局部同胚的熵及其在无限字母移位空间中的应用

Daniel Gon˛calves*、Danilo Royer 和 Felipe Augusto Tasca

2023年1月24日

arXiv:2301.09238v1 [math.DS] 23 Jan 2023

摘要

本文为由单个局部同胚生成的动力系统（Deaconu-Renault 系统）引入拓扑熵。更准确地说，我们推广了 Adler、Konheim 和 McAndrew 通过覆盖定义熵的方法，以及 Bowen 通过分离集定义熵的方法。我们提出了 Deaconu-Renault 系统之间因子映射的定义，并证明熵（通过分离集定义）在一致连续因子映射下总是减小。由于变分原理并不适用于我们所研究情形的全部一般性，我们证明了所提出的通过覆盖定义的熵是所提出的通过分离集定义的熵的下界。最后，我们计算了无限图（以及超图）的熵，并将其与 Gurevich 定义的无限图熵进行了比较。

2020年数学主题分类。主要分类：37B40。次要分类：05C12、37A35、37A55、54C70。

*Keyw*词：熵、Deaconu-Renault 系统、因子映射、图、超图移位空间 e.

1 引言

熵是数学中的一个经典概念，具有广泛的应用和诸多延伸。例如，在 C*代数动力学领域，Kerr 和 Voicolescu 研究了熵，见 [21, 22, 35]，；更具体地说，对于图 C* 代数和 Exel-Laca C* 代数，非交换熵已在 [19, 20, 26] 中得到研究。本文关注单生成动力系统（也称为 Deaconu-Renault 系统）的拓扑熵。对于这类系统，我们推广了 Adler、Konheim 和 McAndrew 通过覆盖定义熵的方法，以及 Bowen 通过分离集定义熵的方法，并开始研究这些广义熵的理论。

更精确地说，Deaconu-Renault 系统 [9, 12, 28] 由一个局部紧豪斯多夫空间以及该空间开子集之间的一个局部同胚构成。在

*部分经由巴西国家科学技术发展委员会（CNPq）和巴西高等教育人员培训协调会（Capes- PrInt）资助。

若干此类系统的例子中，我们提及自覆盖映射 [12], 、单边有限型移位 [23, 24], 、有向图的边界路径空间及其移位映射 [4, 38], 、超图的单边边移位空间及移位映射在非零长度点上的限制 [14, 33, 11], ， 以及与任意字母表上的单边子移位代数相关联的系统 [6]。

Deaconu-Renault 系统经常是将 C* 代数描述为群胚 C* 代数（将代数描述为 Steinberg 代数）的关键要素，而它们的动力学性质通常与相关代数的性质相联系。例如，[1] 中通过相关 C* 代数的同构来描述 Deaconu-Renault 系统的共轭。在我们的研究中，我们还描述了所提出的度量熵何时是 Deaconu-Renault 系统共轭下的不变量。

拓扑熵的通常定义（通过覆盖或 Bowen 度量定义）与从紧空间 X 到其自身的函数相关（在 Bowen 的情形下，空间可以是非紧的）。给定一个 Deaconu-Renault 系统（X， σ），我们要处理如下事实：映射 σ 的定义域只是 X 的一个开子集（不一定是整个空间），而空间 X 不一定是紧的。我们通过紧集来近似 X （不一定使用 [25] 中采用的不变紧子集），并在 Bowen 度量熵的情形下，从内部用闭集近似映射 σ 的各次迭代的定义域。当（X， σ）是经典意义上的动力系统时，我们的定义与通常定义一致；但对于一般情形，必须从头发展整套理论。例如，经典变分原理保证 Bowen 熵与 Adler、Konheim 和 McAndrew 熵一致，但这一原理在此并不成立（这是意料之中的，因为 [17] 证明了非紧集的 Bowen 熵取决于度量）。事实上，我们证明，Deaconu-Renault 系统的拓扑熵（即对 Adler、Konheim 和 McAndrew 熵的推广）是度量熵（即对 Bowen 熵的推广）的下界，见定理 6.18。由于篇幅所限，关于拓扑熵是否等于度量熵的下确界（如 [7, 27] 中的情形），我们留待今后研究。

通过 Deaconu-Renault 系统这一方法，我们可以定义与无限图或超图（包括无限矩阵）相关联的边移位空间的熵。在无限局部有限图这一更具体的情形中，已有两种广为认可的熵定义：一种由 Salama 提出 [31] ，另一种由 Gurevich 提出 [16] （关于概述，请参阅 [24]）。Gurevich 熵既可以作为度量熵计算（采用 Bowen 的定义），也可以作为有限子图熵的上确界计算。我们证明，这种熵与局部有限图所关联的 Deaconu-Renault 系统的度量熵一致。我们还证明，与行有限图相关联的 Deaconu-Renault 系统的拓扑熵（通过覆盖定义）可以计算为有限图熵的上确界。由此直接推论可得，Gurevich 熵可以通过覆盖计算，并且我们的定义推广了 Gurevich 的熵定义。

关于无限图的熵，一个有趣的事实是，Salama [31] 和 Petersen [29]给出了这样的例子：相对于 Salama 熵或

Gurevich 熵，熵可以通过因子映射增加。受此启发，我们提出了 Deaconu-Renault 系统之间因子映射的定义，并证明度量熵在一致连续因子映射下会降低。我们还证明了有关不变子集的度量熵的结果，这些结果使我们能够计算由不连通部分构成的图的熵。

正如 [23], 所示，文献中已有对某些可数状态马尔可夫移位（与无限矩阵相关）的熵的研究，其中还发展了 Perron-Frobenius 理论。我们研究无限矩阵的方法，是考察与该矩阵所关联的超图对应的 Deaconu-Renault 系统的熵（详情见 [34] ）。为展现其中涉及的深奥组合学，我们计算了更新移位的拓扑熵（这是拓扑混合可数马尔可夫移位的一个重要例子，已有研究，例如见 [32, 5, 26] ）。

本文结构如下。§2 介绍预备知识，并确立关于 Deaconu-Renault 系统共轭的一些事实。§3 定义 Deaconu-Renault 系统的度量熵，该定义基于 Bowen 对生成集和分离集的定义的推广；并证明，两个 Deaconu-Renault 系统之间若存在一致连续共轭，且其逆映射也一致连续，则二者的度量熵相同。§4 聚焦于因子映射：我们提出 Deaconu-Renault 系统之间因子映射的定义，并证明在一致连续因子映射下，度量熵总是减小（定理 4.6）。简短的 §5 主要讨论不变子集的度量熵。§6 通过覆盖定义拓扑熵；这一概念比度量熵更一般，因为即使没有度量，也可以定义拓扑熵。我们证明，对于度量 Deaconu-Renault 系统，拓扑熵是度量熵的下界（定理 6.18）。§7 聚焦于计算与图和超图相关联的 Deaconu-Renault 系统的熵。对于行有限图，我们证明拓扑熵可计算为有限子图熵的上确界（定理 7.21）。最后，我们计算若干例子的熵，包括有限图、局部有限图、行有限图、非连通图，以及与更新移位相关联的超图。

2 预备知识

本文中，我们将自然数集视为集合 $\{1, 2, \ldots\}$，并记作 $\mathbb{N}$。

Deaconu-Renault 系统，也称为单生成动力系统，由 Deaconu 在 [12] 和 Renault 在 [28]分别独立引入。本小节回顾其中的一些概念和术语，这些内容在 [1], 中提出，而该文又沿用了 [9]。

定义 2.1. *[1]* Deaconu-Renault 系统是一个二元组 (X, σ)，由一个局部紧豪斯多夫空间 X 和一个局部同胚 $\sigma : Dom(\sigma) \longrightarrow Im(\sigma)$ 构成，该局部同胚从开集$Dom(\sigma) \subseteq X$ 映射到开集 $Im(\sigma) \subseteq X$。归纳地定义 $Dom(\sigma^n) := \sigma^{-1}(Dom(\sigma^{n-1}))$，因此每个 $\sigma^n : Dom(\sigma^n) \longrightarrow Im(\sigma^n)$ 都是局部同胚，且 $\sigma^m \circ \sigma^n = \sigma^{m+n}$ 在 $Dom(\sigma^{m+n})$ 上成立。

在我们的研究中，我们将证明熵在一类共轭下保持不变。因此，下面回顾 Deaconu-Renault 系统之间共轭的概念。

定义 2.2. (*[1,* 定义 2.*1]*) 如果存在同胚 $\phi\colon\ X \to Y$，使得对所有 $x \in Dom(\sigma_X)$，$\sigma_Y(\phi(x)) = \phi(\sigma_X(x))$ 且 $\sigma_X(\phi^{-1}(y)) = \phi^{-1}(\sigma_Y(y))$，并且 $y \in Dom(\sigma_Y)$，则称 Deaconu-Renault 系统 (X, σ_X) 和 (Y, σ_Y) 共轭。在这种情况下，称 ϕ 为一个共轭。

Deaconu-Renault 系统之间的共轭还可以进一步描述如下。请注意，下面第 3 项中的条件是集合等式。

引理 2.3. *[1,* 引理 2.*6]* 设 (X, σ_X) 和 (Y, σ_Y) 是 Deaconu–Renault 系统，且设 $\phi\colon\ X \to Y$ 是一个同胚。以下条件等价：

1. $\phi\colon\ X \to Y$ 是一个共轭；
2. $\phi(Dom(\sigma_X)) = Dom(\sigma_Y)$，且 $\phi \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ \phi$ 在 $Dom(\sigma_X)$ 上；
3. 对所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$，$\phi(\sigma_X^{-1}(x)) = \sigma_Y^{-1}(\phi(x))$ 且 $\phi^{-1}(\sigma_Y^{-1}(y)) = \sigma_X^{-1}(\phi^{-1}(y))$。

接下来，我们证明共轭会保持局部同胚映射 σ 的迭代的定义域。

引理 2.4. 设 (X, σ_X) 和 (Y, σ_Y) 是 Deaconu–Renault 系统，且 $\phi\colon\ X \to Y$ 是一个共轭。那么，对每个 $i \in \mathbb{N}$，$\phi(Dom(\sigma_X^i)) = Dom(\sigma_Y^i)$，$\phi \circ \sigma_X^i = \sigma_Y^i \circ \phi$ 在 $Dom(\sigma_X^i)$ 上，且 $\sigma_X^i \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \sigma_Y^i$ 在 $Dom(\sigma_Y^i)$ 上。

证明。我们对 i 使用归纳法来证明该引理。$i = 1$ 的情形由定义 2.2 得出。设 $i > 1$，并假设对于所有 $k \in \{1, \ldots, i-1\}$，$\phi(Dom(\sigma_X^k)) = Dom(\sigma_Y^k)$ 在 $Dom(\sigma_X^k)$ 上成立，且 $\phi \circ \sigma_X^k = \sigma_Y^k \circ \phi$ 在 $Dom(\sigma_Y^k)$ 上成立。

若 $x \in Dom(\sigma_X^i)$，则 $\sigma_X^{i-1}(x) \in Dom(\sigma_X)$，因此 $\phi(\sigma_X(\sigma_X^{i-1}(x))) = \sigma_Y(\phi(\sigma_X^{i-1}(x))) = \sigma_Y^i(\phi(x))$。这意味着 $\phi(Dom(\sigma_X^i)) \subseteq Dom(\sigma_Y^i)$ 且 $\phi \circ \sigma_X^i = \sigma_Y^i \circ \phi$。为证明 $\phi(Dom(\sigma_X^i)) \supseteq Dom(\sigma_Y^i)$，固定 $y \in Dom(\sigma_Y^i)$。在这种情况下，$\sigma_Y^{i-1}(y) \in Dom(\sigma_Y) = \phi(Dom(\sigma_X))$。因此，$\phi^{-1}(\sigma_Y^{i-1}(y)) \in Dom(\sigma_X)$，我们可以应用 σ_X。于是 $\phi^{-1}(\sigma_Y^i(y)) = \phi^{-1}(\sigma_Y(\sigma_Y^{i-1}(y))) = \sigma_X(\phi^{-1}(\sigma_Y^{i-1}(y))) = \sigma_X(\sigma_X^{i-1}(\phi^{-1}(y))) = \sigma_X^i(\phi^{-1}(y))$，这意味着 $\phi^{-1}(y) \in Dom(\sigma_X^i)$，因此 $y \in \phi(Dom(\sigma_X^i))$。上述等式也表明，$\sigma_X^i \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \sigma_Y^i$ 在 $Dom(\sigma_Y^i)$ 上成立。

□

3 TDeaconu-Renault 系统的度量熵。

在本节中，我们始终假设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统，其 X 为带有度量 d 的度量空间。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in X$，采用约定 $Dom(\sigma^0) = X$，我们定义

$$I_n(x) = \{i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} : x \in Dom(\sigma^i)\}. \tag{1}$$

注记 3.1. 显然，对于任意 $n \in \mathbb{N}$和 $x \in X$，都有 $I_n(x) \neq \emptyset$，因为 0 总是在 $I_n(x)$中。此外，$I_n(x)$总是 $\mathbb{N} \cup \{0\}$的一个初始段。更具体地说，要么 $I_n(x) = \{0, \ldots, n-1\}$，要么 $I_n(x) = \{0, \ldots, m\}$，其中 $m < n-1$，且 m 是满足$x \in Dom(\sigma^i)$的最大自然数 i（当 $x \notin Dom(\sigma^{n-1})$时会出现这种情况）。

在研究 $\mathbb{Z}$的部分作用的熵时，定义了与上文相同的集合 $I_n(x)$，见[3]。然而，在部分作用的情形下，并不要求 $I_n(x)$ 是 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 的初始段。

为了度量两点迭代之间的距离，我们定义映射 $d_n : X \times X \to [0, +\infty)$，其中 $n \in \mathbb{N}$，如下:

$$d_n(x, y) = \max_{i \in I_n(x) \cap I_n(y)} d(\sigma^i(x), \sigma^i(y)).$$

注意，如果 $I_n(x) \cap I_n(y) = \{0\}$，那么 $d_n(x, y) = d(x, y)$。另一个重要的观察是，与部分作用的情形（见 [3]）一样， d_n 可能不是一个度量，因为无法保证三角不等式成立，下面的例子将说明这一点。

例 3.2。设 (X, σ) 是 Deaconu-Renault 系统，其中 $X = [0, 1)$， σ 由 $\sigma(x) = 2x$ 给出，且 $Dom(\sigma) = [0, \frac{1}{2})$。归纳地，我们得到 $Dom(\sigma^n) = [0, \frac{1}{2^n})$， $Im(\sigma^n) = [0, 1)$，并且$\sigma^n(x) = 2^n x$，对所有 $n \geq 0$ 均成立。注意， $d_3(0, \frac{24}{25}) = \frac{24}{25}$。另一方面， $d_3(0, \frac{1}{4}) + d_3(\frac{1}{4}, \frac{24}{25}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{50} = \frac{13}{25}$，因为 $I_n(\frac{1}{4}) = \{0, 1\}, \forall n \geq 2$。因此， d_3 不满足三角不等式。

即使要求局部同胚的定义域为既开又闭集， d_n 仍可能不满足三角不等式，下一例将对此进行说明。

例 3.3。设 $X = \prod_{n=0}^{\infty} \{0, 1\}$，并且对于 $(x_n)_n$、$(y_n)_n \in X$，定义 $d((x_n)_n, (y_n)_n) = \frac{1}{2^i}$，其中 i 是满足 $x_n \neq y_n$的最小指标。我们在 X上定义一个局部同胚：令$[0^n] = \{(x_j)_{j \in X} : x_j = 0$，对每个 $1 \leq j \leq n\}$， $Dom(\sigma^n) = [0^{3n}]$，并且对每个$n \in \mathbb{N}$， $Im(\sigma^n) = X$。显然， $Dom(\sigma^0) = X$。对于 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，同胚 $\sigma^n : [0^{3n}] \to X$定义为 $\sigma^n((x_i)_i) = (x_{i+3n})_i$。令 $x = 000111\ldots$、 $y = 0000111\ldots$和 $z = 00111\ldots$。于是，$d_2(x, y) = 1$，但 $d_2(x, z) = \frac{1}{4}$，且 $d_2(z, y) = \frac{1}{4}$。

注 3.4. 如例3.2和例3.3所示，映射 d_n 未必是度量，因为三角不等式可能不成立。不过， d_n 在 $Dom(\sigma^{n-1})$ 上的限制是度量，因为三角不等式在 $Dom(\sigma^{n-1})$ 中成立。

下面的引理将在后文中用到。

引理 3.5. 设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统， $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$，且 $x_1, x_2 \in X$ 满足 $d_n(x_1, x_2) > \varepsilon$。那么，存在 x_1 的开邻域 V_1 和 x_2 的开邻域 V_2，使得对于所有 $z_1 \in V_1$ 和 $z_2 \in V_2$，都有 $d_n(z_1, z_2) > \varepsilon$。

证明。由于 $d_n(x_1, x_2) > \varepsilon$，因此对于某个 $j \in I_n(x_1) \cap I_n(x_2)$，有 $d(\sigma^j(x_1), \sigma^j(x_2)) > \varepsilon$。令 $r = \frac{d(\sigma^j(x_1), \sigma^j(x_2)) - \varepsilon}{2}$。定义 $V_1 = \sigma^{-j}(B(\sigma^j(x_1), r))$ 和 $V_2 = \sigma^{-j}(B(\sigma^j(x_2), r))$，它们分别是 x_1 和 x_2的开邻域。令 $z_1 \in V_1$ 和 $z_2 \in V_2$。那么对于 $i = 1$， $\sigma^j(z_i) \in B(\sigma^j(x_i), r)$，2. 假设 $d(\sigma^j(z_1), \sigma^j(z_2)) \leq \varepsilon$。在这种情况下，可得 $d(\sigma^j(x_1), \sigma^j(x_2)) \leq$

$d(\sigma^j(x_1)\ \sigma^j(z_1)) + d(\sigma^j(z_1)\ \sigma^j(z_2)) + d(\sigma^j(z_2)\ \sigma^j(x_2)) < 2r + \varepsilon = d(\sigma^j(x_1)\ \sigma^j(x_2))$，这就产生了矛盾。因此可得 $d(\sigma^j(z_1)\ \sigma^j(z_2)) > \varepsilon$，进而对于所有 $z_1 \in V_1$和 $z_2 \in V_2$，都有 $d_n(z_1, z_2) > \varepsilon$。 □

为了定义 Deaconu-Renault 系统的度量熵，我们需要分离集和生成集的概念。由于局部同胚的定义域不必是闭集，下面我们将对这些概念进行推广。

定义 3.6。设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统，K 是 X, $n \in \mathbb{N}$ 的一个紧子集，且 Y 是 X 的一个子集。给定 $\varepsilon > 0$，我们称:

