arXiv:2301.09259v1 [math.AT] 23 Jan 2023

素数 p局部紧群的正规化子分解

EVA BELMONT、NAT`ALIA CASTELLANA、JELENA GRBI´C、KATHRYN LESH 和 MICHELLE STRUMILA

Abstract. 我们给出一个素数 p局部紧群（$S, \mathcal{F}, \mathcal{L}$）的正规化子分解，将 $|\mathcal{L}|$ 描述为以有限偏序集为指标的同伦余极限。我们的工作推广了 Dwyer 关于有限群、Libman 关于 p局部有限群，以及 Libman 在另一项工作中关于紧李群的正规化子分解。我们的方法在李群情形下得出的结果避免了 Quillen 定理 A 所涉及的拓扑细节，因为我们使用离散群。我们计算了 U(p) 和特殊酉群 SU(p) 的 p完备分类空间，以及 Aguad´e 和 Zabrodsky 的 p紧群的正规化子分解。

1. Introduction

对于有限群 G、素数 p以及适当的子群集合 $\mathscr{C}$，其中 G，Dwyer [Dwy97] 为 $BG^\wedge_p$给出了三种同伦余极限分解的系统方法。其中两种——中心化子分解和子群分解——由融合范畴和轨道范畴来指标化，这些范畴的对象是 $\mathscr{C}$中子群的共轭类。第三种是正规化子分解，

$$BG^\wedge_p \simeq \left[\operatorname{hocolim}_{\mathbb{P}\in\mathcal{I}} \delta\right]^\wedge_p,$$

它由有限偏序集 $\mathcal{I}$ 来指标化，其对象是 G-共轭类的链 $\mathbb{P} = (H_0 \subsetneq \ldots \subsetneq H_k)$，其中 $H_i \in \mathscr{C}$ 且 $\delta(\mathbb{P}) \simeq B(\cap_i N_G H_i)$。

还有另外两种与我们研究相关的更一般情形。首先，同伦余极限分解也已针对紧李群进行研究。Jackowski 和 McClure [JM92，定理 1。3] 针对初等阿贝尔 p-子群集合，给出了紧李群的中心化子分解。Jack- owski、McClure 和 Oliver 描述了子群分解。S lomi´nska [S-lo01]利用这一集合给出了正规化子分解。Libman [Lib11，定理 C] 利用阿贝尔p-子群集合和 p-根子群集合，给出了中心化子分解、子群分解和正规化子分解。

感兴趣的第二种推广，是将有限群替换为 p-局部有限群。这些对象是三元组（S、$\mathcal{F}$、$\mathcal{L}$），其中 S是一个有限 p-群，而$\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{L}$ 是编码类似于共轭的数据的范畴。可以定义一个 $|\mathcal{L}|^\wedge_p$ -局部有限群的分类空间 p，其性质与群的p-完备化分类空间类似。每个有限群都能导出一个 p-局部有限群，但并非每个 p-局部有限群都来自某个群。Libman [Lib06]

2020 *Mathematics Subject Classification.* 2020年数学主题分类：主要分类 55R35；次要分类 57T10。*Key words and phrases.* 关键词：同伦论、融合系统、分类空间、李群、p-局部紧群、同调分解。

证明了 p-局部有限群的分类空间存在正规化子分解。

我们研究 p-局部紧群（定义2.11），它以与 p-局部有限群推广有限群相同的方式推广紧李群。这一理论由 [BLO07], 提出，其精神与 p-局部有限群的理论类似，但由于背景不再是有限的，因此面临新的挑战。有限 p-群的对应概念是离散 p-环面群，即离散环面（$\mathbb{Z}/p^\infty$）^{r} 与有限 p-群的扩张。通过相关的 p-局部紧群研究李群，其优点是可以将问题归结为离散群（而非拓扑群）。Broto、Levi 和 Oliver 证明了p-局部紧群的子群分解（[BLO07，命题 4.6], [LL15，定理 B]）。

我们的首项贡献是改编 Libman 关于 [Lib06] 的研究 p，将其关于 p-局部有限群的工作用于构造 p-局部紧群的正规化子分解。与中心化子分解或子群分解相比，$\mathcal{F}^{cr}$ -局部紧群的正规化子分解有一项优势：其指标集是一个有限偏序集。在下述陈述中，记号$\mathcal{F}$ 表示 $\mathcal{F}$的子范畴，其对象是 $\mathcal{F}$-中心且 $\overline{s}d\mathcal{F}^{cr}$ -根子群。有限偏序集的定义见定义 3.15。

