arXiv:2301.09235v1 [cs.LG] 23 Jan 2023

通过时间自调制学习储备池动力学

Yusuke Sakemi[1,2],Sou Nobukawa[1,5,6],Toshitaka Matsuki[3],Takashi Morie[4],和 Kazuyuki Aihara[1,2]

[1]数学工程研究中心，千叶工业大学，日本习志野[2]国际神经智能研究中心（WPI-IRCN），东京大学，日本东京[3]大分大学，日本大分[4]生命科学与系统工程研究生院，九州工业大学，日本北九州[5]计算机科学系，千叶工业大学，日本习志野[6]精神障碍预防干预系，国家精神卫生研究所，国家神经精神医学中心，日本东京

2023年1月24日

摘要

储备池计算（RC）通过将输入信号传入随机连接的循环神经网络（RNN），即储备池，能够高效处理时间序列数据。储备池对时间序列数据进行高维表示，大幅简化了后续学习任务。尽管这种简单架构能够实现快速学习和便捷的物理实现，但其学习性能逊于其他最先进的循环神经网络模型。本文为提升储备池计算的学习能力，提出自调制储备池计算（SM-RC），通过加入自调制机制扩展储备池计算。该自调制机制由两个门控变量实现：输入门和储备池门。输入门调制输入信号，储备池门则调制储备池的动力学特性。我们证明，SM-RC能够执行注意力任务，根据输入信号保留或舍弃输入信息。我们还发现，SM-RC在学习过程中会出现混沌状态。这表明，自调制机制赋予储备池计算性质迥异的信息处理能力。此外，在NARMA和洛伦兹模型任务中，SM-RC的表现优于储备池计算。尤其是在洛伦兹模型任务中，SM-RC的预测准确率高于储备池规模大十倍的储备池计算。由于SM-RC架构仅需增加两个门控，因此可像储备池计算一样实现物理部署，为实现边缘人工智能开辟了新方向。

引言

现实世界中会产生并观测到大量以时间序列形式呈现的数据。在预测可再生能源供应、监测工厂中的传感器数据等实际应用中，高效处理这些时间序列数据至关重要。过去十年间，基于深度学习的数据驱动方法取得了显著进展，并成功地将数据预测与分析和社会价值联系起来，其重要性也日益凸显 [1, 2]。然而，数据驱动方法的计算负载会造成大量能源消耗，限制了其适用性 [3, 4]。尤其是，要在数据生成位置附近进行预测和分析（即边缘人工智能），就需要具备较高的能源效率 [5]。

储备池计算（RC）凭借出色的预测性能和高能源效率，正受到关注，并成为边缘人工智能的候选方案。储备池计算模型由输入层、储备池层和输出层组成 [6, 7]。储备池层通常是一个具有固定随机权重的循环神经网络（RNN）。由于储备池计算通常只训练输出层，因此其训练过程比其他循环神经网络模型更快，例如

长短期记忆（LSTM） [8] 和门控循环单元（GRU）[9]。此外，储备池层可以由各种动力系统构成 [10], ，其高能源效率已通过物理实现得到验证 [11, 12]。

然而，由于储备池计算中仅训练输出层，因此尚不清楚它在实际应用中的预测准确率能否与其他最先进方法相媲美 [13]。为提升储备池计算的计算能力，人们提出了各种储备池计算架构和方法 [14]。近期提出的方法包括结合卷积神经网络 [15], 与并行储备池 [16, 17], 的结构、多层（深度）储备池计算[18], 、利用过去储备池层信息的方法 [19], ，以及结合自编码器的正则化方法 [20]。这些研究表明，采用适当的储备池结构可以提升性能。然而，由于这些方法仅训练输出层，性能提升有限。

提升储备池计算中信息处理灵活性的一种颇具前景的方法，是随时间改变储备池层的动力学特性，以适应输入信号。通过将输出反馈至储备池的架构即可实现这一点 [21, 22]。Sussilo 和 Abbott 提出了 FORCE学习方法，用于稳定地训练具有反馈架构的储备池计算模型，并报告称该网络能够学习多种类型的自主动力学 [21]。这一架构已扩展至脉冲神经网络 [23] ，并应用于强化学习任务 [24]。然而，尽管人们认为这些反馈连接能够根据任务控制动力学 [22], ，但由于连接是随机的，其控制能力有限。

研究人员还通过训练输出层和储备池层，尝试在储备池层中获得任务依赖型动力学。内在可塑性 [25] 是一种使神经元的输出更接近期望分布的方法，而赫布规则或反赫布规则 [26] 则可以控制神经元之间的相关性。这些方法提高了预测准确率和记忆容量 [27]。Lage和Buonomano提出了先天训练，通过训练储备池层中的部分连接，构建一个能在一定时间内保持稳定的吸引子，从而实现长期记忆功能 [28]。Inoue等人使用这一方法构建了混沌行程 [29]。上述研究表明，通过训练储备池层，可以完成传统储备池计算模型难以实现的任务。然而，所有这些方法中，训练后的储备池层属性都是静态的（例如，网络连接随时间保持固定），这限制了动力学的多样性。

近年来，注意力机制被视为一种实现适应输入信号的信息处理的有效方法。在深度学习领域，引入注意力机制是近年来提出的一项突破性技术 [30, 31]。引入这一机制后，可以通过筛选和处理重要信息来高效学习，并对自然语言处理等多个研究领域产生了影响 [32, 33]。在神经科学中，注意被认为是实现认知功能的重要因素，而神经调制则是一种与注意密切相关的神经机制 [34]。神经调制是由基底前脑等脑区的神经元将乙酰胆碱等神经调质释放到各个脑区，从而调节其中神经元的活动所引发的 [34, 35, 36]。注意力机制能够提高信息处理效率。然而，在储备池计算中，输入信号会被统一传递到储备池层，并转换为高维特征，因此不存在注意力机制。

本文提出自调制储备池计算（SM-RC），这是一种融合了上述反馈结构、储备池层学习和注意力机制优势的架构。SM-RC 具有可训练门控，能够动态调节输入信号的强度以及储备池层的动力学特性。因此，它能够学习适应输入信号的储层动力学，从而实现注意等信息处理，并显著提升多种任务中的学习性能。重要的是，门控结构最多只包含两个变量，并由储备池层的反馈控制；因此，我们预计 SM-RC 与传统储备池计算类似，具有很高的可硬件实现性。下文将重点探讨 SM-RC 的学习性能和模型特性。具体而言，我们通过简单注意力任务、NARMA任务和洛伦兹模型任务，将其预测性能与传统储备池计算进行比较。此外，我们还讨论硬件实现的前景。

结果

图1 展示了 SM-RC 的架构。除了输入层、储备池层和输出层外，所提出的架构还设有输入门 g^{in} ，用于调制输入信号；以及储备池门 g^{res} ，用于改变储备池层的动力学特性。这两个门均由来自储备池层的反馈控制。

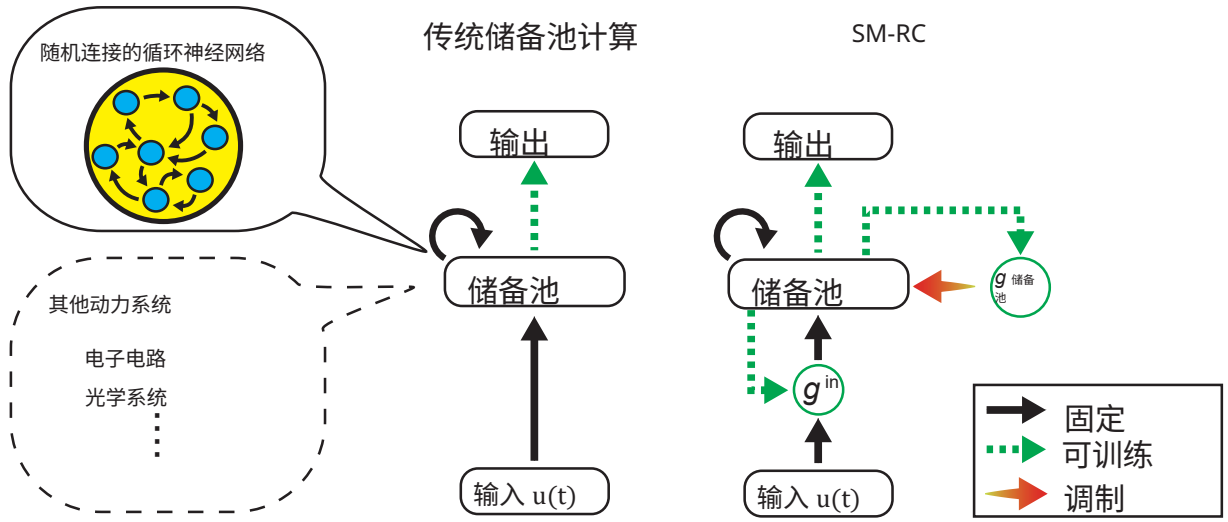

图1：传统储备池计算与 SM-RC 架构的比较。在传统储备池计算中，输入信号直接传递至储备池层，并从储备池层获得输出。储备池层通常由权重固定的循环神经网络构成，但也可以使用各种动力系统作为储备池，并可通过电子电路、光学系统及其他物理系统实现。SM-RC 沿用了传统储备池计算的基本架构，包括储备池层和输出层。不过，输入信号在传递至储备池之前会经过输入门 g^{in} 调制。此外，储层动力学也会通过储备池门 g^{res}进行调制。两个门均由来自储备池层的反馈控制。黑色实线箭头和绿色虚线箭头分别表示随机初始化的固定连接和可训练连接。红色渐变箭头表示改变储备池动力学特性的函数。