- 是 $A \subset K \cap Y$ 的一个 $(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Y)$-分离集，当且仅当对于每个 $x, y \in A, x \neq y$，都有 $d_n(x, y) > \varepsilon$。
- 是 $B \subset K \cap Y$ 的一个 $(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Y)$-生成集，当且仅当对于每个 $x \in K \cap Y$，都存在 $y \in B$ 使得 $d_n(x, y) \leq \varepsilon$。

我们用记号 $sep(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Y)$ 表示 $(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Y)$-分离集的最大基数，用 $span(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Y)$ 表示 $(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Y)$-生成集的最小基数。

位于 σ^{n-1} 的定义域内的闭子集 F，将在紧集的生成集和分离集的定义中发挥关键作用。接下来，我们描述 $sep(n, \varepsilon, \sigma, K \cap F)$ 与 $span(n, \varepsilon, \sigma, K \cap F)$ 之间的关系，并证明这些量总是有限的。

引理 3.7. 设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统，K 是 X 中的一个紧子集，$n \in \mathbb{N}$，且 F 是 X 的一个闭集，并且包含于 $Dom(\sigma^{n-1})$ 中。那么，对每个 $\varepsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$，都有:

1. 存在一个有限的（$n, \varepsilon, \sigma, K \cap F$）-生成集。因此，$span(n, \varepsilon, \sigma, K \cap F)$ 总是有限的。

2. 以下不等式成立:

$$span(n, \varepsilon, \sigma, K \cap F) \leq sep(n, \varepsilon, \sigma, K \cap F) \leq span(n, \frac{\varepsilon}{2}, \sigma, K \cap F).$$

证明。设 X, K, F 满足假设，并固定 $\varepsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$。

对于每个 $x \in K \cap F$，考虑开集

$$U(x, n, \varepsilon) = \bigcap_{i \in I_n(x)} \sigma^{-i} \left(\mathcal{B}(\sigma^i(x), \varepsilon) \right).$$

注意，对于每个 $y \in U(x, n, \varepsilon)$，$d_n(x, y) < \varepsilon$。此外，集合 $U := \bigcup U(x, n, \varepsilon)$ 是 $K \cap F$ 的一个开覆盖；由于 $K \cap F$ 是紧的，因此存在一个有限子覆盖

$$U(x_1, n, \varepsilon) \cup \ldots \cup U(x_m, n, \varepsilon).$$

因此，集合 $B=\{x_1,\ldots,x_m\}$ 是一个 $(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)$-生成集。

对于第二项，我们首先证明 $sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)\leq span(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K\cap F)$。设 A是一个 $(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)$-分离集， B是一个 $(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K\cap F)$-生成集。定义映射 Φ：$A\to B$：对每个点 $x\in A$，选取点 $\Phi(x)\in B$，使得 $d_n(x,\Phi(x))\leq\frac{\varepsilon}{2}$。注意， Φ是单射。事实上，若 x, $y\in A$ 满足 $\Phi(x)=\Phi(y)$，那么由于 d_n 在 F中满足三角不等式（见注 3.4），我们有 $d_n(x,y)\leq d_n(x,\Phi(x))+d_n(\Phi(x)\ y)\leq\varepsilon$；又由于 A是一个 $(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)$-分离集，因此可得 $x=y$。由 Φ的单射性可知， A的基数小于或等于 B的基数，因此 $sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)\leq span(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K\cap F)$。

现在，令 C 为一个具有最大基数的 $(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)$-分离集。那么，对于每个 $x\in(K\cap F)\setminus C$，都存在某个 $y\in C$，使得 $d_n(x,y)\leq\varepsilon$；否则， $C\cup\{x\}$ 就是一个基数大于 C 基数的 $(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)$- 分离集。因此， C 是一个 $(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)$- 生成集，由此可得条目 2 中的第一个不等式。

□

注 3.8. 对于 $x\in X$、 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\varepsilon>0$，通常将开集 $U(x,n,\varepsilon)=\bigcap_{i\in I_n(x)}\sigma^{-i}\left(\mathcal{B}(\sigma^i(x)\ \varepsilon)\right)$ 称为位于 x 处的开动力学球，参见例如 [3]。正如我们在上面的证明中所观察到的，对于每个 $y\in U(x,n,\varepsilon)$， $d_n(x,y)<\varepsilon$。

在我们定义 Deaconu-Renault 系统的熵的方法中，我们从内部用闭集逼近开集 $Dom(\sigma^{n-1})$。这样，我们便得到通常的分离集和生成集概念的一种推广，下面将对此作出精确定义。

定义 3.9. 设 (X,σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统， K 是 X 的一个紧子集， $n\in\mathbb{N}$，且 $\varepsilon>0$。定义

$$ssep(n,\varepsilon,\sigma,K)=\sup_F sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F),$$

and

$$sspan(n,\varepsilon,\sigma,K)=\sup_F span(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F),$$

其中，上确界取遍所有闭集 $F\subseteq Dom(\sigma^{n-1})$。

注 3.10. 总可以从内部用闭集逼近一个开集。事实上，设 X 是一个度量空间， $A\subseteq X$ 是一个开集。对每个 $i\in\mathbb{N}$,$B_i=\{x\in X$，定义： $d(x,A^c)\geq\frac{1}{i}\}$。注意，对每个 $i\in\mathbb{N}$ 和 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i=A$，都有 $B_i\subseteq B_{i+1}\subseteq A$。

以下结果是引理 3.7 的直接推论。

命题 3.11. 设 (X,σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统， K 是 X, $n\in\mathbb{N}$ 的一个紧子集，且 $\varepsilon>0$。那么，

$$sspan(n,\varepsilon,\sigma,K)\leq ssep(n,\varepsilon,\sigma,K)\leq sspan(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K).$$

值得注意的是， $ssep(n,\varepsilon,\sigma,K)$ 可以直接定义，无需从内部进行逼近。这就是下一个命题的内容。

命题 3.12. 设 (X,σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统，K 是 X, $n\in\mathbb{N}$ 的一个紧子集，并且 $\varepsilon>0$。则：

1.
$$ssep(n,\varepsilon,\sigma,K)=sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap Dom(\sigma^{n-1})).$$

2.
$$span(n,\varepsilon,\sigma,K\cap Dom(\sigma^{n-1}))\leq sspan(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K).$$

证明。我们先证明第一项。设 $F\subseteq Dom(\sigma^{n-1})$ 是 X 中的闭集，且 B 是一个 $(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)$-分离集。那么，$B$ 也是一个 $(n,\varepsilon,\sigma,K\cap Dom(\sigma^{n-1}))$-分离集，因此 $sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)\leq sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap Dom(\sigma^{n-1}))$。由于该不等式对 X 中每个满足 $F\subseteq Dom(\sigma^{n-1})$ 的闭集 F 都成立，我们得出 $ssep(n,\varepsilon,\sigma,K)\leq sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap Dom(\sigma^{n-1}))$。

接下来证明反向不等式。设 $A\subseteq K\cap Dom(\sigma^{n-1})$ 是一个具有最大基数的 $(n,\varepsilon,\sigma,K\cap Dom(\sigma^{n-1}))$-分离集。若 A 是有限集，则 A 是 X 中的闭集，并且 $sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap A)$ 等于 A 的基数。由于 $A\subseteq Dom(\sigma^{n-1})$，我们得到 $sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap Dom(\sigma^{n-1}))\leq ssep(n,\varepsilon,\sigma,K)$。若 A 是无限集，则对 A 的每个有限子集 B，都有 B 是 X 中的闭集，$B\subseteq K\cap Dom(\sigma^{n-1})$，且 $sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap B)$ 等于 B 的基数。因此，$ssep(n,\varepsilon,\sigma,K)$ 也是无限集，从而 $sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap Dom(\sigma^{n-1}))=ssep(n,\varepsilon,\sigma,K)$，证毕。

接下来，我们证明第二项。

显然，当 $sspan(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K)=\infty$ 时，不等式成立。假设 $sspan(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K)<\infty$。设 $F\subseteq Dom(\sigma^{n-1})$ 为一个闭集，使得 $span(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K\cap F)=sspan(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K)$，且 Ban $(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K\cap F)$ 是一个具有最小基数的生成集。下面证明 $B$is an $(n,\varepsilon,\sigma,K\cap Dom(\sigma^{n-1}))$-生成集。

假设存在一个 $y\in K\cap Dom(\sigma^{n-1})$，使得对每个 $b\in B$，$d_n(y,b)>\varepsilon$。那么 $y\notin F$，因为 B 是一个 $(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K\cap F)$ 生成集。此外，对每个 $x\in K\cap F$，我们有 $d_n(x,y)>\frac{\varepsilon}{2}$。事实上，假设存在 $x\in K\cap F$ 使得 $d_n(x,y)\leq\frac{\varepsilon}{2}$。选取 $b\in B$ 使得 $d_n(x,b)\leq\frac{\varepsilon}{2}$。那么，$d_n(y,b)\leq d_n(y,x)+d_n(x,b)\leq\varepsilon$，这是不可能的，因为对每个 $b\in B$，$d_n(y,b)>\varepsilon$。现在，定义 $F_1=F\cup\{y\}$，它是包含于 $Dom(\sigma^{n-1})$ 的闭集。设 C 为一个具有最小基数的 $(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K\cap F_1)$-生成集。注意到 $C=C_1\cup\{y\}$，其中 $C_1\subseteq K\cap F$（因为对每个 $x\in K\cap F$，$d_n(x,y)>\frac{\varepsilon}{2}$）。此外，$C_1$ 是一个 $(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K\cap F)$-生成集。回想一下

$$span(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K\cap F)=sspan(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K)=$$

$$=sup\{span(n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K\cap Y):Y\subseteq Dom(\sigma^{n-1})\text{ is closed in }X\}.$$

由于 C 属于取上述上确界时所考虑的集合之一，因此 C 的基数小于或等于 B的基数；又由于 $C=C_1\cup\{y\}$，我们得出 C_1 的基数小于 B的基数。但这与 B 是一个具有最小基数的（$n,\frac{\varepsilon}{2},\sigma,K\cap F$）生成集相矛盾。

我们上面已经证明， B是一个（$n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1})$）生成集。因此，

$$span(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1})) \leq sspan(n, \frac{\varepsilon}{2}, \sigma, K),$$

如所期望的。

□

对于紧开集，定义生成集和分离集的另一种方式是与 σ^{n-1}的定义域的闭包取交集。当我们将本节的熵与通过覆盖定义的熵联系起来时，这种方式会很有用。详情如下。

命题 3.13. 设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统，且 $K \subseteq X$ 是一个紧开集。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$，以下不等式成立。

1. $sep(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1})) \leq sep(n, \varepsilon, \sigma, K \cap \overline{Dom(\sigma^{n-1})}) \leq sep(n, \frac{\varepsilon}{2}, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1}))$.
2. $span(n, \varepsilon, \sigma, K \cap \overline{Dom(\sigma^{n-1})}) \leq span(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1}))$。

证明。第 1 项中的第一个不等式显然成立，因为每个 $(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1}))$-分离集也是 $(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1}))$-分离集。

对于第 1 项中的第二个不等式，令 $A \subseteq K \cap \overline{Dom(\sigma^{n-1})}$ 为基数最大的 $(n, \varepsilon, \sigma, \overline{K \cap Dom(\sigma^{n-1})})$-分离集。对于每个 $a \in A$，开集 $U(a, n, \frac{\varepsilon}{4}) \cap K$ 是 a 的一个邻域（其中 $U(a, n, \frac{\varepsilon}{4})$ 是 a 处的一个动力球，参见注 3.8），因此存在 $x_a \in Dom(\sigma^{n-1}) \cap U(a, n, \frac{\varepsilon}{4}) \cap K$。定义

$$B = \{x_a : a \in A\}.$$

回顾一下，对于所有 $a \in A$， $d_n(a, x_a) < \frac{\varepsilon}{4}$。我们证明，对于每个 $x_a, x_b \in B$， $d_n(x_a, x_b) > \frac{\varepsilon}{2}$：令$a, b \in A$，并令 $i \in I_n(a) \cap I_n(b)$ 满足 $d(\sigma^i(a), \sigma^i(b)) > \varepsilon$。由于 $d_n(a, x_a) < \frac{\varepsilon}{4}$，我们有 $d(\sigma^i(a), \sigma^i(x_a)) < \frac{\varepsilon}{4}$，类似地， $d(\sigma^i(b), \sigma^i(x_b)) < \frac{\varepsilon}{4}$。于是，

$$\varepsilon < d(\sigma^i(a), \sigma^i(b)) \leq d(\sigma^i(a), \sigma^i(x_a)) + d(\sigma^i(x_a), \sigma^i(x_b)) + d(\sigma^i(x_b), \sigma^i(b)) <$$

$$< d(\sigma^i(x_a), \sigma^i(x_b)) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此， $d(\sigma^i(x_a), \sigma^i(x_b)) > \frac{\varepsilon}{2}$，从而 $d_n(x_a, x_b) > \frac{\varepsilon}{2}$。由于 $B \subseteq K \cap Dom(\sigma^{n-1})$，且 B的基数等于 A的基数，我们得出 $sep(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1})) \leq sep(n, \frac{\varepsilon}{2}, \sigma, K \cap \overline{Dom(\sigma^{n-1})})$，即得所需结论。

接下来，我们证明条目 2。显然，若 $span(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1})) = \infty$，则该不等式成立。假设 $span(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1})) < \infty$。令 B 为基数最小的 $(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1}))$-生成集。我们证明 B 也是一个 $(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1}))$-生成集：取 $x \in K \cap \overline{Dom(\sigma^{n-1})}$。对每个 $m \in \mathbb{N}$，取满足 $d_n(x, x_m) \leq \frac{1}{m}$ 的 $x_m \in K \cap Dom(\sigma^n)$，并取满足 $d_n(x_m, b_m) \leq \varepsilon$ 的 $b_m \in B$。由于 B 是一个有限集，存在$b \in B$，使得对无穷多个 $m \in \mathbb{N}$，都有 $b_m = b$。因此，存在一个子列 $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$，使得

对每个 $j \in \mathbb{N}$，都有 $b_{m_j} = b$。令 $i \in I_n(x) \cap I_n(b)$ 满足 $d_n(x,b) = d(\sigma^i(x)\ \sigma^i(b))$。那么，对每个 $j \in \mathbb{N}$，我们有

$$d_n(x,b) = d(\sigma^i(x), \sigma^i(b)) \leq d(\sigma^i(x), \sigma^i(x_{m_j})) + d(\sigma^i(x_{m_j}), \sigma^i(b)) \leq$$

$$\leq d_n(x, x_{m_j}) + d_n(x_{m_j}, b_{m_j}) \leq \frac{1}{m_j} + \varepsilon.$$

因此，$d_n(x,b) \leq \varepsilon$。这表明 B 是一个（$n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{\overline{n-1}})$）-生成集，因此

$$span(n, \varepsilon, \sigma, K \cap \overline{Dom(\sigma^{n-1})}) \leq span(n, \varepsilon, \sigma, K \cap Dom(\sigma^{n-1})).$$

□

现在，我们以一种方式定义 Deaconu-Renault 系统的度量熵，使得当同胚 σ 的定义域是整个空间 X时，该定义与通常的度量熵定义一致。

定　义 3.14. 设 (X, σ) 是度量空间 (X, d) 上的 Deaconu-Renault 系统。

1. 对每个紧集 $K \subseteq X$ 和 $\varepsilon > 0$，定义

$$h_\varepsilon(\sigma, K, d) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ssep(n, \varepsilon, \sigma, K).$$

2. 对每个紧集 $K \subseteq X$，定义

$$h_d(\sigma, K) = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(\sigma, K, d).$$

3. 将 Deaconu-Renault 系统 (X, σ) 的度量熵定义为

$$h_d(\sigma) = \sup_{K\subseteq X} h_d(\sigma, K) \tag{2}$$

其中，上确界取遍所有紧集 $K \subseteq X$。

注 3.15. 回想一下，对于扩展实数序列，上极限是良定义的（其中扩展实数 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ 配备通常的序 $-\infty < r < \infty$，对所有 $r \in \mathbb{R}$ 均成立，以及序拓扑）。在上面的条目 1 中，可能存在某个 n，使得$ssep(n, \varepsilon, \sigma, K) = \infty$，此时我们将 $\frac{1}{n}$log ssep$(n, \varepsilon, \sigma, K)$ 设为 ∞，并考虑一个扩展实数序列的上极限。

在上面的第 2 项中，量 ssep$(n, \varepsilon, \sigma, K)$ 随着 ε 减小而单调递增，因此 $h_\varepsilon(\sigma, K, d)$ 也如此。所以，当 $\varepsilon \to 0$ 时极限确实存在。此外，命题 3.11 中的不等式表明，若在定义 3.14 的第一项中用 sspan$(n, \varepsilon, \alpha, K)$ 替换 ssep$(n, \varepsilon, \alpha, K)$，便可得到 $h_d(\sigma)$ 的等价定义。

注记 3.16。根据命题 3.12 的第一项，我们可以在上述熵的定义中使用 $sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap Dom(\sigma^{n-1}))$，而不用 $ssep(n,\varepsilon,\sigma,K)$。此外，若 (X,σ) 是一个具有紧开集基的 Deaconu-Renault 系统，那么根据命题 3.13 和命题 3.12，我们可以在定义 3.14 的第一项中用 $sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap Dom(\sigma^{n-1}))$ 替换 $ssep(n,\varepsilon,\sigma,K)$；并且，为了得到度量熵 $h_d(\sigma)$，我们可以对 X 的所有紧开集取上确界，而不必对所有紧集取上确界（这是因为，若 $K\subseteq L$ 是 X 中的两个紧集，则 $h_d(\sigma,K)\leq h_d(\sigma,L)$，并且 X 中的任一紧集都包含于某个紧开集中）。

以下假设适用于大量 Deaconu-Renault 系统，并足以保证序列 $(ssep(n,\varepsilon,\sigma,K))_n$ 对紧开集K是单调的。

假设 3.17。设 (X,σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统。若 $x\in X$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 满足$I_n(x)=\{0,\dots,n-1\}$，那么对于 x 的每个开邻域 U，都存在 $y\in U$，使得$I_{n+1}(y)=\{0,\dots,n\}$。

注 3.18。Deaconu-Renault 系统 (X,σ) 满足假设 3.17，当且仅当对于每个 $n\in\mathbb{N}$、$x\in Dom(\sigma^{n-1})$ 以及 x 的开邻域 U，都存在 $y\in U$，使得$y\in Dom(\sigma^n)$。例如，若每个 $Dom(\sigma^n)$ 在 X 中稠密，则该条件成立。

命题 3.19. 设 (X,σ) 是满足假设 3.17 的 Deaconu-Renault 系统，并设K是 X 的一个紧开子集。那么，$ssep(n,\varepsilon,\sigma,K)\leq ssep(n+1,\varepsilon,\sigma,K)$。