定理 **3.16**。设 $(S,\mathcal{F},\mathcal{L})$ 是一个 p-局部紧群。存在一个函子δ: $\overline{s}d\mathcal{F}^{cr} \longrightarrow$ Top，其同伦余极限与$_{\overline{s}d(\mathcal{F}^{cr})}$ $\delta \longrightarrow |\mathcal{L}|$ 等价；并且对每条链 $\mathbb{P}$，都有一个自然的同伦等价 $\mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P}) \longrightarrow \delta([\mathbb{P}])$。此外，群 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P})$ 是一个几乎离散的 p- 环面群。

这一结论基本上是形式性的，大部分证明也是如此，但在计算一些重要情形下的分解时仍面临有趣的挑战。我们的第一类例子是由 p-局部紧群产生的紧李群。定理 3.16 完全在离散 p-环面群的范畴中展开。为了将我们的基础理论与紧李群中正规化子的通常背景联系起来，我们利用先前的工作 [BCG$^+$22] ，将所得同伦余极限中的函子取值改述为模 p 等价于群论正规化子的分类空间。与 [Lib11], 相比，这种方法为基本分解结果提供了更形式化的证明——本质上类似于有限情形——因为我们无需处理应用 Quillen 定理 A 时遇到的拓扑问题。相反，这些拓扑问题可以简洁地封装在函子取值中，并在统一的基础上加以理解 [BCG$^+$22]。

令 $\mathcal{R}$ 表示紧李群 G 中既是 p-中心化又是 p-顽固的 p-环面子群的集合，并令 $\overline{s}d\mathcal{R}$ 表示 $\mathcal{R}$中子群真包含链的 G-共轭类构成的偏序集。

定理 **4.2**。设 G 是一个紧李群，并令 $(S,\mathcal{F},\mathcal{L})$ 为相应的p-局部紧群。若 $P \in \mathcal{F}^{cr}$，令 $\mathbf{P}$ 表示其在 G中的闭包。若 $\mathbb{P} = (P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_k)$ 是 $\mathcal{F}^{cr}$中的一个真子群链，则存在一个自然的弱模 p等价

$$\mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P}) \simeq \mathrm{B}\big(\cap_i N_G(\mathbf{P}_i)\big).$$

此外，若 $\pi_0 G$ 是一个 p-群，则由 $P \mapsto \mathbf{P}$ 给出的函子 $\mathcal{F}^{cr} \to \mathcal{R}$ 诱导一个偏序集同构 $\overline{s}d\mathcal{F}^{cr} \cong \overline{s}d\mathcal{R}$。

结合定理 3.16，定理 4.2 告诉我们，当 $\pi_0 G$ 是一个 p-群时，我们可以计算 $BG^\wedge_p$ 的正规化子分解，其偏序集由 p-中心且 p-刚性的子群的链索引，取值为模 p 等价

于这些子群的正规化子的交。（关于 4.4 中的 π_0 假设，请参见注 6。）在第 6 节中，我们明确计算了 U(p) 和 特殊酉群(p) 的分解，并将这些群的分类空间表示为模 p等价于一个同伦推出图。我们认为，这些分解在奇素数情形下是新的。在 $p = 2$ 的情形下，我们得到 Dwyer、Miller 和 Wilkerson 定理 [DMW87], ，他们用临时方法给出了 BSU(2) 和 BSO(3) 的模 2 同伦推出分解。

定理**6.14**。令 $\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$ 表示$\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$中的上三角矩阵群；令 T 表示所选的极大离散 p-环面$\mathrm{SU}(p)$；再令 Γ 表示阶为 p、指数为 p^3 的额外特殊 p群。

(1) 对于奇素数，下图的同伦推出在模 p 意义下等价于 BSU(p)：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}(\Gamma \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)) & \longrightarrow & \mathrm{B}\big(T \rtimes \Sigma_p\big) \\ \downarrow & & \\ \mathrm{B}\big(\Gamma \rtimes \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p\big)\,. & & \end{array}$$

(2) [DMW87，定理 4。1] 下图的同伦推出在模2意义下等价于$\mathrm{BSU}(2)$：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}\,Q_{16} & \longrightarrow & \mathrm{B}\big(T \rtimes \Sigma_2\big) \\ \downarrow & & \\ \mathrm{B}\,O_{48}, & & \end{array}$$

其中， Q_{16} 和 O_{48} 分别表示阶为 16 的四元数群和阶为 48 的二元八面体群。

U(p) 的结果见定理6.7。

对于第二类例子，我们转而讨论 p-紧群，这是 Dwyer 和 Wilkerson 引入的另一种李群分类空间的推广 [DW94a], ，它源于对环空间上上同调环的研究。每个 p-紧群都对应一个 p-局部紧群（S， $\mathcal{F}$， $\mathcal{L}$） [BLO07，定理 10。7], 但并非每个 p-局部紧群都以这种方式产生。文献 p中对 [AG09、AGMV08] 给出的 -紧群分类，是由紧李群和一系列奇异例子构造这些空间。

