arXiv:2301.09242v1 [math.PR] 23 Jan 2023

自由群和福克斯群上首次通过函数的渐近行为

Petr Kosenko

2023年1月24日

摘要

在这篇预印本中，我们推导出一类特定自由群随机游走的首次通过函数渐近行为的显式估计，并利用这些估计证明，在福克斯群上以类似方式定义的一类随机游走的命中测度是奇异的。

1 引言

我们继续研究余紧福克斯群的奇异性猜想 :

猜想 1.1（福克斯奇异性猜想）。对于由余紧福克斯群 Γ 上的概率测度 μ 生成的每个有限程可容许随机游走 (X_n)，其命中测度 ν_μ 相对于 $S^1 \simeq \partial\Gamma$ 上的勒贝格测度是奇异的。

这一猜想通常针对 $SL_n(\mathbb{R})$ 中的格来表述，并归功于 Y. Guivarch、V. Kaimanovich 和 F. Ledrappier。虽然似乎很难追溯这一猜想的确切出处，但我们将 [DKN09] 和 [KL11] 视为主要来源。相关结果参见 [Gui80], [KV83], [LS84], [GL93], [Le 08],[BHM11], [KL11], [GMM18], [DG20], [Aze+22] 。

在 [Kos20] 和 [KT22] 中，我们发展了一些方法，从而得以验证猜想 1.1：对于由边配对变换（$t_1, \dots, t_{2m}$）生成的余紧福克斯群 Γ 上的最近邻随机游走，这些变换将一个基本 $2m$-多边形的对边粘合起来（此处我们假设 $t_{m+i} = t_i^{-1}$）。

回顾几何距离的定义：若 $x, y \in \Gamma$，则

$$d_{\mathbb{H}^2}(x, y) := d(x.O, y.O),$$

其中 $O \in \mathbb{H}^2$ 是固定基点。我们采用的主要方法是证明以下两个不等式：

$$\sum_{1 \le j \le 2m} \frac{1}{1 + e^{d_\mu(e, t_j)}} \ge 1, \tag{1}$$

$$\sum_{1 \le j \le 2m} \frac{1}{1 + e^{\ell(t_j)}} < 1, \tag{2}$$

其中

$$\ell(g) := \lim_{n \to \infty} \frac{d_{\mathbb{H}^2}(e, g^n)}{n}$$

表示平移长度，而 d_μ 表示格林度量。结合 (1) 和 (2)，我们可以推得存在一个（双曲型）生成元 t_j ，使得

$$d_{\mathbb{H}^2}(e, t_j) = \ell(t_j) > d_\mu(e, t_j),$$

这确保了调和测度的奇异性，这是由以下引理得出的；该引理源自[BHM11, Theorem 1.5] （对于非对称测度，也可参见 [DG20, Theorem 1.1] ）：

引理 1.1（[KT22], 引理 2.3）。考虑由具有有限支撑的容许概率测度 μ 生成的福克斯群 Γ 上的随机游走。若存在一个双曲元素 $g \in \Gamma$ 满足 $d_\mu(e,g) < \ell(g)$，则命中测度 ν_μ 相对于$S^1 \simeq \partial\Gamma$上的勒贝格测度是奇异的。

1.1 非最近邻随机游走结果的表述

我们希望将此方法推广到具有中心对称基本多边形的余紧福克斯群上的任意可容许有限程随机游走。回忆由概率测度 μ 生成的随机游走 (X_n) 的首次通过函数定义如下：

$$F_\mu(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 = x, X_k = y, X_j \neq y \text{ for } j < k).$$

现在记

$$\rho_\mu(g) := \liminf_{k\to\infty} F_\mu(e,g^k)^{\frac{1}{k}}.$$

现在我们可以表述一个有效的充分条件，以确保福克斯群上的随机游走满足猜想 1.1。

命题 1.1. 设 $\Gamma = \{t_1, \ldots, t_{2m}\}$ 为一个福克斯群，它具有一个中心对称基本多边形，并配有用于识别对边的边配对变换。考虑由有限支撑概率测度 μ' 在 Γ 上生成的可容许随机游走。

若存在 $F_m = \{a_i^{\pm 1}\}_{1\le i\le m}$ 上的有限程概率测度 μ，使得 $\mu' = p_*(\mu)$，其中$p:\ F_m \to \Gamma$ 是由 $a_i \mapsto t_i$ 定义的自然投影，并且 μ 满足

$$\sum_i \frac{1}{1+\rho_\mu(a_i)^{-1}} + \frac{1}{1+\rho_\mu(a_i^{-1})^{-1}} \ge 1, \tag{3}$$

那么， $\nu'_{\mu'}$ 上的命中测度相对于 $S^1 \simeq \partial\Gamma$上的勒贝格测度是奇异的。

命题 1.1 表明，可以将奇异性猜想简化为自由群的情形。回顾 ∂F_m中柱集的定义：

$$C(g) = \{\text{从单位元出发且包含 } g\} \subset \partial F_m\text{.的测地射线}$$

现在我们陈述本文的主要结果。
定理 1.1。考虑由对称测度 μ 生成的$F_m = \langle a_i^{\pm 1}\rangle$ 上的随机游走，满足 $\text{supp}(\mu) = \{a_i^j\}_{1\le i\le m}$，其中某个 $n \ge 1$成立。那么我们有$1\le|j|\le n$

$$\rho_\mu(a_i) \ge \frac{\nu(C(a_i))}{1-\nu(C(a_i))}. \tag{4}$$

其中， ν 是与 μ对应的 ∂F_m 上的命中测度。

注。Ancona 在 [Anc88], 中证明了一个众所周知的事实：对于双曲群的 Cayley 图中测地线段上的任意 x、y、 z，我们有

$$F_\mu(x,y)F_\mu(y,z) \le F_\mu(x,z) \le CF_\mu(x,y)F_\mu(y,z)$$

其中常数 C不依赖于 x、 y、 z 的选取。这意味着格林函数／首次通过函数呈指数衰减。然而，尽管 [Lal93], [Led01], 和 [GL13], 对这一不等式在自由群和双曲群上的情形作了各种改进，现有方法仍无法明确给出 C 对测度 μ 和 ν 的依赖关系。

推论 1.1. 设 $\Gamma = \{t_1, \ldots, t_{2m}\}$ 是一个福克斯群，其中心对称基本多边形配备了用于识别对边的边配对变换。考虑 Γ 上由概率测度 μ' 支撑于 $\{t_i^j\}_{1\le i\le 2m}$ 的可容许随机游走，其中 $n \ge 1$。则 $1\le j\le n$

(Γ, μ') 满足猜想 1.1。

证明。选择 μ on F_m in，使得对于所有 $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$， $\mu(a_i^j) := \mu'(t_i^j)$。我们只需证明 (Γ, μ') 满足命题 1.1 的条件，特别是投影 μ of μ' 满足 (3)。然而，由定理 1.1 可知:

$$\rho_\mu(a_i) \ge \frac{\nu(C(a_i)}{1-\nu(C(a_i))} \Rightarrow \frac{1}{1+\rho_\mu(a_i)^{-1}} \ge \nu(C(a_i)),$$

so

$$\sum_i \frac{1}{1+\rho_\mu(a_i)^{-1}} + \frac{1}{1+\rho_\mu(a_i^{-1})^{-1}} = 2\left(\sum_i \frac{1}{1+\rho_\mu(a_i)^{-1}}\right) \ge 2\left(\sum_i \nu(C(a_i))\right) = 1,$$

as t对于所有 $1 \le i \le m$，柱集 $C(a_i)$ 两两不相交，并且 $\nu(C(a_i)) = \nu(C(a_i^{-1}))$. □