证明. 设 $F\subseteq Dom(\sigma^{n-1})$ 是一个闭集，且 S是基数最大的 $(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)$-分离集。注意，对每个 $s\in S$，都有 $I_n(s)=\{0,\dots,n-1\}$（因为 $S\subseteq Dom(\sigma^{n-1})$）。根据 $(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)$-分离集的定义，对每个 $x,y\in S$，都存在 $0\leq j\leq n-1$，使得 $d(\sigma^j(x)\ \sigma^j(y))>\varepsilon$。此外，根据引理 3.7，$S$ 是一个有限集，因此我们记作$S=\{s_1,\dots s_k\}$。

现在我们使用引理 3.5：对于每个 $i\in\{1,\dots,k\}$，存在开集 $V_i\subseteq K$（因为 K 是紧开集），使得 $s_i\in V_i$；此外，对于 $z_i\in V_i$ 和 $z_j\in V_j$，我们有 $d_n(z_i,\ z_j)>\varepsilon$，对每个满足 $i\neq j$ 的 i、$j\in\{1,\dots,k\}$ 都成立。对于每个 $i\in\{1,\dots,k\}$，选取 $w_i\in V_i$，使得 $I_{n+1}(w_i)=\{0,\dots,n\}$。这样的 w_i 存在，因为（X，σ）满足假设 3.17。现在注意到，$\{w_1,..,w_k\}$ 是一个（$n+1$，ε，σ，$K\cap\{w_1,\dots,w_k\}$）分离集，因此，

$$sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)\leq sep(n+1,\varepsilon,\sigma,K\cap\{w_1,\dots,w_k\}).$$

由于 $sep(n+1,\varepsilon,\sigma,K\cap\{w_1,\dots,w_k\})\leq ssep(n+1,\varepsilon,\sigma,K)$，因此对于每个闭集 $F\subseteq Dom(\sigma^{n-1})$，都有 $sep(n,\varepsilon,\sigma,K\cap F)\leq ssep(n+1,\varepsilon,\sigma,K)$，从而

$$ssep(n,\varepsilon,\sigma,K)\leq ssep(n+1,\varepsilon,\sigma,K).$$

□

共轭不变性是熵最重要的特性之一。本节余下部分将描述 Deaconu-Renault 系统的这一性质。由于我们讨论的是度量熵，我们首先说明度量等价性对熵的影响。

定义 3.20. 设 d_1 和 d_2 是 X上的两个度量。若 $Id_X\colon (X,d_1) \to (X,d_2)$ 和 $Id_X\colon (X,d_2) \to (X,d_1)$ 连续，则称 d_1 和 d_2 连续等价。若 $Id_X : (X,d_1) \to (X,d_2)$ 一致连续，则称 d_2 关于 d_1 一致连续。若两个映射都一致连续，则称这两个度量一致等价。

注 3.21. 若 d_1 和 d_2 连续等价，则映射 $f : (X,d_1) \to (X,d_1)$ 连续，当且仅当 $f\colon (X,d_2) \to (X,d_2)$ 连续。因此，若 $((X,d_1)\ \sigma)$ 是一个 Deaconu-Renault 系统，且 d_1 与 d_2连续等价，则 $((X,d_2)\ \sigma)$ 也是一个 Deaconu-Renault 系统。不过，连续等价的度量不一定保持熵不变，参见 $[37,$ 第 15 条注释，第 $171]$页。

正如 $\mathbb{Z}$ 的部分作用熵的情形（见 $[3]$），Deaconu-Renault 系统的熵在一致等价的度量下保持不变。下面将对此作出精确说明。

命题 3.22. 设 (X,σ) 是度量空间 (X,d) 上的 Deaconu-Renault 系统，且 d' 是 X 上的一个度量，使得 d 和 d' 是 X 上一致等价的度量。那么 $h_d(\sigma) = h_{d'}(\sigma)$。

证明。证明与 $[3,$ 引理 3.15$]$ 中的证明相同。 □

下面给出一个例子，说明仅有一个度量相对于另一个度量一致连续，并不足以保证熵的不变性。

例3.23. 考虑配备离散度量 d_1 的度量空间 $(\mathbb{R},d_1)$，以及配备通常度量 d_2 的度量空间 $(\mathbb{R},d_2)$。映射 $Id_X\colon (\mathbb{R},d_1) \to (\mathbb{R},d_2)$ 是一致连续的，但 $Id_X\colon (\mathbb{R},d_2) \to (\mathbb{R},d_1)$ 不是。设 $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为同胚 $\sigma(x) = 2x$。那么，$h_{d_2}(\sigma) =$log(2)，且 $h_{d_1}(\sigma) = 0$（因为 $(\mathbb{R},d_1)$ 中的每个紧集 K 都是有限集）。

为结束本节，我们证明：对于 Deaconu-Renault 系统之间的一致连续共轭，若其逆映射也一致连续，则熵是不变的。

定理 3.24. 设 (X,σ_X) 和 (Y,σ_Y) 是 Deaconu-Renault 系统，其中 (X,d) 和 (Y,ρ) 是度量空间。设 $\phi\colon X \to Y$是 (X,σ_X) 与 (Y,σ_Y) 之间的共轭，且 ϕ和 ϕ^{-1} 是一致连续的。那么 h_d $(\sigma_X) = h_\rho$({v20)。

证明。设 d' 是 Y 上由 $d'(y_1,y_2) = d(\phi^{-1}(y_1)\ \phi^{-1}(y_2)$ 定义的度量，并设 $\phi_{d,d'} : (X,d) \to (Y,d')$ 由 $\phi_{d,d'}(x) = \phi(x)$ 给出。显然，$\phi_{d,d'}$ 是等距同构。此外，由于 ϕ 和 ϕ^{-1} 一致连续，我们得到 $Id = \phi_{d,d'} \circ \phi^{-1}$ 和 $Id = \phi \circ \phi_d^{-1}{}_{,d'}$ 分别是从 (Y,ρ) 到 (Y,d') 以及从 (Y,d') 到 (Y,ρ) 的一致连续映射。由命题 3.22 可知，$h_{d'}(\sigma_Y) = h_\rho(\sigma_Y)$。

最后，我们需要证明 $h_d(\sigma_X) = h_{d'}(\sigma_Y)$。如上所述，$\phi_{d,d'}$ 是从 (X,d) 到 (Y,d') 的等距同构。注意，对所有 $x \in X$ 和所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $I_n(x) = I_n(\phi_{d,d'}(x))$。事实上，若 $i \in I_n(x)$，则 $x \in Dom(\sigma_X^i)$。因此，由引理 2.4，$\phi_{d,d'}(x) \in Dom(\sigma_Y^i)$，从而 $i \in I_n(\phi_{d,d'}(x))$。于是，对所有 $x, y \in X$

$$\begin{aligned} d'_n(\phi_{d,d'}(x), \phi_{d,d'}(y)) =& d'_n(\phi(x), \phi(y)) \\ =& \max_i d'(\sigma_Y^i(\phi(x)), \sigma_Y^i(\phi(y))) \\ =& \max_i d'(\phi(\sigma_X^i(x)), \phi(\sigma_X^i(y))) \\ =& \max_i d(\sigma_X^i(x), \sigma_X^i(y)) \\ =& d_n(x,y). \end{aligned}$$

现在，对于每个 $\varepsilon > 0$、$n \in \mathbb{N}$、$K \subseteq X$ 紧集以及 $F \subseteq Dom(\sigma_X^{n-1})$，一个$(n, \varepsilon, \sigma_X, K \cap F)$-分离集会产生一个具有相同基数的$(n, \varepsilon, \sigma_Y, \phi_{d,d'}(K) \cap \phi_{d,d'}(K \cap F))$-分离集。因此，$\text{sep}(n, \varepsilon, \sigma_X, K \cap F) \leq \text{sep}(n, \varepsilon, \sigma_Y, \phi_{d,d'}(K) \cap \phi_{d,d'}(K \cap F))$。这意味着 $\text{sep}(n, \varepsilon, \sigma_X, K) \leq \text{sep}(n, \varepsilon, \sigma_Y, \phi_{d,d'}(K))$，从而 $h_\varepsilon(\sigma_X, K, d) \leq h_\varepsilon(\sigma_Y, \phi_{d,d'}(K)\ d')$。因此，$h_d(\sigma_X, K) \leq h_{d'}(\sigma_Y, \phi_{d,d'}(K))$，从而 $h_d(\sigma_X) \leq h_{d'}(\sigma_Y) = h_\rho(\sigma_Y)$。类似地，可以证明 $h_d(\sigma_X) \geq h_\rho(\sigma_Y)$。

□

4 因子映射

在上一节中，我们从一致连续共轭的角度描述了度量熵的不变性。本节中，我们提出两个 Deaconu-Renault 系统之间因子映射的定义，并证明在一致连续因子映射下，度量熵总是递减的。

定义 4.1。设 X, Y 为拓扑空间。若映射 $f\colon X \to Y$ 满足：对于每个紧子集 $K \subseteq Y$，都存在某个紧子集 $C \subseteq X$，使得 $f(C) = K$，则称其为紧覆盖。

例如，真映射（即映射 $f\colon X \to Y$ 满足：对于每个紧集 $K \subseteq Y$，$f^{-1}(K)$ 都是紧集）是紧覆盖。

定义 4.2。设 (X, σ_X) 和 (Y, σ_Y) 为 Deaconu-Renault 系统。若 $\phi\colon X \to Y$ 是连续的紧覆盖满射，且满足 $\phi(Dom(\sigma_X)) \subseteq Dom(\sigma_Y)$、对所有 $x \in Dom(\sigma_X)$ 均有 $\sigma_Y(\phi(x)) = \phi(\sigma_X(x))$，以及 $\phi^{-1}(Dom(\sigma_Y)) \subseteq Dom(\sigma_X)$，则称其为因子映射。

注 4.3. 由于 $\phi^{-1}(Dom(\sigma_Y)) \subseteq Dom(\sigma_X)$，因此我们有 $Dom(\sigma_Y) \subseteq \phi(Dom(\sigma_X))$。此外，由于 $\phi(Dom(\sigma_X)) \subseteq Dom(\sigma_Y)$，因此我们有 $\phi(Dom(\sigma_X)) = Dom(\sigma_Y)$

我们对因子映射的定义与定义 2.2 中给出的共轭定义相容。事实上，如果一个因子映射具有连续逆映射，那么它就是一个共轭，下面将对此进行说明。

命题 4.4. 设 ϕ 是从 (X,σ_X) 到 (Y,σ_Y) 的一个因子映射。若 ϕ 是单射且具有连续逆映射，则它是一个共轭。

证明。我们只需证明 $\sigma_X \circ \phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \sigma_Y$属于 $Dom(\sigma_Y)$。令 $y \in Dom(\sigma_Y)$。由于ϕ是因子映射，因此有 $Dom(\sigma_Y) = \phi(Dom(\sigma_X))$。于是，存在 $x \in Dom(\sigma_X)$，使得 $y = \phi(x)$。由于 ϕ是因子映射，它与移位可交换，即 $\phi(\sigma_X(x)) = \sigma_Y(\phi(x))$。将最后一个等式两边左乘 ϕ^{-1}，并利用 $x = \phi^{-1}(y)$，可得 $\sigma_X(\phi^{-1}(y)) = \phi^{-1}(\sigma_Y(y))$，证毕。

□

接下来，我们说明因子映射如何保持局部同胚 σ 的各次迭代的定义域。

引理 4.5. 设 (X,σ_X) 和 (Y,σ_Y) 是 Deaconu-Renault 系统，且 $\phi\colon X \to Y$是一个因子映射。那么，对于所有 $i \in \mathbb{N}$和$x \in Dom(\sigma_X^i)$，有 $\phi^{-1}(Dom(\sigma_Y^i)) \subseteq Dom(\sigma_X^i)$ 以及 $\sigma_Y^i(\phi(x)) = \phi(\sigma_X^i(x))$。

证明。我们通过归纳法证明该引理。对于 $k = 1$，由于 ϕ 是一个因子，因此对于 $x \in Dom(\sigma_X)$，有 $\phi^{-1}(Dom(\sigma_Y)) \subseteq Dom(\sigma_X)$，且 $\sigma_Y(\phi(x)) = \phi(\sigma_X(x))$。

S假设该命题对 k 成立。我们来证明它对 $k+1$ 也成立。首先，我们证明 at

$$\phi^{-1}(Dom(\sigma_Y^{k+1})) \subseteq Dom(\sigma_X^{k+1}).$$

设 $x \in \phi^{-1}(Dom(\sigma_Y^{k+1}))$。那么，$\phi(x) \in Dom(\sigma_Y^{k+1}) \subseteq Dom(\sigma_Y^k)$，因此 $x \in \phi^{-1}(Dom(\sigma_Y^k)) \subseteq Dom(\sigma_X^k)$（最后一个包含关系由归纳假设得出）。同样，由归纳假设可得 $\phi(\sigma_X^k(x)) = \sigma_Y^k(\phi(x)) \in Dom(\sigma_Y)$。因此，$\sigma_X^k(x) \in \phi^{-1}(Dom(\sigma_Y)) \subseteq Dom(\sigma_X)$，这意味着 $x \in Dom(\sigma_X^{k+1})$。

最后，请注意 $\phi(\sigma_X^{k+1}(x)) = \phi(\sigma_X^k(\sigma_X(x))) = \sigma_Y^k(\phi(\sigma_X(x))) = \sigma_Y^{k+1}(\phi(x)$). □

现在我们可以证明，在一致连续因子映射下，度量熵总是递减的。

定理 4.6. 设 (X,σ_X) 和 (Y,σ_Y) 是 Deaconu–Renault 系统，且 $\phi\colon X \to Y$ 是一个一致连续因子映射。那么，$h_d(\sigma_X) \geq h_d(\sigma_Y)$.

证明。设 K_Y 是 Y 的一个紧子集。由于 ϕ 是因子映射，因此存在一个紧集 $K_X \subseteq X$，使得 $\phi(K_X) = K_Y$.

设 $\varepsilon > 0$，并选择 $0 < \delta < \varepsilon$，使得若 $d(x,y) < \delta$，则 $d(\phi(x)\ \phi(y)) < \epsilon$。给定 $n \in \mathbb{N}$，我们证明 $sspan(n,\varepsilon,\sigma_Y,K_Y) \leq sspan(n,\delta,\sigma_X,K_X)$.

设 F 是 $Dom(\sigma_Y^{n-1})$ 的闭子集。那么，根据引理 4.5，$\phi^{-1}(F)$ 是 $Dom(\sigma_X^{n-1})$ 的闭子集。

选取 A 作为一个 $(n,\delta,\sigma_X,K_X \cap \phi^{-1}(F))$ 生成集。那么，$\phi(A)$ 是一个 $(n,\varepsilon,\sigma_Y,K_Y \cap F)$ 生成集。事实上，对于每个 $z \in K_Y \cap F$，令 $x \in K_X \cap \phi^{-1}(F)$ 满足 $z = \phi(x)$。

令 $a \in A$ 满足 $d_n(a,x) \leq \delta$(因此 $\max_{i \in I_n(a) \cap I_n(x)}\{d(\sigma^i(x)\ \sigma^i(a))\} \leq \delta$)。于是，由引理 4.5 可得

$$d_n(z,\phi(a)) = \max_{i \in I_n(\phi(x)) \cap I_n(\phi(a))}\{d(\sigma^i(\phi(x)),\sigma^i(\phi(a)))\} = \max_{i \in I_n(x) \cap I_n(a)}\{d(\phi(\sigma^i(x)),\phi(\sigma^i(a)))\} \leq \varepsilon,$$

其中最后一个不等式由 ϕ 的一致连续性得出。因此， $\phi(A)$ 是一个 $(n, \varepsilon, \sigma_Y, K_Y \cap F)$ 生成集，证毕。

现在，由于 $\phi(A)$ 的基数小于或等于 A 的基数，可得 $span(n, \varepsilon, \sigma_Y, K_Y \cap F) \leq span(n, \delta, \sigma_X, K_X \cap \phi^{-1}(F)) \leq sspan(n, \delta, \sigma_X, K_X)$。对定义域 σ_Y^{n-1} 中的闭集 F 取上确界，可得 $sspan(n, \varepsilon, \sigma_Y, K_Y) \leq sspan(n, \delta, \sigma_X, K_X)$。由于 $\delta \to 0$ 如 $\varepsilon \to 0$，上述不等式意味着 $h_d(\sigma_Y, K_Y) \leq h_d(\sigma_X, K_X) \leq h_d(\sigma_X)$。对所有紧集 $K_Y \subseteq Y$ 取上确界，我们得到 $h_d(\sigma_Y) \leq h_d(\sigma_X)$，证毕。

□

例4.7。设 $(\mathbb{R}, d_1)$ 和 $(\mathbb{R}, d_2)$ 是例3.23中的 Deaconu-Renault 系统，其中 d_1 和 d_2 分别是离散度量和通常度量，且 $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是同胚 $\sigma(x) = 2x$。注意，映射 $\phi : (\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, d_2)$，由 $\phi(x) = x$ 给出，是一个一致连续映射，但不是因子映射，因为它不是紧覆盖映射。在此情形下， $h_{d_2}(\sigma) = log(2)$，且 $h_{d_1}(\sigma) = 0$。因此，如果我们希望熵在一致连续因子映射下减小，就不能去掉因子映射是紧覆盖映射这一假设。

注 4.8. 在可数马尔可夫移位空间（特别是与局部有限图相关联的移位）的文献中，有两种已提出的熵理论，一种由 Salama 提出，另一种由 Gurevic 提出 $[16, 31, 36, 24]$。在这两种情况下，都存在熵可通过因子增加的例子（在此情境中，因子是一个连续、满射且与移位交换的映射），见 $[24, 31, 29]$ 和 $[23,$ 例 7.2.8$]$。稍后，在第7节中，我们将计算与图相关联的 Deaconu-Renault 系统的熵，并证明对于局部有限图，我们提出的熵与 Gurevich 熵一致。因此，对于定理 4.6，一致连续性要求至关重要。

5 不变子集的熵

在本节中，我们定义 Deaconu-Renault 系统的不变子集及其度量熵。稍后，这有助于计算与非连通图相关联的 Deaconu-Renault 系统的熵。

定义 5.1. 设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统。若 $Y \subseteq X$ 满足 $\sigma(Dom(\sigma) \cap Y) \subseteq Y$，则称其为不变的。给定一个开不变子集 Y，我们称系统 $(Y, \sigma|_Y)$ 为限制 Deaconu-Renault 系统。

备注 5.2. 注意，限制 Deaconu-Renault 系统本身始终是一个 Deaconu-Renault 系统，因此其度量熵 $h_d(\sigma|_Y)$ 是有定义的。

在下面的结果中，我们将 Deaconu-Renault 系统的度量熵与限制系统的度量熵联系起来。

命题 5.3. 设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统， Y_i 是 X 的开不变子集，$_k$ 且 $(Y_i, \sigma|_{Y_i})$ 是对 Y_i 的限制，其中 $i = 1, \ldots, k$，满足并集 $\bigcup Y_i$（不一定$_{i=1}$不相交）为 X。那么：

1. $h_d(\sigma) \geq$ 最大值$_{1\leq i\leq k} h_d(\sigma|_{Y_i})$.

