}-\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)-\lambda^*(\alpha))/2})\right)\frac{\theta_{-y}-\theta_{-s(y)}}{\theta_0-\theta_{-2\alpha^\vee}}\\ &= -\left((\mathbf{q}^{\lambda(\alpha)}-1)+\theta_{\alpha^\vee}(\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)+\lambda^*(\alpha))/2}-\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)-\lambda^*(\alpha))/2})\right)\theta_{-2\alpha^\vee}\frac{\theta_{-y}-\theta_{-s(y)}}{\theta_0-\theta_{-2\alpha^\vee}}\\ &= \left((\mathbf{q}^{\lambda(\alpha)}-1)+\theta_{\alpha^\vee}(\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)+\lambda^*(\alpha))/2}-\mathbf{q}^{(\lambda(\alpha)-\lambda^*(\alpha))/2})\right)\frac{\theta_{-y}-\theta_{-s(y)}}{\theta_0-\theta_{2\alpha^\vee}}\\ &= (\mathrm{RHS}).\end{aligned}$$

□

∼Appendix D. Homomorphism between Affine Hecke algebras of type A_1

Let

$$\mathcal{R} = (X, R = \{\pm\alpha\}, Y, R^\vee = \{\pm\alpha^\vee\}, \Delta = \{\alpha\})$$

and

$$\mathcal{R}' = (X', R' = \{\pm\alpha'\}, Y', (R')^\vee = \{\pm(\alpha')^\vee\}, \Delta' = \{\alpha'\})$$

是带基根数据。这里，我们不假设 X的秩为 1。令 $\lambda(\alpha)$ $\lambda^*(\alpha)$ $\lambda'(\alpha')$、$(\lambda^*)'(\alpha')$ 为正实数。我们假设 $\lambda(\alpha) = \lambda^*(\alpha)$，除非 $\alpha \in 2X$；并且 $\lambda'(\alpha') = (\lambda^*)'(\alpha')$，除非 $\alpha' \in 2X'$。我们固定 $\mathbf{q} > 1$，并记

$$\begin{cases} q_1 &= \mathbf{q}^{\lambda(\alpha)},\\ q_0 &= \mathbf{q}^{\lambda^*(\alpha)},\\ q_1' &= \mathbf{q}^{\lambda'(\alpha')},\\ q_0' &= \mathbf{q}^{(\lambda^*)'(\alpha')}.\end{cases}$$

注意到 $q_1, q_0, q_1', q_0' > 1$。我们定义与 $\mathcal{R}, \lambda, \lambda^*, \mathbf{q}$ 相关联的仿射赫克代数 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{R}, \lambda, \lambda^*, \mathbf{q})$，以及与 $\mathcal{R}', \lambda', (\lambda^*)', \mathbf{q}$ 相关联的仿射赫克代数 $\mathcal{H}' = \mathcal{H}(\mathcal{R}', \lambda', (\lambda^*)', \mathbf{q})$。记 $s = s_\alpha$ 和 $s' = s_{\alpha'}$。

命题 D.1. 设

$$I\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$$

是一个代数同态，使得

$$I(T_s) = c' \cdot \theta_{k(\alpha')^\vee} T_{s'} + b'$$

对于某些 $c' \in \mathbb{C}^\times$、 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $b' \in \mathbb{C}[Y']$。我们还假设

$$I(\theta_{\alpha^\vee}) = c \cdot \theta_{n(\alpha')^\vee}$$

对于某个 $c \in \mathbb{C}^\times$ 和正整数 n。于是，我们得到

$$\begin{cases} I(T_s) & = \theta_{k(\alpha')^\vee/2} \cdot T_{s'} \cdot \theta_{-k(\alpha')^\vee/2}, \\ I(\theta_{\alpha^\vee}) & = \theta_{(\alpha')^\vee}, \\ q_1 & = q_1', \\ q_0 & = q_0' \end{cases}$$

若 k 为偶数，则

$$\begin{cases} I(T_s) & = \theta_{(k-1)(\alpha')^\vee/2} \cdot T_{s',0} \cdot \theta_{-(k-1)(\alpha')^\vee/2}, \\ I(\theta_{\alpha^\vee}) & = \theta_{(\alpha')^\vee}, \\ q_1 & = q_0', \\ q_0 & = q_1' \end{cases}$$

若 k 为奇数，其中 $T_{s',\,0} \in \mathcal{H}'$ 定义为

$$T_{s',0} = (q_1')^{-1/2} \cdot (q_0')^{1/2} \cdot \left(\theta_{(\alpha')^\vee} T_{s'} - (q_1' - 1)\theta_{(\alpha')^\vee}\right).$$

注记 D.2. 在证明命题 D.1 之前，我们先说明 $T_{s',\,0}$。我们将 R'_{aff} 上的仿射根系定义为 $\mathbb{R} \cdot (\alpha')^\vee$，即

$$R'_{\mathrm{aff}} = \{\pm\alpha' + k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

于是， R'_{aff} 有一个基

$$B'_{\mathrm{aff}} = \{\alpha', 1 - \alpha'\}.$$

我们记 $s' = s_{\alpha'}$ 和 $s'_0 = s_{1-\alpha'}$。令 $W_{\mathrm{aff}}(R'_{\mathrm{aff}})$ 表示 R'_{aff} 的仿射魏尔群，并定义

$$S'_{\mathrm{aff}} = \{s', s'_0\}.$$

我们还定义一个参数函数

$$q'\colon S'_{\mathrm{aff}} \to \mathbb{R}_{>1}$$

as

$$q'_{s'} = q_1'$$

and

$$q'_{s'_0} = q_0'.$$

我们定义与仿射 Coxeter 系统 $(W_{\mathrm{aff}}(R'_{\mathrm{aff}}) \;\; S'_{\mathrm{aff}})$ 及参数函数 q' 相关联的 Iwahori-Hecke代数 $\mathcal{H}(W_{\mathrm{aff}}(R'_{\mathrm{aff}}) \;\; q')$。由于