为了证明定理 1.1，我们引入屏障（定义 2.1）和强屏障（定义 2.2）的概念，以建立某些柱集测度之间的线性关系。事实证明，$\rho_\mu(a_i)$ 可以表示为某个不可约矩阵的谱半径，该矩阵对应于上述关系，因此我们可以应用佩龙-弗罗贝尼乌斯定理。证明见第 3 节末尾。

注。我们想指出，利用障碍来刻画双曲群上随机游走在无穷远处的行为这一思想，可追溯到 Derriennic（[Der75]）、Lalley 和 Gou¨ezel 的研究（参见 [Lal93], [GL13]）。

遗憾的是，有一大类有限程随机游走完全不满足 (3)，因此我们无法彻底解决猜想 1.1。考虑一个自同构 $g \mapsto \hat{}g$ of F_m，它由 $\hat{}a_i = a_i^{-1}$ 唯一确定。由满足条件 $\mu(g) = \mu(\hat{}g)$（对每个 $g \in F_m$）的测度 μ 所生成的随机游走称为反对称随机游走。

定理 1.2。考虑由满足以下条件的可容许测度 μ 在 $F_m = \langle a_i^{\pm 1}\rangle$ 上生成的反对称随机游走：存在 $1 \le i \le m$，使得单元素集 $\{a_j\}$ 是 $j \ne i$ 的 a_j-屏障，而 $\{a_i\}$ 是一个 a_i^2-屏障（见定义 2.1）。

那么，对于每个 $j \ne i$，我们有

$$\rho_\mu(a_j) = F_\mu(e, a_j) = \frac{\nu(C(a_j))}{1-\nu(C(a_j))},$$

and

$$\rho_\mu(a_i) = F_\mu(e, a_i) \le \frac{\nu(C(a_i))}{1-\nu(C(a_i))}.$$

最后，我们有

$$F_\mu(e, a_i) = \frac{\nu(C(a_i))}{1-\nu(C(a_i))}$$

当且仅当 $\{a_i\}$ 是一个 a_i-屏障。

作为一个直接推论，我们得到以下应用:

推论 1.2。对于支撑在集合 $\{a_i, a_i^{-1}, a_1a_2, a_1^{-1}a_2^{-1}\}_{1\le i\le m}$ 上的任意反对称随机游走 F_m，我们得到

$$\rho_\mu(a_1) = F_\mu(e, a_1) < \frac{\nu(C(a_1))}{1-\nu(C(a_1))},$$

and

$$\rho_\mu(a_j) = F_\mu(e, a_j) = \frac{\nu(C(a_j))}{1 - \nu(C(a_j))}$$

对所有 $j > 1$ 均成立。特别是，这类随机游走不满足 (3)。

我们在例 4.1 中给出证明。最后，我们还将展示一些不满足 (3) 的对称例子，见例4.2。

致谢。我们感谢 Giulio Tiozzo、Kunal Chawla 和 Steven Lalley，他们显著改进了预印本的结构和整体呈现；也感谢 Alexander Kalmynin 提出的建议，这些建议最终促成了引理 3.2 的证明。

2 预备知识

本文中，我们始终考虑由容许概率测度 μ 生成的自由群$F_m = \{a_1^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}\}$ 上的（暂留且不可约）随机游走 $(X_n)_{n\geq 0}$ ，也就是说，其支撑生成F_m 一个半群。

2.1 符号约定

设 $x, y \in F_m$。回顾格林函数和首次通过函数的定义 s:

$$G_\mu(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 = x, X_k = y) \qquad \text{(Green function)}$$

$$F_\mu(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_0 = x, X_k = y, X_j \neq y \text{ for } j < k) \qquad \text{(First-passage function)}$$

在我们的情形中，已知这两个函数始终有限，这等价于所考虑随机游走的暂态性。此外，不难证明 $F_\mu(x, y)G_\mu(e, e) = G_\mu(x, y)$，因此，考虑格林函数还是首次通过函数并无区别。我们将使用 F_μ和 $d_\mu(x, y) = -\log(F_\mu(x, y))$，后者通常称为格林距离。

特别地，对于 F_m 上的可容许随机游走，几乎每条样本路径都收敛到边界∂F_m，相应的推前测度称为命中测度，我们将其记作 ν_μ，或为简便起见记作 ν 。

设 $g \in F_m$ 是一个元素，其约化表示为 $g = w_1 \dots w_n$，其中 $w_k \in \{a_i^{\pm 1}\}_{1\leq i\leq m}$。

$$C(g) = \{\text{geodesic rays starting from identity containing } g\} \subset \partial F_m,$$
$$C_{fin}(g) = \{gx : |gx| = |g| + |x|\} \subset F_m,$$

其中 $|g| := d_w(e, g)$ 表示 F_m 中的词距离。我们将集合 $C_{fin}(g)$ 称为 g-阴影 .

我们还将使用首次通过函数的各种受限版本 .

设 x、$y \in F_m$ 和 $S_{bad} \subset F_m$，使得 $y \notin S_{bad}$。记

$$F_\mu(x, y; S_{bad}) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X_0 = x, X_k = y, X_j \notin S_{bad} \text{ for } j < k).$$

如果 $A \subset F_m$，且 $x \notin A$，那么我们记作

$$F_\mu(x \nrightarrow A) := 1 - \sum_{a\in A} F_\mu(x, a; A \setminus \{a\}) = \mathbb{P}(X_0 = x, X_j \notin A \text{ for any } j > 0).$$

最后，如果 $A_1,\dots,A_r \subset F_m$ 是满足对所有 $1 \le i \le r-1$ 均有 $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$ 的子集，那么我们递归地定义

$$F_\mu(x \to A_1 \to \cdots \to A_{r-1} \twoheadrightarrow A_r) := \sum_{a \in A_1} F_\mu(x, a; A_1 \setminus \{a\}) F_\mu(a \to A_2 \cdots \to A_{r-1} \twoheadrightarrow A_r).$$

我们还将 $B(x,n) = \{y \in F_m$ 记作：$d_w(x,y) \le n\}$，其中 d_w 表示相对于 $\{a_i^{\pm 1}\}_{1 \le i \le m}$ 的 F_m 中的词距离。

2.2 建立屏障框架

定义 2.1. 设 $g \in F_m \setminus \{e\}$。若子集 $B \subseteq F_m$ 满足：对于任意 $h \in C_{fin}(g)$，都有 $F_\mu(e,h;\ B) = 0$，则称其为 g-屏障。

例 2.1. 记 $B(g,n) := \{h \in F_m :\ |h^{-1}g| \le n\}$，并设对于某个 $n > 0$，有 $\mathrm{diam}(\mathrm{supp}(\mu)) = n$，且无其他限制。那么对于每个元素 $g \in F_m$，子集 $C_{fin}(g)) \cap B(e,n)$ 都是一个 g-屏障。

注. 请注意，如果支撑中有“空洞”，换言之，对于某个 $g \in B(e,n)$，有 $\mu(g) = 0$，那么它可能不是极小屏障，正如下一个例子所示。

例 2.2. 假设 $\mathrm{supp}(\mu) = \{a_i^k\}_{1 \le i \le m}$。那么对于每个生成元 a_i，测地线段$\bigcup_{1 \le |k| \le n}\{a_i, a_i^2, \dots, a_i^n\}$ 都是一个极小的 a_i-屏障。