2. 如果每个 Y_i 都是闭集，那么 $h_d(\sigma) = \max_{1\leq i\leq k} h_d(\sigma|_{Y_i})$。

3. 如果对所有 $i \neq j$ 都有 $Y_i \cap Y_j = \emptyset$，那么 $h_d(\sigma) = \max_{1\leq i\leq k} h_d(\sigma|_{Y_i})$。

证明。为简化计算，我们在本证明中假设 $k = 2$ 。一般情形便可直接推出。

我们来证明第一项。由假设， $X = Y_1 \cup Y_2$。设 K_i 是 Y_i的一个紧子集，且 F_i 是 $Dom(\sigma|_{Y_i}^{n-1})$的一个闭子集， $i = 1, 2$。由于 X 是一个度量空间，且 $Dom(\sigma|_{Y_i}^{n-1})_\infty$是开集，根据注 3.10，我们可以写成 $Dom(\sigma|_{Y_i}^{n-1}) = \bigcup G_j^i$，其中 G_j^i 是 $X_{j=1}$的闭集，并且对所有 j 都有 $G_j^i \subseteq G_{j+1}^i$。因为每个 Y_i都具有子空间拓扑，所以我们有 $F_i = F_i' \cap Y_i$，其中 F_i'是 X 的闭集。此外， $F_i' \cap G_j^i$是 X的闭集，并且对所有 j及每个 $i = 1, 2$，都包含于$Dom(\sigma|_{Y_i}^{n-1})$。

现在，令 A 为 Y_i中基数最大的 $(n, \varepsilon, \sigma|_{Y_i}, K_i \cap F_i)$-分离集。于是， A 是有限集，并且存在 j_0，使得 A 中的每个元素都属于 $F_i' \cap G_{j_0}^i$。因此， A 是一个 $(n, \varepsilon, \sigma, K_i \cap (F_i' \cap G_{j_0}^i))$-分离集，从而

$$sep(n, \varepsilon, \sigma|_{Y_i}, K_i \cap F_i) \leq sep(n, \varepsilon, \sigma, K_i \cap (F_i' \cap G_{j_0}^i)) \leq ssep(n, \varepsilon, \sigma, K_i).$$

因此，$\text{ssep}(n, \varepsilon, \sigma|_{Y_i}, K_i) \leq \text{ssep}(n, \varepsilon, \sigma, K_i)$，并且 $h_d(\sigma) \geq \max h_d(\sigma|_{Y_i})$，证毕。

现在证明第二项。

令 $K \subset X$ 为一个紧集， $F \subseteq Dom(\sigma^{n-1})$ 为闭集，且 $A \subset K \cap F$ 为基数最大的 $(n, \varepsilon, \sigma, K \cap F)$-分离集。令 $K_i = K \cap Y_i$，由于每个 Y_i 都是闭集，它是紧集。由于 A 是有限集，我们有 $A = (A \cap Dom(\sigma|_{Y_1}^{n-1})) \cup (A \cap Dom(\sigma|_{Y_2}^{n-1}))$，其中集合 G_j^i 与第一项证明中的相同。

因此，

$$\begin{aligned}(n, \varepsilon, \sigma, K \cap F) &\leq \text{sep}(n, \varepsilon, \sigma|_{Y_1}, K_1 \cap (F \cap G_{k_1}^1)) + \text{sep}(n, \varepsilon, \sigma|_{Y_2}, K_2 \cap (F \cap G_{k_2}^2)) \\ &\leq 2 \max_{1\leq i\leq 2} \text{sep}(n, \varepsilon, \sigma|_{Y_i}, K_i \cap (F \cap G_{k_i}^i)) \leq 2 \max_{1\leq i\leq 2} \text{ssep}(n, \varepsilon, \sigma|_{Y_i}, K_i).\end{aligned}$$

对 $Dom(\sigma^{n-1})$ 的所有闭子集取上确界，可得

$$\text{ssep}(n, \varepsilon, \sigma, K) \leq 2 \max_{1\leq i\leq 2} \text{ssep}(n, \varepsilon, \sigma|_{Y_i}, K_i).$$

因此，

$$\begin{aligned}h_\varepsilon(\sigma, K, d) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \text{ssep}(n, \varepsilon, \sigma, K) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log 2 + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \max_{1\leq i\leq 2} \text{ssep}(n, \varepsilon, \sigma|_{Y_i}, K_i) \\ &= \max_{1\leq i\leq 2} h_\varepsilon(\sigma|_{Y_i}, K_i, d).\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$，并对 X 的所有紧子集取上确界，我们得出$h_d(\sigma) \leq \max_{1\leq i\leq 2} h_d(\sigma|_{Y_i})$。根据第一项，我们知道 $h_d(\sigma) \geq \max_{1\leq i\leq 2} h_d(\sigma|_{Y_i})$，因此$h_d(\sigma) = \max_{1\leq i\leq 2} h_d(\sigma|_{Y_i})$，证毕。

命题的第三条由第二条推出，因为如果子集 Y_j 两两不相交，那么它们就是闭集。

□

6 通过开覆盖定义熵

本节将基于覆盖的经典熵概念推广到 Deaconu-Renault 系统。对于可度量化空间，我们证明本节中的熵是度量熵的下界。我们先回顾两个覆盖的连接的定义。

定义 6.1. 设 X 是一个拓扑空间，Y、$Z \subseteq X$ 是自然数集，并设 α、β 分别是 Y 和 Z 的覆盖。α 与 β 的连接记作 $\alpha \vee \beta$，它由所有交集 $A \cap B$ 构成，其中 $A \in \alpha$ 且 $B \in \beta$。

注 6.2. 在上一定义中，$\alpha \vee \beta$ 是 $Y \cap Z$ 的覆盖。此外，如果 α、β 是 Y 和 Z 的开覆盖，那么 $\alpha \vee \beta$ 就是 $Y \cap Z$ 的开覆盖。

定义 6.3。设 X 是一个拓扑空间，$Y \subseteq X$ 和 α 是 Y 的一个覆盖。我们用 $N(\alpha, Y)$ 表示 α 的所有子覆盖的基数中的最小值。如果 $N(\alpha, Y) < \infty$，则定义 $H(\alpha, Y) = log(N(\alpha, Y))$；如果 $N(\alpha, Y) = \infty$，则定义 $H(\alpha, Y) = \infty$。

设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统，$Y \subseteq X$ 且令 α 为 Y 的一个覆盖。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，所有形如 $\sigma^{-i}(A)$ 且满足 $A \in \alpha$ 的集合构成 $\sigma^{-i}(Y)$ 的一个覆盖。我们将此覆盖记为 $\sigma^{-i}(\alpha)$。此外，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\alpha_n := \alpha \vee \sigma^{-1}(\alpha) \vee \ldots \vee \sigma^{-n}(\alpha),$$

它是.....的一个覆盖

$$Y_n := Y \cap \sigma^{-1}(Y) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(Y).$$

注 6.4。对于某个 $n \in \mathbb{N}$，$Y_n = \emptyset$ 可能成立。在这种情况下，$N(\alpha_n, Y_n) = 1$，并且 $H(\alpha_n, Y_n) = log(N(\alpha_n, Y_n)) = log(1) = 0$。此外，在这种情况下，对于每个 $m \geq n$，我们还有 $Y_m = \emptyset$，因此对于每个 $m \geq n$，$H(\alpha_m, Y_m) = 0$。还有可能出现 $N(\alpha_n, Y_n) = \infty$，此时我们有 $H(\alpha_n, Y_n) = \infty$。

下面的引理描述了 $N(\alpha_n, Y_n)$ 的性质。

引理 6.5. 设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统，$Y, Z \subseteq X$, α 是 Y 的一个覆盖，β 是 Z 的一个覆盖，且 $m, n \in \mathbb{N}$。那么，以下不等式成立。

1. $N(\alpha \vee \beta, Y \cap Z) \leq N(\alpha, Y)N(\beta, Z)$.
2. $N(\sigma^{-n}(\alpha)_m, \sigma^{-n}(Y)_m) \leq N(\alpha_m, Y_m)$。

3. $N(\alpha_{m+n}, Y_{n+m}) \leq N(\alpha_n, Y_n)N(\alpha_m, Y_m)$。

4. $N(\beta_n, Y_n) \leq N(\beta_n, Z_n)$，若 $Y \subseteq Z$。

证明。我们先证明第一项。注意，不等式

$$N(\alpha \vee \beta, Y \cap Z) \leq N(\alpha, Y)N(\beta, Z)$$

显然在 $N(\alpha, Y) = \infty$或 $N(\beta, Z) = \infty$时成立。因此，我们可以假设 $N(\alpha, Y) < \infty$且 $N(\beta, Z) < \infty$。设 $N(\alpha, Y) = p$、 $N(\beta, Z) = q$，并分别令 $\{A_1, \ldots, A_p\}$和 $\{B_1, \ldots, B_q\}$为 α和 β的子覆盖。那么， $\{A_i \cap B_j \colon 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$是 $\alpha \vee \beta$的一个子覆盖，其基数小于或等于 $N(\alpha, Y)N(\beta, Z)$。因此， $N(\alpha \vee \beta, Y \cap Z) \leq N(\alpha, Y)N(\beta, Z)$。

接下来，我们证明第二项。注意，对于每个 $B \in \alpha_m$, B 都具有如下形式

$$B = B_0 \cap B_1 \cap \ldots \cap B_m,$$

其中，对于每个 $i \in \{0, \ldots, m\}$， $B_i \in \sigma^{-i}(\alpha)$。于是，对于每个 $i \in \{0, \ldots, m\}$， $\sigma^{-n}(B_i) \in \sigma^{-n}(\sigma^{-i}(\alpha)) = \sigma^{-i}(\sigma^{-n}(\alpha))$，因此

$$\sigma^{-n}(B) = \sigma^{-n}(B_0 \cap B_1 \cap \ldots \cap B_m) = \sigma^{-n}(B_0) \cap \sigma^{-n}(B_1) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(B_m),$$

它属于 $\sigma^{-n}(\alpha) \vee \sigma^{-1}(\sigma^{-n}(\alpha)) \vee \ldots \vee \sigma^{-m}(\sigma^{-n}(\alpha)) = \sigma^{-n}(\alpha)_m$. 因此，对于每个$B \in \alpha_m$，我们有 $\sigma^{-n}(B) \in \sigma^{-n}(\alpha)_m$。

现在，我们证明所需的不等式。如果 $N(\alpha_m, Y_m) = \infty$，则结论成立。因此，假设$N(\alpha_m, Y_m) = p < \infty$。令 $\{A_1, \ldots, A_p\}$ 为 α_m 的一个子覆盖。那么，

$$Y \cap \sigma^{-1}(Y) \cap \ldots \cap \sigma^{-m}(Y) \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} A_i,$$

由此我们得出

$$\sigma^{-n}(Y) \cap \sigma^{-n-1}(Y) \cap \ldots \cap \sigma^{-n-m}(Y) \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} \sigma^{-n}(A_i).$$

由于 $A_i \in \alpha_m$，由上一段可得 $\sigma^{-n}(A_i) \in \sigma^{-n}(\alpha)_m$。因此， $\{\sigma^{-n}(A_1) \ldots, \sigma^{-n}(A_p)\}$ 是 $\sigma^{-n}(\alpha)_m$ 的子覆盖，从而 $N(\sigma^{-n}(\alpha)_m, \sigma^{-n}(Y)_m) \leq N(\alpha_m, Y_m)$，如所求。

现在我们证明第三项。记

$$\alpha_{n+m} = [\alpha \vee \sigma^{-1}(\alpha) \vee \ldots \vee \sigma^{-n}(\alpha)] \vee [\sigma^{-n-1}(\alpha) \vee \ldots \vee \sigma^{-n-m}(\alpha)] =$$

$$= \alpha_n \vee \sigma^{-n-1}(\alpha)_m.$$

由第一项可得 $N(\alpha_{n+m}, Y_{n+m}) \leq N(\alpha_n, Y_n)N(\sigma^{-n-1}(\alpha)_m, \sigma^{-n-1}(Y)_m)$

而由第二项可得 $N(\sigma^{-n-1}(\alpha)_m, \sigma^{-n-1}(Y)_m) \leq N(\alpha_m, Y_m)$。因此，$N(\alpha_{n+m}, Y_{n+m}) \leq N(\alpha_n, Y_n)N(\alpha_m, Y_m)$。

为了证明最后一项，设 β 是 Z 的一个覆盖，并固定一个 $n \in \mathbb{N}$，考虑 β_n 对 Z_n 的覆盖。设 γ 是 β_n 的一个子覆盖。由于 $Y \subseteq Z$，我们有 $Y_n \subseteq Z_n$，因此 γ 也覆盖 Y_n。所以，$N(\beta_n, Y_n) \leq N(\beta_n, Z_n)$。 □

为了通过 Deaconu-Renault 系统 (X, σ) 的覆盖来定义熵，我们将处理 X 中的紧集 K。然而，即使 K 是紧的，对于某个 $n \in \mathbb{N}$，K_n 也可能不是紧的。例如，考虑 $(\mathbb{R}, \sigma)$，其中 $\mathbb{R}$ 赋予通常拓扑，且 $\sigma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 由 $\sigma(x) = x$ 给出。对于紧集 $K = [0, 1]$，我们得到 $K_n = (0, 1]$ 对每个 $n \geq 1$ 都成立，而它并非紧集。尽管如此，根据以下引理，对于 Deaconu-Renault 系统中的每个紧集 K 以及 K 的每个开覆盖 α，α_n 对 K_n 的覆盖都有有限子覆盖。

引理 6.6. 设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统，设 $K \subseteq X$ 是紧集，且 α 是 K 的开覆盖。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，α_n 是 K_n 的开覆盖，并且 α_n 有有限子覆盖。

证明。设 $K \subseteq X$ 是紧集，α 是 K 的开覆盖，且设 $i \in \mathbb{N}$。对于 $A \in \alpha$，由于 A 在 X 中是开集，我们有 $\sigma^{-i}(A)$ 是 $Dom(\sigma^i)$ 中的开集；又由于 $Dom(\sigma^i)$ 在 X 中是开集，我们有 $\sigma^{-i}(A)$ 是 X 中的开集。因此，$\sigma^{-i}(\alpha)$ 是 X 中 $\sigma^{-i}(K)$ 的开覆盖，所以对于每个 $n \in \mathbb{N}$，α_n 都是 K_n 在 X 中的开覆盖。由于 K 是紧集，存在 α 的有限子覆盖 $\{A_1, \ldots, A_m\}$。于是，$\{\sigma^{-i}(A_1) \ldots, \sigma^{-i}(A_m)\}$ 是 $\sigma^{-i}(\alpha)$ 的有限子覆盖，覆盖 $\sigma^{-i}(K)$，因此 α_n 有有限子覆盖。 □

在通过覆盖定义 Deaconu-Renault 系统的熵之前，我们还需要一个最后的结果。

命题 6.7. 设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统，$K \subseteq X$ 紧且 α 是 K的一个开覆盖。那么，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha_n, K_n)$$

存在。

证明。由引理 6.6 可知，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $N(\alpha_n, K_n) < \infty$。由引理 6.5 的第三条可得，对每个 $n, m \in \mathbb{N}$，都有 $H(\alpha_{n+m}, K_{n+m}) \leq H(\alpha_n, K_n) + H(\alpha_m, K_m)$。据此，我们现在可以应用 [37, 定理 4.9]，并得出 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha_n, K_n)$ 存在。 □

定义 6.8. 设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统。

- 对于紧集 $K \subseteq X$ 和其上的开覆盖 α，σ 相对于 K 的开覆盖 α 的熵定义为:

$$h(\alpha, \sigma, K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha_n, K_n).$$

- 对于紧集 $K \subseteq X$，σ 相对于 K 的熵定义为:

$$h(\sigma, K) = \sup_{\alpha} h(\alpha, \sigma, K),$$

其中，上确界取遍 K的所有开覆盖 α 。

- σ 的（拓扑）熵定义为

$$h(\sigma) = \sup_K h(\sigma, K),$$

其中，上确界取遍所有紧集 $K \subseteq X$。

注 6.9. 注意，若 K 是 $X \setminus Dom$（σ）中的一个紧集，则 $K \cap \sigma^{-1}$（K） $= \emptyset$，因此对每个 $n \geq 1$，都有 $K_n = \emptyset$ 。于是，对 K 的每个开覆盖 α 以及每个 $n \geq 1$，都有 N（α_n，K_n） $= 1$，从而 H（α_n，K_n） $= 0$。因此，h（σ，K） $= 0$。所以，在定义 6.8 中，上确界可以取遍所有与 Dom（σ）有非空交集的紧集 K 。

对于满足 Dom（σ）是 X 中的闭集的 Deaconu-Renault 系统，我们将在下文证明，定义 6.8 中最后一个上确界可以取遍所有包含于 Dom（σ）中的紧集，而不必取遍所有紧集。

命题 6.10. 设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统，且 $Dom(\sigma)$ 在 X 中是闭集。那么，在定义 6.8 中，我们可以将上确界取遍所有紧集 $L \subseteq Dom(\sigma)$，而不是取遍所有紧集 $K \subseteq X$。

证明. 我们只需证明

$\sup\{h(\sigma,K)$： K 是 $X\} \leq$ 中的紧集$\sup\{h(\sigma, L)$： L 是 $Dom(\sigma)$ 中的紧集 $\}$,

因为另一个不等式显然成立。

设 $K \subseteq X$ 是一个紧集。由于 K 是紧的， $\sigma^{-1}(K)$ 在 $Dom(\sigma)$ 中是闭集，因此在 X 中也是闭集（因为 $Dom(\sigma)$ 在 X 中是闭集）。所以， $L = K \cap \sigma^{-1}(K)$ 是紧集。

注意，对于每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} L_n &= L \cap \sigma^{-1}(L) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(L) \\ &= (K \cap \sigma^{-1}(K)) \cap \sigma^{-1}(K \cap \sigma^{-1}(K)) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(K \cap \sigma^{-1}(K)) \\ &= K \cap \sigma^{-1}(K) \cap \ldots \cap \sigma^{-n-1}(K) = K_{n+1}. \end{aligned}$$