$$s'_0 \circ s' = (\alpha')^\vee,$$

我们有

$$T_{s'_0} T_{s'} = T_{(\alpha')^\vee}.$$

根据定理 B.3， $\mathcal{H}(W_{\mathrm{aff}}(R'_{\mathrm{aff}}) \;\; q')$ 可视为一个仿射赫克代数，而元素 $T_{(\alpha')^\vee}$ 对应于元素

$$q'^{1/2}_{(\alpha')^\vee} \cdot \theta_{(\alpha')^\vee} = (q'_{s'_0})^{1/2} \cdot (q'_{s'})^{1/2} \cdot \theta_{(\alpha')^\vee} = (q_1')^{1/2} \cdot (q_0')^{1/2} \cdot \theta_{(\alpha')^\vee}.$$

因此，元素

$$T_{s'_0} = T_{(\alpha')^\vee} (T_{s'})^{-1} \in \mathcal{H}\left(W_{\mathrm{aff}}\left(R'_{\mathrm{aff}}\right), q'\right)$$

对应于

$$(q_1')^{1/2} \cdot (q_0')^{1/2} \cdot \theta_{(\alpha')^\vee} (T_{s'})^{-1} = (q_1')^{-1/2} \cdot (q_0')^{1/2} \cdot \left(\theta_{(\alpha')^\vee} T_{s'} - (q_1' - 1)\theta_{(\alpha')^\vee}\right),$$

也就是我们上面定义的元素 $T_{s',\,0}$。

命题 D.1 的证明。我们比较方程两边的像

$$\theta_{\alpha^\vee} T_s - T_s \theta_{-\alpha^\vee} = \left((q_1 - 1) + \theta_{-\alpha^\vee} q_1^{1/2}(q_0^{1/2} - q_0^{-1/2})\right) \frac{\theta_{\alpha^\vee} - \theta_{-\alpha^\vee}}{\theta_0 - \theta_{-2\alpha^\vee}} \tag{D.1}$$

经由 I。等式 (D.1) 左侧经由 I 的像等于

$$\begin{aligned} & c \cdot \theta_{n(\alpha')^\vee}(c' \cdot \theta_{k(\alpha')^\vee} T_{s'} + b') - c^{-1}(c' \cdot \theta_{k(\alpha')^\vee} T_{s'} + b')\theta_{-n(\alpha')^\vee} \\ &= c' \cdot \theta_{k(\alpha')^\vee}(c \cdot \theta_{n(\alpha')^\vee} T_{s'} - c^{-1} \cdot T_{s'} \theta_{-n(\alpha')^\vee}) + (\text{element of } \mathbb{C}[Y']) \\ &= c'(c - c^{-1}) \cdot T_{s'} \theta_{-(n+k)(\alpha')^\vee} + (\text{element of } \mathbb{C}[Y']) \,. \end{aligned}$$

On t另一方面，等式 (D.1) 右侧经由 I 的像包含于 $\mathbb{C}[Y']$ 中。因此 e, we o得到

$$c - c^{-1} = 0,$$

也就是说,

$$c = \pm 1. \tag{D.2}$$

于是，等式 (D.1) 左侧经由 I 的像等于

$$\begin{aligned} & cc' \cdot \theta_{k(\alpha')^\vee} \left(\theta_{n(\alpha')^\vee} T_{s'} - T_{s'} \theta_{-n(\alpha')^\vee}\right) + cb'(\theta_{n(\alpha')^\vee} - \theta_{-n(\alpha')^\vee}) \\ &= cc' \cdot \theta_{k(\alpha')^\vee} \left((q_1' - 1) + \theta_{-(\alpha')^\vee}(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2} - (q_0')^{-1/2})\right) \frac{\theta_{n(\alpha')^\vee} - \theta_{-n(\alpha')^\vee}}{\theta_0 - \theta_{-2(\alpha')^\vee}} + cb'(\theta_{n(\alpha')^\vee} - \theta_{-n(\alpha')^\vee}). \end{aligned} \tag{D.3}$$

另一方面，（D.1）的右侧等于

$$(q_1 - 1)\theta_{\alpha^\vee} + q_1^{1/2}(q_0^{1/2} - q_0^{-1/2}),$$

而该项在 I 下的像等于

$$c(q_1 - 1)\theta_{n(\alpha')^\vee} + q_1^{1/2}(q_0^{1/2} - q_0^{-1/2}). \tag{D.4}$$

比较（D.3）与（D.4），我们得到

$$\begin{aligned} & cc' \cdot \theta_{k(\alpha')^\vee} \left((q_1' - 1) + \theta_{-(\alpha')^\vee}(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2} - (q_0')^{-1/2})\right) \frac{\theta_{n(\alpha')^\vee} - \theta_{-n(\alpha')^\vee}}{\theta_0 - \theta_{-2(\alpha')^\vee}} + cb'(\theta_{n(\alpha')^\vee} - \theta_{-n(\alpha')^\vee}) \\ &\qquad = c(q_1 - 1)\theta_{n(\alpha')^\vee} + q_1^{1/2}(q_0^{1/2} - q_0^{-1/2}). \end{aligned} \tag{D.5}$$

令 $\mathbb{C}(\mathbb{Z}(R')^\vee)$ 表示 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}(R')^\vee]$ 的商域。根据方程（D.5），我们得到

$$b' \in \mathbb{C}[Y'] \cap \mathbb{C}(\mathbb{Z}(R')^\vee) = \mathbb{C}[\mathbb{Z}(R')^\vee].$$