下一个引理简单明了，但相当重要。

引理 2.1. 若 B 是一个 g-屏障，则对于每个 $h \in C_{fin}(g)$，我们有

$$F_\mu(e,h) = \sum_{b \in B} F_\mu(e,b; B \setminus \{b\}) F_\mu(b,h). \tag{5}$$

证明。由全概率公式结合马尔可夫性质即可得出：每条路径要么在到达 h之前进入 B，要么完全避开 B：

$$F_\mu(e,h) = \sum_{b \in B} F_\mu(e,b; (B \setminus \{b\}) \cup \{h\}) F_\mu(b,h) + F_\mu(e,h;B).$$

然而，由于 B是一个 g-屏障，项 $F_\mu(e,h;\ B)$ 为零。 □

命题 2.1. 设 B 是一个 g-屏障。那么对于每个具有约化表示$h_1 \dots h_l$的 $h \in C_{fin}(g)$，我们有

$$\nu(C(h)) = \sum_{b \in B \cap C_{fin}(h)} F_\mu(e,b; B \setminus \{b\})(1 - \nu(C(b^{-1}h_1 \dots h_{l-1}))) + \sum_{b \in B \setminus C_{fin}(h)} F_\mu(e,b; B \setminus \{b\}) \nu(C(b^{-1}h)). \tag{6}$$

证明。首先回顾一下，存在集合 $S_{ent} = C_{fin}(h) \cap B(h,n)$ 和 $S_{exit} = (F_m \setminus C_{fin}(h)) \cap B(h,n)$，使得

$$\nu(C(h)) = \sum_{k=0}^{\infty} F_\mu(\underbrace{e \to S_{ent} \to S_{exit} \to \cdots \to S_{ent} \twoheadrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}).$$

这是因为按照定义，S_{ent} 是一个 h-屏障。由于 $S_{ent} \subset C_{fin}(h) \subset C_{fin}(g)$，我们可以利用 B 的屏障性质和引理 2.1，写成

$$F_\mu(\underbrace{e \to S_{ent} \to S_{exit} \to \cdots \to S_{ent} \twoheadrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}) = \sum_{b \in B} F_\mu(e,b; B \setminus \{b\}) F_\mu(\underbrace{b \to S_{ent} \to \cdots \twoheadrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}).$$

不过，我们必须谨慎处理项 $F_\mu(\underbrace{b \to S_{ent} \to \cdots \nrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}})$：如果 $b \in B \cap S_{ent}$，会发生什么？k 返回考虑到这一点，我们将上面的和改写如下：

$$F_\mu(\underbrace{e \to S_{ent} \to S_{exit} \to \cdots \to S_{ent} \nrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}) = \sum_{b \in B \setminus C_{fin}(g)} F_\mu(e, b; B \setminus \{b\}) F_\mu(\underbrace{b \to S_{ent} \to \cdots \nrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}) + \\ + \sum_{b \in B \cap C_{fin}(h)} F_\mu(e, b; B \setminus \{b\}) F_\mu(\underbrace{b \to S_{exit} \to \cdots \nrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}).$$

现在对两边关于 k 求和，得到

$$\sum_{k \geq 0} F_\mu(\underbrace{e \to S_{ent} \to S_{exit} \to \cdots \to S_{ent} \nrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}) = \sum_{k \geq 0} \sum_{b \in B \setminus C_{fin}(h)} F_\mu(e, b; B \setminus \{b\}) F_\mu(\underbrace{b \to S_{ent} \to \cdots \nrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}) + \\ + \sum_{k \geq 0} \sum_{b \in B \cap C_{fin}(h)} F_\mu(e, b; B \setminus \{b\}) F_\mu(\underbrace{b \to S_{exit} \to \cdots \nrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}). \tag{7}$$

我们分别处理右端的两个（双重）求和。对于 $b \in B \setminus C_{fin}(h)$，立刻得到

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{b \in B \setminus C_{fin}(h)} F_\mu(e, b; B \setminus \{b\}) F_\mu(\underbrace{b \to S_{ent} \to \cdots \nrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}) = \\ = \sum_{b \in B \setminus C_{fin}(h)} F_\mu(e, b; B \setminus \{b\}) \sum_{k \geq 0} F_\mu(\underbrace{b \to S_{ent} \to \cdots \nrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}) = \\ = \sum_{b \in B \setminus C_{fin}(h)} F_\mu(e, b; B \setminus \{b\}) \sum_{k \geq 0} F_\mu(\underbrace{e \to b^{-1} S_{ent} \to \cdots \nrightarrow b^{-1} S_{exit}}_{k \text{ returns}}) = \\ = \sum_{b \in B \setminus C_{fin}(h)} F_\mu(e, b; B \setminus \{b\}) \nu(C(b^{-1} h)),$$

因为 $b^{-1} S_{ent}$ 是一个 $b^{-1}h$-屏障。

如果是 $b \in B \cap C_{fin}(h)$，情况就稍微复杂一些，但思路相当类似：

$$\sum_{k \geq 0} \sum_{b \in B \cap C_{fin}(h)} F_\mu(e, b; B \setminus \{b\}) F_\mu(\underbrace{b \to S_{exit} \to \cdots \nrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}) = \\ = \sum_{b \in B \cap C_{fin}(h)} F_\mu(e, b; B \setminus \{b\}) \sum_{k \geq 0} F_\mu(\underbrace{b \to S_{exit} \to \cdots \nrightarrow S_{exit}}_{k \text{ returns}}) = \\ = \sum_{b \in B \cap C_{fin}(h)} F_\mu(e, b; B \setminus \{b\}) \sum_{k \geq 0} F_\mu(\underbrace{e \to b^{-1} S_{exit} \to \cdots \nrightarrow b^{-1} S_{exit}}_{k \text{ returns}}) = \\ = \sum_{b \in B \cap C_{fin}(h)} F_\mu(e, b; B \setminus \{b\}) (1 - \nu(C(b^{-1} h_1 \dots h_{l-1}))),$$

因为 $b^{-1} S_{exit} = (F_m \setminus C_{fin}(b^{-1}h)) \cap B(b^{-1}h, n)$ 是一个 $b^{-1}h_1 \dots h_{l-1}$-屏障。至此，我们完成了论证。 □

例 2.3。考虑定义在 F_m 上、支撑于 $\{a_i^k\}_{1 \leq |k| \leq n}$ 的对称随机游走。那么，针对 a_i-屏障 $B = \{a_i, \dots, a_i^n\}$ 的方程 (6) 如下：

$$\nu(C(a_i^k)) = \sum_{j=1}^{k-1} F_\mu(e, a_i^j; B \setminus \{a_i^j\}) \nu(C(a_i^{-j+k})) + \sum_{j=k}^{n} F_\mu(e, a_i^j; B \setminus \{a_i^j\}) (1 - \nu(C(a_i^{-j+k-1}))), \tag{8}$$

但由于关于自同构 $a_i \mapsto a_i^{-1}$ 的不变性，我们有 $\nu(C(a_i^j)) = \nu(C(a_i^{-j}))$，因此得到

$$\nu(C(a_i^k)) = \sum_{j=1}^{k-1} F_\mu(e, a_i^j; B \setminus \{a_i^j\}) \nu(C(a_i^{k-j})) + \sum_{j=k}^{n} F_\mu(e, a_i^j; B \setminus \{a_i^j\}) (1 - \nu(C(a_i^{j-k+1}))). \tag{9}$$