这些特性显著扩展了传统储备池计算的功能；在传统储备池计算中，输入信息被“均匀地”传递至储备池层。此外，储存在储备池层中的输入信号信息往往会随时间衰减，这与回声状态属性和渐消记忆有关[37, 10]。对于相对简单的任务，传统储备池计算的这些特性不会造成显著问题，但对于需要捕捉长期或复杂时间依赖关系的任务，它们会严重限制回归性能 [19]。SM-RC 通过引入自调制机制克服了传统储备池计算的不足。

在本研究中，为简化起见，我们基于回声状态网络（ESN） [6, 38],构建 SM-RC；ESN 是最常用的储备池计算形式。ESN 是一种离散时间动力系统，其储备池层由权重固定的循环神经网络构成。此外，我们还考虑了一个能够动态改变输入强度的输入门，以及一个能够动态改变储备池层内部连接强度的储备池门。在这种情况下，储备池层的输入 u^{res} 和储备池层的谱半径 ρ^{res} 会随时间调制，如下所示：

$$\boldsymbol{u}^{\text{res}}(t) = g^{\text{in}}(t-1)\boldsymbol{u}(t), \tag{1}$$
$$\rho^{\text{res}}(t) = g^{\text{res}}(t-1)\hat{\rho}^{\text{res}}, \tag{2}$$

其中， $\boldsymbol{u}(t)$ 是原始输入向量，$\hat{}\rho^{\text{res}}$ 是未调制储备池层内部连接矩阵的谱半径。注意， g^{in} 和 g^{res} 是经过训练的标量门。从这些门控的功能中，我们可以直观地理解 SM-RC 如何扩展 RC。例如，输入门可以通过将重要的输入信号发送到储备池层并丢弃其他信息来实现注意，而储备池门则可以根据输入信号改变记忆保持特性。

为了从多个角度评估 SM-RC 的学习性能，我们将其与传统储备池计算在三类特征各异的任务上的表现进行了比较：简单注意任务、NARMA任务和洛伦兹模型任务。在所有实验中，SM-RC 储备池层中的神经元数量 N^{res} 设为 100，且 SM-RC 的超参数均固定为相同值。相比之下，传统储备池计算采用了神经元数量各异的储备池层，并对超参数进行了优化。有关

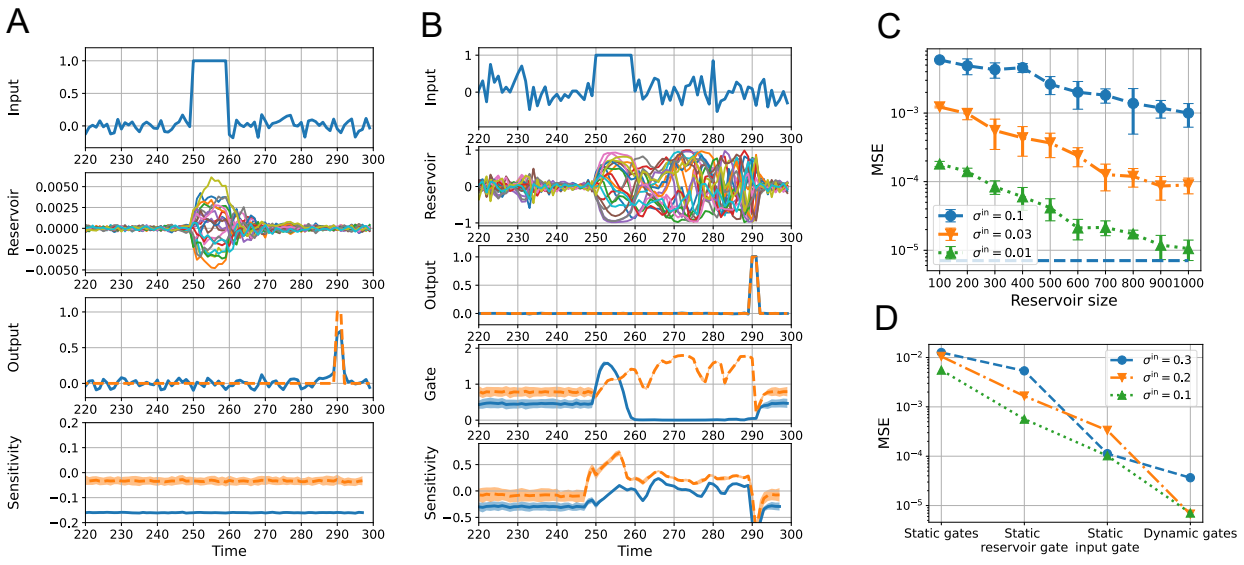

图2：简单注意力任务的模拟结果。A. 使用 $N^{\text{res}} = 100$ 和 $\sigma^{\text{in}} = 0.1$训练后，传统储备池计算模型的动态。从上到下依次显示输入信号、储备池状态、输出和敏感度的时间演化。B. 使用 $N^{\text{res}} = 100$和 $\sigma^{\text{in}} = 0.3$训练后，SM-RC模型的动态。从上到下依次显示输入信号、储备池状态、输出、门控和敏感度的时间演化。在门控面板中，蓝色实线表示输入门，橙色虚线表示谱半径。门控值的标准差是使用100个不同的输入信号（不含抖动噪声）计算得到的。我们展示了使用公式 2得到的调制谱半径 $\rho^{\text{res}}(t)$。在A和B的敏感度面板中，蓝色实线表示储备池层的平均敏感度，橙色虚线表示储备池层的最大敏感度。敏感度值的标准差是使用100个不同的输入信号（不含抖动噪声）计算得到的。对于输出层，实线表示预测输出，虚线表示教师信号。在显示储备池状态的面板中，仅展示20个储备池神经元。C. 传统储备池计算模型与SM-RC模型的回归误差（均方误差）比较。传统储备池计算模型在不同输入噪声强度（σ^{in}）下的回归误差以储层规模为横轴绘制。标准差是基于10次试验计算得到的。输入噪声强度为0.1时，SM-RC模型的回归误差以蓝色水平虚线表示。对于SM-RC模型，储层规模固定为100。D. 一个或两个门控设为静态时SM-RC模型的回归误差。

模型及其学习过程的详情见材料与方法。

简单注意任务

为考察 SM-RC 的自调制机制，我们评估了其在一项简单注意力任务中的学习性能。在该任务中，输入信号在 $[250,\ 259]$, 的时间区间内为 $u(t) = 1$，而在其他时间步则加入均值为 0、标准差为 σ^{in} 的高斯噪声。模型经过训练后，需要在 $[290, 291]$ 的时间区间内输出 1，在其他时间步输出 0。为消除 $x_i(0) = 0$初始值的影响，我们舍弃了前 200 个时间步（自由运行），并在输入和输出时间窗中加入相同的抖动噪声（详情见“材料与方法”）。这项任务需要一种记忆保持功能：在长时间内保留输入信号，同时在未提供有用输入信号时降低高斯噪声的影响。

图2 展示了简单注意力任务的学习结果。在传统储备池计算的情况下（图2 A），对于 $\sigma^{\text{in}} = 0.1$，输出脉冲的回归效果不佳。尽管已有研究表明，储备池计算具有长期记忆功能 [39], 但当噪声持续加入储备池层时，记忆保持仍然很困难。相比之下，对于 SM-RC（图2 B），即使噪声增强，也就是 $\sigma^{\text{in}} = 0.3$，输出脉冲仍能准确回归。图2 C 对比了传统储备池计算和 SM-RC 的回归性能。对于

各种输入噪声强度 σ^{in}，SM-RC 在 $N^{\text{res}} = 100$ 条件下的表现优于储备池规模至少大 10 倍的传统储备池计算。

通过考察输入门 $g^{\text{in}}(t)$ 和储备池门 $g^{\text{res}}(t)$ 的时间演化（图中显示的是调制谱半径 $\rho^{\text{res}}(t)$）（图 2 B），我们可以直观地理解 SM-RC 情况下成功回归的影响因素。输入脉冲到达期间，输入门会自主取较大值，从而有效地将信息输入储备池层。输入脉冲消失后，输入门会取较小值，以防输入噪声破坏储备池层中存储的信息。相比之下，输入脉冲消失后，调制谱半径 $\rho^{\text{res}}(t)$ 会取较大值。由于谱半径足够大时不满足渐消记忆条件 [10, 38], ，储备池层能够长时间保留信息。

为了进一步研究 SM-RC 的动力学，我们对储备池层进行了敏感性分析。具体做法是对储备池状态施加扰动，并考察该扰动在向前两步后的演化（$t_p = 2$）。其他 t_p 取值下的结果见其他地方（附录，图 6）。如果扰动在 t_p 步后增大，则敏感度为正；否则为负（详情见材料与方法）。在图 2 A 中，传统储备池计算模型的敏感度在模拟期间始终为负。这表明储备池处于稳定状态，这与传统储备池计算通常满足的渐消记忆条件一致[10]。相比之下，对于 SM-RC（图 2 B），敏感度随时间显著变化，偶尔会呈现正值。正敏感度表明储备池处于混沌状态。通常，混沌状态会使回归变得困难，因为输入输出关系会对初始条件敏感。然而，在 SM-RC 的情况下，通过关闭输入门，避免了该注意力任务中与初始条件有关的问题。我们确认，在输入脉冲之后、输出脉冲之前，高斯噪声对储备池状态的影响可以忽略不计。正敏感度仅在输入脉冲之后、输出脉冲之前出现，这表明 SM-RC 成功学习了适应输入信号的复杂储层动力学。