我们将方程（D.5）视为方程

$$\begin{aligned} & cc' \cdot T^k \left((q_1' - 1) + (q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2} - (q_0')^{-1/2})T^{-1}\right) \frac{T^n - T^{-n}}{1 - T^{-2}} + cb'(T^n - T^{-n}) \\ &\qquad = c(q_1 - 1)T^n + q_1^{1/2}(q_0^{1/2} - q_0^{-1/2}) \end{aligned} \tag{D.6}$$

通过同构，将其视为 Laurent 多项式环 $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$ 中的方程

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}(R')^\vee] \to \mathbb{C}[T, T^{-1}]$$

定义为

$$\theta_{(\alpha')^\vee} \mapsto T.$$

若 $n \geq 3$，我们可以取 $\zeta \in \mathbb{C}^\times$ 使得

$$\zeta^n = c = 1/c,\ \zeta^2 \neq 1.$$

将 $T = \zeta$ 代入 (D.6)，我们得到

$$0 = (q_1 - 1) + q_1^{1/2}(q_0^{1/2} - q_0^{-1/2}).$$

然而，由于我们假设 $q_1, q_0 > 1$，上面方程的右侧为正。因此，这种情况不可能发生。

接下来，我们考虑 $n=2$ 的情况。将 $T=\sqrt{-1}$ 代入 (D.6)，得到

$$0=-c(q_1-1)+q_1^{1/2}(q_0^{1/2}-q_0^{-1/2}).$$

若 $c=-1$，上述论证将导出矛盾。因此，我们得到 $c=1$，并且

$$0=-(q_1-1)+q_1^{1/2}(q_0^{1/2}-q_0^{-1/2})=-(q_1^{1/2}-q_0^{1/2})(q_1^{1/2}+q_0^{-1/2}).$$

因此，我们有 $q_1=q_0$。于是，方程（D.6）变为

$$c'\cdot T^k\left((q_1'-1)+(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})T^{-1}\right)\frac{T^2-T^{-2}}{1-T^{-2}}+b'(T^2-T^{-2})=(q_1-1)(T^2+1).$$

将等式两边同时除以 T^2+1，得到

$$c'\cdot T^k\left((q_1'-1)+(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})T^{-1}\right)+b'(1-T^{-2})=q_1+1.$$

将 $T=1$ 和 $T=-1$ 代入等式两边，得到

$$\begin{cases}c'\left((q_1'-1)+(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\right) & =q_1+1,\\ c'\cdot(-1)^k\left((q_1'-1)-(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\right) & =q_1+1,\end{cases}$$

这意味着

$$\begin{cases}c'(q_1'-1) & =q_1+1,\\ (q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2} & =0\end{cases}$$

若 k 为偶数，且

$$\begin{cases}q_1'-1 & =0,\\ c'\cdot(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2}) & =q_1+1\end{cases}$$

若 k 为奇数。然而，由于我们假设 $q_1',q_0'>1$,

$$(q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2}>0$$

and

$$q_1'-1>0.$$

因此，这两种情况也不可能同时发生。

现在，我们得出 $n=1$。于是，方程（D.6）变为

(D.7)

$$cc'\cdot T^k\left((q_1'-1)T+(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\right)+cb'(T-T^{-1})=c(q_1-1)T+q_1^{1/2}(q_0^{1/2}-q_0^{-1/2}).$$

将 $T=1$ 和 $T=-1$ 代入等式两边，得到

$$\begin{cases}cc'\left((q_1'-1)+(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\right) & =c(q_1-1)+q_1^{1/2}(q_0^{1/2}-q_0^{-1/2}),\\ cc'\cdot(-1)^k\left(-(q_1'-1)+(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\right) & =-c(q_1-1)+q_1^{1/2}(q_0^{1/2}-q_0^{-1/2}),\end{cases}$$

这意味着

$$\begin{cases}cc'(q_1'-1) & =c(q_1-1),\\ cc'\cdot(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2}) & =q_1^{1/2}(q_0^{1/2}-q_0^{-1/2})\end{cases}\tag{D.8}$$

如果 k 是偶数，并且

$$\begin{cases}cc'(q_1'-1) & =q_1^{1/2}(q_0^{1/2}-q_0^{-1/2}),\\ cc'\cdot(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2}) & =c(q_1-1)\end{cases}\tag{D.9}$$

如果 k 是奇数。

首先，我们假设 k 是偶数。将方程 (D.8) 代入 (D.7)，得到

$$\begin{aligned}cc'\cdot(q_1'-1)T^{k+1}+cc'\cdot(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})T^k++cb'(T-T^{-1})\\ =cc'(q_1'-1)T+cc'\cdot(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2}),\end{aligned}\tag{D.10}$$

因此

$$-cc'\cdot\left((q_1'-1)T+(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\right)\left(T^k-1\right)=cb'(T-T^{-1}).$$

由于 k是偶数， $T-T^{-1}$整除 T^k-1，因此我们有

$$\begin{aligned}
b' &= -c'\cdot\left((q_1'-1)T+(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\right)\frac{T^k-1}{T-T^{-1}}\\
&= -c'\cdot T^{k/2}\cdot\left((q_1'-1)+T^{-1}(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\right)\frac{T^{k/2}-T^{-k/2}}{1-T^{-2}}\\
&= -c'\cdot\theta_{k(\alpha')^\vee/2}\cdot\left((q_1'-1)+\theta_{-(\alpha')^\vee}(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\right)\frac{\theta_{k(\alpha')^\vee/2}-\theta_{-k(\alpha')^\vee/2}}{\theta_0-\theta_{-2(\alpha')^\vee}}\\
&= -c'\cdot\theta_{k(\alpha')^\vee/2}\cdot\left(\theta_{k(\alpha')^\vee/2}T_{s'}-T_{s'}\theta_{-k(\alpha')^\vee/2}\right)\\
&= -c'\cdot\theta_{k(\alpha')^\vee}T_{s'}+c'\cdot\left(\theta_{k(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s'}\cdot\theta_{-k(\alpha')^\vee/2}\right).
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$I(T_s)=c'\cdot\theta_{k(\alpha')^\vee}T_{s'}+b'=c'\cdot\left(\theta_{k(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s'}\cdot\theta_{-k(\alpha')^\vee/2}\right).$$