例 2.4. 考虑 F_2 上的一个可容许对称随机游走，其支撑为 $\{a, a^{-1}, ab, b^{-1}a^{-1}\}$。我们考虑以下障碍：

1. 子集 $\{a, ab\}$ 是一个 a-屏障：

$$\nu(C(a)) = F_\mu(e, a; \{ab\})(1 - \nu(C(a^{-1}))) + F_\mu(e, ab; \{a\})(1 - \nu(C(b^{-1}a^{-1})),$$

2. 子集 $\{b^{-1}a^{-1}\}$ 是一个 b^{-1}-屏障：

$$\nu(C(b^{-1})) = F_\mu(e, b^{-1}a^{-1})(1 - \nu(C(ab))), \quad \nu(C(b^{-1}a^{-1})) = F_\mu(e, b^{-1}a^{-1})(1 - \nu(C(a)))$$

3. 子集 $\{ab\}$ 是一个 ab-屏障：

$$\nu(C(ab)) = F_\mu(e, ab)(1 - \nu(C(b^{-1})))$$

4. 子集 $\{b\}$ 是一个 b-屏障：

$$\nu(C(b)) = F_\mu(e, b)(1 - \nu(C(b^{-1})))$$

5. 子集 $\{a^{-1}\}$ 是一个 a^{-1}-屏障：

$$\nu(C(a^{-1})) = F_\mu(e, a^{-1})(1 - \nu(C(a)))$$

2.3 强屏障

在本小节中，我们以一种允许表述不依赖起点的引理 2.1 和命题 2.1 版本的方式，修改屏障的定义。

定义 2.2. 设 $g \in F_m \setminus \{e\}$。子集 $B \subset F_m$ 是一个强 g-屏障 if

- $B \subset C_{fin}(g)$,
- $F_\mu(h', h; B) = 0$ 对任意 $h \in C_{fin}(g)$, $h' \in F_m \setminus C_{fin}(g)$。

注. 容易看出，第二个条件意味着每个强屏障都是屏障，因为对任意非单位元 g，都有 $e \notin C_{fin}(g)$。

为了表述接下来的定理，我们需要确立关于阴影的一些基本陈述。记 $|g| = d_w(e, g)$，其中 d_w 表示 F_m 上的词距离。

引理 2.2. 设 $y \in C_{fin}(a_i^{\pm 1})$。当且仅当 $|xy| = |x| + |y|$ $x^{-1} \notin C_{fin}(a_i^{\pm 1})$。

证明。根据词距离的定义， $|xy| = |x| + |y|$ 当且仅当 x 的约化表示中的最后一个数字不等于 y 的约化表示中的第一个数字。然而， x 的最后一个数字是 x^{-1}的第一个数字的逆元，并且 w 是 x^{-1} 的第一个数字，当且仅当 $x^{-1} \in C_{fin}(w)$。 □

引理 2.3. 考虑 g、$x \in F_m$，使得 $x \notin C_{fin}(g)$，且 $g^{-1}x \in C_{fin}(a_i^{\pm 1})$。那么 $g^{-1} \in C_{fin}(a_i^{\pm 1})$。

证明。由于 $x \notin C_{fin}(g)$，我们有 $|x| < |g| + |g^{-1}x|$。我们知道 $g^{-1}x \in C_{fin}(a_i^{\pm 1})$，因此，引理 2.2 表明 $g \in C_{fin}(a_i^{\pm 1})$。 □

引理 2.4. 令 $g \in F_m \setminus \{e\}$，并考虑 $x \notin C_{fin}(g)$。则 $x^{-1}C_{fin}(g) = C_{fin}(x^{-1}g)$。

证明。我们将通过证明 $C_{fin}(g) \subseteq xC_{fin}(x^{-1}g)$ 和 $xC_{fin}(x^{-1}g) \subseteq C_{fin}(g)$ 来推进。

• 假设 $g' \in C_{fin}(g)$。那么，根据定义， $g' = gw$，且 $|g'| = |g| + |w|$。我们希望证明 $|x^{-1}g'| = |x^{-1}g| + |w|$。这等价于 $|(g')^{-1}x| = |w^{-1}| + |g^{-1}x|$。如果 $g^{-1}x \in C_{fin}(a_i^{\pm 1})$，那么引理 2.3 推出 $g^{-1} \in C_{fin}(a_i^{\pm 1})$。假设 $w \in C_{fin}(a_i^{\pm 1})$。那么我们可以对 $|gw| = |g| + |w|$ 应用引理 2.2，得到 $g^{-1} \notin C_{fin}(a_i^{\pm 1})$，这就导致了矛盾。因此，$w \notin C_{fin}(a_i^{\pm 1})$，且由于引理 2.2， $|(g')^{-1}x| = |w^{-1}| + |g^{-1}x|$。

• 现在假设 $g' \in C_{fin}\ x^{-1}g$ $xg' \in C_{fin}\ g$ $|g'| =$ ( )。我们要证明 ( )。根 $|x^{-1}g| + |g^{-1}xg'| = |\ g'\ ^{-1}x^{-1}g| + |g^{-1}x|$ $g^{-1}x \in C_{fin}\ a_i^{\pm 1}$ 2 3 $g^{-1} \in$ 据定义，( )。如果 ( )，引理 . 蕴含 $C_{fin}\ a_i^{\pm 1}$ 2 2 $g'\ ^{-1}x^{-1}g \notin C_{fin}\ a_i^{\pm 1}$

( )，而引理 . 蕴含 ( ) ( )；同一个引理还蕴含$|(g')^{-1}x^{-1}g| + |g^{-1}| = |(g')^{-1}x^{-1}|$，根据定义，这等价于 $xg' \in C_{fin}(g)$。

□

我们可以利用引理 2.1 得到以下结论：

引理 2.5。 若 B 是强 g-屏障，则对任意 $h \in C_{fin}(g)$， $x \in F_m \setminus C_{fin}(g)$，我们有 e

$$F_\mu(x, h) = \sum_{b \in B} F_\mu(x, b; B \setminus \{b\}) F_\mu(b, h). \tag{10}$$

证明。我们来证明 $x^{-1}B$ 是一个 $x^{-1}g$-屏障。对任意元素 $y \in C_{fin}(x^{-1}g)$，我们有

$$F_\mu(e, y; x^{-1}B) = F_\mu(x, xy; B) = 0,$$

根据引理 2.4，可得 $xy \in C_{fin}(g)$。因此，

$$\sum_{b \in B} F_\mu(x, b; B \setminus \{b\}) F_\mu(b, h) = \sum_{b \in B} F_\mu(e, x^{-1}b; x^{-1}B \setminus \{x^{-1}b\}) F_\mu(x^{-1}b, x^{-1}h) = F_\mu(e, x^{-1}g) = F_\mu(x, g),$$

根据引理 2.1。 □

同理，我们也可以推广命题 2.1：

命题 2.2. 设 B 是一个强 g 屏障。那么对于每个 $h \in C_{fin}(g)$、 $x \in F_m \setminus C_{fin}(g)$，其中 $h = h_1 \dots h_l$ 是约化表示，我们有

$$\begin{aligned} \nu(C(x^{-1}h)) = &\sum_{b \in B \cap C_{fin}(h)} F_\mu(x, b; B \setminus \{b\})(1 - \nu(C(b^{-1}h_1 \dots h_{l-1})))+ \\ &+ \sum_{b \in B \setminus C_{fin}(h)} F_\mu(x, b; B \setminus \{b\}) \nu(C(b^{-1}h)). \end{aligned} \tag{11}$$