为探究各门控的独立特性，我们评估了其中一个或两个门控不随时间变化时的回归性能（详情见材料与方法）。图2D展示了结果。对于所有输入噪声强度，两个门控都随时间变化（动态门控）时性能最佳；其次是储备池门随时间调制（静态输入门控）的情况，再其次是输入门随时间调制（静态储备池门控）的情况。两个门控均为静态（静态门控）时性能最差。这表明，观察到的性能提升并非源于对谱半径和输入强度的优化，而是源于对它们进行时间调制。此外，两个门控均进行时间调制时性能最佳这一事实表明，输入门和储备池门是协同调制的，这与上文的直观解释一致。

时间序列预测：NARMA与洛伦兹模型

即使不存在明显突出的、值得关注的时间序列（例如简单注意力任务中的情况），SM-RC仍能提升预测性能。为证明这一点，我们使用NARMA和洛伦兹模型评估了时间序列预测性能。NARMA时间序列通过非线性自回归移动平均生成，常用于评估储备池计算的学习性能 [40, 19, 41]。具体而言，我们使用内部动力学各异的NARMA5和NARMA10时间序列。洛伦兹模型是一种混沌动力系统，由于难以预测，也常用于评估储备池计算的性能 [13, 20, 42, 43, 44]。在洛伦兹模型任务中，我们向输入添加了标准差不同的高斯噪声 σ^{in}，以模拟真实世界数据的情况。上述任务涉及特征各异的输入信号：NARMA任务使用均匀随机数，洛伦兹模型任务使用混沌时间序列（见材料与方法）。

图3A 展示了传统储备池计算模型和 SM-RC 模型在经过 NARMA10 任务训练后的时间演化。由于该任务的输入信号为均匀噪声，传统储备池计算模型和 SM-RC 模型中的储备池状态也相应地演化。与简单注意力任务的情况不同，SM-RC 模型中的门控随时间变化并不显著，这反映了输入信号的特征。SM-RC 的预测性能优于传统储备池计算，表明即使对于均匀输入信号，自调制机制也能发挥作用。图3B 展示了传统储备池计算模型和 SM-RC 模型在经过洛伦兹模型任务训练后的时间演化。对于这两种模型，储备池状态的时间演化都反映了输入的混沌时间序列。尽管从储备池状态的时间演化中并不明显，但我们观察到 SM-RC 模型的门控

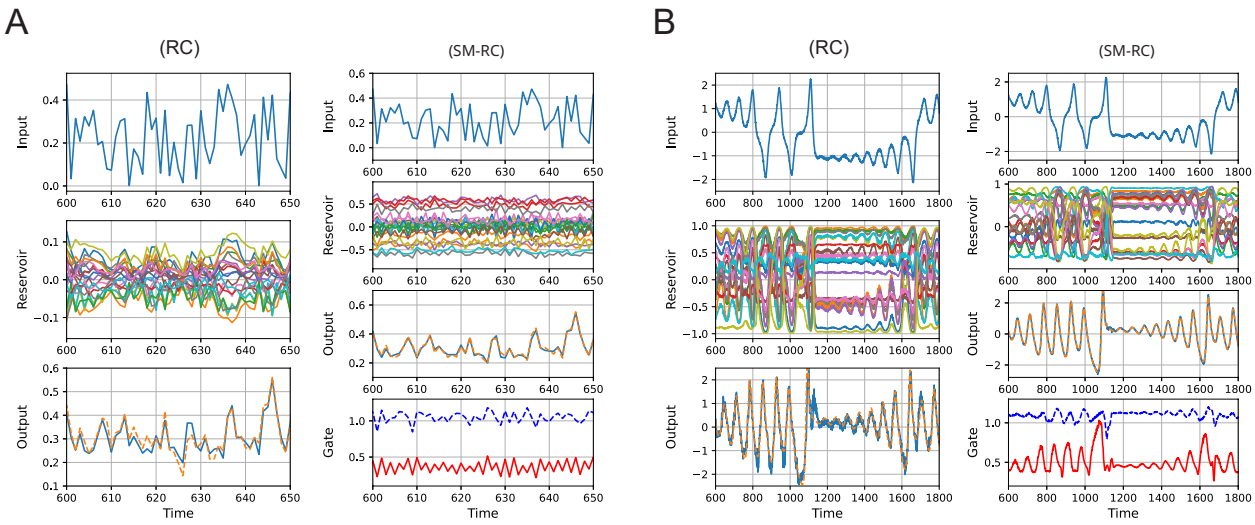

图3：对于（A）NARMA10任务（ $N^{\mathrm{res}} = 100$ ）和（B）洛伦兹模型任务（ $N^{\mathrm{res}} = 100$， $\sigma^{\mathrm{in}} = 0.03$ 以及 $N_{\text{向前}} = 20$），储层动力学的时间演化。在A和B中，左侧图从上到下分别显示传统储备池计算模型的输入、储备池状态和输出；右侧图从上到下分别显示SM-RC模型的输入、储备池状态、输出和门控。对于门控，红色实线表示输入门，蓝色虚线表示调制谱半径。对于输出层，实线表示预测输出，虚线表示教师信号。在显示储备池状态的面板中，仅展示20个储备池神经元。

会随输入混沌时间序列的变化而自适应演化。不同任务条件下 SM-RC 的动力学，即σ^{in} 和 N^{forward}，详见其他部分（附录，图8）。由于门控具有动态行为，SM-RC 的预测性能显著优于传统储备池计算。

图4 比较了传统储备池计算与SM-RC在NARMA10任务（图4 A）和洛伦兹模型任务（图4 B）中的预测性能。在图4 A和B上方的图中，传统储备池计算的预测误差绘制为储层规模的函数。水平线表示SM-RC的预测误差。SM-RC模型储备池层中的神经元数量均固定为100。对于洛伦兹模型任务（图4 B），我们展示了以下两个参数取不同值时的结果：输入噪声 σ^{in} 和预测步数 N^{forward}。如图所示，SM-RC的预测性能显著优于传统储备池计算。对于NARMA任务，SM-RC的预测性能与储层规模大三倍的传统储备池计算相当。相比之下，对于洛伦兹模型任务，SM-RC的预测性能与储层规模大十倍的传统储备池计算相当。

图 4 A 和 B 的下方图中，展示了当一个或两个门控不随时间变化时 SM-RC 的预测性能。对于 NARMA 和洛伦兹模型任务，两个门控都随时间变化时性能最佳，其次是储备池门控受到调制的情况，再其次是输入门受到调制的情况。两个门控都保持静态时性能最差。这些结果与简单注意力任务的结果相似。与之前一样，这表明观察到的性能提升并非源于谱半径和输入强度的优化，而是源于它们的时间调制。

最后，为了研究 SM-RC 的可扩展性，我们评估了储层规模逐渐增大时其在洛伦兹模型任务上的预测性能。图 5 A 展示了学习曲线（均方误差随训练轮次的变化）。从上到下，各面板分别展示了输入噪声为 0.01、0.03 和 0.1 时，不同储层规模（$N^{\mathrm{size}} = 100$、200、.....、500）下 SM-RC 的结果。随着储层规模增大，学习曲线变得尖峰起伏，这可能是由于循环神经网络学习存在困难（附录，图 7）。尽管如此，SM-RC 仍成功完成了训练。图 5B 展示了 SM-RC 在不同储层规模下的性能结果。均方误差随着储层规模增大而单调下降，这表明 SM-RC 在学习性能方面具有可扩展性。