由于 I 是代数同态，且 T_s 满足二次关系

$$T_s^2=(q_1-1)T_s+q_1,$$

我们得到

$$\left(c'\cdot\left(\theta_{k(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s'}\cdot\theta_{-k(\alpha')^\vee/2}\right)\right)^2=(q_1-1)\left(c'\cdot\left(\theta_{k(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s'}\cdot\theta_{-k(\alpha')^\vee/2}\right)\right)+q_1. \tag{D.11}$$

另一方面，二次关系

$$T_{s'}^2=(q_1'-1)T_{s'}+q_1'$$

$T_{s'}$ 的.....意味着

$$\left(\theta_{k(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s'}\cdot\theta_{-k(\alpha')^\vee/2}\right)^2=(q_1'-1)\left(\theta_{k(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s'}\cdot\theta_{-k(\alpha')^\vee/2}\right)+q_1'.$$

将其代入 (D.11)，得到

$$(c')^2(q_1'-1)\left(\theta_{k(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s'}\cdot\theta_{-k(\alpha')^\vee/2}\right)+(c')^2q_1'=c'(q_1-1)\left(\theta_{k(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s'}\cdot\theta_{-k(\alpha')^\vee/2}\right)+q_1.$$

因此，我们得到

$$\begin{cases}c'(q_1'-1) &= q_1-1,\\ (c')^2q_1' &= q_1\end{cases}$$

将它们结合起来，得到

$$0=q_1'\cdot(c')^2-(q_1'-1)c'-1=(c'-1)(q_1'\cdot c'+1).$$

如果 $q_1'\cdot c'+1=0$，则有

$$q_1=(c')^2\cdot q_1'=\frac{1}{q_1'}.$$

然而，由于我们假设 $q_1,q_1'>1$，这种情况不可能发生。因此，我们得到 $c'=1$和 $q_1=q_1'$。将这些方程代入 (D.8) 的第二个方程，得到

$$c\cdot((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})=q_0^{1/2}-q_0^{-1/2}.$$

由于 $c=\pm1$ 和 q_0， $q_0'>1$，我们得到 $c=1$ 和 $q_0=q_0'$。

我们考虑 k 为奇数的情形。将方程 (D.9) 代入 (D.7)，得到

$$\begin{aligned}
cc'\cdot(q_1'-1)T^{k+1}+cc'\cdot(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})T^k+cb'(T-T^{-1})\\
=cc'(q_1'-1)+cc'\cdot(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})T,
\end{aligned} \tag{D.12}$$

因此

$$-cc'\cdot(q_1'-1)\left(T^{k+1}-1\right)-cc'\cdot(q_1')^{1/2}\left((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2}\right)\left(T^k-T\right)=cb'(T-T^{-1}).$$

由于 k是奇数， $T-T^{-1}$整除 $T^{k+1}-1$和 T^k-T，因此我们有

$$\begin{aligned}
b' &= -c'\cdot\left((q_1'-1)\frac{T^{k+1}-1}{T-T^{-1}}+(q_1')^{1/2}\left((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2}\right)\frac{T^k-T}{T-T^{-1}}\right)\\
&= -c'\cdot\left((q_1'-1)\frac{T-T^{-1}}{1-T^{-2}}+T^{k+1/2}\cdot\left((q_1'-1)+T^{-1}(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\right)\frac{T^{(k-1)/2}-T^{-(k-1)/2}}{1-T^{-2}}\right)\\
&= -c'\cdot(q_1'-1)\frac{\theta_{(\alpha')^\vee}-\theta_{-(\alpha')^\vee}}{1-\theta_{-2(\alpha')^\vee}}\\
&\quad -c'\cdot\theta_{(k+1)(\alpha')^\vee/2}\cdot\left((q_1'-1)+\theta_{-(\alpha')^\vee}(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\right)\frac{\theta_{(k-1)(\alpha')^\vee/2}-\theta_{-(k-1)(\alpha')^\vee/2}}{1-\theta_{-2(\alpha')^\vee}}\\
&= -c'\cdot(q_1'-1)\theta_{(\alpha')^\vee}-c'\cdot\theta_{(k+1)(\alpha')^\vee/2}\cdot\left(\theta_{(k-1)(\alpha')^\vee/2}T_{s'}-T_{s'}\theta_{-(k-1)(\alpha')^\vee/2}\right)\\
&= -c'\cdot(q_1'-1)\theta_{(\alpha')^\vee}-c'\cdot\theta_{k(\alpha')^\vee}T_{s'}+c'\cdot\theta_{(k+1)(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s'}\cdot\theta_{-(k-1)(\alpha')^\vee/2}.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
I(T_s) &= c'\cdot\theta_{k(\alpha')^\vee}T_{s'}+b'\\
&= c'\cdot\left(\theta_{(k+1)(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s'}\cdot\theta_{-(k-1)(\alpha')^\vee/2}-(q_1'-1)\theta_{(\alpha')^\vee}\right)\\
&= c'\cdot\theta_{(k-1)(\alpha')^\vee/2}\cdot\left(\theta_{(\alpha')^\vee}T_{s'}-(q_1'-1)\theta_{(\alpha')^\vee}\right)\cdot\theta_{-(k-1)(\alpha')^\vee/2}.
\end{aligned}$$

回顾一下，我们定义了

$$T_{s',0}=(q_1')^{-1/2}\cdot(q_0')^{1/2}\cdot\left(\theta_{(\alpha')^\vee}T_{s'}-(q_1'-1)\theta_{(\alpha')^\vee}\right).$$

因此，我们有

$$T_{s',0}=-(q_1')^{-1/2}\cdot(q_0')^{1/2}\cdot\iota\left(\theta_{-(\alpha')^\vee}T_{s'}\right),$$