证明。我们采用引理 2.5 证明中使用的相同思路。由于 $x^{-1}B$ 是一个 $x^{-1}g$-屏障，对于每个$x^{-1}h \in C_{fin}(x^{-1}g) = x^{-1}C_{fin}(g)$，我们有

$$\begin{aligned} &\sum_{b \in B \cap C_{fin}(h)} F_\mu(x, b; B \setminus \{b\})(1 - \nu(C(b^{-1}h_1 \dots h_{l-1})))+ \\ &+ \sum_{b \in B \setminus C_{fin}(h)} F_\mu(x, b; B \setminus \{b\}) \nu(C(b^{-1}h)) = \\ &= \sum_{x^{-1}b \in x^{-1}B \cap C_{fin}(x^{-1}h)} F_\mu(e, x^{-1}b; x^{-1}B \setminus \{x^{-1}b\})(1 - \nu(C((x^{-1}b)^{-1}x^{-1}h_1 \dots h_{l-1})))+ \\ &+ \sum_{x^{-1}b \in x^{-1}B \setminus C_{fin}(x^{-1}h)} F_\mu(e, x^{-1}b; x^{-1}B \setminus \{x^{-1}b\}) \nu(C((x^{-1}b)^{-1}x^{-1}h)) = \nu(C(x^{-1}h)). \end{aligned}$$

□

考虑由概率测度 μ生成的 F_m 上的反对称随机游走。对于每个$1 \le i \le m$，固定一个强 a_i-屏障 $B = (b_j)^{1 \le j \le |B|}$。于是我们可以定义如下矩阵：

$$(P_B)_{j_1,j_2} = F_\mu(a_i\widehat{b_{j_1}}, b_{j_2}; B \setminus b_{j_2}).$$

因此，作为命题 2.2 的推论，我们得到以下定理：

定理 2.1。

$$(\mathrm{Id} + P_B)^{-1} P_B \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu(C(b_1^{-1})) \\ \vdots \\ \nu(C(b_{|B|}^{-1})) \end{pmatrix}$$

证明。应用引理 2.5 并利用反对称性，我们得到

$$\nu(C(b_{j_1}^{-1})) = \nu(C(\widehat{b_{j_1}^{-1}})) = \nu(C((a_i\widehat{b_{j_1}})^{-1}a_i)) = \sum_{j_2} F_\mu(a_i\widehat{b_{j_1}}, b_{j_2}; B \setminus \{b_{j_2}\})(1 - \nu(C(b_{j_2}^{-1})))$$

对每个 $1 \le j_1, j_2 \le |B|$ 均成立。这可以改写为

$$P_B \begin{pmatrix} 1 - \nu(C(b_1^{-1})) \\ \vdots \\ 1 - \nu(C(b_{|B|}^{-1})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu(C(b_1^{-1})) \\ \vdots \\ \nu(C(b_{|B|}^{-1})) \end{pmatrix}.$$

这等价于

$$P_B \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (\mathrm{Id} + P_B) \begin{pmatrix} \nu(C(b_1^{-1})) \\ \vdots \\ \nu(C(b_{|B|}^{-1})) \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\mathrm{Id} + P_B)^{-1} P_B \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu(C(b_1^{-1})) \\ \vdots \\ \nu(C(b_{|B|}^{-1})) \end{pmatrix}.$$

□

稍后我们将需要以下引理。

引理 2.6. 考虑 $g \in F_m \setminus \{e\}$、一个强 g-屏障 B，以及一个元素 $x \notin C(g)$ 和一个集合 B'，使得对于每个 $h \in C_{fin}(g)$，都有 $F_\mu(x, h; B') = 0$（这等价于 $x^{-1}B'$ 是一个 $x^{-1}h$-屏障）。

那么对于每个 $b \in B$，都有

$$F_\mu(x, b; B \setminus \{b\}) = \sum_{b' \in B' \setminus (B \setminus \{b\})} F_\mu(x, b'; B' \setminus \{b'\}) F_\mu(b', b; B \setminus \{b\}).$$

证明。由全概率公式可得另一个推论：每条从 x 到 b 且避开 $B \setminus \{b\}$ 的路径都必须经过屏障 B'，因为根据强屏障的定义，$b \in C_{fin}(g)$。此外，若 b' 属于 B' 与 $B \setminus \{b\}$ 的交集，则项 $F_\mu(b', b; B \setminus \{b\})$ 为零。

□

3 命题 1.1 和定理 1.1 的证明

在本小节中，我们将在例 2.3 的设定下进行讨论。为了证明 (4)，我们需要一些代数引理。

3.1 技术性线性代数引理

这个引理可由正张成的几何定义直接推出。

引理 3.1. 设 $v_1, \dots v_n \in \mathbb{R}^2$ 是正向量（两个坐标均为正）。那么， v_i 的正线性张成是包含所有 v_i 的最小锥。换言之，存在 $1 \le i, j \le n$，使得对所有 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{pspan}\{v_i\}$，都有

$$\frac{(v_i)_2}{(v_i)_1} \le \frac{y}{x} \le \frac{(v_j)_2}{(v_j)_1}.$$

引理 3.2. 设 $(p_i)_{1 \le i \le n}$ 是非负数，并假设 $0 < \nu_n < \cdots < \nu_2 < \nu_1 < \frac{1}{2}$ 满足

$$\begin{cases} p_1(1-\nu_1) + p_2(1-\nu_2) + \cdots + p_n(1-\nu_n) = \nu_1 \\ p_1\nu_1 + p_2(1-\nu_1) + \cdots + p_n(1-\nu_{n-1}) = \nu_2 \\ \vdots \\ p_1\nu_{n-1} + p_2\nu_{n-2} + \cdots + p_{n-1}\nu_1 + p_n(1-\nu_1) = \nu_n. \end{cases} \tag{12}$$

那么，对所有 $1 \le i \le n-1$，都有 $\frac{\nu_1}{1-\nu_1} \le \frac{1-\nu_i}{1-\nu_{i+1}}$。

证明。假设

$$\min\left\{ \frac{\nu_1}{1-\nu_1}, \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}, \dots, \frac{1-\nu_{n-1}}{1-\nu_n} \right\} = \frac{1-\nu_j}{1-\nu_{j+1}} < \frac{\nu_1}{1-\nu_1}.$$

对于某个 $1 \le j \le n-1$，有上述关系。由于 $x \mapsto x(1-x)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上单调递增，因此 $\frac{1-\nu_j}{1-\nu_{j+1}} > \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}$。

然而，我们可以将 (12) 中第 j 个和第 $(j+1)$ 个方程重新解释如下：

$$\begin{pmatrix} \nu_j \\ \nu_{j+1} \end{pmatrix} \in \text{pspan}\left\{ \begin{pmatrix} \nu_{j-1} \\ \nu_{j-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{j-2} \\ \nu_{j-3} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1-\nu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 1-\nu_{n-j+1} \\ 1-\nu_{n-j} \end{pmatrix} \right\}.$$