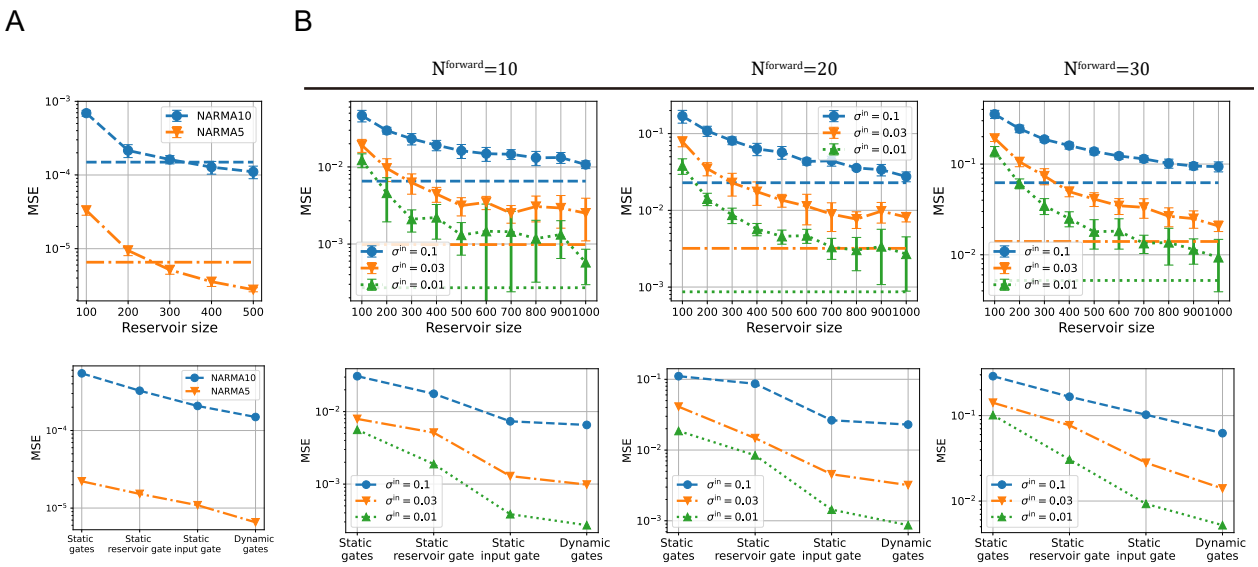

图4：对 (A) NARMA任务和 (B) 洛伦兹模型任务的性能评估。在 A 和 B 中，上方图展示了传统储备池计算模型与 SM-RC模型的均方误差比较。每幅图中均绘出了传统储备池计算模型的均方误差。横轴表示传统储备池计算模型的储备池规模。标准差基于 10 次试验计算得出。水平线表示 SM-RC模型的均方误差。SM-RC模型的规模固定为 100。下方图展示了部分门控在时间上固定时，SM-RC模型的均方误差比较。在 B 中，左图、中图和右图分别展示了 $N^{\text{forward}} = 10$、20 和 30 这几种情况的结果。此外，还展示了不同输入噪声 σ^{in} 条件下的结果。

讨论

我们提出了 SM-RC，它通过引入门控结构来改变储备池层的动力学特性。我们发现，对于简单注意力、NARMA 和洛伦兹模型任务，SM-RC 架构的学习性能优于传统储备池计算。尤其是在简单注意力任务和洛伦兹模型任务中，学习性能的提升十分显著。对于非均匀输入信号，使信息处理方式适应输入信号的机制被认为是有效的。由于大多数真实世界时间序列数据都是非均匀的，因此预计所提出的架构在真实世界数据上也会有效。在简单注意力任务中，我们观察到了 SM-RC 的局部混沌动力学。混沌动力学在深度学习研究中备受关注，因为它们能够提升学习模型的表达能力 [45, 46]。最近，Inoue 等人在 Transformer 模型中观察到了瞬态混沌 [47]。我们推测，SM-RC 利用了混沌动力学的高表达能力来编码输入信号并输出脉冲。然而，其底层学习机制仍有待进一步研究。我们预计，对动力系统的详细分析 将为改进 SM-RC 带来思路。

SM-RC 为理解神经系统的机制提供了启示。RC 中使用的具有随机连接的神经网络，正作为大脑模型受到关注 [7, 48, 50, 51]。所提出的 SM-RC 模型可被视为将神经调制机制融入 RC。这是因为这两种系统都会在整体上、随时间调节神经元的活动水平 [34, 35, 36]。例如，神经调质乙酰胆碱会从基底前脑传递至各脑区，从而提高这些区域中神经元的活动水平 [34]。SM-RC 实现了一种可与神经调制相关联的注意力机制 [34]。我们期待通过采用基于脉冲的通信、突触权重、时间常数和神经几何结构等具有生物学合理性的特征，来研究 SM-RC 与神经调制机制之间的相似性。

高效的硬件实现对于 SM-RC 的实际应用至关重要 [11, 12]。由于输入门 g^{in} 仅直接调节输入强度，因此实现起来并不困难。此外，我们认为，储备池门 g^{res} 可以根据硬件机制来实现。例如，在模拟电路实现中，神经元之间的连接由电流幅值表示 [52, 53]。

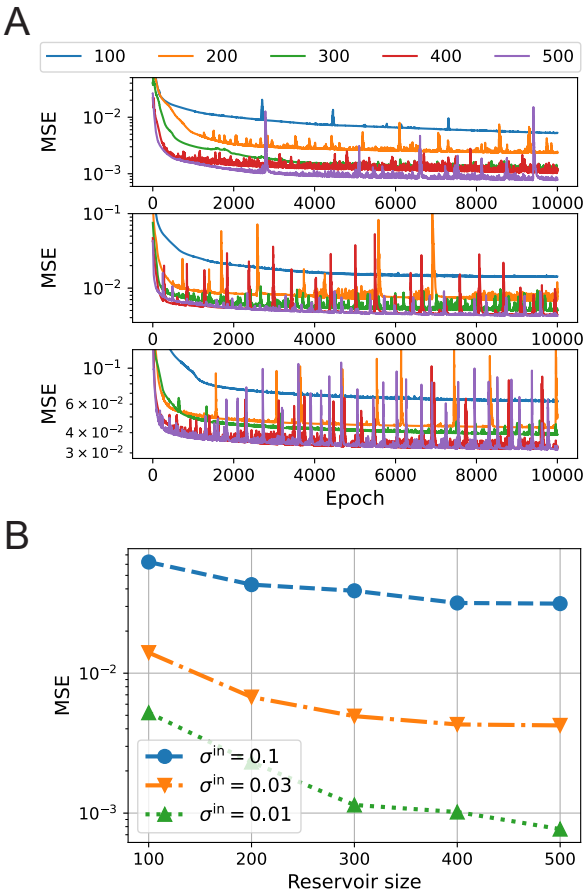

图5：不同储层大小的 SM-RC模型在洛伦兹模型任务中的回归性能（$N^{\text{forward}} = 30$）。A. $\sigma^{\text{in}} = 0.01$、0.03 和 0.1 对应的每个训练步骤（训练轮次）的均方误差，从上到下排列。B. 不同储层大小的 SM-RC模型的均方误差。

如果连接权重由数字存储器实现，只需提供一种调制数字值的机制即可。对于模拟存储器，若采用三端存储器件（如浮栅器件）实现，则可通过调制存储器中全部或部分场效应晶体管的栅极电压，实现对储备层动力学的调制。此外，延迟反馈系统[54] 可以利用单个非线性节点构建储备层，这种做法常见于光子系统 [55]和电子集成电路 [56]。在这些系统中，只需改变单个节点即可调制整个储备系统，因此实现储备池门相对容易。SM-RC 的这一硬件友好特性，正是我们选择将其用于边缘人工智能，而非 LSTM 等其他先进循环神经网络模型 [8] 和 GRU [9]的原因。

我们认为，可以采用各种学习技术来训练在物理系统中实现的 SM-RC。本文通过时间反向传播（BPTT）训练了自调制储备池计算模型 [57]。BPTT 需要有关储备层动力学的详细信息，但在物理和模拟系统中，通常难以详细捕捉内部动力学。近年来，针对这类硬件的训练研究已取得进展。例如，Wright 等人通过深度学习捕捉系统的内部动力学，成功训练了一个黑箱系统 [58]。此外，反馈对齐 [59] 及其变体 [60, 61, 62, 63], 等误差反向传播近似方法，适用于训练在物理系统中实现的模型。据报道，可以对 BPTT 进行近似，从而以生物学上可信的方式训练循环神经网络 [62, 64]。Nakajima 等人扩展了这些方法，并成功训练了多层物理储备计算 [65]。将这些方法应用于 SM-RC，有望在模拟和物理系统中训练 SM-RC。我们认为，SM-RC 代表了物理储备计算的一种新范式。

材料与方法

模型

ESN 型 SM-RC 模型的时间演化可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) = \tanh\big(&g^{\mathrm{res}}(t-1)W^{\mathrm{res}}\boldsymbol{x}(t-1)\\ &+ g^{\mathrm{in}}(t-1)W^{\mathrm{in}}\boldsymbol{u}(t) + \xi\mathbf{1}\big),\end{aligned} \tag{3}$$

$$g^{\mathrm{res}}(t) = f\left(W^{\mathrm{res}}_{\mathrm{fb}}\boldsymbol{x}(t) + b^{\mathrm{res}}_{\mathrm{fb}}\right), \tag{4}$$

$$g^{\mathrm{in}}(t) = f\left(W^{\mathrm{in}}_{\mathrm{fb}}\boldsymbol{x}(t) + b^{\mathrm{in}}_{\mathrm{fb}}\right), \tag{5}$$

$$y(t) = W^{\mathrm{out}}\boldsymbol{x}(t) + b^{\mathrm{out}}, \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^{N^{\mathrm{res}}}$ 和 $y(t) \in \mathbb{R}$ 分别表示储备池层的内部状态和输出。$W^{\mathrm{in}} \in \mathbb{R}^{N^{\mathrm{res}}\times N^{\mathrm{in}}}$和 $W_{\text{储备池}} \in \mathbb{R}^{N^{\mathrm{res}}\times N^{\mathrm{res}}}$分别是表示输入到储备池的连接权重以及储备池内部连接权重的矩阵。N^{in} 和 N^{res} 分别表示输入维度和储备池维度。W^{in} 的每个元素均通过从 $[-\rho^{\mathrm{in}}, \rho^{\mathrm{in}}]$的均匀分布中随机采样进行初始化。$W^{\mathrm{res}}$的每个元素均从 $[-1, 1]$的均匀分布中随机采样；随后乘以一个常数，使“初始”谱半径变为 $\hat{}\rho^{\mathrm{res}}$。$\mathbf{1}$ 是一个元素均为 1 的向量，而 $\xi \in \mathbb{R}$ 控制储备池层中神经元偏置项的大小[42]。$g^{\mathrm{in}}(t) \in \mathbb{R}$ 是用于调节输入强度的输入门，并通过权重 $W^{\mathrm{in}}_{\mathrm{fb}}$接收来自储备池层的反馈进行控制。类似地，$g^{\mathrm{res}}(t) \in \mathbb{R}$ 是用于调节储备池连接强度的储备池门，并通过权重 $W^{\mathrm{res}}_{\mathrm{fb}}$接收来自储备池层的反馈进行控制。门的输出函数 f 是一个非负函数。本研究中，输出值被限制在 (0，2) 范围内，以稳定学习过程：

$$f(x) = \frac{2}{1+e^{-x}}. \tag{7}$$

输入门通过将输入乘以 (0, 2) 范围内的一个值，在时间上调制输入强度，从而能够选择有用的输入信号。相比之下，储备池门在时间上调制谱半径 ρ^{res}，使其处于 (0，$2\hat{}\rho^{\mathrm{res}}$) 范围内，从而保留或丢弃储备池层中存储的信息。将 g^{in} 和 g^{res} 都替换为 1，即可得到传统储备池计算的时间演化。