其中

$$\iota\colon\mathcal{H}'\to\mathcal{H}'$$

表示附录 C 中定义的对合。 $T_{s'}$ 的二次关系蕴含$\theta_{-(\alpha')^\vee}T_{s'}$ 的二次关系，如下所示:

$$\begin{aligned}
\left(\theta_{-(\alpha')^\vee}T_{s'}\right)^2 &= \theta_{-(\alpha')^\vee}\cdot\left(T_{s'}\theta_{-(\alpha')^\vee}\right)\cdot T_{s'}\\
&= \theta_{-(\alpha')^\vee}\cdot\left(\theta_{(\alpha')^\vee}T_{s'}-(q_1'-1)\theta_{(\alpha')^\vee}-(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\right)\cdot T_{s'}\\
&= T_{s'}^2-(q_1'-1)T_{s'}-(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\cdot\theta_{-(\alpha')^\vee}T_{s'}\\
&= -(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\cdot\theta_{-(\alpha')^\vee}T_{s'}+q_1'.
\end{aligned}$$

于是，我们得到 $T_{s',\ 0}$ 满足二次关系

$$\begin{aligned}
T_{s',0}^2 &= (q_1')^{-1}\cdot q_0'\cdot\iota\left(\theta_{-(\alpha')^\vee}T_{s'}\right)^2\\
&= (q_1')^{-1}\cdot q_0'\cdot\iota\left(-(q_1')^{1/2}((q_0')^{1/2}-(q_0')^{-1/2})\cdot\theta_{-(\alpha')^\vee}T_{s'}+q_1'\right)\\
&= (q_0'-1)\left(-(q_1')^{-1/2}\cdot(q_0')^{1/2}\cdot\iota\left(\theta_{-(\alpha')^\vee}T_{s'}\right)\right)+q_0'\\
&= (q_0'-1)T_{s',0}+q_0'.
\end{aligned}$$

设 $c''=(q_1')^{1/2}\cdot(q_0')^{-1/2}\cdot c'$。那么，我们有

$$I(T_s)=c''\cdot\theta_{(k-1)(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s',0}\cdot\theta_{-(k-1)(\alpha')^\vee/2}.$$

由于 $\theta_{(k-1)(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s',0}\cdot\theta_{-(k-1)(\alpha')^\vee/2}$ 满足与 $T_{s',0}$ 相同的二次关系，因此我们有

$$\begin{aligned}
&c''(q_1-1)\left(\theta_{(k-1)(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s',0}\cdot\theta_{-(k-1)(\alpha')^\vee/2}\right)+q_1\\
&= I\left((q_1-1)T_s+q_1\right)\\
&= I(T_s^2)\\
&= I(T_s)^2\\
&= \left(c''\cdot\theta_{(k-1)(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s',0}\cdot\theta_{-(k-1)(\alpha')^\vee/2}\right)^2\\
&= (c'')^2(q_0'-1)\left(\theta_{(k-1)(\alpha')^\vee/2}\cdot T_{s',0}\cdot\theta_{-(k-1)(\alpha')^\vee/2}\right)+(c'')^2q_0'.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{cases} q_1 - 1 &= c''(q_0' - 1), \\ q_1 &= (c'')^2 q_0' \end{cases}$$

将它们结合起来，我们得到

$$0 = q_0' \cdot (c'')^2 - (q_0' - 1)c'' - 1 = (c'' - 1)(q_0' \cdot c'' + 1).$$

若 $q_0' \cdot c'' + 1 = 0$，则有

$$q_1 = (c'')^2 \cdot q_0' = \frac{1}{q_0'}.$$

然而，由于我们假设 $q_1, q_0' > 1$，这种情况不可能发生。因此，我们得到 $c'' = 1$和 $q_1 = q_0'$。我们还有 $c' = (q_1')^{-1/2} \cdot (q_0')^{1/2}$。将它们代入 (D.9) 的第一个方程，我们得到

$$c \cdot ((q_1')^{1/2} - (q_1')^{-1/2}) = (q_0^{1/2} - q_0^{-1/2}).$$

由于 $c = \pm 1$ 和 q_0，因此 $q_1' > 1$，我们得到 $c = 1$ 和 $q_0 = q_1'$。 □

我们将对命题 D.1 稍作推广。

引理 D.3. 不存在代数同态

$$I \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$$

使得

$$I(T_s) = c' \cdot \theta_{k(\alpha')^\vee} T_{s'} + b'$$

对于某个 $c' \in \mathbb{C}^\times$, $k \in (1/2) \cdot \mathbb{Z}$ 和 $b' \in \mathbb{C}[Y']$，并且

$$I(\theta_{\alpha^\vee}) = c \cdot \theta_{n(\alpha')^\vee}$$

对于某个 $c \in \mathbb{C}^\times$ 和正半整数 n。

证明. 由于 n 是半整数，我们有 $(\alpha')^\vee/2 \in Y'$。因此，我们得到 $\alpha' \notin 2X'$，这意味着$\lambda'(\alpha') = (\lambda^*)'(\alpha')$ 且 $q_1' = q_0'$。于是，命题 D.1 的证明中的方程（D.5）在此情形下变为

$$cc' \cdot \theta_{k(\alpha')^\vee}(q_1' - 1)\frac{\theta_{n(\alpha')^\vee} - \theta_{-n(\alpha')^\vee}}{\theta_0 - \theta_{-(\alpha')^\vee}} + cb'(\theta_{n(\alpha')^\vee} - \theta_{-n(\alpha')^\vee}) = c(q_1 - 1)\theta_{n(\alpha')^\vee} + q_1^{1/2}(q_0^{1/2} - q_0^{-1/2})$$

在此情形下。我们还注意到，方程（D.2）在此情形下也成立。我们通过同构将其视为 Laurent 多项式环 $\mathbb{C}[S, S^{-1}]$ 中的一个方程