此外，由于我们知道 $\frac{1-\nu_i}{1-\nu_{i+1}} \ge \frac{1-\nu_j}{1-\nu_{j+1}} > \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}$ 对所有 $1 \le i \le n-1$ 和 $\frac{\nu_1}{1-\nu_1} > \frac{1-\nu_j}{1-\nu_{j+1}} > \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}$ 都成立，根据应用于 $\left\{ \begin{pmatrix} \nu_{j-1} \\ \nu_{j-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{j-2} \\ \nu_{j-3} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1-\nu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 1-\nu_{n-j+1} \\ 1-\nu_{n-j} \end{pmatrix} \right\}$ 的引理 3.1，应该存在一个指标 $j' < j$，使得

$$\frac{\nu_{j'+1}}{\nu_{j'}} \le \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}.$$

但随后我们可以重复这一论证，直到得到 $\frac{\nu_2}{\nu_1} \le \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}$。然而，这行不通，因为一方面，(12) 中的第一个和第二个方程给出

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \in \text{pspan}\left\{ \begin{pmatrix} 1-\nu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 1-\nu_n \\ 1-\nu_{n-1} \end{pmatrix} \right\},$$

但另一方面，

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \le \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j} < \frac{1-\nu_j}{1-\nu_{j+1}} = \min\left\{ \frac{\nu_1}{1-\nu_1}, \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}, \dots, \frac{1-\nu_{n-1}}{1-\nu_n} \right\}.$$

因此， $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ 不能属于由 $\left\{ \begin{pmatrix} 1-\nu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 1-\nu_n \\ 1-\nu_{n-1} \end{pmatrix} \right\}$ 生成的锥，这就导致了矛盾。

□

推论 3.1. 在引理 3.2 的情形下，如果 $p_n > 0$，我们总有 $\dfrac{\nu_1}{1-\nu_1} \le \lambda_1$，其中 λ_1 是 $x^n - p_1 x^{n-1} - \cdots - p_n$ 的最大根。

证明。考虑如下定义的矩阵 F：

$$F = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这是一个不可约矩阵，并且满足以下单位元关系：

$$F \begin{pmatrix} 1-\nu_1 \\ 1-\nu_2 \\ \vdots \\ 1-\nu_{n-1} \\ 1-\nu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ 1-\nu_1 \\ \vdots \\ 1-\nu_{n-2} \\ 1-\nu_{n-1} \end{pmatrix}.$$

P这里适用 Perron–Frobenius 定理，而 Collatz-Wieland 公式给出

$$\min\left\{ \frac{\nu_1}{1-\nu_1}, \frac{1-\nu_1}{1-\nu_2}, \dots, \frac{1-\nu_{n-1}}{1-\nu_n} \right\} \le \lambda_1.$$

请注意， F 的特征多项式恰好就是推论陈述中的多项式。最后，引理 3.2 告诉我们，这个最小值恰好等于 $\dfrac{\nu_1}{1-\nu_1}$。 □

3.2 主要结果的证明

命题 1.1 的证明。由于对于任意 $g \in F_m$， $F_{\mu'}(e, p(g)) \ge F_\mu(e, g)$，因此对于任意 $g \in F_m$，也有 $\rho_{\mu'}(p(g)) \ge \rho_\mu(g)$，于是，

$$\sum_i \frac{1}{1+\rho_{\mu'}(t_i)^{-1}} + \frac{1}{1+\rho_{\mu'}(t_i^{-1})^{-1}} \ge \sum_i \frac{1}{1+\rho_\mu(a_i)^{-1}} + \frac{1}{1+\rho_\mu(a_i^{-1})^{-1}} \ge 1.$$

不失一般性，我们可以假设存在一个指标 $1 \le i \le m$，使得 $\limsup(F_{\mu'}(e, t_i^k))^{-\frac{1}{k}} < e^{l(t_i)}$。特别地，存在 $k' > 1$，使得 $F_{\mu'}(e, t_i^{k'})^{-\frac{1}{k'}} < e^{l(t_i)}$。但这个$k\to\infty$不等式可以改写如下：

$$F_{\mu'}(e, t_i^{k'}) > e^{-k' l(t_i)} \Leftrightarrow -\log(F_{\mu'}(e, t_i^{k'})) = d_{\mu'}(e, t_i^{k'}) < k' l(t_i) = l(t_i^{k'}).$$

因此，我们可以应用引理 1.1 完成证明。 □

定理 1.1 的证明。首先，记 $p_k = F_\mu(e, a_i^k;\ B \setminus \{a_i^k\}) > 0$，其中 $B = \{a_i, \dots, a_i^n\}$，并改写方程 (9)，得到以下系统：

$$\begin{cases} p_1(1-\nu(C(a_i))) + p_2(1-\nu(C(a_i^2))) + \cdots + p_n(1-\nu(C(a_i^n))) = \nu(C(a_i)) \\ p_1\nu(C(a_i)) + p_2(1-\nu(C(a_i))) + \cdots + p_n(1-\nu(C(a_i^{n-1}))) = \nu(C(a_i^2)) \\ \vdots \\ p_1\nu(C(a_i^{n-1})) + p_2\nu(C(a_i^{n-2})) + \cdots + p_{n-1}\nu(C(a_i)) + p_n(1-\nu(C(a_i))) = \nu(C(a_i^n)). \end{cases}$$

将推论 3.1 应用于该系统可得

$$\frac{\nu(C(a_i))}{1-\nu(C(a_i))} \leq \lambda_1, \tag{13}$$

其中 λ_1 是 $x^n - p_1 x^{n-1} - \cdots - p_n = 0$ 的最大根。现在我们只需证明

$$\lim_{k\to\infty} F_\mu(e, a_i^k)^{\frac{1}{k}} = \lambda_1.$$

根据引理 2.1，对于每个 $k \geq n$，我们有

$$F_B \begin{pmatrix} F_\mu(e, a_i^{k-1}) \\ \vdots \\ F_\mu(e, a_i^{k-n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\mu(e, a_i^{k}) \\ \vdots \\ F_\mu(e, a_i^{k-n+1}) \end{pmatrix},$$

其中

$$F_B = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这里我们再次应用 Perron-Frobenius 定理。由于 F_B 不可约，我们可以使用最小-最大柯朗-威兰特公式，得到对于每个 $k > n$，我们有

$$\min\left\{\frac{F_\mu(e, a_1^k)}{F_\mu(e, a_1^{k-1})}, \dots, \frac{F_\mu(e, a_1^{k-n+1})}{F_\mu(e, a_1^{k-n})}\right\} \leq \lambda_1 \leq \max\left\{\frac{F_\mu(e, a_1^k)}{F_\mu(e, a_1^{k-1})}, \dots, \frac{F_\mu(e, a_1^{k-n+1})}{F_\mu(e, a_1^{k-n})}\right\}.$$