设 α 是 K 的一个开覆盖，并定义 $\beta = \{A \cap \sigma^{-1}(B)$： $A, B \in \alpha\}$，它是 L 的一个开覆盖。对于 $n \in \mathbb{N}$， β_n 的每个元素都具有以下形式

$$\left(A_0 \cap \sigma^{-1}(B_1)\right) \cap \sigma^{-1}\left(A_1 \cap \sigma^{-1}(B_2)\right) \cap \sigma^{-2}\left(A_2 \cap \sigma^{-1}(B_3)\right) \ldots \cap \sigma^{-n}\left(A_n \cap \sigma^{-1}(B_n)\right) =$$

$$= A_0 \cap \sigma^{-1}(B_1 \cap A_1) \cap \sigma^{-2}(B_2 \cap A_2) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(B_n \cap A_n) \cap \sigma^{-n-1}(B_n),$$

其中 A_i、 $B_j \in \alpha$，因此是.....的子集

$$= A_0 \cap \sigma^{-1}(A_1) \cap \sigma^{-1}(A_2) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(A_n) \cap \sigma^{-n-1}(B_n),$$

它是 α_{n+1} 的一个元素。因此，我们已经证明， β_n 的每个元素都是 α_{n+1} 中某个元素的子集。

令 γ 为 β_n 的一个最小基数子覆盖，它覆盖 L_n；并对每个 $U \in \gamma$，选取一个元素 $V_U \in \alpha_{n+1}$，使得 $U \subseteq V_U$。由于 $K_{n+1} = L_n$，我们有 $\{V_U : U \in \gamma\}$ 是 α_{n+1} 的一个子覆盖，它覆盖 K_{n+1}。因此，对每个 $n \in \mathbb{N}$， $N(\alpha_{n+1}, K_{n+1}) \leq N(\beta_n, L_n)$，于是

$$\begin{aligned} h(\alpha, \sigma, K) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} H(\alpha_{n+1}, K_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\frac{1}{n} H(\alpha_{n+1}, K_{n+1}) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\beta_n, L_n) = h(\beta, \sigma, L). \end{aligned}$$

我们已在上文证明，对 K 的每个开覆盖 α，都存在 L 的一个开覆盖 β，使得 $h(\alpha, \sigma, K) \leq h(\beta, \sigma, L)$。因此，

$$\sup\{h(\alpha, \sigma, K) : \alpha \text{ 是 } K\} \leq \text{ 的一个开覆盖 } \sup\{h(\beta, \sigma, L) : \beta \text{ 是 } L\} \text{ 的一个开覆盖},$$

这意味着 $h(\sigma, K) \leq h(\sigma, L)$。

总而言之，我们已经证明，对于每个紧集 $K \subseteq X$，都存在一个紧集 $L \subseteq Dom(\sigma)$，使得 $h(\sigma, K) \leq h(\sigma, L)$，因此，

$$\sup\{h(\sigma, K) : K \text{是 } X\} \leq \text{中的紧集} \sup\{h(\sigma, L) : L \text{是 } Dom(\sigma)\} \text{中的紧集},$$

如所期望的。

□

接下来，我们证明相对于紧集而言， σ 的熵是一个递增函数。

引理 6.11. 设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统，且 K 和 C 是 X 的紧子集，满足 $K \subseteq C$。那么， $h(\sigma, K) \leq h(\sigma, C)$。

证明. 为证明所需的不等式，只需证明：对于 K的每个开覆盖 α，都存在 C的一个开覆盖 β，使得 $h(\alpha, \sigma, K) \leq h(\beta, \sigma, C)$；而只要这些覆盖满足对每个 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $N(\alpha_n, K_n) \leq N(\beta_n, C_n)$，便可推出这一点。

令 α 为 K 的一个开覆盖。定义 $\beta = \alpha \cup \{K^c\}$（其中 $K^c = X \setminus K$），并注意到 β 是 C 的一个开覆盖。我们证明，对每个 $n \in \mathbb{N}$， $N(\alpha_n, K_n) \leq N(\beta_n, C_n)$。固定 $n \in \mathbb{N}$。注意到 β 也是 K 的一个开覆盖，并令 γ 为 β_n 的一个子覆盖，它覆盖 K_n，其基数等于 $N(\beta_n, K_n)$（由引理 6.6 可知该基数有限）。令 $A = A_0 \cap A_1 \cap .. \cap A_n$ 为 γ 的一个元素，其中对每个 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$， $A_i \in \sigma^{-i}(\beta)$。假设对某个 $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$， $A_j = \sigma^{-j}(K^c)$。那么， $A_j \cap \sigma^{-j}(K) = \sigma^{-j}(K^c) \cap \sigma^{-j}(K) = \emptyset$，因此

$$A \cap K_n = (A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n) \bigcap \left(K \cap \sigma^{-1}(K) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(K)\right) = \emptyset,$$

这是不可能的，因为 γ 覆盖 K_n 且具有最小基数。由此可得，对于每个 $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$， $A_i \in \sigma^{-i}(\alpha)$，因此 $A \in \alpha_n$。于是， $\gamma \subseteq \alpha_n$，所以 $N(\alpha_n, K_n) \leq$

$N(\beta_n, K_n)$。根据引理 6.5 的最后一项，我们有 $N(\beta_n, K_n) \leq N(\beta_n, C_n)$，因此如所需，$N(\alpha_n, K_n) \leq N(\beta_n, C_n)$。 □

推论 6.12. 设 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统。若 $Dom(\sigma)$ 是紧的，则

$$h(\sigma) = \sup_{\alpha}\{h(\alpha, \sigma, Dom(\sigma))\},$$

其中，上确界取遍 $Dom(\sigma)$ 的所有开覆盖。

证明。该证明由命题 6.10 和引理 6.11 得出。 □

注记 6.13. 由前一个推论可知，若 $Dom(\sigma) = X$ 且 X 是紧的，则定义 6.8 中引入的 σ 的熵与通常定义的拓扑熵一致，例如见 [37,定义 7.6], 。

上文已经说明，我们通过覆盖定义的熵推广了通常通过覆盖定义的熵。接下来，我们的目标是证明，对于 Deaconu-Renault 系统，相对于一个紧集的熵可以通过一列直径趋于零的覆盖来计算。我们先回顾度量空间中有关覆盖的一些常见概念。

定义 6.14. 设 (X, d) 是一个度量空间，$Y \subseteq X$ 和 β 是 Y的一个覆盖。我们将 β 的直径定义为 $diam(\beta) = sup\{diam(A) : A \in \beta\}$，其中 $diam(A) = sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.如果 Y 是紧的，那么 β 的一个勒贝格数 $\delta > 0$ 是指满足以下条件的数：Y中直径小于 δ 的每个子集都包含在覆盖 β的某个成员中。

下面的引理将会用到。

引理 6.15. 设 (X, σ) 是一个度量 Deaconu-Renault 系统，并设 $K \subseteq X$ 是一个紧集。

1. 若 α 和 β 是 K的覆盖，且 α 是 β的一个子覆盖，则 $h(\beta, \sigma, K) \leq h(\alpha, \sigma, K)$。
2. 对于每个覆盖 α，都存在 $\delta > 0$，使得如果 β 是 K 的一个覆盖且 $diam(\beta) \leq \delta$，那么 $h(\alpha, \sigma, K) \leq h(\beta, \sigma, K)$。

证明。为证明第一项，令 $n \in \mathbb{N}$。由于 $\alpha \subseteq \beta$，我们有 $\alpha_n \subseteq \beta_n$，因此 α_n 的每个子覆盖 γ 也是 β_n 的子覆盖。因此，$N(\beta_n, K_n) \leq N(\alpha_n, K_n)$，由此即可得到结论。

现在证明第二项。令 α 为 K 的一个开覆盖，并定义 $\alpha^K = \{A \cap K : A \in \alpha\}$。注意，$\alpha^K$ 是紧空间 K 的一个开覆盖（在 K 中）。令 $\delta > 0$ 为 α^K 的一个勒贝格数，并令 β 为 K 的一个开覆盖（在 X 中），使得 $diam(\beta) < \delta$。定义 $\beta^K = \{B \cap K : B \in \beta\}$。固定 $n \in \mathbb{N}$。我们证明 $N(\alpha_n, K_n) \leq N(\beta_n, K_n)$。令 γ 为 β_n 的一个最小基数子覆盖，从而 $N(\beta_n, K_n)$ 等于 γ 的基数。

回想一下，每个 $Y \in \gamma$ 都具有 $Y = B_0 \cap \sigma^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(B_n)$ 的形式，其中对每个 $i \in \{0, 1 \ldots, n\}$ 都有 $B_i \in \beta$。因此，

$$Y \cap K_n = (B_0 \cap K) \cap \sigma^{-1}(B_1 \cap K) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(B_n \cap K).$$

由于 $diam(\beta) < \delta$，我们有 $diam(\beta^K) < \delta$。于是，对每个 $C \in \beta^K$，都存在某个 $D \in \alpha^K$，使得 $C \subseteq D$。此外，对每个 $i \in \{0, 1., .., n\}$，都存在 $A_i \in \alpha$，使得 $B_i \cap K \subseteq A_i \cap K$（因为 $B_i \cap K \in \beta^K$）。定义 $Z = A_0 \cap \sigma^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(A_n)$，它是 α_n 的一个元素。于是，$Y \cap K_n \subseteq Z \cap K_n$.

我们已经证明，对于每个 $Y \in \gamma$，都存在一个集合（记作 Z_Y），属于 α_n，使得 $Y \cap K_n \subseteq Z_Y \cap K_n$。因此，

$$\bigcup_{Y \in \gamma} (Y \cap K_n) \subseteq \bigcup_{Y \in \gamma} (Z_Y \cap K_n).$$

由于 $K_n \subseteq \bigcup_{Y \in \gamma} Y$，我们得到 $K_n = \bigcup_{Y \in \gamma} (Y \cap K_n)$，因此

$$K_n = \bigcup_{Y \in \gamma} (Y \cap K_n) \subseteq \bigcup_{Y \in \gamma} (Z_Y \cap K_n) \subseteq \bigcup_{Y \in \gamma} Z_Y.$$

因此，$\{Z_Y : Y \in \gamma\}$ 是覆盖 α_n（集合 K_n）的一个子覆盖。由于集合 $\{Z_Y : Y \in \gamma\}$ 的基数小于或等于 γ 的基数，而后者为 $N(\beta_n, K_n)$，因此$N(\alpha_n, K_n) \leq N(\beta_n, K_n)$。由此可得，$h(\alpha, \sigma, K) \leq h(\beta, \sigma, K)$。

□

接下来，我们证明，可以利用一列直径趋于零的覆盖来计算 σ 相对于一个紧集的熵。

命题 6.16。设 (X, σ) 是一个度量 Deaconu-Renault 系统，$K \subseteq X$ 为紧集，且$\{\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 K 的一列开覆盖，并且 $diam(\alpha^n) \to 0$。那么，$h(\sigma, K) = \lim_{n \to \infty} h(\alpha^n, \sigma, K)$。

证明。设 $\{\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 K 的一列开覆盖，使得 $diam(\alpha^n) \to 0$。

假设 $h(\sigma, K) = \infty$。令 $M > 0$，并设 α 是 K 的一个开覆盖，使得$h(\alpha, \sigma, K) \geq M$。由引理 6.15，存在 $\delta > 0$，使得对于 K 的每个开覆盖 β，若 $diam(\beta) < \delta$，则不等式 $h(\beta, \sigma, K) \geq h(\alpha, \sigma, K)$ 成立。令 $n_0 \in \mathbb{N}$ 满足：对于每个 $n \geq n_0$，都有$diam(\alpha_n) < \delta$。那么，对于 $n \geq n_0$，有 $h(\alpha^n, \sigma, K) \geq h(\alpha, \sigma, K)$。因此，$\lim_{n \to \infty} h(\alpha^n, \sigma, K) = \infty$。

为完成证明，假设 $h(\sigma, K) < \infty$，并固定一个 $\varepsilon > 0$。根据$h(\sigma, K)$ 的定义，存在 K 的一个开覆盖 α，使得 $h(\sigma, K) - \varepsilon \leq h(\alpha, \sigma, K) \leq h(\sigma, K)$。令$\delta > 0$ 如引理 6.15 中所述，并令 $n_1 \in \mathbb{N}$ 满足：对于每个 $n \geq n_1$，都有 $diam(\alpha^n) \leq \delta$。那么，根据引理 6.15 和 $h(\sigma, K)$ 的定义，对于每个 $n \geq n_1$，有 $h(\sigma, K) - \varepsilon \leq h(\alpha^n, \sigma, K) \leq h(\sigma, K)$。这意味着 $\lim_{n \to \infty} h(\alpha^n, \sigma, K) = h(\sigma, K)$，得证。□

本节余下部分的目标是证明，Deaconu-Renault 系统的拓扑熵是其度量熵的下界。下面为这一结果作准备。

引理 6.17. 设 (X,σ) 是一个度量 Deaconu-Renault 系统，且 $K\subseteq X$ 是紧的。若 α 是 K 的一个开覆盖，且 δ 是 $\alpha^K=\{A\cap K$ 的勒贝格数：$A\in\alpha\}$，则

$$N(\alpha_n,K_n)\leq sspan(n+1,\frac{\delta}{8},\sigma,K)$$

对每个 $n\in\mathbb{N}$。

证明。设 $n\in\mathbb{N}$ 和 B 是基数最小的 $(n+1,\frac{\delta}{4},\sigma,K\cap Dom(\sigma^n))$-生成集。那么，对于每个 $y\in K\cap Dom(\sigma^n)$，存在 $x\in B$ 使得 $d_{n+1}(x,y)\leq\frac{\delta}{4}<\frac{\delta}{2}$。因此

$$K\cap Dom(\sigma^n)\subseteq\bigcup_{x\in B}\left(\bigcap_{i=0}^{n}\sigma^{-i}\left(\mathcal{B}\left(\sigma^i(x),\frac{\delta}{2}\right)\right)\right).$$

因此,

$$\begin{aligned}K_n &= (K\cap Dom(\sigma^n))\cap K_n\subseteq\left(\bigcup_{x\in B}\left(\bigcap_{i=0}^{n}\sigma^{-i}\left(\mathcal{B}\left(\sigma^i(x),\frac{\delta}{2}\right)\right)\right)\right)\bigcap K_n\\ &= \bigcup_{x\in B}\left(\bigcap_{i=0}^{n}\sigma^{-i}\left(\mathcal{B}\left(\sigma^i(x),\frac{\delta}{2}\right)\right)\bigcap_{i=1}^{n}\sigma^{-i}(K)\right)\subseteq\bigcup_{x\in B}\left(\bigcap_{i=0}^{n}\sigma^{-i}\left(\mathcal{B}\left(\sigma^i(x),\frac{\delta}{2}\right)\bigcap K\right)\right).\end{aligned}$$

现在，由于 δ 是 α^K 的一个勒贝格数，对每个 $x\in B$ 和 $i\in\{0,\ldots,n\}$，都存在某个 $A_i^x\in\alpha$ 使得

$$\mathcal{B}\left(\sigma^i(x),\frac{\delta}{2}\right)\bigcap K\subseteq A_i^x\cap K\subseteq A_i^x.$$

因此，$K_n\subseteq\bigcup_{x\in B}\left(\bigcap_{i=0}^{n}\sigma^{-i}(A_i^x)\right)$，于是，由于对每个 $x\in B$，$\bigcap_{i=0}^{n}\sigma^{-i}(A_i^x)$ 都是 α_n 的一个元素，我们得到 $N(\alpha_n,K_n)$ 小于或等于 B 的基数，而该基数等于 $span(n+1,\frac{\delta}{4},\sigma,K\cap Dom(\sigma^n))$。应用命题 3.12 的第二项，我们得出

$$N(\alpha_n,K_n)\leq sspan(n+1,\frac{\delta}{8},\sigma,K).$$

□

现在，我们已经具备了所有必要的要素，可以证明 Deaconu-Renault 系统的拓扑熵是度量熵的下界。

定理 6.18. 设 (X,σ) 是度量空间 (X,d) 上的 Deaconu-Renault 系统。那么，$h(\sigma)\leq h_d(\sigma)$。

证明。设 $K\subseteq X$ 是一个紧集，并设 $(\alpha^m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是 K 的一列开覆盖，满足 $diam(\alpha^m)\to 0$。对每个 m，令 δ_m 为覆盖 $\{A\cap K$ 的一个勒贝格数：$A\in\alpha^m\}$。由引理 6.17（第 i 项），可得 $N(\alpha_n^m,K_n)\leq sspan(n,\frac{\delta_m}{8},\sigma,K)$，对每个 $m,n\in\mathbb{N}$ 均成立，因此 $h(\alpha^m,\sigma,K)\leq h_{\frac{\delta_m}{8}}(\sigma,K,d)$，对每个 $m\in\mathbb{N}$ 均成立。此外，由于 $diam(\alpha^m)\to 0$，我们

有 $\delta_m \to 0$。于是,

$$h(\sigma, K) = \lim_{n\to\infty} h(\alpha^m, \sigma, K) \le \lim_{n\to\infty} h_{\frac{\delta_m}{8}}(\sigma, K, d) = h_d(\sigma, K).$$

最后，对上述不等式中的所有紧集 $K \subseteq X$ 取上确界，可得 $h(\sigma) \le h_d(\sigma)$。

□

7 图与超图的熵

本节着重计算与图和超图相关联的 Deaconu-Renault 系统的熵。为将我们的工作置于现有文献的背景下，我们研究了与行有限图相关联的 Deaconu-Renault 系统（及其熵）。我们还计算了与 Renewal shift 超图相关联的拓扑熵；该实例刻画了有趣的动力学，并已在文献中得到研究，例如见 [5, 13]。

在继续之前，我们先回顾超图的必要概念和记号，这些内容同样适用于图。

7.1 超图预备知识

定义 7.1. 超图是一个四元组 $\mathcal{G} = (G^0, \mathcal{G}^1, r, s)$，由两个可数集 $G^0, \mathcal{G}^1$、一个映射 $s\colon \mathcal{G}^1 \to G^0$ 和一个映射 $r\colon \mathcal{G}^1 \to P(G^0)\setminus\{\emptyset\}$ 组成，其中 $P(G^0)$ 表示 G^0 的幂集。

定义 7.2. 设 $\mathcal{G}$ 是一个超图。定义 $\mathcal{G}^0$ 为 $P(G^0)$的最小子集，使其包含所有 $v \in G^0$对应的 $\{v\}$，包含所有 $e \in \mathcal{G}^1$对应的 $r(e)$，并且对有限并和非空有限交封闭。