W_{in}和 W^{res}是固定权重，与传统储备池计算框架相同。在 SM-RC 中，除了输出权重（W_{out}）外，还会训练反馈权重（W_{infb} $b^{\mathrm{res}}_{\mathrm{fb}}$，$W^{\mathrm{res}}_{\mathrm{fb}}$，$b^{\mathrm{res}}_{\mathrm{fb}}$）。在本研究中，输出权重采用伪逆法进行训练，反馈权重则通过时间反向传播（BPTT [57]）进行训练（见下文）。

学习过程

本研究中的所有任务均涉及利用输入时间序列 $y^{\mathrm{t}}(t)$ 预测目标信号$\{u(0)\ u(1)\ \ldots u(t)\}$，该输入时间序列由时间 t获得。储备池计算通常只在时间 $u(t$时将 t （方程 3）输入储备池层。对于传统储备池计算，通过伪逆法训练输出权重，以最小化输出与目标信号之间的平方误差 [38]:

$$\sum_{t=1}^{T} \|y(t) - y^{\mathrm{t}}(t)\|^2, \tag{8}$$

其中， T 表示训练数据的时间步数。当存在多个训练数据时，T 为训练数据的时间步数与训练数据数量的乘积。为避免初始状态的影响，模拟中的前 200 步不纳入训练数据（自由运行）。在本研究中，添加正则化项 $\|W^{\mathrm{out}}\|$ （岭回归）并未改善性能。

对于 SM-RC，我们使用相同的损失函数（式 8），并通过梯度下降法训练权重。每个训练轮次中，权重通过全批量训练进行更新，并重复 10^4 个训练轮次。在每次全批量训练过程中，首先使用与传统储备池计算相同的伪逆法训练输出层，然后使用时间反向传播训练门控。在时间反向传播中，使用学习率为 10^{-3} [66] 的 Adam 优化器更新权重。所有实现和模拟均使用 PyTorch 框架完成 [67]。也可以通过时间反向传播统一训练所有学习参数，包括输出权重。然而，这种情况下学习收敛缓慢，学习过程也变得不稳定，从而降低了学习性能。预先训练输出层可以减小反向传播误差信号，这可能有助于实现稳定学习（附录，图 7）。

传统储备池计算模型的超参数（ρ^{in}、 ρ^{res}和 ξ）通过贝叶斯优化进行调整 [68, 69]。对于简单注意力任务和 NARMA 任务，我们设置了 $\xi = 0$ 。SM-RC 模型的超参数设置为 $\rho^{\mathrm{in}} = 0.12$、$\hat{}\rho^{\mathrm{res}} = 0.9$。对于简单注意力任务和 NARMA 任务，偏置项设置为 $\xi = 0$ ；对于洛伦兹模型任务，则设置为 $\xi = 0.2$ 。我们观察到，SM-RC 训练有些不稳定（附录，图7）。因此，在评估 SM-RC 的性能时，我们选取了使用 50 组不同初始权重进行训练所得到的最佳结果。

在本研究中，我们考察了单个门控或两个门控均不随时间变化的情况。具体做法是将所有权重元素（W^{in} （res）fb ）固定为 0，并且仅训练偏置项 b^{in} （res）fb 。

数据集

在简单注意力任务中，第 i 个输入训练数据在输入时间区间 $[250 + t_i^{\mathrm{jitter}},\ 259 + t_i^{\mathrm{jitter}}]$ 内的值为 1，而在其他时间步的值则从均值为 0、标准差为 $\sigma^{\mathrm{in}} \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$ 的高斯分布中采样。第 i 个输出训练数据在时间区间 $[290 + t_i^{\mathrm{jitter}}, 291 + t_i^{\mathrm{jitter}}]$ 内的值为 1，而在其他时间步的值为 0。 t_i^{jitter} 表示抖动噪声；随机均匀采样了一个 $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \in Z$。引入抖动噪声是为了防止学习模型使用初始值（$x_i(0) = 0$）而非输入信号来生成输出脉冲。我们将按上述方式生成的 100 个数据用作训练数据，另取 100 个数据作为测试数据。

NARMA 是一种非线性自回归移动平均模型，定义如下:

$$y^{\mathrm{tc}}(t) = \ 0.3y^{\mathrm{tc}}(t-1) + 0.05y^{\mathrm{tc}}(t-1)\sum_{i=1}^{m} y^{\mathrm{tc}}(t-i) + 1.5s(t-m+1)s(t) + 0.1, \tag{9}$$

其中， $s(t) \in \mathbb{R}$ 是在区间 $[0, 0.5]$ 内均匀采样得到的。NARMA5 和 NARMA10 时间序列分别使用 $m = 5$ 和 $m = 10$生成。任务是使用 $s(t)$ 作为输入，预测 $y^{\mathrm{tc}}(t)$。为消除初始值的影响，舍弃前 200 步，并生成 2000 步作为训练数据。我们还使用相同的方法生成了 2000 步的测试数据。训练数据集和测试数据集各只使用了一组数据。

洛伦兹模型随时间演化，遵循以下微分方程 :

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x), \frac{dy}{dt} = x(28 - z) - y, \frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z. \tag{10}$$

使用步长为 $\Delta t = 0.01$ 的欧拉法，根据上述微分方程获得离散时间序列数据。为消除初始值的影响，舍弃了前 1000 步，并获取了随后 2000 步的时间序列。以相同方式从不同的初始值生成了 100 组训练数据和 100 组不同的测试数据。任务是将 $x(t)$ 作为输入，预测 $z(t + N_{\text{forward}}\Delta t)$。 $N_{\text{forward}} \in \{10, 20, 30\}$ 表示向前预测的步数。训练数据和测试数据中的 $x(t)$ 与 $z(t)$ 分别归一化为均值为 0、方差为 1。我们还在训练数据的输入 $x(t)$ 中加入了均值为 0、方差为 $\sigma^{\text{in}} \in \{0.01, 0.03, 0.1\}$ 的高斯噪声。

敏感性分析

我们评估了学习模型在简单注意力任务中的敏感度。敏感度表示对储层状态施加的扰动在 t_p 个时间步内被放大的程度。对于不含抖动噪声的输入数据，我们运行了 SM-RC，并将储备池层的状态作为参考状态$\{\boldsymbol{x}^{\text{base}}(0)\ \boldsymbol{x}^{\text{base}}(1)\ldots, \boldsymbol{x}^{\text{base}}(t)\ \ldots\}$。然后，在时间 $p \in \mathbb{R}^{N^{\text{res}}}$ 对储层状态施加扰动$\boldsymbol{x}^{\text{base}}(t) \in \mathbb{R}^{N^{\text{res}}}$，并使用公式 t计算时间 $\boldsymbol{x}^{p_j}(t + t_p) \in \mathbb{R}^{N^{\text{res}}}$ 的储层状态 $t + t_p$，见公式3。扰动向量通过 Metropolis–Hastings 算法从单位圆内采样得到，随后进行缩放，使所得向量满足 $\|p_j\| = \epsilon$。我们使用参考状态和扰动状态按如下方式估计敏感度：

$$\lambda(t) = \frac{1}{t_p N_p} \sum_{j=1}^{N_p} \ln\left(\frac{\|\boldsymbol{x}^{\text{base}}(t + t_p) - \boldsymbol{x}^{p_j}(t + t_p)\|}{\epsilon}\right), \tag{11}$$

其中， N_p 表示扰动向量的数量。同样，我们估算了最大敏感性：

$$\lambda_{\max}(t) = \frac{1}{t_p}\max_j\left[\ln\left(\frac{\|\boldsymbol{x}^{\text{base}}(t + t_p) - \boldsymbol{x}^{p_j}(t + t_p)\|}{\epsilon}\right)\right]. \tag{12}$$

在模拟中，我们使用了 $t_p = 2$、 $\epsilon = 10^{-8}$和 $N_p = 200$。其他 t_p取值下的模拟结果见其他部分（附录，图6）。由于门控 g^{res}、 g^{in} 不是相互独立的（状态）变量，因此按照公式4 间接施加了扰动。门控 g^{res}、 g^{in}是因变量，因为它们由储备池层的状态决定。因此，在 SM-RC 中，扰动仅施加于储备池层中神经元的状态。请注意，最大敏感性也称为最大局部李雅普诺夫指数。