我们知道 $\lim_{k\to\infty} \frac{F_\mu(e, a_1^k)}{F_\mu(e, a_1^{k-1})}$ 存在，只需证明该极限确实是最大特征值。将其记为 L，并应用 $\lim_{k\to\infty}$，得到

$$L \leq \lambda_1 \leq L.$$

So,

$$L = \lim_{k\to\infty} F_\mu(e, a_i^k)^{\frac{1}{k}} = \lambda_1. \tag{14}$$

结合 (13) 和 (14)，得到 (4)。 □

注：我们要指出，方程 (9) 和引理 2.6 蕴含了与屏障 $B = \{a_i, \dots, a_i^n\}$ 对应的以下矩阵恒等式：

$$F_B^n = SP_B, \tag{15}$$

其中，P_B 是与定理 2.1 中定义的相同的算子，S 是反转各行的置换矩阵。若记 $p_{jk} := F_\mu(a_i^{-n+j}, a_i^k; B \setminus \{a_i^k\})$ 为 $1 \leq j, k \leq n$，则将引理 2.6 应用于各种 j 的 $B' = a_i^{-n+j} B$，结果等价于对所有 $1 \leq i \leq m$ 和 $1 \leq j \leq n$ 在 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ 中成立的以下矩阵恒等式。

$$F_B \begin{pmatrix} p_{j1} & p_{j2} & \cdots & p_{jn} \\ p_{j+1\,1} & p_{j+1\,2} & \cdots & p_{j+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{j-1\,1} & p_{j-1\,2} & \cdots & p_{j-1\,n} \\ p_{j1} & p_{j2} & \cdots & p_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

最后需要指出，对于 $j = n$，上面定义的矩阵等于 F_B；而对于 $j = 1$，我们得到 SP_B。

4 一般情形下对 (3) 的反驳

首先，让我们证明定理 1.2，然后我们将给出一个定义在 F_m 上的随机游走，它满足定理 1.2 中的性质，且其支撑不在该生成集上。

定理 1.2 的证明。首先请注意，若随机游走满足陈述中提到的性质，则由引理 2.1 可知

$$F_\mu(e,a_j^k)=F_\mu(e,a_j)F_\mu(e,a_j^{k-1})$$

对任意 $1\le j\le m, k>1$ 均成立。因此，

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{1+\rho_\mu(a_i)}+\frac{1}{1+\rho_\mu(a_i^{-1})}=\sum_{j=1}^m \frac{1}{1+F_\mu(e,a_i)^{-1}}+\frac{1}{1+F_\mu(e,a_i^{-1})^{-1}}.$$

此外，根据障碍的定义，a_j 对所有 $j\neq i$ 都是一个 a_j-屏障这一事实意味着 $\mathrm{supp}(\mu)\cap C_{fin}(a_j)=\{a_j\}$。因此，可以通过以下方式应用命题 2.1：考虑一个完全位于 $C_{fin}(a_i)$ 中的 a_i-屏障 B。那么

$$\sum_{b\in B} F_\mu(e,b;B\setminus\{b\})(1-\nu(C(b^{-1})))=\nu(C(a_i)).$$

注意，对每个 $b\in B\setminus\{a_i\}$，都有 $\nu(C(b^{-1}))<\nu(C(a_i))$：若 $b^{-1}=w_1\dots w_r$ 是 b^{-1} 的约化表示，则我们可以固定第一个满足 $w_t=a_i^{\pm1}$ 的指标 $t>0$。由于 $w_r=a_i^{-1}$，t 总是有定义的。在这种情况下，引理 2.1 意味着

$$\nu(C(b^{-1}))=F_\mu(e,w_1)\dots F_\mu(e,w_{t-1})\nu(C(w_t\dots w_r))<\nu(C(w_t\dots w_r))=\nu(C(w_t^{\pm1}\dots w_r^{\pm1}))\le\nu(C(a_i))$$

因为 $w_t^{\pm1}=a_i$ 且 $C(w_t^{\pm1}\dots w_r^{\pm1})\subset C(a_i)$（此处，反对称性意味着 $\nu(C(g))=\nu(C(\hat{}g))$）。注意，同样的论证表明，只有当 $b=a_i$ 时，$\nu(C(b^{-1}))=\nu(C(a_i))$ 才成立。因此，

$$\sum_{b\in B} F_\mu(e,b;B\setminus\{b\})(1-\nu(C(a_i)))<\sum_{b\in B} F_\mu(e,b;B\setminus\{b\})(1-\nu(C(b^{-1})))=\nu(C(a_i))$$

等价于 $B\neq\{a_i\}$。然而，

$$\sum_{b\in B} F_\mu(e,b;B\setminus\{b\})(1-\nu(C(a_i)))<\nu(C(a_i))\Leftrightarrow F_\mu(e,a_i)<\sum_{b\in B} F_\mu(e,b;B\setminus\{b\})<\frac{\nu(C(a_i))}{1-\nu(C(a_i))}.$$

□

例 4.1。考虑一个定义在 F_m 上、支撑为集合 $\{a_i,a_i^{-1},a_1a_2,a_1^{-1}a_2^{-1}\}_{1\le i\le m}$ 的反对称随机游走，并假设 $\mu(a_i)=\mu(a_i^{-1})$，$\mu(a_1a_2)=\mu(a_1^{-1}a_2^{-1})$。那么很容易看出，$\{a_j\}$ 是 $j>1$ 的一个 a_j-屏障，而 a_1 仍然是一个 a_1^2-屏障，因为无法从 $a_1a_j^{\pm1}$ 直接进入 $C_{fin}(a_1^2)$。因此，我们得到

$$\sum_i \frac{1}{1+\rho_\mu(a_i)^{-1}}+\frac{1}{1+\rho_\mu(a_i^{-1})^{-1}}=2\left(\frac{1}{1+F_\mu(e,a_i)^{-1}}+\sum_{2\le i\le m}\nu(C(a_i))\right)<2\left(\sum_{1\le i\le m}\nu(C(a_i))\right)=1$$

由于 $C(a_i)$ 彼此不相交。

例4.2。我们希望证明 (3) 在对称情形下也不成立。考虑例 2.4。由于 $\{b\}$ 是一个 b-屏障，且 $\{a^{-1}\}$ 是一个 a^{-1}-屏障，我们有

$$F_\mu(e,a^{-k}) = F_\mu(e,a^{-1})^k = F_\mu(e,a)^k, \quad F_\mu(e,b^k) = F_\mu(e,b)^k = F_\mu(e,b^{-1})^k$$

根据引理 2.1。因此，$\rho_\mu(a) = \rho_\mu(a^{-1}) = F_\mu(e,a)$，且 $\rho_\mu(b) = \rho_\mu(b^{-1}) = F_\mu(e,b)$。

为完成论证，我们考虑一个自同构 $s: F_2 \to F_2$，由 $a \mapsto a, b \mapsto a^{-1}b$ 定义。记 $\mu' := s_*(\mu)$，并利用首次通过函数关于自同构的不变性，可得

$$\frac{1}{1+F_\mu(e,a)^{-1}} + \frac{1}{1+F_\mu(e,b)^{-1}} = \frac{1}{1+F_{\mu'}(e,a)^{-1}} + \frac{1}{1+F_{\mu'}(e,a^{-1}b)^{-1}}.$$

由于 μ' 的支撑是 $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$，首次通过函数仍具有乘法性；对于 $\nu' = s_*(\nu)$ 的柱集测度，我们有一个精确的恒等式，因此可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+F_{\mu'}(e,a)^{-1}} + \frac{1}{1+F_{\mu'}(e,a^{-1}b)^{-1}} = \\
&= \frac{1}{1+F_{\mu'}(e,a)^{-1}} + \frac{1}{1+F_{\mu'}(e,a)^{-1}F_{\mu'}(e,b)^{-1}} < \\
&< \frac{1}{1+F_{\mu'}(e,a)^{-1}} + \frac{1}{1+F_{\mu'}(e,b)^{-1}} = \nu'(C(a)) + \nu'(C(b)) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