设 $\mathcal{G}$ 是一个超图。$\mathcal{G}$ 中的有限路径要么是 $\mathcal{G}^0$ 的一个元素，要么是 $\mathcal{G}^1$ 中的边序列 $e_1 \dots e_k$，其中对 $1 \le i \le k$，有 $s(e_{i+1}) \in r(e_i)$。若记作 $\alpha = e_1 \dots e_k$，则 α 的长度 $|\alpha|$为 k。路径 $A \in \mathcal{G}^0$ 的长度 $|A|$ 为零。我们定义 $r(\alpha) = r(e_k)$和 $s(\alpha) = s(e_1)$。对于 $A \in \mathcal{G}^0$，令 $r(A) = A = s(A)$。$\mathcal{G}$ 中有限路径的集合记为 $\mathcal{G}^*$。$\mathcal{G}$中的无限路径是 $\prod \mathcal{G}^1$中的无限边序列 $\gamma = e_1 e_2 \dots$，其中对所有 i，有 $s(e_{i+1}) \in r(e_i)$。$\mathcal{G}$ 中无限路径的集合记为 $\mathfrak{p}^\infty$。$\gamma \in \mathfrak{p}^\infty$ 的长度 $|\gamma|$ 定义为 ∞。若顶点 v 属于 $\mathcal{G}$，且满足 $|s^{-1}(v)| = 0$，则称其为汇点；若满足 $|s^{-1}(v)| = \infty$，则称其为无限发射体。

对于 $n \ge 1$，我们定义 $\mathfrak{p}^n := \{(\alpha, A)\colon \alpha \in \mathcal{G}^*, |\alpha| = n, A \in \mathcal{G}^0, A \subseteq r(\alpha)\}$。我们规定，$(\alpha, A) = (\beta, B)$ 当且仅当 $\alpha = \beta$ and $A = B$。我们令 $\mathfrak{p}^0 := \mathcal{G}^0$ and，并令 $\mathfrak{p} := \coprod_{n\ge 0} \mathfrak{p}^n$。我们通过将 α 映射到 $(\alpha, r(\alpha))$，把有限路径集 $\mathcal{G}^*$ 嵌入 $\mathfrak{p}$。我们将一对 (α, A)，$|(\alpha, A)|$ 的长度定义为 α, $|\alpha|$ 的长度。我们称 $\mathfrak{p}$ 为与$\mathcal{G}$ 相关联的超路径空间，而 $\mathfrak{p}$ 中的元素称为超路径（上下文明确时也简称路径）。每个$A \in \mathcal{G}^0$ 均视为长度为零的超路径，并可与有序对 (A, A) 等同。我们可以通过以下公式将值域映射 r 和源映射 s 扩展到 $\mathfrak{p}$： $r((\alpha, A)) = A$, $s((\alpha, A)) = s(\alpha)$ and $r(A) = s(A) = A$。

我们按以下方式连接 $\mathfrak{p}$ 中的元素：若 $x=(\alpha,A)$ 且 $y=(\beta,B)$，其中$|x|\geq 1,|y|\geq 1$，则当且仅当 $s(\beta)\in A$ 时，$x\cdot y$ 有定义；此时，$x\cdot y:=(\alpha\beta,B)$。此外，我们规定：

$$x\cdot y=\begin{cases} x\cap y & \text{if } x,y\in\mathcal{G}^0 \text{ and if } x\cap y\neq\emptyset \\ y & \text{if } x\in\mathcal{G}^0,\ |y|\geq 1, \text{ and if } s(y)\in x \\ x_y & \text{if } y\in\mathcal{G}^0,\ |x|\geq 1, \text{ and if } r(x)\cap y\neq\emptyset \end{cases} \tag{3}$$

其中，若 $x=(\alpha,A)$，则 $|\alpha|\geq 1$；若 $y\in\mathcal{G}^0$，则表达式 x_y 定义为 $(\alpha,A\cap y)$。给定 $x,y\in\mathfrak{p}$，若对于某个 $x'\in\mathfrak{p}$，有 $x=y\cdot x'$，且 $x(x')\in r(y)$，则称 x 以 y 为初始段。

我们将源映射 s 扩展到 $\mathfrak{p}^\infty$，定义 $s(\gamma)=s(e_1)$，其中 $\gamma=e_1e_2\ldots$。我们可以按如下方式将 $\mathfrak{p}$中的对与 $\mathfrak{p}^\infty$ 中的无限路径拼接。若 $y=(\alpha,A)\in\mathfrak{p}$，且 $\gamma=e_1e_2\ldots\in\mathfrak{p}^\infty$ 满足 $s(\gamma)\in r(y)=A$，则表达式 $y\cdot\gamma$ 定义为$\alpha\gamma=\alpha e_1e_2\ldots\in\mathfrak{p}^\infty$。若 $y=A\in\mathcal{G}^0$，则只要 $s(\gamma)\in A$，我们就定义 $y\cdot\gamma=A\cdot\gamma=\gamma$。当然，若 $s(\gamma)\notin r(y)=A$，则 $y\cdot\gamma$ 没有定义。

接下来，我们回顾与一个超图相关联的 Deaconu-Renault 系统的构造，参见 [14, 33]。我们先给出几个定义。

定义 7.3。对于 G^0 的每个子集 A，令 $\varepsilon(A)$ 为集合 $\{e\in\mathcal{G}^1:\ s(e)\in A\}$。若集合 A 属于 $\mathcal{G}^0$，且 $\varepsilon(A)$ 是无限集，则称其为无限发射体。若 A 是一个无限发射体，且不包含任何作为无限发射体的真子集（属于 $\mathcal{G}^0$），则称其为极小无限发射器。我们用 M_α 表示 $r(\alpha)$ 中所有极小无限发射器组成的集合。

由于图的边移位通常是在无汇点图上考虑的，我们将讨论范围限制在无汇点超图上。在这种情况下，与该超图相关联的 Deaconu-Renault 系统满足假设 3.17。此外，我们只讨论满足 RFUM 条件的超图（见 [14]），也就是说，每条边的值域都是极小无限发射器的有限并集与一个有限顶点集（其中的顶点不是无限发射体）的并集。我们在下文明确提出这些假设：

全文采用以下假设：从现在起，本文中的所有超图（以及因此所有图）均假设无汇点，并满足条件（RFUM）。

与一个超图相关联，我们定义拓扑空间 $X=\mathfrak{p}^\infty\cup X_{fin}$，其中

$$X_{fin}=\{(\alpha,A)\in\mathfrak{p}:|\alpha|\geq 1 \text{ and } A\in M_\alpha\}\cup\{(A,A)\in\mathcal{G}^0:A \text{ is a minimal infinite emitter}\},$$

其拓扑的一个基由集合族给出

$$\{D_{(\beta,B)}:(\beta,B)\in\mathfrak{p},|\beta|\geq 1\ \}\cup\{D_{(\beta,B),F}:(\beta,B)\in X_{fin},F\subset\varepsilon(B),|F|<\infty\},$$

其中对于每个 $(\beta,B)\in\mathfrak{p}$，我们有

$$D_{(\beta,B)}=\{(\beta,A):A\subset B \text{ and } A\in M_\beta\}\cup\{y\in X:y=\beta\gamma',s(\gamma')\in B\},$$

并且，对于 $(\beta, B) \in X_{fin}$ 以及 $\varepsilon(B)$ 的有限子集 F，

$$D_{(\beta,B),F} = \{(\beta, B)\} \cup \{y \in X : y = \beta\gamma', \gamma'_1 \in \varepsilon(B) \setminus F\}.$$

注 7.4. 对于每个 $(\beta, B) \in \mathfrak{p}$，我们将 $D_{(\beta,B)}$ 与 $D_{(\beta,B),\ F}$视为相同，其中 $F = \emptyset$。此外，我们将上述 X 拓扑的基本元素称为柱集。

接下来，我们定义与超图相关联的 Deaconu-Renault 系统。

定义 7.5. 对于 $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$，定义 X 的以下子集：

$$X^n = \mathfrak{p}^n \cap X_{fin} = \{x \in X_{fin} : |x| = n\};\ X^{\geq n} = \bigcup_{k \geq n} X^k \text{ and } X^{\geq n}_\infty = X^{\geq n} \cup \mathfrak{p}^\infty.$$

注意，$X^{\geq 1}_\infty = X \backslash X^0$，并且 $X^{\geq 0}_\infty = X$。

定义 7.6. 设 $\mathcal{G}$ 为超图，X 如上所述。我们将移位映射 $\sigma : X^{\geq 1}_\infty \to X$ 定义为：

$$\sigma(x) = \begin{cases} \gamma_2\gamma_3 \ldots, & \text{if } x = \gamma_1\gamma_2 \ldots \in \mathfrak{p}^\infty; \\ (\gamma_2 \ldots \gamma_n, A), & \text{if } x = (\gamma_1 \ldots \gamma_n, A) \in X^{\geq 2}; \\ (A, A), & \text{if } x = (\gamma_1, A) \in X^1. \end{cases}$$

对于 $n > 1$，我们将 σ^n 定义为 σ 的 n 次复合；对于 $n = 0$，我们将 σ^0 定义为恒等映射。当我们写作 $\sigma^n(x)$ 时，隐含地假设 $x \in X^{\geq n}_\infty$。

在 [33, 命题 5.4] 中已证明，(X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统。为完整起见，下面陈述该结果。

命题 7.7。 *[33, 命题 5.4]* 设 $\mathcal{G}$ 是一个超图。那么 (X, σ) 是一个 Deaconu-Renault 系统。

在下一小节中，我们回顾一族在 X 中定义的度量，并证明关于它们的结果。这些结果有助于计算与超图相关联的 Deaconu-Renault 系统的度量熵，而且这些度量本身也很有趣。

7.2 超图移位空间中的一族度量

基于 [30] 和 [38], 中的思想，X 空间上的一族显式度量（该空间在前几节中构造）已在 [15]中描述。下面回顾这些度量。

为定义度量，我们首先将 $\mathfrak{p}$ 中的元素列为 $\mathfrak{p} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$。然后，对于每个 x，$y \in X$，我们定义

$$d_X(x, y) := \begin{cases} 1/2^i & i \in \mathbb{N} \text{ is the smallest value such that } p_i \text{ is an initial} \\ & \quad \text{segment of one of } x \text{ or } y \text{ but not the other,} \\ 0 & \text{if } x = y. \end{cases} \tag{4}$$

注 7.8. 度量 d_X 诱导出上一节所述的 X 上的拓扑（见 [15]）。此外， d_X 取决于我们为 $\mathfrak{p} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ 选择的顺序。不过，我们将在下文证明，由 $\mathfrak{p}$ 的不同排序所诱导的度量是一致等价的。

命题 7.9. 设 $\mathcal{G}$ 是一个超图， d_i、 $i = 1$、2 是 X 上的度量，它们由 $\mathfrak{p}$ 的可能不同的枚举得到。那么， d_1 和 d_2 一致等价。

证明. 设 $\{p_0', p_1', p_2', \ldots\}$ 和 $\{p_0'', p_1'', p_2'', \ldots\}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的两个枚举， d_1 和 d_2 分别是相应的度量。我们证明 $id : (X, d_1) \to (X, d_2)$ 是一致连续的。设 $\varepsilon > 0$，并取 J 使得 $\frac{1}{2^J} < \varepsilon$。取 $k > 0$ 使得，对所有 $0 \leq i \leq J$，都存在 $l_i < k$ 满足 $p'_{l_i} = p''_i$。现在注意，若 $d_1(x, y) < \frac{1}{2^k}$，则 $d_2(x, y) < \frac{1}{2^J} < \varepsilon$，因此 id 一致连续，证毕。证明 id^{-1} 一致连续的方法类似。

□

上面的命题引出了超图度量熵的定义。

定义 7.10. 设 $\mathcal{G}$ 是一个超图，且 (X, σ) 是其关联的 Deaconu-Renault 系统。我们将 $\mathcal{G}$ 的度量熵定义为系统 (X, σ) 的度量熵，其中 X 配备上述度量 d_X。

对于接下来的结果，我们需要回顾以下引理。

引理 7.11. (*[10,* 引理 2.*10]*) 设 $\mathcal{G}$ 是一个满足条件 (RFUM) 且无汇点的超图。那么，每个 $A \in \mathcal{G}^0$ 都可以唯一地写成 $A = \bigcup_{n=1} A_n,$，其中存在一个唯一的 k，使得 $|A_k| < \infty$ 且 $\varepsilon(A_k) < \infty$， A_j 是 $j \neq k$ 的极小无限发射器，并且对于所有 $j \neq k$， $A_j \cap A_k = \emptyset$。

接下来，我们证明度量 d_X 与一种度量一致等价；在这种度量下，无需列出 $\mathfrak{p}$ 的所有元素。

命题 7.12. 设 $\mathcal{G}$ 是满足条件（RFUM）的超图，且 d_X 是由 $\mathfrak{p}$的一个枚举得到的 X 上的度量，记为 $\{p_0', p_1', p_2', \ldots\}$。设 $\{p_0'', p_1'', p_2'', \ldots\}$ 是超路径子集的一个枚举

$$S = \{(\alpha, A) : (\alpha, A) \in \mathfrak{p}, \text{ 且 } A \text{ 是一个顶点或一个极小无限发射器}\} \quad ,$$

并设 d_1 为相关度量（其定义与 d_X 类似，参见公式 4）。那么， d_X 与 d_1 是一致等价的。

证明. 证明 d_1 关于 d_X 一致连续的方法与命题 7.9 的证明类似。我们证明 d_X 关于 d_1 一致连续。给定 $\varepsilon > 0$，取 $J > 0$ 使得 $\frac{1}{2^J} < \varepsilon$。

使用引理 7.11，并将每个 $r(p_i')$， $0 \leq i \leq J$ 写作 $r(p_i') = \cup A^i_{n_i}$，其中 $A^i_{k_i}$ 是满足 $\varepsilon(A^i_{k_i}) < \infty$的特 distinguished 集合。令 $\mathcal{D}$ 为由集合 $A^i_{n_i}$组成的集合，其中 $n_i \neq k_i$，并且

由顶点 v in $A^i_{k_i}$, $0 \le i \le J$构成的酉集。显然， $\mathcal{D}$ 是有限的。将每个 p'_i 写作$p'_i = (\alpha_i, A_i)$, 并令

$$k = \max\{j : p''_j = (\alpha_i, A) \text{ for some A} \in \mathcal{D}, 1 \le i \le J\}.$$

那么， $d_1(x,y) < \frac{1}{2^k}$意味着 $d_X(x,y) < \frac{1}{2^J} < \varepsilon$。事实上，假设 $d_1(x,y) < \frac{1}{2^k}$且 $d_X(x,y) \ge \varepsilon$。此时，存在 $p'_i = (\alpha_i, A)$， $i < J$ 是 x 的初始段，而不是 y 的初始段，反之亦然。不失一般性地，假设 p'_i 是 x 的初始段，而不是 y的初始段。按引理 7.11 将 A 分解为 $A = \cup_{l=1}^{n} A_l$。那么，必定存在一个 A_{l_0}，使得(α_i, A_{l_0})是 x 的初始段，但不是 y 的初始段（注意，若 $|x| = 0$，由于$x \in X$，则 x 是极小无限发射器。因此，对于所有 l， $x \cap A_l$ 都是有限的，故存在 l_0 使得 $A_{l_0} \cap x = x$）。若 A_{l_0} 是无限发射体，则结论成立。否则，A_{l_0} 是一个满足 $\varepsilon(A_{l_0}) < \infty$ 的有限集，并且必定存在一个顶点 v 属于 A_{l_0}，使得(α_i, v)是 x 的初始段，但不是 y的初始段。在这两种情况下，我们都得出 $d_1(x,y) \ge \frac{1}{2^k}$，这与假设矛盾。因此，关于 d_1， d_X 是一致连续的，证明完毕。

□

我们通过指出度量熵可以使用本小节介绍的任意度量来计算，结束本小节。

推论 7.13. 设 $\mathcal{G}$ 是一个超图。那么，度量熵 $\mathcal{G}$ 与 $\mathfrak{p}$ 的枚举方式无关。此外，可以使用上文定义的度量 d_1 计算度量熵。

证明. 这由命题 7.9 和 3.22 得出。 □

注 7.14. 根据命题 7.12， $\mathcal{G}$ 的度量熵与集合 S （在命题 7.12 中定义）的枚举方式无关。因此，为了计算度量熵，我们可以选定对 S 最合适的枚举。接下来，我们固定一种将在后文使用的枚举。设 $\mathcal{G}$ 为一个可数超图，其中 $\mathcal{G}^1 = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$，并将集合 $\{A \in \mathcal{G}^0 : A$ 是一个顶点或一个极小无限发射器 $\}$ 枚举为 $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$。首先，列出所有元素 (x, A), 其中 x 属于由 $\{B_1, e_1\}$ 生成的长度小于或等于 1 的路径集合；接着，列出所有元素 (x, A), 其中 x 属于由 $\{B_1, B_2, e_1, e_2\}$ 生成的长度小于或等于 2 的路径集合，且不重复之前列出的元素；然后，列出所有元素 (x, A)，其中 x 属于由 $\{B_1, B_2, B_3, e_1, e_2, e_3\}$ 生成的长度小于或等于 3 的路径集合，且不重复之前列出的元素；依此类推。

7.3 行有限图的熵。

本节我们聚焦于行有限图，并计算其关联的 Deaconu-Renault 系统（X, σ）的熵，将我们的结果与现有文献联系起来。回想一下，图可以视为一种超图，其中值域映射的取值属于顶点集（而非顶点集的幂集）。更常见的是，图表示为四元组（E^0, E^1, r, s），其中

E^0 表示顶点集， E^1 表示边集，而 r、 s 分别表示值域映射和源映射。第 7.1 节引入的记号适用于图，我们再补充以下定义。

定义 7.15. 若图 (E^0, E^1, r, s) 满足对所有 $v \in E^0$， $|s^{-1}(v)| < \infty$，则称其为行有限图。若行有限图满足对所有 $v \in E^0$， $|r^{-1}(v)| < \infty$，则称其为局部有限图。

请注意，在行有限的情形下， X 是与图相关联的通常边移位空间（也就是说， X 由所有配备通常柱集拓扑的无限路径组成），而σ 是单边移位映射。这使我们能够将熵理论与现有文献联系起来。我们需要的第一个结果如下。

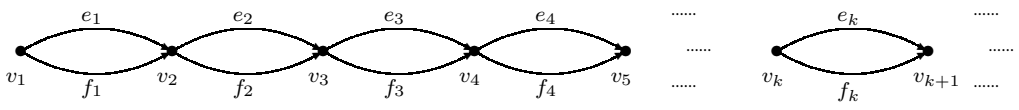
命题 7.16. 设 E 是一个行有限图。那么，相对于与边移位空间相关联的通常度量，由公式 (4) 定义的度量是一致连续的；该通常度量由 $d(x, y) = \frac{1}{2^i}$ 给出，其中 i 是满足 $x_i \neq y_i$ 的最小指标。若图是有限的，则这些度量一致等价。