致谢

本研究部分受 SECOM 科学技术基金会、JST PRESTO（资助编号 JPMJPR22C5）、JST Moonshot 研发计划（资助编号 JPMJMS2021）、AMED（资助编号 JP22dm0307009）、东京大学人工智能与超越研究所、东京大学高等研究院国际神经智能研究中心（WPI-IRCN）以及 JSPS 科研费（资助编号 JP20H05921）的支持。本研究使用了日本产业技术综合研究所（AIST）提供的人工智能桥接云基础设施（ABCI）计算资源。

A 附录

A.1 简单注意力任务中时间步 t_p 的依赖关系

我们使用不同的时间步对简单注意力任务进行了敏感性分析 t_p，并在这些时间步测量扰动的扩张幅度。图6 展示了储备池计算模型和 SM-RC 模型的结果。

A.2 学习稳定性

循环神经网络（RNN）的学习不稳定，因为存在许多损失函数值急剧变化的区域 [70, 71]。储备池计算（RC）通过仅学习输出层来避免这一问题 [6]。在自调制储备池计算（SM-RC）中，我们发现学习过程不稳定，这是

因为循环神经网络是通过门控间接训练的。图 7 展示了 50 次不同试验中每个学习轮次的均方误差（MSE）。学习任务涉及洛伦兹模型，其中 $N^{\text{forward}} = 20$ 和$\sigma^{\text{Lorentz}} = 0.03$。图 7 A 展示了通过梯度下降法训练所有可训练权重（包括输出层）的情况。在这种情况下，学习过程不稳定，导致性能较差。这表明 SM-RC训练也存在上述循环神经网络训练中的同样问题。图 7 B 展示了通过伪逆法训练输出层权重、通过梯度法学习与门控相关权重的情况。在这种情况下，学习过程趋于稳定，性能也显著提高。预先训练输出层可以降低损失；因此，反向传播误差信号受到抑制，这被认为有助于稳定训练。然而，由于不同试验所得性能仍有差异，我们通过采用不同初始权重重复训练过程来评估 SM-RC 的学习性能。梯度裁剪 [71],这一已知的稳定学习方法并未改善性能

A.3 洛伦兹任务中 SM-RC 的时间演化

图 8 展示了任务条件发生变化时，在洛伦兹任务上训练的 SM-RC 模型的时间演化σ^{in}，N^{forward} 如图所示，在所有情况下，门控均经过调制，以适应输入信号。门控的行为较为复杂，并取决于任务条件，这表明自调制机制能够以灵活的方式使储层动力学适应任务。

参考文献

[1]Hassan Ismail Fawaz、Germain Forestier、Jonathan Weber、Lhassane Idoumghar 和 Pierre-Alain Muller。用于时间序列分类的深度学习：综述。数据挖掘与知识发现，33(4):917–963，2019年。[2] Shi Dong、Ping Wang 和 Khushnood Abbas。深度学习及其应用综述。计算机科学评论，40:100379，2021年。[3] Neil C. Thompson、Kristjan Greenewald、Keeheon Lee 和 Gabriel F. Manso。深度学习的计算极限。*arXiv*，2007.05558，2020年。[4] David Patterson、Joseph Gonzalez、Quoc Le、Chen Liang、Lluis-Miquel Munguia、Daniel Rothchild、David So、Maud Texier 和 Jeff Dean。碳排放与大型神经网络训练。*arXiv*，2104.10350，2021年。[5] M. G. Sarwar Murshed、Christopher Murphy、Daqing Hou、Nazar Khan、Ganesh Ananthanarayanan 和 Faraz Hussain。网络边缘的机器学习：综述。*ACM*计算调查，54(8):1–37，2021年10月。[6] H. Jaeger。分析和训练循环神经网络的“回声状态”方法。德国国家信息技术研究中心技术报告 *GMD Report 148*，2001年。[7] W. Maass、T. Natschl¨ager 和 H. Markram。无需稳定状态的实时计算：一种基于扰动的神经计算新框架。《神经计算》，14(11):2531–2560，2002年。[8] Sepp Hochreiter 和 J¨urgen Schmidhuber。长短期记忆。《神经计算》，9(8):1735–1780，1997年。[9] Kyunghyun Cho、Bart van Merri¨enboer、Caglar Gulcehre、Dzmitry Bahdanau、Fethi Bougares、Holger Schwenk 和 Yoshua Bengio。使用 RNN编码器-解码器学习用于统计机器翻译的短语表示。载于*2014*年自然语言处理实证方法会议论文集（*EMNLP*），第1724–1734页，多哈，卡塔尔，2014年10月。[10] J. Dambre、D. Verstraeten、B. Schrauwen 和 S. Massar。动力系统的信息处理容量。《科学报告》，2:514，2012年。[11] Gouhei Tanaka、Toshiyuki Yamane、Jean Benoit H´eroux、Ryosho Nakane、Naoki Kanazawa、Seiji Takeda、Hidetoshi Numata、Daiju Nakano 和 Akira Hirose。物理储备池计算的最新进展：综述。《神经网络》，115:100–123，2019年。

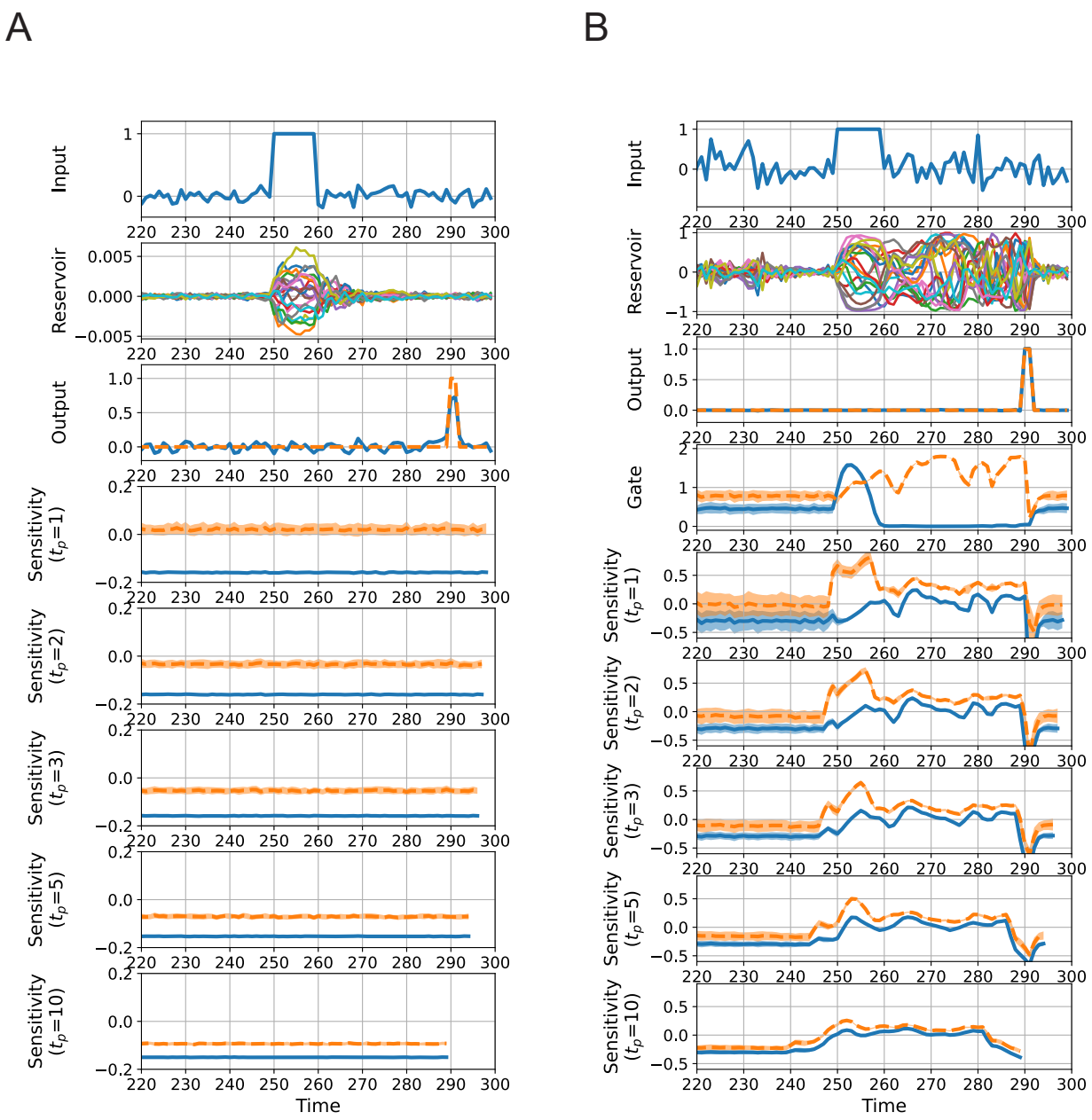

图6：简单注意力任务的敏感性分析结果。A. 储备池计算在 $N^{\mathrm{res}} = 100$ 和 $\sigma^{\mathrm{in}} = 0.1$ 情况下的结果。从上到下依次显示输入信号、储备池状态、输出和敏感度的时间演化。B. SM-RC 在 $N^{\mathrm{res}} = 100$ 和 $\sigma^{\mathrm{in}} = 0.3$ 情况下的结果。从上到下依次显示输入信号、储备池状态、输出、门控和敏感度的时间演化。在 A 和 B 中，使用不同的时间步 t_p 分析敏感度，并在这些时间步测量扰动的扩展幅度。对于输出层，实线表示预测输出，虚线表示教师信号。在显示储备池状态的面板中，仅显示 20 个储备池神经元。