5 后续方向

• 正如 Kunal Chawla 向作者指出的，关于漂移和熵连续性的现有结果，尤其是 [GMM18，命题 2.3] 和 [GMM18，定理 2.9], ，均适用，因为所考虑的随机游走具有有限支撑。因此，由于 [BHM11] 和 [Tan19], ，维数 $\dim(\nu) = h/l$ 也连续依赖于 μ ，这使我们能够将推论 1.1 推广至对严格支撑于生成元幂上的测度进行足够小的扰动。此外，关于这一方向的最新结果，另见 [Aze+22] 。

• 同时，我们想指出，定理 1.2 并未为式 (3) 的福克斯群版本给出任何实际反例：虽然式 (3) 并不适用于自由群上的每一种随机游走，但在转到福克斯群时，它仍可能成立，因为相应的首次通过函数在福克斯群上严格更大。

此外，即使式 (3) 对福克斯群上的任意有限范围随机游走都不成立，这也未必与奇异性猜想本身相矛盾，因为对于一个不是福克斯群边配对生成元的幂的元素，$\ell(g) > d_\mu(e,g)$ 仍有望成立。

然而，定理 1.2 仍应被视为一个否定性结果；它证实，仅将猜想归结为考察自由群上的随机游走，并不能解决奇异性猜想；我们认为，要解决猜想 1.1，还需要采用其他方法。

• 最后，我们想指出，定理 2.1 本身不足以证明定理 1.1，因而也不足以证明 (3)。实质上，证明要求我们将相应的算子 P_B 表示为一个结构简单得多的算子的幂（见定理 1.1 证明后的注）。在一般情形下，引理 2.6 似乎能为屏障算子 P_B 给出类似于 (15) 的分解；我们希望这些分解或许能为自由群上任意随机游走的 (3) 提出恰当的推广形式。

参考文献

[Anc88] 阿拉诺·安科纳。“正调和函数与双曲性”。载于：位势理论综述与问题。Josef Kr´al 等编。柏林、海德堡：Springer Berlin Heidelberg，1988，第 1–23 页。 ISBN：978-3-540-45952-1。[Aze+22] 艾托尔·阿泽马尔等。随机游走速度是 Teichm ¨uller 空间上的一个适当函数。2022。 DOI：10.48550/ARXIV.2212.06581。 URL：https://arxiv.org/abs/2212.06581。[BHM11] S´é巴斯蒂安·布拉谢尔、彼得·海辛斯基和皮埃尔·马蒂厄。“双曲群的调和测度与拟共形测度”。载于：Ann. Sci. ´Éc. Norm. Sup´ér. (4) 44.4 (2011)，第 683–721 页。 ISSN：0012-9593。 DOI：10.24033/asens.2153。 URL：https://doi.org/10.24033/asens.2153

[Der75] 伊夫·德里安尼克。《自由群上的随机游走与马丁边界》。载于：Z. Wahrschein- lichkeitstheorie und Verw. Gebiete 32.4（1975），第 261–276 页。 DOI：10.1007/BF00535840。 URL：https://doi.org/10.1007/BF00535840。[DG20] 马蒂厄·迪索尔和伊利亚·格赫特曼。《相对双曲群上字度量的熵与漂移》。载于：Groups Geom. Dyn. 14.4（2020），第 1455–1509 页。[DKN09] 贝特朗·德鲁安、维克托·克莱普岑和安德烈亚斯·纳瓦斯。《关于圆上极小群作用的遍历性问题》。载于：Mosc. Math. J. 9.2（2009），第 263–303 页，附录。 ISSN：1609-3321。 DOI：10.17323/1609-4514-2009-9-2-263-303。 URL：https://doi.org/10.17323/1609-451

[GL13] S´ebastien Gou¨ezel 和 Steven P. Lalley。《余紧福克斯群上的随机游走》。英文。载于：《高等师范学校科学年刊》第4辑，46.1（2013），第131–175页。 DOI：10.24033/asens.2186。 URL：http://www.numdam.org/articles/10.24033/asens.2186/.[GL93] Y. Guivarc’h 和 Y. 勒让。《模曲面上测地流的渐近绕行与连分数》。英文。载于：《高等师范学校科学年刊》第4辑，26.1（1993），第23–50页。 DOI：10.24033/asens.1666。 URL：http://www.numdam.org/articles/10.24033/asen

[GMM18] S´ebastien Gou¨ezel、Fr´ed´eric Math´eus 和 Fran¸cois Maucourant。《字双曲群中的熵与漂移》。载于：《数学发明》211.3（2018），第 1201–1255 页。 ISSN：0020-9910。 DOI：10.1007/s00222-018-0788-y。 URL：https://doi.org/10.1007/s00222-018-0788-y。[Gui80] Y. Guivarc’h。《关于大数定律与随机游走谱半径》。载于《随机游走会议》（Kleebach，1979）（法文）。第 74 卷。《Ast´erisque》。法国数学学会，巴黎，1980 年，第 47–98 页，3。[KL11] Vadim A. Kaimanovich 和 Vincent Le Prince。《具有奇异调和测度的矩阵随机乘积》。载于：《几何奉献》150（2011），第 257–279 页。 ISSN：0046-5755。 DOI：10.1007/s10711-010-

URL：https://doi.org/10.1007/s10711-010-9504-9。[Kos20] Petr Kosenko。《配备几何距离的双曲 Coxeter 群和福克斯群的基本不等式》。载于：《国际数学研究通知》2021.6（2020 年 8 月），第 4709–4728 页。 ISSN：1073-7928。 DOI：10.1093/imrn/rnaa213。电子预印本：https://academic.oup.com/

URL：https://doi.org/10.1093/imrn/rnaa213。[KT22] Petr Kosenko 和 Giulio Tiozzo。《余紧福克斯群的基本不等式》。载于：《数学论坛：西格玛》10（2022），e102。 DOI：10.1017/fms.2022.94。[KV83] V. A. Kaimanovich 和 A. M. Vershik。《离散群上的随机游走：边界与熵》。载于：《概率年刊》11.3（1983），第 457–490 页。 ISSN：0091-1798。[Lal93] Steven P. Lalley。《自由群和齐性树上的有限范围随机游走》。载于：《概率年刊》21.4（1993），第 2087–2130 页。 ISSN：00911798。 URL：http://www.jstor.org/stabl

（访问于2022年12月29日）。

[Le 08] Vincent Le Prince。《双曲空间上随机游走的调和测度维数、熵与漂移之间的关系》。载于：Electron. Commun. Probab. 13（2008），第45–53页。 DOI：10.1214/ECP.v13-1350。 URL：https://doi.org/10.1214/ECP.v13-1350。[Led01] Fran¸cois Ledrappier。《自由群上随机游走的一些渐近性质》。载于：Topics in probability and Lie groups: boundary theory。第28卷。CRM Proc. Lecture Notes。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001，第117–152页。 DOI：10.1090/crmp/028/05。 URL：https://doi.org/10.1090/crmp/028/05。[LS84] Terry Lyons 和 Dennis Sullivan。《函数论、随机路径与覆盖空间》。载于：J. Differential Geom. 19.2（1984），第299–323页。 ISSN：0022-040X。 URL：http://projecteuclid.org/euclid

[Tan19] Ryokichi Tanaka.《双曲空间中调和测度的维数》。载于：Ergodic Theory Dynam. Systems 39.2（2019），第 474–499 页。 ISSN：0143-3857。 DOI：10.1017/etds.2017.23。URL：https://doi.org/10.1017/etds.2017.23。