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}(R')^\vee/2] \to \mathbb{C}[S, S^{-1}]$$

定义为

$$\theta_{(\alpha')^\vee/2} \mapsto S,$$

并得到

$$cc' \cdot S^{2k}(q_1' - 1)\frac{S^{2n} - S^{-2n}}{1 - S^{-2}} + cb'(S^{2n} - S^{-2n}) = c(q_1 - 1)S^{2n} + q_1^{1/2}(q_0^{1/2} - q_0^{-1/2}). \tag{D.13}$$

若 $n > 1$，我们可以取 $\zeta \in \mathbb{C}^\times$，使得 $\zeta^{2n} = c = 1/c$ 且 $\zeta^2 \neq 1$。然后，将 $S = \zeta$ 代入方程 (D.13)，得到

$$0 = q_1 - 1 + q_1^{1/2}(q_0^{1/2} - q_0^{-1/2}) > 0,$$

矛盾。因此，$n = 1/2$，并得到

$$cc'(q_1' - 1)S^{1+2k} + cb'(S - S^{-1}) = c(q_1 - 1)S + q_1^{1/2}(q_0^{1/2} - q_0^{-1/2}).$$

将 $S = 1$ 和 $S = -1$ 代入其中，得到

$$\begin{cases} cc'(q_1' - 1) &= c(q_1 - 1), \\ q_0^{1/2} - q_0^{-1/2} &= 0 \end{cases}$$

若 k 是整数，且

$$\begin{cases} cc'(q_1' - 1) &= q_1^{1/2}(q_0^{1/2} - q_0^{-1/2}), \\ q_1 - 1 &= 0 \end{cases}$$

如果 k 是半整数。不过，由于我们假设 q_1、$q_0 > 1$，

$$q_0^{1/2} - q_0^{-1/2} > 0$$

and

$$q_1 - 1 > 0.$$

因此，这两种情况也不可能同时发生。 □

同样，我们可以证明以下结论：

引理 D.4. 不存在代数同态

$$I\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$$

使得

$$I(T_s) = c' \cdot \theta_{k(\alpha')^\vee} T_{s'} + b'$$

对于某些 $c' \in \mathbb{C}^\times$、 $b' \in \mathbb{C}[Y']$ 和半整数 k，并且

$$I(\theta_{\alpha^\vee}) = c \cdot \theta_{n(\alpha')^\vee}$$

对于某些 $c \in \mathbb{C}^\times$ 和 $n \in (1/2) \cdot \mathbb{Z}_{>0}$。

证明。由于 k 是半整数，我们有 $(\alpha')^\vee/2 \in Y'$，因此在这种情况下 $q_1' = q_0'$ 也成立。于是，我们得到引理 D.3 证明中的方程 (D.13)。若 n 是半整数，则由命题 D.3 可得该结论。因此，我们可以假设 n 是整数。然后，将 $S = 1$ 和 $S = -1$ 代入方程 (D.13)，得到

$$q_1' - 1 = 0,$$

矛盾。 □

现在，我们得到命题 D.1 的一个推广。

推论 D.5。设

$$I\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$$

是一个代数同态，使得

$$I(T_s) = c' \cdot \theta_{k(\alpha')^\vee} T_{s'} + b'$$

对某些 $c' \in \mathbb{C}^\times$、 $k \in (1/2) \cdot \mathbb{Z}$ 和 $b' \in \mathbb{C}[Y']$ 成立。我们还假设

$$I(\theta_{\alpha^\vee}) = c \cdot \theta_{n(\alpha')^\vee}$$

对于某些 $c \in \mathbb{C}^\times$ 和 $n \in (1/2) \cdot \mathbb{Z}_{>0}$。于是，我们得到 k 是一个整数，并且

$$\begin{cases} I(T_s) & = \theta_{k(\alpha')^\vee/2} \cdot T_{s'} \cdot \theta_{-k(\alpha')^\vee/2}, \\ I(\theta_{\alpha^\vee}) & = \theta_{(\alpha')^\vee}, \\ q_1 & = q_1', \\ q_0 & = q_0' \end{cases}$$

如果 k 是偶数，并且

$$\begin{cases} I(T_s) & = \theta_{(k-1)(\alpha')^\vee/2} \cdot T_{s',0} \cdot \theta_{-(k-1)(\alpha')^\vee/2}, \\ I(\theta_{\alpha^\vee}) & = \theta_{(\alpha')^\vee}, \\ q_1 & = q_0', \\ q_0 & = q_1' \end{cases}$$