我们将定理 3.16 应用于 Aguad´e–Zabrodsky p-紧群；这些群与 $\mathrm{BSU}(p)^\wedge_p$ 密切相关。它们最初由 [Agu89] 构造，其上同调可实现多项式环的某些不变量。我们的结果给出了这些空间的一个同伦推出图。

定理**7.1**。设 X 表示 Aguad´*e–Zabrodsky* p-紧群 X_{12}（其中 $p = 3$）， X_{29} （其中 $p = 5$），X_{31} （其中 $p = 5$），或者 X_{34} （其中 $p = 7$）。设 $T \cong (\mathbb{Z}/p^\infty)^{\,p-1}$ 表示相关融合系统中的极大离散 p-环面，并且

令 G 为与 X相关联的 Weyl 群。图表的同伦推出

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}\big(\Gamma \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p)\big) & \longrightarrow & \mathrm{B}\left(T \rtimes G\right) \\ \Big\downarrow & & \\ \mathrm{B}(\Gamma \rtimes \mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p) & & \end{array}$$

与和 X相关的链接系统的神经同伦等价，并且模 p等价于 BX 本身。

与定理6.14相比，上文可见，$\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$ 被 $\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p$取代，而 Σ_p （特殊酉群（p）的 Weyl 群）被 G （ X的新扩大的 Weyl 群）取代。

结构安排。第2 节回顾离散素数 p-局部紧群中融合系统和链接系统的性质。第3 节建立 p-局部紧群的一般正规化子分解（定理3.16），并证明其中涉及的空间是几乎离散素数 p-环面群的分类空间。第4节转而讨论李群，并证明定理4.2。需要解决的主要问题是计算与李群相关的链接系统中的自同构。问题在于，与 G 相关的链接系统模型与传递子系统没有直接联系。第5节通过分离出一些群论计算，为将正规化子分解应用于 U(p) 和特殊酉群(p) 做准备。第6 节结合定理4.2，运用这些计算给出 U(p) 和特殊酉群(p) 的正规化子分解。最后，第7 节利用第6 节的结果，给出“奇异”阿瓜德´–Zabrodsky 空间的正规化子分解。

致谢。第一作者获得了美国国家科学基金会资助项目 DMS-2204357 的支持，并获得 AWM-NSF 导师制差旅资助，以便与第四作者合作。第二作者部分获得了西班牙国家研究署项目 PID2020-116481GB-I00、Severo Ochoa 与 Mar´ıa de Maeztu 研发卓越中心与单位计划（CEX2020-001084-M），以及 CERCA 计划／加泰罗尼亚政府的支持。第一、第二和第四作者感谢 2022年春季在 Mittag-Leffler 研究所举办的“代数、拓扑与几何中的高阶代数结构”计划提供的支持。

我们感谢拓扑学女性研讨会 III 的组织者，本项工作正是从该研讨会开始的；同时也感谢 Hausdorff 数学研究所，该研讨会在此举行。拓扑学女性研讨会 III 得到了美国国家科学基金会资助项目 DMS-1901795、AWM ADVANCE 资助 NSF HRD-1500481，以及 Compositio Mathematica 基金会的支持。第五作者也获得了 Cheryl Praeger 差旅资助，以支持其参加此次研讨会。

我们非常感谢 Dave Benson 就群论中的截面为我们提供指导5 和6。若没有他的帮助，这些结果的呈现就不会如此整齐。当然，任何尚存的错误都由我们自行负责。

2. FUSION SYSTEMS AND LINKING SYSTEMS

我们简要概述 Broto、Levi 和 Oliver p在其著作中提出的[BLO07]素数局部紧群的概念。回顾一下， p素数环面群是环面的一个扩张，$(S^1)^r$其扩张群为有限 p素数群。我们使用 p素数环面

群。照例，令 $\mathbb{Z}/p^\infty$ 为在标准包含映射下所有循环 p群 $\mathbb{Z}/p^n$ 的并。

定义 2.1。离散的 p-环面群是一个群 P，由一个扩张给出

$$1 \longrightarrow (\mathbb{Z}/p^\infty)^r \longrightarrow P \longrightarrow \pi_0 P \longrightarrow 1,$$

其中 r 是非负整数，$\pi_0 P$是有限的 p-群。 P 的单位连通分支为 $P_0 := (\mathbb{Z}/p^\infty)^r$，我们称 r 为 P的秩。我们称 $\pi_0 P$ 为 P的连通分支集合。