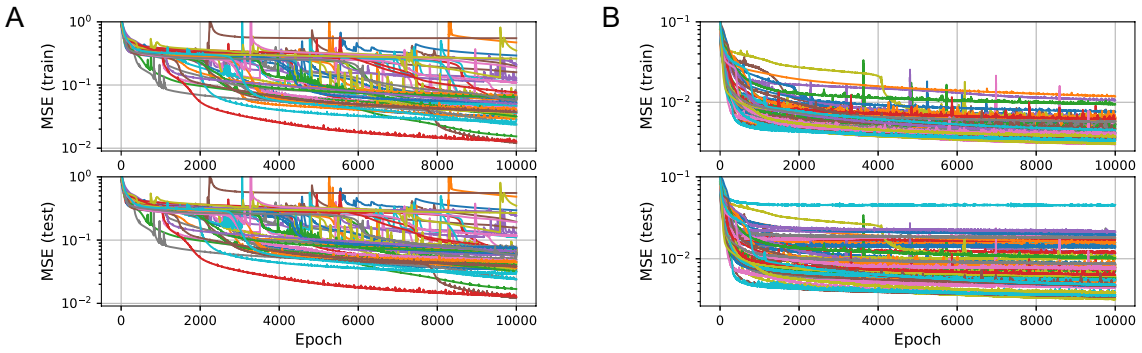

图7：在洛伦兹模型任务中，均方误差随学习轮次的变化，$N_{\mathrm{forward}} = 20$，$\sigma = 0.03$。图中展示了采用不同初始权重进行的50次试验，其中（A）输出层也通过时间反向传播进行训练，（B）输出层通过伪逆法进行训练。

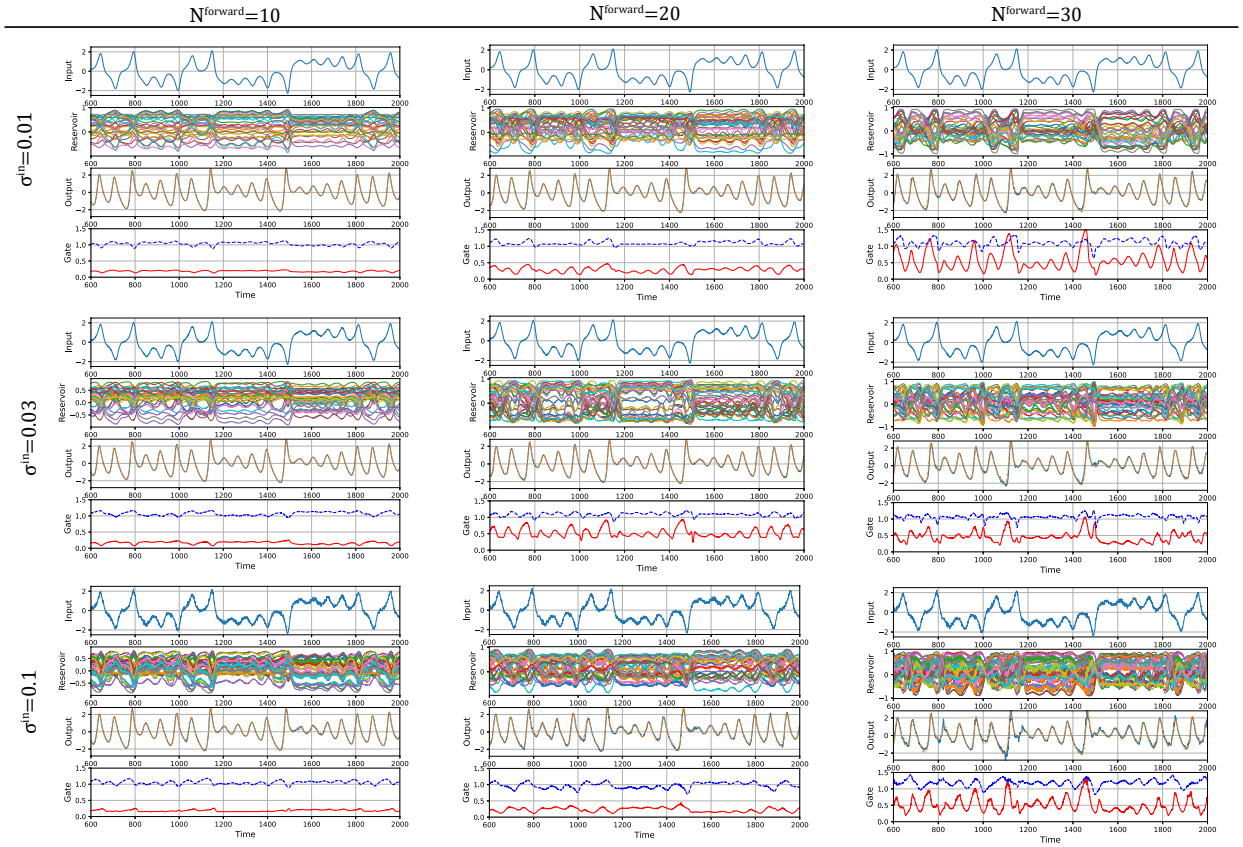

图8：对于采用不同输入噪声 σ^{in} 和不同预测步数 N^{forward}的洛伦兹模型任务，SM-RC 的时间演化。对于输出层，实线表示预测输出，虚线表示教师信号。对于门控，红色实线表示输入门，蓝色虚线表示谱半径。在显示储备池状态的面板中，仅展示了20个储备池神经元。

[12] Kohei Nakajima. 物理储备池计算——入门视角。《日本应用物理学杂志》，59(6):060501，2020年5月。[13] P.R. Vlachas、J. Pathak、B.R. Hunt、T.P. Sapsis、M. Girvan、E. Ott 和 P. Koumoutsakos. 用于复杂时空动力学预测的循环神经网络反向传播算法与储备池计算。《神经网络》，126:191–217，2020年。[14] Chenxi Sun、Moxian Song、Shenda Hong 和 Hongyan Li. 回声状态网络的设计与应用综述。*arXiv*，2012.02974，2020年。[15] Zhiqiang Tong 和 Gouhei Tanaka. 使用未经训练的卷积神经网络进行图像识别的储备池计算。载于*2018*年第*24*届国际模式识别会议（*ICPR*），第1289–1294页，2018年。[16] Jaideep Pathak、Brian Hunt、Michelle Girvan、Zhixin Lu 和 Edward Ott. 从数据中对大型时空混沌系统进行无模型预测：一种储备池计算方法。《物理评论快报》，120:024102，2018年1月。[17] Yuji Kawai、Jihoon Park、Ichiro Tsuda 和 Minoru Asada. 在模块化储备池计算中自组织形成具有大记忆容量的动力学正交基。载于国际人工神经网络会议，第635–646页，2022年。[18] Claudio Gallicchio、Alessio Micheli 和 Luca Pedrelli. 深度储备池计算：一项关键的实验分析。《神经计算》，268:87–99，2017年。[19] Yusuke Sakemi、Kai Morino、Timoth´ee Leleu 和 Kazuyuki Aihara. 通过沿时间拼接内部状态来缩减储备池计算的模型规模。《科学报告》，10:21794，2020年。[20] Pei Chen、Rui Liu、Kazuyuki Aihara 和 Luonan Chen. 基于时空信息变换进行多步超前预测的自储备池计算。《自然·通讯》，11(1):4568，2020年。[21] David Sussillo 和 L.F. Abbott. 从混沌神经网络中生成相干活动模式。《神经元》，63(4):544–557，2009年。[22] Alexander Rivkind 和 Omri Barak. 训练后的循环神经网络中的局部动力学。《物理评论快报》，118:258101，2017年6月。[23] Wilten Nicola 和 Claudia Clopath. 使用力训练对脉冲神经网络进行监督学习。《自然·通讯》，8(1):2208，2017年。[24] Toshitaka Matsuki 和 Katsunari Shibata. 基于内部混沌的学习中，在混沌边缘附近自适应平衡探索与利用。《神经网络》，132:19–29，2020年。[25] Benjamin Schrauwen、Marion Wardermann、David Verstraeten、Jochen J. Steil 和 Dirk Stroobandt. 利用内在可塑性改进储备池。《神经计算》，71(7):1159–1171，2008年。[26] Mohd-Hanif Yusoff、Joseph Chrol-Cannon 和 Yaochu Jin. 对回声状态网络中的神经可塑性建模，用于分类与回归。《信息科学》，364-365:184–196，2016年。[27] Guillermo B. Morales、Claudio R. Mirasso 和 Miguel C. Soriano. 揭示可塑性规则在储备池计算中的作用。《神经计算》，461:705–715，2021年。[28] Rodrigo Laje 和 Dean V Buonomano. 通过驯服循环神经网络中的混沌，实现稳健的时序与运动模式。《自然·神经科学》，16(7):925–933，2013年。[29] Katsuma Inoue、Kohei Nakajima 和 Yasuo Kuniyoshi. 通过混沌游走设计自发行为切换。《科学进展》，6(46):eabb3989，2020年。[30] Dzmitry Bahdanau、Kyunghyun Cho 和 Yoshua Bengio. 通过联合学习对齐与翻译实现神经机器翻译。*arXiv*，1409.0473，2014年。