如果 k 是奇数

证明。根据引理 D.3 和引理 D.4， k 和 n 不是半整数。因此，结论由命题 (D.1) 得出。□

Index

$(R^{\mathrm{Mor}})^\vee$, 23 (T'_{s_α})
$^{M_\alpha}$, 30 $(V^J,\Gamma)^\perp$,
20 $(\Delta^{\mathrm{Mor}})^\vee$, 44 (
$\Delta^{\mathrm{Sol}})^\vee$, 44 $(\alpha')^\vee$,
44 $(\alpha^\#)'$, 32 (λ^*)
^{Mor}, 23 $(\lambda^*)^{\mathrm{Sol}}$,
34 $(h_\alpha^\vee)'$, 31A',
18A'_J, 19A_M, 25
B, 18$B(J,\rho)$, 21B
$(J,\rho)_e$, 23C, 18C
(J,ρ), 21$D_J(a')$,
21D_J $(\Gamma'(J,\rho)_e)$,
23H_M, 25$H_M^\vee$,
25I^+, 12I^{Mor},
22, 24I^{Sol}, 34I_U,
1, 7I_U,2, 8I_U, 10J,
19$J_{P'|P}(\sigma\otimes\cdot)$,
29J_r, 28J_{s_α}, 29K,
34K_M, 34M, 34
M_σ, 25$N(w)$, 65N
(w,P'), 63$N_G(M)$
(F), 25$N_G(S)(F)$,
18P_J, 19$R(J,\rho)$,
20$R(\mathfrak{s}_M)$, 26R^{Mor},
23R^{Sol}, 34S, 18S
(J,ρ), 21T'_{s_α}, 30T
(J,ρ), 24T_w^{Mor},
22$T_{s\ 0}^{\mathrm{Sol}}$, , 44T_w^{Sol},
34T_{ρ_M}, 36U^{M_α},
60U_J, 19U_a, 19V,
18$_{V^J,\Gamma}$, 20V^J,
20V_Γ^J, 20V^Γ, 20
W, 18$W(G,M,$
$\mathfrak{s}_M)$, 26$W(J,\rho)$,
19
$W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu})$, 26$W_0$, 18$W_0$
(R^{Sol}), 44$W_0\left(R^{\mathrm{Mor}}\right)$,
23W_J, 19W_{aff}, 18
$W_{\mathrm{aff}}\left(R^{\mathrm{Mor}}\right)$, 23$W_{\mathrm{aff}}$ (
$\Gamma'(J,\rho)$), 20$X^*(A_M)$,
25$X_*(A_M)$, 25$Z_G(S)$,
18$Z_G(S)(F)_0$, 18$\Delta'_{\mathfrak{s}_M}$(
P), 32Δ^{Mor}, 23Δ^{Sol},
34$\Delta_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$, 26$\Delta_{\mathfrak{s}_M}(P)$,
26$\Gamma'(J,\rho)$, 20$\Gamma'(J,\rho)^+$,
20$\Gamma'(J,\rho)_e^+$, 23$\Gamma'(J,\rho)_e$,
23$\Gamma(J,\rho)$, 20$\Gamma(J,\rho)^+$,
20Φ, 18$\Phi^\vee$, 18Φ^+ 仿射,
约化, 65Φ_{aff}, 18Φ^+ 仿
射, 18Φ_w, 21$\Sigma'_{\mathfrak{s}_M}$, 32
$\Sigma_{\mathfrak{s}_M}$, 26$\Sigma^\vee_{\mathfrak{s}_M}$, 26$\Sigma(G,$
$A_M)$, 25$\Sigma(P,A_M)$, 26
$\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}$, 26$\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}(P)$,
26$\Sigma_{\mathfrak{s}_M}(P)$, 26$\Sigma_{\mathrm{red}}(A_M)$,
25$\Sigma_{\mathrm{red}}(P,A_M)$, 26$\alpha'$,
44$\alpha^\#$, 26χ, 22ϵ_α, 30λ(
s_α), 29λ^{Mor}, 23λ^{Sol},
34$\left(\Sigma'_{\mathfrak{s}_M}\right)^\vee$, 32
$\left(M_\sigma/M^1\right)^\vee$, 25$\left(R^{\mathrm{Sol}}\right)^\vee$,
34 $(D_J(\Gamma'(J,\rho)_e))^\vee$,
23 M_J, 19$\mathcal{A}$, 18$\mathcal{A}^J$, 20
$\mathcal{A}_\Gamma^J$, 20$\mathcal{F}_J$, 34$\mathcal{H}'(G,\mathfrak{s}_M)$,
33$\mathcal{H}(G(F)\ \rho)$, 10$\mathcal{H}(G,$
$\mathfrak{s}_M)$, 27$\mathcal{H}(M(F)\ \rho_M)$,
11$\mathcal{H}(R(J,\rho))$, 22$\mathcal{H}($
$W_{\mathrm{aff}}(\Gamma'(J,\rho))\quad q)$, 2$\mathcal{H}$
$(W(\Sigma_{\mathfrak{s}_M,\mu}))$, 28$\mathcal{H}^{\mathrm{Mor}}$,
22$\mathcal{H}^{\mathrm{Sol}}$, 34

$\mathcal{M}_J$, 19$\mathcal{R}'(G,$
$\mathfrak{s}_M)$, 32$\mathcal{R}(G,$
$\mathfrak{s}_M)$, 27$\mathcal{R}^{\mathrm{Sol}}$,
34$\mathcal{U}_J$, 19μ^{M_α},
26$\overline{U^{M_\alpha}}$, 60ρ,
19ρ_M, 34ρ_{σ,s_α},
29σ, 35σ_1, 35
τ_{s_α}, 29$\theta_{B_2|B_1}$,
65$\theta_{\rho,\dot{w}}$, 65$\widetilde{\ }$
K_M, 34, 35$\widetilde{\ }$
f_v, 35$\widetilde{\ }v(t)$,
24a_M, 25a_M^*,
25$b(w, P')$,
73$c'''(w, v)$,
72$c''(w, v)$,
69$c'(v, w)$, 66c
(w, Φ_m^M), 72$c($
$w, v)$, 65f_α,
30f_v,1, 35f_v,
36$h_\alpha^\vee$, 26$k_{a'}$,
23$l(w)$, 65p'_a,
24p_a, 20$r(a)$,
23t_P, 12, 15v
(t), 24$v[a, J]$,
19x_J, 34