证明。设 E 是一个行有限图， d_X 是方程 4 中的度量，且 d 如命题所述。我们证明， d_X 关于 d 一致连续，即 $Id_X : (X, d) \to (X, d_X)$ 一致连续。将 $\mathfrak{p}$ 的元素列为 $\{p_1, p_2, \ldots\}$。给定一个 $\varepsilon > 0$，选取 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$，并令 $m =$ 为 $\max_{1 \leq i \leq k} |p_i|$ 的最大值。定义 $\delta = \frac{1}{2^{m+1}}$。注意，如果 $d(x, y) < \delta$，那么对所有 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 都有 $x_i = y_i$，因此，任何满足 p_j 的 j，若它是 x 或 y 之一的初始段而不是另一个的初始段，都必须满足 $|p_j| \geq m + 1$。因此， $d_X(x, y) < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$。

现在，假设该图是有限的。我们证明 $Id_X : (X, d_X) \to (X, d)$ 是一致连续的。给定 $\varepsilon > 0$，取 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$。考虑集合 $A = \{p_i : |p_i| \leq k\}$，它是有限集。令 $j = \max\{i : p_i \in A\}$，并定义 $\delta = \frac{1}{2^{j+1}}$。那么， $d_X(x, y) < \delta$ 蕴含 $d(x, y) < \varepsilon$，正如所需。

□

注7.17。注意，上述命题中图为有限图这一条件是最佳的。事实上，即使对于局部有限图，上述命题的最后一个结论也不成立。例如，对于一个具有可数个顶点 $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 和边$\{e_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ 的图，使得 $s(e_i) = s(f_i) = v_i$ 且 $r(e_i) = r(f_i) = v_{i+1}$，我们有 $Id_X : (X, d_X) \to (X, d)$ 不是一致连续的。



为了证明这一点，令 $\{p_1, p_2, \ldots\}$ 为 $\mathfrak{p}$ 的一个枚举，使得：对每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在 $i_0 \in \mathbb{N}$，使得 $e_k = p_{i_0}$、 $f_k = p_{i_0+1}$，且边 e_k 和 f_k 不会出现在任何满足 $i < i_0$ 的 p_i 中。现在，令 $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$ 为满足对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $p_{i_k} = e_k$ 的子列；并且，对每个 $k \in \mathbb{N}$，令 x^k、 y^k 为无限路径，使得 x^k 的第一条边为 e_k，而 y^k 的第一条边为 f_k。于是，我们有 $d_X(x^k, y^k) = \frac{1}{2^{i_k}}$，当 k 增大时，它趋于零；并且对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $d(x^k, y^k) = \frac{1}{2}$。

对于有限图，利用命题 7.16，我们可以通过度量熵定义，按经典方式计算图的度量熵（如定义 7.10 所定义）。也可以通过第 6 节的拓扑定义来计算。下面我们将对此作出精确说明（回想一下， $\mathfrak{p}^n$ 表示图中长度为 n 的路径）。

命题 7.18. 设 E 是一个有限图，且 (X, σ) 是与之对应的 Deaconu-Renault 系统。那么，

$$h_d(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} log|\mathfrak{p}^n|.$$

证明. 若 E 是有限的，则对应的移位空间是紧的，并且对所有 n， $Dom(\sigma^n) = X$ 。因此，该结论由命题 3.22 和 $[37,$ 定理 7.13] 得出。

□

在可数边移位空间的经典文献中，局部有限图 E 的 Gurevich 熵 $h_G(E)$ 可表示为有限连通子图的熵的上确界，也就是说，

$$h_G(E) = \sup_{H\subseteq E,\ H \text{ finite}} h(X_H, \sigma),$$

参见 $[23,$ 命题 7.2.6] 或 $[24,$ 第 13 节。9]。该熵可作为 Bowen 度量熵得到，参见与以下度量对应的 $[16, 29, 31],$ 。

给定一个行有限图 E，将边集枚举为 $E^1 = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$，并令$h : E^1 \to \mathbb{N}$ 为由 $h(e_i) = i$ 定义的双射。按照 $[16],$ ，映射 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ 定义为

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\frac{1}{h(x_i)} - \frac{1}{h(y_i)}|}{2^i}$$

是一个度量。接下来我们证明，对于局部有限图，上述度量 d 与度量 d_X 一致等价。

命题 7.19. 设 E 是一个行有限图， d_X 是方程 4 中给出的度量。则 d_X 关于上文定义的度量 d 一致连续。若 E 局部有限，则 d_X 和 d 一致等价。

证明。首先，我们证明 d_X 关于 d 一致连续。设 $p_1, p_2, \ldots$ 是 $\mathfrak{p}$ 的一个枚举。设 $\varepsilon > 0$ ，并考虑满足 $0 < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$ 的 $k \in \mathbb{N}$ 。对于每个 p_i，其中 $i = 1, \ldots, k$，我们可以写成 $p_i = e_i^1 \ldots e_i^{|p_i|}$ ，其中 $e_i^j \in E^1$。设

$$M = \max\{h(e_i^j) : i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, |p_i|\},$$

定义 $L =$ 为 $_{1\le i\le k} |p_i|$ 的最大值，令 $\delta' = \frac{1}{M+1} - \frac{1}{M+2}$ 和 $\delta = \frac{\delta'}{2^L}$。

现在，固定 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$、 $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$，使得 $d(x, y) < \delta$。于是

$$\sum_{i=1}^{L} \frac{|\frac{1}{h(x_i)} - \frac{1}{h(y_i)}|}{2^i} \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\frac{1}{h(x_i)} - \frac{1}{h(y_i)}|}{2^i} = d(x, y) < \delta = \frac{\delta'}{2^L}.$$

因此，对于每个 $i \in \{1,\ldots,L\}$，我们有

$$\left|\frac{1}{h(x_i)}-\frac{1}{h(y_i)}\right| \le \sum_{i=1}^{L}\left|\frac{1}{h(x_i)}-\frac{1}{h(y_i)}\right| \le \sum_{i=1}^{L} 2^{L-i}\left|\frac{1}{h(x_i)}-\frac{1}{h(y_i)}\right| < \delta'.$$

接下来我们证明，对于固定的 $i \in \{1,\ldots,L\}$，有 $x_i = y_i$，或者 $h(x_i) > M$和$h(y_i) > M$。

首先假设 $h(x_i) \le M$ 且 $h(y_i) \le M$。假设 $h(x_i) \ne h(y_i)$，则得到$\left|h^{1}{}_{(x_i)} - h^{1}{}_{(y_i)}\right| \ge \frac{1}{M} - \frac{1}{M+1}$，这是不可能的，因为$\left|h^{1}{}_{(x_i)} - h^{1}{}_{(y_i)}\right| \le \delta' = \frac{1}{M+1} - \frac{1}{M+2}$。因此，在这种情况下，$x_i = y_i$。

现在假设 $h(x_i) \le M$ 且 $h(y_i) \ge M+1$。在这种情况下，$h^{1}{}_{(x_i)} \ge \frac{1}{M}$ 且 $h^{1}{}_{(y_i)} \le \frac{1}{M+1}$，因此$\left|h^{1}{}_{(x_i)} - h^{1}{}_{(y_i)}\right| \ge \frac{1}{M} - \frac{1}{M+1}$，这同样是不可能的，因为$\left|h^{1}{}_{(x_i)} - h^{1}{}_{(y_i)}\right| < \delta' = \frac{1}{M+1} - \frac{1}{M+2}$。当然，$h(y_i) \le M$ 且 $h(x_i) \ge M+1$也不可能。

因此可得，对于 $i \in \{1,\ldots,L\}$ 或 $y_i = x_i$，有 $h(x_i) > M$且 $h(y_i) > M$。

设 $j \in \mathbb{N}$ 是最小的值，使得 p_j 是 x 或 y 之一的初始段，但不是另一个的初始段。则 $d_X(x,y) = \frac{1}{2^j}$。写作 $p_j = f_1 f_2 \ldots f_{|p_j|}$，其中对每个 i，都有 $f_i \in E^1$。若 $|p_j| \le L$，则对某个 $i \in \{1,\ldots,L\}$ 有 $x_i \ne y_i$，因此 $h(x_i) > M$ 且 $h(y_i) > M$。特别地，$h(f_i) > M$。因此，f_i 不是 $\{p_1,\ldots,p_k\}$ 中任何元素的边，所以 $p_j \notin \{p_1,\ldots,p_k\}$。因此 $j > k$。若 $|p_j| > L$，则显然 $p_j \notin \{p_1,\ldots,p_k\}$，所以 $j > k$ 也成立。由此可得 $d_X(x,y) = \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$。

现在，假设该图是局部有限的，我们证明 $Id_X\colon (X,d_X) \to (X,d)$ 是一致连续的。令 $\varepsilon > 0$。取 $L \in \mathbb{N}$，使得对所有 $i,j > L$，都有 $\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$,∞；再取 $k \in \mathbb{N}$，使得 $\sum \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$.$i=k$

Let

$A := \{p_i \in \mathfrak{p};\ |p_i| \le k$和 p_i在其复合中至少包含一条边 $\{e_1, e_2, \ldots, e_L\}\}$.

注意，由于该图是局部有限的，A 是一个有限集。现在令 $M = \max\{i : p_i \in A\}$，并取 $\delta = \frac{1}{2^M}$。

取两个元素 $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$，使得 $d_X(x,y) < \delta$。我们证明 $d(x,y) < \varepsilon$。由于 $d_X(x,y) < \delta = \frac{1}{2^k}$，因此 $d_X(x,y) = \frac{1}{2^j}$，其中 j是最小的指标，使得 p_j是 x 或 y 之一的初始路径，但不是另一个的初始路径。

假设对于某个 $i \in \{1,\ldots,k\}$，$x_i \in \{e_1,\ldots e_L\}$。在这种情况下，$x_1 x_2 \ldots x_k \in A$；若假设 $x_1 x_2 \ldots x_k \ne y_1 y_2 \ldots y_k$，则 $d_X(x,y) \ge \frac{1}{2^M} = \delta$，这是不可能的。因此，在这种情况下，$x_1 x_2 \ldots x_k = y_1 y_2 .. y_k$。对于某个 $i \in \{1,\ldots,k\}$，若 $y_i \in \{e_1,\ldots e_L\}$，结论也相同。注意，由于 $x_1 \ldots x_k = y_1 \ldots y_k$，因此

$$d(x,y) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\left|\frac{1}{h(x_i)} - \frac{1}{h(y_i)}\right|}{2^i} < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

情形 $x_i, y_i \notin \{e_1,\ldots,e_L\}$对每个 $i \in \{1,\ldots,k\}$，则 $h(x_i) > L$和 $h(y_i) > L$对每个

$i \in \{1, \ldots, k\}$，然后，由于$|h^{1}_{(x_i)} - h^{1}_{(y_i)}| < \frac{\varepsilon}{2}$，可得

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\frac{1}{h(x_i)} - \frac{1}{h(y_i)}|}{2^i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{|\frac{1}{h(x_i)} - \frac{1}{h(y_i)}|}{2^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{|\frac{1}{h(x_i)} - \frac{1}{h(y_i)}|}{2^i} <$$

$$< \sum_{i=1}^{k} \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

推论 7.20. 设 E 是一个局部有限图，(X, σ) 是其关联的 Deaconu-Renault 系统。则，$h_d(\sigma) = h_G(E)$。

证明. 这由上述命题和命题 3.22 得出。

□

下文将证明，与任意行有限图相关联的 Deaconu-Renault 系统的拓扑熵，可以表示为与有限连通子图相关联的 Deaconu-Renault 系统的熵的上确界。

定理 7.21. 设 E 是一个行有限图，(X, σ) 是其关联的 Deaconu-Renault 系统。则，

$$h(\sigma) = \sup_{H \subseteq E} h(\sigma_H),$$

其中，上确界取遍 E 的所有有限子图 H，而 (X_H, σ_H) 是与图 H 相关联的 Deaconu-Renault 系统。

证明. 设 E 的一个有限子图为 H。定义 X_H 为与 H 相关联的移位空间，即 X_H 由 H 中所有无限路径组成，并赋予由通常的柱集所确定的拓扑。该空间是紧的。令 $m \in \mathbb{N}$，并令 F 为 H 中所有长度为 m 的路径组成的集合，这是一个有限集。对每个 $\beta \in F$，记 D_β 为 X_H 中由所有以 β 为初始段的 H 中路径组成的柱集，并注意到 $\alpha = \{D_\beta : \beta \in F\}$ 是 X_H（在 X_H 中）的一个开覆盖。

对于每个 $\beta \in F$，令 C_β 为 X 中由 β 确定的柱集。定义 $K = \bigcup_{\beta \in F} C_\beta$，它是 X 中的一个紧集，并注意到 $\gamma = \{C_\beta : \beta \in F\}$ 是 X 中 K 的一个开覆盖。

现在我们将证明分为几个断言。下面的第一个断言可由直接计算得到，其证明留给读者。

断言 1：对于给定的集合 $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq F$，我们有以下两种情况之一：

$$D_{\beta_0} \cap \sigma_H^{-1}(D_{\beta_1}) \cap \ldots \cap \sigma_H^{-n}(D_{\beta_n}) = \emptyset = C_{\beta_0} \cap \sigma^{-1}(C_{\beta_1}) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(C_{\beta_n}),$$

或者存在一条路径 ξ 在 H中，其中 $|\xi| = m + n$，使得

$$D_{\beta_0} \cap \sigma_H^{-1}(D_{\beta_1}) \cap \ldots \cap \sigma_H^{-n}(D_{\beta_n}) = D_\xi \text{ and } C_{\beta_0} \cap \sigma^{-1}(C_{\beta_1}) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(C_{\beta_n}) = C_\xi.$$

命题 2：固定 $n \in \mathbb{N}$。那么， $N(\gamma_n, K_n) = N(\alpha_n, (X_H)_n)$。

首先我们证明 $N(\gamma_n, K_n) \leq N(\alpha_n, (X_H)_n)$。注意， $A \in \alpha_n$中的每个元素都具有如下形式

$$A = D_{\beta_0} \cap \sigma_H^{-1}(D_{\beta_1}) \cap \ldots \cap \sigma_H^{-n}(D_{\beta_n})$$

而且，$(X_H)_n$ 是这类集合的并集。

设 $\{A_1, .., A_p\}$是 α_n的一个子覆盖，其基数最小，并覆盖 $(X_H)_n$，这意味着 $N(\alpha_n, (X_H)_n) = p$。由于 $A_i \in \alpha_n$且 A_i非空，根据断言 1，对于每个 $1 \leq i \leq p$，存在一条路径 $\xi_i \in H$，满足 $|\xi_i| = m + n$ 和 $A_i = D_{\xi_i}$。这意味着 $(X_H)_n \subseteq D_{\xi_1} \cup \ldots \cup D_{\xi_p}$。

我们证明 $K_n \subseteq C_{\xi_1} \cup \ldots \cup C_{\xi_p}$。注意， K_n是 γ_n中各元素的并集，而 γ_n 中的每个非空元素都具有如下形式

$$B = C_{a_0} \cap \sigma^{-1}(C_{a_1}) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(C_{a_n}).$$

由于 $D_{a_0} \cap \sigma_H^{-1}(D_{a_1}) \cap \ldots \cap \sigma_H^{-n}(D_{a_n})$ 是 α_n 的一个元素（因此是 $(X_H)_n \subseteq D_{\xi_1} \cup \ldots \cup D_{\xi_n}$ 的子集），并且 $D_{a_0} \cap \sigma_H^{-1}(D_{a_1}) \cap \ldots \cap \sigma_H^{-n}(D_{a_n}) = D_\xi$ 对于 H 中某条满足 $|\xi| = m+n$ 的路径 ξ 成立（由断言 1），所以对于某个 $1 \leq j \leq p$，有 $D_{a_0} \cap \sigma_H^{-1}(D_{a_1}) \cap \ldots \cap \sigma_H^{-n}(D_{a_n}) = D_{\xi_j}$。同样，由断言 1 可得 $C_{a_0} \cap \sigma^{-1}(C_{a_1}) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(C_{a_n}) = C_{\xi_j}$。因此， B 是 $C_{\xi_1} \cup \ldots \cup C_{\xi_p}$ 的子集，从而 $K_n \subseteq C_{\xi_1} \cup \ldots \cup C_{\xi_p}$。

还需证明每个 C_{ξ_i}（其中 $1 \leq i \leq p$）都是 γ_n的一个元素。回顾一下，$D_{\xi_i} = A_i \in \alpha_n$。因此，对每个 $1 \leq i \leq p$，都存在 $\{b_0, b_1, \ldots, b_n\} \subseteq F$，使得 $D_{b_0} \cap \sigma_H^{-1}(D_{b_1}) \cap \ldots \cap \sigma_H^{-n}(D_{b_n}) = D_{\xi_i}$。由断言 1，$C_{b_0} \cap \sigma^{-1}(C_{b_1}) \cap \ldots \cap \sigma^{-n}(C_{b_n}) = C_{\xi_i}$，故 $C_{\xi_i} \in \gamma_n$，如所愿。

由此可得，γ_n 有一个由 p 个元素构成的子覆盖，它覆盖了 K_n。因此， $N(\gamma_n, K_n) \leq p = N(\sigma_n, (X_H)_n)$。

同理可证， $N(\sigma_n, (X_H)_n) \leq N(\gamma_n, K_n)$，由此完成了命题 2 的证明。

命题 3：设 H和 K如上所述。则， $h(\sigma_H, X_H) = h(\sigma, K)$

设 α和 γ如上所述。由命题 2， $N(\alpha_n, (X_H)_n) = N(\gamma_n, K_n)$，对每个 $n \in \mathbb{N}$均成立。因此，$h(\gamma, \sigma_H, X_H) = h(\gamma, \sigma, K)$。回想一下， α和 γ取决于本定理证明开头固定的 m。不难看出，在注 7.14 中固定的度量下，当 $m \to \infty$时，我们有 $diam(\alpha) \to 0$ 以及 $diam(\gamma) \to 0$。于是，由命题 6.16 可得$h(\sigma, K) = h(\sigma_H, X_H)$，命题 3 得证。