[31] Ashish Vaswani、Noam Shazeer、Niki Parmar、Jakob Uszkoreit、Llion Jones、Aidan N Gomez、 ˙L ukasz Kaiser 和 Illia Polosukhin. 注意力就是一切。载于神经信息处理系统进展，第30卷，2017年。[32] Kai Han、Yunhe Wang、Hanting Chen、Xinghao Chen、Jianyuan Guo、Zhenhua Liu、Yehui Tang、An Xiao、Chunjing Xu、Yixing Xu、Zhaohui Yang、Yiman Zhang 和 Dacheng Tao. 视觉变换器综述。IEEE模式分析与机器智能汇刊，45(1):87–110，2023年。[33] John Jumper、Richard Evans、Alexander Pritzel、Tim Green、Michael Figurnov、Olaf Ronneberger、˘ Kathryn Tunyasuvunakool、Russ Bates、Augustin Z´ıdek、Anna Potapenko 等. 高精度蛋白质结构预测。《自然》，596(7873):583–589，2021年。[34] Alexander Thiele 和 Mark A Bellgrove. 注意的神经调制。《神经元》，97(4):769–785，2018年。[35] Elke Edelmann 和 Volkmar Lessmann. 海马网络的多巴胺能神经支配与调制。《细胞与组织研究》，373(3):711–727，2018年。[36] Jon Palacios-Filardo 和 Jack R Mellor. 海马长时程突触可塑性的神经调制。《神经生物学当前观点》，54:37–43，2019年。[37] I. B. Yildiz、H. Jaeger 和 S. J. Kiebel. 重新审视回声状态性质。《神经网络》，35:1–9，2012年。[38] M. Luko˘seviˇcius. 应用回声状态网络实用指南。《神经网络：行业诀窍》，第659–686页，2012年。[39] Herbert Jaeger. 回声状态网络中的长短期记忆：一项仿真研究的细节。雅各布斯大学技术报告，27，2012年。[40] Masanobu Inubushi 和 Kazuyuki Yoshimura. 超越记忆—非线性权衡的储备池计算。《科学报告》，7(1):10199，2017年。[41] Jean Panaioti Jordanou、Eric Aislan Antonelo、Eduardo Camponogara 和 Eduardo Gildin. 正交适当分解在回声状态网络中的应用研究。arXiv，2211.17179，2022年。[42] Zhixin Lu、Jaideep Pathak、Brian Hunt、Michelle Girvan、Roger Brockett 和 Edward Ott. 储备池观测器：对混沌系统中未测变量的无模型推断。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，27(4):041102，2017年。[43] Yuichi Katori、Hakaru Tamukoh 和 Takashi Morie. 基于超立方体中伪台球系统动力学的储备池计算。载于2019年国际神经网络联合会议（IJCNN），第1–8页，2019年。[44] Masanobu Inubushi 和 Susumu Goto. 非线性动力学的迁移学习及其在流体湍流中的应用。《物理评论E》，102:043301，2020年10月。[45] Ben Poole、Subhaneil Lahiri、Maithra Raghu、Jascha Sohl-Dickstein 和 Surya Ganguli. 瞬态混沌赋予深度神经网络指数级表达能力。载于神经信息处理系统进展，第29卷，2016年。[46] Gege Zhang、Gangwei Li、Weining Shen 和 Weidong Zhang. 深度神经网络的表达能力与训练：迈向混沌边缘？《神经计算》，386:8–17，2020年。[47] Katsuma Inoue、Soh Ohara、Yasuo Kuniyoshi 和 Kohei Nakajima. 双向变换器编码器表示中的瞬态混沌。《物理评论研究》，4:013204，2022年3月。[48] Omri Barak、David Sussillo、Ranulfo Romo、Misha Tsodyks 和 L.F. Abbott. 从不动点到混沌：延迟辨别的三个模型。《神经生物学进展》，103:214–222，2013年。[49] David Sussillo 和 Omri Barak. 打开黑箱：高维循环神经网络中的低维动力学。《神经计算》，25(3):626–649，2013年3月。[50] Lu´ıs F. Seoane. 储备池计算的进化方面。《英国皇家学会哲学汇刊B辑：生物科学》，374(1774):20180377，2019年。

[51] Laura E Su´arez、Blake A Richards、Guillaume Lajoie 和 Bratislav Misic。从神经形态网络的结构中学习功能。《自然·机器智能》，3(9):771–786，2021年。[52] F. C. Bauer、D. R. Muir 和 G. Indiveri。使用事件驱动神经形态处理器实时检测心电图异常，功耗极低。《*IEEE*生物医学电路与系统汇刊》，13(6):1575–1582，2019年。[53] M. Yamaguchi、Y. Katori、D. Kamimura、H. Tamukoh 和 T. Morie。一种作为储备池运行的混沌玻尔兹曼机及其模拟超大规模集成电路实现。载于*2019*年国际神经网络联合会议（*IJCNN*），第1–7页，2019年7月。[54] L. Appeltant、M. C. Soriano、G. Van der Sande、J. Danckaert、S. Massar、J. Dambre、B. Schrauwen、C. R. Mirasso 和 I. Fischer。利用单个动力学节点作为复杂系统进行信息处理。《自然·通讯》，2:468，2011年。[55] D. Brunner、B. Penkovsky、B. A. Marquez、M. Jacquot、I. Fischer 和 L. Larger。教程：延迟系统中的光子神经网络。《应用物理学杂志》，124(15):152004，2018年。[56] Bogdan Penkovsky、Laurent Larger 和 Daniel Brunner。利用现场可编程门阵列高效设计硬件支持的储备池计算。《应用物理学杂志》，124(16):162101，2018年。[57] P. J. Werbos。时间反向传播：它的作用及实现方法。《*IEEE*学报》，78(10):1550–1560，1990年10月。[58] Logan G Wright、Tatsuhiro Onodera、Martin M Stein、Tianyu Wang、Darren T Schachter、Zoey Hu 和 Peter L McMahon。通过反向传播训练的深度物理神经网络。《自然》，601(7894):549–555，2022年。[59] Timothy P Lillicrap、Daniel Cownden、Douglas B Tweed 和 Colin J Akerman。随机突触反馈权重支持深度学习中的误差反向传播。《自然·通讯》，7(1):13276，2016年。[60] Arild Nøkland。直接反馈对齐使深度神经网络能够学习。载于神经信息处理系统进展，第29卷，2016年。[61] Jordan Guerguiev、Timothy P Lillicrap 和 Blake A Richards。迈向利用分离树突进行深度学习。《生命》，6:e22901，2017年12月。[62] James M Murray。具有随机反馈的循环网络中的局部在线学习。《生命》，8:e43299，2019年5月。[63] Charlotte Frenkel、Martin Lefebvre 和 David Bol。无反馈学习：固定的随机学习信号支持深度神经网络的前馈训练。《神经科学前沿》，15:629892，2021年。[64] Guillaume Bellec、Franz Scherr、Anand Subramoney、Elias Hajek、Darjan Salaj、Robert Legenstein 和 Wolfgang Maass。脉冲神经元循环网络学习困境的一种解决方案。《自然·通讯》，11(1):3625，2020年。[65] Mitsumasa Nakajima、Katsuma Inoue、Kenji Tanaka、Yasuo Kuniyoshi、Toshikazu Hashimoto 和 Kohei Nakajima。采用生物启发式训练方法的物理深度学习：面向物理硬件的无梯度方法。《自然·通讯》，13:7847，2022年。[66] Diederik P. Kingma 和 Jimmy Ba。Adam优化器：一种随机优化方法。*arXiv*，1412.6980，2014年。[67] Adam Paszke、Sam Gross、Francisco Massa、Adam Lerer、James Bradbury、Gregory Chanan、Trevor Killeen、Zeming Lin、Natalia Gimelshein、Luca Antiga、Alban Desmaison、Andreas Kopf、Edward Yang、Zachary DeVito、Martin Raison、Alykhan Tejani、Sasank Chilamkurthy、Benoit Steiner、Lu Fang、Junjie Bai 和 Soumith Chintala。PyTorch：一种命令式风格、高性能的深度学习库。载于神经信息处理系统进展，第32卷，2019年。

[68] J. Snoek、H. Larochelle 和 R. P. Adams。机器学习算法的实用贝叶斯优化。载于神经信息处理系统进展第*25*卷，第2951–2959页。2012年。[69] P. I. Frazier。贝叶斯优化教程。*arXiv:1807.02811*，2018年。[70] K. Doya。循环神经网络学习中的分岔。载于 *[论文集] 1992 IEEE*国际电路与系统研讨会，第6卷，第2777–2780页，第6卷，1992年。[71] Sanjoy Dasgupta 和 David McAllester，编者。循环神经网络训练的难点，机器学习研究论文集第28卷，美国佐治亚州亚特兰大，2013年6月17–19日。PMLR。