References

[Ber84] J. N. Bernstein, *Le "centre" de Bernstein*, 《局部域上约化群的表示》, 《进行中的研究》丛书, Hermann, 巴黎, 1984, 1 32 771671 P. Deligne 编, 页码 –。MR BK Colin J. [93] *The admissible dual of N* Bushnell 和 Philip C. Kutzko, GL( ) *via compact open subgroups*, 《数学年刊研究》丛书, 第 129 卷, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 1993 年。MR 1204652[BK98] , *Smooth representations of reductive p-adic groups: structure theory via types*, 《伦敦数学会会刊》 (3 **77** 1998 3, 582 634 1643417) (), 第 – 号。MR Blo Corinne Blondel, [97] *Critère d'injectivité pour l'application de Jacquet*, 《巴黎科学院院报》S 辑 I 数学 325 (1997), 第 11 号, 1149–1152。MR 1490115[Bou68] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes* , 《科学与工业时事》 [*de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: systèmes de racines* 《当前科学与工业主题》], 第 1337 号, Hermann, 巴黎, 1968 年。MR 0240238[BS20] Petar Bakic 和 Gordan Savin, *The Gelfand–Graev representation of SO*(2*n*+1) *in terms of Hecke algebras*, arXiv 电子论文 (2020), arXiv:2011.02456。[BT72] F. Bruhat 和 J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local*, 《高等科学研究院数学出版物》(1972), 第 41 号, 5–251。 MR 327923[BT84] , *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée* 1984 60, 197 376 756316 , 《高等科学研究院数学出版物》 (), [09] *Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adiques* 第 – 号。MR Dat Jean-Francois Dat, , Jussieu 数学研究所杂志 8 (2009 2, 261 333 2485794), 第 – 号。 [02] MR GR David Goldberg 和 Alan Roche, *Types in* SL_n, 《伦敦数学会会刊》(3) 85 (2002), 第 1 号, 119–138。MR 1901371[Hei11] Volker Heiermann, *Opérateurs d'entrelacement et algèbres de Hecke avec paramètres d'un groupe réductif p-adique: le cas des groupes classiques* **17** 2011 3, 713 756 , 《数学精选》(新系 列) (), 第 – 号。MR 2827179 [80] *Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups* 2How Robert B. Howlett, , 《伦敦数学会杂志》 ()21 (1980 1, 62 80 576184), 第 – 号。MR Kal Tasho Kaletha, [19] *Regular supercuspidal representations*, 《美国数学会杂志》32 (2019), 第 4 号, 1071–1170。MR 4013740[KY17] Ju-Lee Kim 和 Jiu-Kang Yu, *Construction of tame types*, 《表示论、数论与不变量理论》, 《数学进展》丛书, 第 323, ¨ 2017, 337 357 3753917 卷, [84] *Characters of reductive groups over a finite field* Birkhauser/Springer, 沙姆, 页码 –。MR Lus George Lusztig, 《数学年刊研究》丛书, 第 107 卷, 普林斯顿大学出版社, 普林斯 顿, 新泽西州, 1984 年。MR 742472[Lus20] G. Lusztig, *Open problems on Iwahori-Hecke algebras*, arXiv 电子论文 (2020), arXiv:2006.08535。[Mac72] I. G. Macdonald, *Affine root systems and Dedekind's η-function*, 《数学发明》15 (1972), 91–143。MR 357528[Mor93]Lawrence Morris, *Tamely ramified intertwining algebras*, 《数学发明》114 (1993), 第 1 号, 1–54。MR 1235019[99] *Level zero -types* **118** 1999 2, 135 157 1713308 Mor , G , [94] *Unrefined minimal K-types for p-adic groups* 《数学汇编》 (), 第 – 号。MR MP Allen Moy 和 Gopal Prasad, , 《数学发明》116 (1994), 第 1 3, 393 408 1253198 号–。MR MP , *Jacquet functors and unrefined minimal K-types*, 《赫尔维蒂数学评论》 [96] 71 (1996), 第 1 号, 98–121。MR 1371680[MS14] Michitaka Miyauchi 和 Shaun Stevens, *Semisimple types for p-adic classical groups*, 《数学年刊》358 (2014 1 2, 257 288 3157998), 第 - 号–。 [21] MR Oha Kazuma Ohara, *Hecke algebras for tame supercuspidal types*, arXiv 电子论文 (2021), arXiv:2101.01873。[Ren10] David Renard, *Représentations des groupes réductifs p-adiques*, 《专门课程》《专题课程》[第 17 卷, 法国数学学会, 巴黎, 2010 年。MR 2567785[Roc98] Alan Roche, *Types and Hecke algebras for principal series representations of split reductive p-adic groups*, 《高等师范学校科学年刊》(4) 31 (1998), 第 3 号, 361–413。MR 1621409[Roc09] , *The Bernstein decomposition and the Bernstein centre*, 《约化群 *p*-进 群的可容许表示讲义》, 《菲尔兹研究所专著》, 第 26 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2009 年, 第 3–52 页。MR 2508719[Sil79] Allan J. Silberger, *Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups*, 《数学札记》, 第 23 卷, 普 林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州; 东京大学出版社, 东京, 1979 年, 基于 Harish-Chandra 在高等研究院的讲座, 1971 1973 544991 –。MR Sol a Maarten [21] *Affine Hecke algebras and their representations* Solleveld, , Indag. Math. (新系列) 32 5, 1005 2021 1082 4310011 (), 第 – 号。MR [Sol21b] Maarten Solleveld, *Parameters of Hecke algebras for Bernstein components of p-adic groups*, arXiv 电子论文 (2021), arXiv:2103.13113。[Sol22] Maarten Solleveld, *Endomorphism algebras and Hecke algebras for reductive p-adic groups*, 《代数杂志》606 (2022 371 470 4432237), –。MR Ste Shaun Stevens, [08] *The supercuspidal representations of p-adic classical groups*, 《数学发明》172 (2008), 第 2 号, 289–352。MR 2390287

[Tit79] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, 《自守形式、表示与 *L*-函数》（《纯粹数学专题讨论会论文集》，俄勒冈州立大学，科瓦利斯，俄勒冈州，1977 年），第 1 部分，《纯粹数学专题讨论会论文集》第 XXXIII 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1979 年，第 29–69 页。MR 546588[Wal03] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra)*, Jussieu 数学研究所杂志 2（2003），第 2 号，235–333。MR 1989693

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCE, THE UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA, MEGUROKU, TOKYO153-8914, JAPAN.*Email address*: kohara@ms.u-tokyo.ac.jp