现在我们证明该定理。

由于对每个紧集 $K \subseteq X$，都有 $h(\sigma, K) \leq h(\sigma)$，因此由命题 3 可知，对 E 的每个有限子图 H，均有 $h(\sigma_H) = h(\sigma_H, X_H) \leq h(\sigma)$。因此，

$$\sup_H h(\sigma_H) \leq h(\sigma),$$

其中，上确界取遍所有 H E的有限子图。

剩下要证明的是 $h(\sigma) \leq \sup h(\sigma_H)$。为此，我们证明，对于每个紧集$H$

$L \subseteq X$，都存在某个有限子图 H of E，使得 $h(\sigma, L) \leq h(\sigma_H)$。

设 L 是 X 和 $m \in \mathbb{N}$ 的一个紧子集。由于 L 是紧的，我们有 L 包含于 X 中有限个柱集 C_a 的并集，其中 $a \in F$。由于 E 无汇点且是行有限的，我们可以假设对每个 a，都有 $|a| = m$。设 H 是由 F 中所有路径 a 的所有边生成的 E 的有限子图。对于这个子图 H，令 X_H、K、α 和 γ 如本定理证明开头所定义，并注意到 $L \subseteq K$。于是，由于 $L \subseteq K$，根据引理 6.11，我们有 $h(\sigma, L) \leq h(\sigma, K)$；根据命题 3，我们有 $h(\sigma, K) = h(\sigma_H)$。因此，$h(\sigma, L) \leq h(\sigma_H)$。对 L 和 H 取上确界，得到 $h(\sigma) \leq \sup h(\sigma_H)$，这正是 H 所要求的。

□

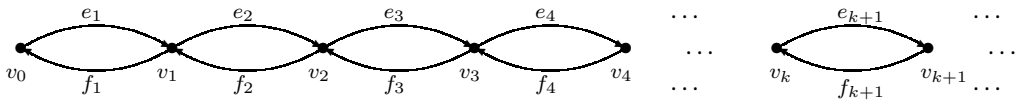
推论 7.22. 设 E 是一个局部有限图。那么 E 的度量熵与 E 的拓扑熵相等。

证明。根据命题 7.19，度量熵与 Gurevich 熵相等，而后者可以计算为有限图的熵的上确界。对于有限图，度量熵与拓扑熵相等是众所周知的。结论由上述定理立即得出。

□

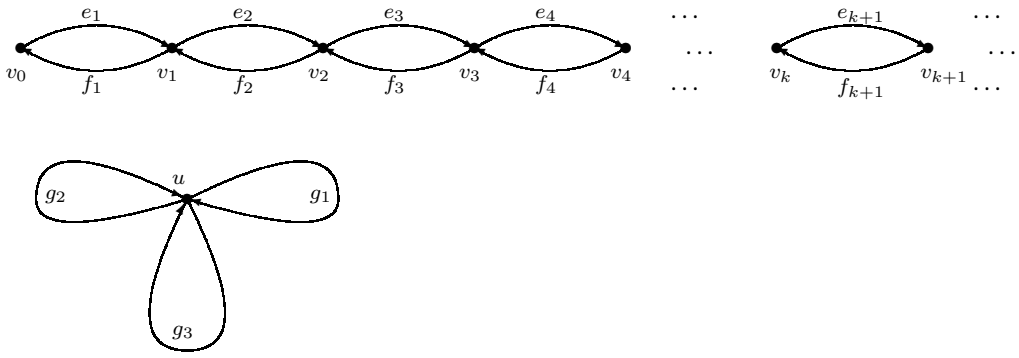
接下来，我们计算几个例子中的熵。

例 7.23. 设 $E = (E^0, E^1, r, s)$ 为下图所示的局部有限图：



设 (X, σ) 为相应的 Deaconu-Renault 系统。对于 E 的每个有限子图 H，记 (X_H, σ_H) 为与图 H 相关联的 Deaconu-Renault 系统，其中 X_H 是 H 中所有无限路径的集合。注意，E 的每个有限子图 G 都包含在形如 $H_m = (E^0_m, E^1_m, r, s)$ 的图中，其中 $E^0_m = \{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$，且 $E^1_m = \{e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_m, f_m\}$。因此，根据定理 7.21，$(X, \sigma)$ 的熵是 (X_{H_m}, σ_{H_m}) 的熵 $h(\sigma_{H_m})$ 的上确界。我们计算每个 $m \in \mathbb{N}$ 的 $h(\sigma_{H_m})$。固定 $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$，并记 $\mathfrak{p}^n$ 为 H_m 中长度为 n 的所有路径的集合。注意，$|\mathfrak{p}^n| \leq 2m2^n$，因为 H_m 包含 $2m$ 条边，且 H_m 的每个顶点都发出 2 条边。此外，令 $a = f_1 e_1$ 和 $b = f_m e_m$。那么，集合 $\{a, e_2, f_2, e_3, f_3, \ldots, e_{m-1}, f_{m-1}, b\}$ 中每个元素的值域都发出两条边，因此，由集合 $\{a, e_2, f_2, e_3, f_3, \ldots, e_{m-1}, f_{m-1}, b\}$ 生成的 $\mathfrak{p}^n$ 的所有元素构成的子集的基数为 $(2m-2)2^{n-2}$。因此，对每个 $n \in \mathbb{N}$，$(2m-2)2^{n-2} \leq |\mathfrak{p}^n| \leq 2m2^n$。于是，对每个 $m \in \mathbb{N}$，$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} log|\mathfrak{p}^n| = log(2)$，并且根据命题 7.18，我们得到对每个 $m \in \mathbb{N}$，$h(\sigma_{H_m}) = log(2)$。由此，根据定理 7.21，$h(\sigma) = log(2)$。

例 7.24. 令 $E = (E^0, E^1, r, s)$ 为由上述图和一个三瓣玫瑰图组成的非连通图，见下图。



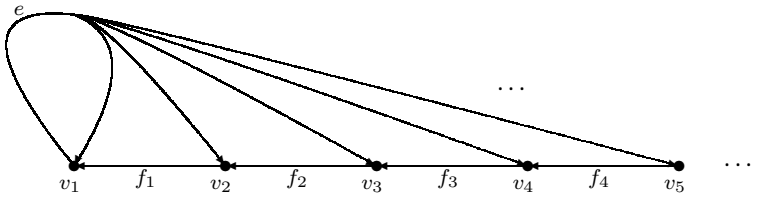
在例 7.23 中，我们计算了顶层子图的熵，结果为 log(2)。由 $\{g_1, g_2, g_3\}$ 和 $\{u\}$ 生成的子图的熵为 log(3)。因此，根据命题 5.3，图 E 的度量熵为 log(3)；根据推论 7.22，拓扑熵与度量熵相同。

7.4 更新移位的熵

拓扑混合可数马尔可夫移位的一个重要例子是更新移位，其无限邻接矩阵为

$$A_{\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

相关马尔可夫移位空间的动力学性质和（Gurevich）拓扑熵（即赋予积拓扑的通常移位空间，见 [2]）在 [26, 32]中进行了研究。与 C*-代数理论和热力学形式主义相关，在 [5], 中将某个空间与上述矩阵联系起来。该空间与移位空间（定义于[14]中）共轭，后者与由 $A_{\mathcal{G}}$ 产生的超图 $\mathcal{G}$ 相关（见 [8]）；而这个超图又正是我们用来定义与 $\mathcal{G}$相关的
Deaconu-Renault 系统的空间。我们回顾一下，与 $A_{\mathcal{G}}$ 相关的超图$\mathcal{G}$ 具有顶点 $\{v_i : i \in \mathbb{N}\}$ 以及边 $\{e, f_i : i \in \mathbb{N}\}$，其中 $s(e) = v_1$、$r(e) = \{v_i : i \in \mathbb{N}\}$、$s(f_i) = v_{i+1}$，以及 $r(f_i) = v_i$，对所有 $i \in \mathbb{N}$均成立。



Renewal shift 超图

接下来，我们计算与 $\mathcal{G}$ 相关联的 Deaconu-Renault 系统的拓扑熵。为此，我们构造一个直径趋于零的覆盖序列（这样便可以使用

命题 6.16）。要计算覆盖的直径，我们需要先固定一个度量；选择超路径集 $\mathfrak{p}$ 的一个枚举，或选择命题 7.12 中所述集合 S 的一个枚举后，即可确定该度量。因此，选择注 7.14 中固定的枚举。

令 d 为由该枚举诱导的度量，并令 (X, d) 为与 $\mathcal{G}$ 相关联的 Deaconu-Renault 系统。由注 7.8 和 [14, 命题 3.12] 可知，(X, d) 是紧的。接下来，我们定义空间 X 的一个覆盖。

固定一个 $m \in \mathbb{N}$，并令 $F = \{e, f_1, f_2, \ldots, f_m\}$。定义集合

$$Q = \{\beta : \beta \text{ 是 } \mathcal{G} \text{ 中的一条有限路径，其边属于 } F，\text{最后一条边为 } e，\text{且 } |\beta| < m\}$$

and

$$R = \{\beta : \beta \text{ is a finite path in } \mathcal{G} \text{ with edges in } F \text{ and } |\beta| = m\}.$$

定义 X 的一个开覆盖如下

$$\alpha^m = \left\{D_{(r(e),r(e)),F}\right\} \bigcup \{D_{\beta,F} : \beta \in Q\} \bigcup \{D_\gamma : \gamma \in R\}.$$

为简化记号，在下文中我们用 α 表示 α^m。注意，α 是一个有限覆盖，并且该覆盖的所有柱集两两不交。

接下来，我们计算 $h(\alpha, \sigma, X)$，即 σ 关于开覆盖 α 的熵（见定义 6.8）。为此，我们首先注意到，σ 下每个柱集的原像都是两个柱集的并集。

为证明这对 $D_{(r(e),r(e)),\ F}$成立，写作

$$D_{(r(e),r(e)),F} = \bigcup_{i=m+1}^{\infty} D_{f_i}.$$

于是，

$$\sigma^{-1}(D_{(r(e),r(e)),F}) = \sigma^{-1}\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} D_{f_i}\right) = \left(\bigcup_{i=m+2}^{\infty} D_{f_i}\right) \cup \left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} D_{ef_i}\right) = D_{(r(e),r(e)),F\cup\{f_{m+1}\}} \cup D_{e,F}.$$

为验证这一观察对形如 $D_{\beta,\ F}$ 的柱集成立，注意到，对于每个顶点 v，值域中恰有两条边包含 v，其中一条是 e。于是，对于给定的 $\beta \in Q$，值域中恰有两条边包含 $s(\beta)$，一条是边 e，另一条记作 a_β。因此，$\sigma^{-1}(D_{\beta,\ F})$是两个柱集的并集，即

$$\sigma^{-1}(D_{\beta,F}) = D_{e\beta,F} \cup D_{a_\beta\beta,F}.$$

类似地，对于每个 $\gamma \in R$,

$$\sigma^{-1}(D_\gamma) = D_{e\gamma} \cup D_{a_\gamma\gamma}.$$

因此，

$$\sigma^{-1}(\alpha) = \left\{D_{(r(e),r(e)),F\cup\{f_{m+1}\}} \cup D_{e,F}\right\} \cup \{D_{e\beta,F} \cup D_{a_\beta\beta,F} : \beta \in Q\} \cup \{D_{e\gamma} \cup D_{a_\gamma\gamma} : \gamma \in R\}.$$

读者现在可以验证， $\alpha \vee \sigma^{-1}(\alpha)$ 是由所有作为 $\sigma^{-1}(\alpha)$ 的元素出现的柱集构成的集合，或者更具体地说， $\alpha_1 = \alpha \vee \sigma^{-1}(\alpha)$ 等于

$$\left\{D_{(r(e),r(e)),F\cup\{f_{m+1}\}}\right\} \cup \{D_{e,F}\} \cup \{D_{e\beta,F} : \beta \in Q\} \cup \left\{D_{a_\beta\beta,F}\right\} \cup \{D_{e\gamma} : \gamma \in R\} \cup \left\{D_{a_\gamma\gamma} : \gamma \in R\right\}.$$

注意，上述集合族有 $2M$ 个柱集，其中 M 是 α的基数。由于这些柱集两两不交，我们得到

$$N(\alpha_1, X_1) = 2M.$$

仿照上面的做法，我们得出， σ 下 $\sigma^{-1}(\alpha)$ 中出现的每个柱集的原像都是两个柱集的并集。此外， $X_2 = X \cap \sigma^{-1}(X) \cap \sigma^{-2}(X)$ 的覆盖$\alpha_2 = \alpha \vee \sigma^{-1}(\alpha) \vee \sigma^{-2}(\alpha)$ 是所有作为 $\sigma^{-1}(\sigma^{-1}(\alpha))$ 的元素出现的柱集构成的集合族。因此， $N(\alpha_2, X_2) = 2^2M$。

归纳地进行，我们得到，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $N(\alpha_n, X_n) = 2^nM$。 n,

$$h(\alpha, \sigma, X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha_n, X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} log(2^nM) = log(2).$$

最后，我们回到覆盖 α 的原始记号，即 α^m （因为这个覆盖依赖于 m）。根据 S 的选定枚举以及 d 的定义可知，$\lim_{m\to\infty} diam(\alpha^m) = 0$。于是，由命题 6.16 可得， $h(\sigma, X) = \lim_{m\to\infty} h(\alpha^m, \sigma, X)$，因此 $h(\sigma, X) = log(2)$。故由引理 6.11 和定义 6.8 可知，$h(\sigma) = log(2)$。

参考文献

[1] B. Armstrong, K. Brix, T. Carlsen, S. Eilers. 通过群胚和 C* 代数研究局部同胚的共轭。《遍历理论与动力系统》1-22，2022年。[2] U. B. Darji, D. Gonçalves, M. Sobottka. 跟踪、有限阶移位与超度量空间。《数学进展》385，107760。2021年。[3] A. Baraviera, D. Gonçalves, D. Royer, R. Exel, F. B. Rodrigues. 群 $\mathbb{Z}$ 的部分作用的拓扑熵。《美国数学会会刊》150，1089-1103，2022年。[4] N. Brownlowe, T. M. Carlsen and M. Whittaker. 图代数与轨道等价。《遍历理论与动力系统》37，389-417，2017年。[5] R. Bissacot, R. Exel, R. Frausino and T. Raszeja, 无限多个状态上的广义马尔可夫移位的热力学形式主义，arXiv:1808.00765v3，2022年。

[6] G. Boava, G. G. de Castro, D. Gonˌcalves, D. W. van Wyk，任意字母表上的单侧子移位代数，arXiv:2211.02148 [math.RA], 2022。[7] A. Caldas, M. Patr˜ao，局部紧可度量系统的熵及其变分原理。《遍历理论与动力系统》38(2)，540-565，2018年。[8] J. Claramunt, D. Gonˌcalves，超图 C*-代数作为部分交叉积，以及 Exel-Laca 代数的谱与超图移位空间之间的共轭，预印本（2023年）。[9] T. M. Carlsen, E. Ruiz, A. Sims, and M. Tomforde. 群胚的重构与动力系统的 C* 刚性。《数学进展》390，2021年。[10] G. G. de Castro, D. Gonˌcalves，超图 C*-代数上的 KMS 态与基态，《积分方程与算子理论》90，p. 63，2018年。[11] G. G. de Castro, D. Gonˌcalves, D. W. van Wyk，通过标记图群胚研究超图代数，并应用于广义唯一性定理。《代数学杂志》第579卷，456-495页，2021年，[12]V. Deaconu. 与端同态相关的群胚。《美国数学会汇刊》347(5):1779-1786，1995年。[13] I. Godofredo，更新型移位的遍历优化。《奥地利数学月刊》150(2):91-95，2007年。[14] D. Gonˌcalves, D. Royer，通过超图及其 C* 代数研究无限字母表边移位空间，《国际数学研究通知》2019(7)，2177-2203，2017年。[15] D. Gonˌcalves, B. B. Uggioni，超图移位空间的 Li-Yorke 混沌，《离散与连续动力系统》40卷，2347-2365页，2020年。[16] B. M. Gurevich，可数马尔可夫链的拓扑熵。（俄文）。苏联科学院院报187，1969年，715-718页。[17] M. Handel and B. Kitchens，非紧空间的度量与熵，《以色列数学杂志》91(1-3)，253-271，1995年。[18] B. Hasselblatt, Z. Nitecki, J. Propp. 非一致连续映射的拓扑熵。《离散与连续动力系统》22（1和2）：201-213，2008年。[19] J. A. Jeong and G. H. Park，图 C^*-代数的拓扑熵与 AF 子代数，《美国数学会会刊》134，215-228，2006年。[20] J. A. Jeong and G. H. Park，图 C^*-代数的拓扑熵与 AF 核，《数学分析与应用杂志》354，664-673，2009年。[21] D. Kerr, C. Pinzari. Cuntz-Krieger 型 C^*-代数中的非交换压强与变分原理，《泛函分析杂志》188(1): 156-215，2002年。

[22] D. Kerr。度量化 C^* 代数的维数与动力熵，《数学物理通讯》232(3): 501-534，2003 [23]B. Kitchens，《符号动力系统：单边、双边与可数状态马尔可夫移位》，Universitext。施普林格，柏林，1998年。[24] D. Lind，B. Marcus。《符号动力系统与编码导论》，剑桥大学出版社，1995年。[25] L. Liu、Y. Wang 和 G. Wei。拓扑空间上连续函数的拓扑熵。《混沌、孤子与分形》39，417-427m，2009年。[26] Y. Michimoto、Y. Nakano、H. Toyokawa、K. Yoshida。可数马尔可夫移位与 Exel-Laca 代数的拓扑熵，arXiv:2212.14607 [math.OA], 2022.[27] M. Patr˜ao，非紧度量空间上的熵及其变分原理，《遍历理论与动力系统》30，1529-1542，2010年。[28] J. Renault。Cuntz-Lie 代数。《第17届国际算子理论会议论文集》（蒂米什瓦拉 98），Theta 基金会，布加勒斯特，371-386，2000年。[29] K. Petersen。链、熵、编码。《遍历理论与动力系统》6，415-448，1986年。[30] W. Ott、M. Tomforde、P. N. Willis，《无限字母表上的单边移位空间》，《纽约数学杂志》，NYJM 专著 5，54页，2014年。[31] I. A. Salama，可数链的拓扑熵与回归，《太平洋数学杂志》134（1988），325-341；勘误见140，397-398，1989年。[32] O. Sarig，可数马尔可夫移位的相变。《数学物理通讯》217，555-577，2001年。[33] F. A. Tasca、D. Gon˙calves。带汇点的超图移位空间的 KMS 态与连续轨道等价。《数学出版物》66，729-787，2022年。[34]M. Tomforde。Exel-Laca 代数与图相关 C^* 代数的统一方法。《算子理论杂志》50，345-368，2003年。[35] D. V. Voiculescu。算子代数中的动力逼近熵与拓扑熵。《数学物理通讯》170，249-281，1995年。[36] J. B. Wagoner。拓扑马尔可夫链、C* 代数与 K_2，《数学进展》71，133-185，1988年。[37] P. Walters。《遍历理论导论》。《数学研究生教材》第79卷，2000年。[38] S. B. G. Webster，有向图的路径空间，《美国数学会会刊》142 (1)，213-225，2014年。

(Daniel Gonçalves、Danilo Royer 和 Felipe Augusto Tasca) 圣卡塔琳娜联邦大学数学系，88040-970，Florianópolis SC，巴西。电子邮箱：daemig@gmail.com, danilo.royer@ufsc.br, tasca.felipe@gmail.com.