注意，离散的 p-环面群的单位连通分支是良定义的，因为它是由无限可 p整除元素构成的特征子群。

定义 2.2。 我们将离散 P-环面群 p的大小 P定义为有序对 $\mathrm{size}(P) = (r, c)$，其中 r是 P的秩，且 c是 $\pi_0 P$的阶，并赋予字典序（见 [CLN07，A.5]）。

引理 2.3。若 $P \to P'$是离散 p-环面群之间的单态射，则 $\mathrm{size}(P) \le \mathrm{size}(P')$；当且仅当 $P \to P'$是同构时，等号成立。

证明。 参见 [BLO07，定义 1 之后。1]。 □

给定两个离散的 p-环面群 P和 Q，用 $\mathrm{Hom}(P,Q)$ 表示从 P到 Q的群同态集。如果 P和 Q 是较大群 S的子群，则 $\mathrm{Hom}_S(P,Q)$ 表示由 S中的元素通过共轭所诱导的那些同态（必为单态射）组成的集合。

以下定义是对有限 p-群上的融合系统定义的直接推广（参见 [BLO03]）。

定义 2.4。 [BLO07，定义 2。1] 一个 融合系统 $\mathcal{F}$ 定义在离散 p-环面群 S 上，是群范畴的一个子范畴，定义如下。 的对象是 $\mathcal{F}$的所有子群。态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$ 仅包含群单态射，并满足以下条件。

(a) 对所有 P、$Q \subseteq S$，$\mathrm{Hom}_S(P,Q) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$。特别地，所有子群包含都属于 $\mathcal{F}$。(b) $\mathcal{F}$ 中的每个态射都可以分解为：先取 $\mathcal{F}$中的一个同构，再接一个子群包含。

对于融合系统，我们使用与群相同的“外自同构”术语。特别地，正如 $\mathrm{Out}_S(P) := \mathrm{Aut}_S(P)/\mathrm{Aut}_P(P)$，我们定义 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P) := \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)/\mathrm{Aut}_P(P)$。此外，如果存在 $\mathcal{F}$中的一个同构 $P \cong P'$，我们就称 S的两个子群 P、P'是 $\mathcal{F}$-共轭的。

为了使融合系统具有良好的性质，并能描述群的 p-子群之间的共轭关系，它必须满足一组额外的“饱和性”公理。定义见 [BLO07，§2]，由于定义相当冗长且技术性较强，而且我们不需要用到任何具体细节，读者可参阅该文献。

例 2.5。我们回顾由紧李群 G ([BLO07, §9])导出的融合系统 $\mathcal{F}_S(G)$。固定一个极大环面 $\mathrm{T} \subseteq G$。令 $W := N_G(\mathrm{T})/\mathrm{T}$ 表示 Weyl 群，并固定一个 Sylow 素数 p-子群 $W_p \subseteq W$。令 S 表示 W_p 在 $N_G(\mathrm{T})$中的逆像。那么，S 是 G的极大 p-环面子群，在 G-共轭意义下唯一，并由一个扩张给出

$$1 \longrightarrow \mathbf{T} \longrightarrow \mathbf{S} \longrightarrow W_p \longrightarrow 1.$$

一个极大离散 p-环面子群 G 可通过取一个极大离散p-环面子群 S 得到**S**的。所有这类选择在**S** 中共轭[BLO07，命题 9 的证明3]），因此 S 必然包含唯一的极大离散 p-环面子群 T，即**T**的子群，从而给出一个扩张

$$1 \longrightarrow T \longrightarrow S \longrightarrow W_p \longrightarrow 1.$$

G 的融合系统记作 $\mathcal{F}_S(G)$，其对象集由 S 的所有子群构成；对于 $P, Q \subseteq S$，态射为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q) := \mathrm{Hom}_G(P,Q) = N_G(P,Q)/C_G P$。

与紧李群相关联的融合系统具有适当的技术性质，因而易于处理。

命题 2.6。 [BLO07，命题 8。3] 若 G 是一个紧李群，且其极大离散 p-环面子群为 S，则融合系统 $\mathcal{F}_S(G)$ 是饱和的。

一般而言，离散素数 p-环面群 S 上的融合系统会有无限多个对象同构类（除非 S 是有限的）。幸运的是，事实证明，我们可以将注意力限制在较少的对象上。“$\mathcal{F}$-中心”和“$\mathcal{F}$-根基”这两个概念，在素数 p-局部紧群理论中的作用，与它们在群论中的对应概念类似。

定义 2.7. 设 $\mathcal{F}$ 是离散 p-环面群 S 上的一个融合系统。

(1) 若子群 $P \subseteq S$ 的中心化子包含于 P 中，且 S 的所有 $\mathcal{F}$-共轭子群也包含其 S-中心化子，则称 $P \subseteq S$ 为 $\mathcal{F}$-中心子群。(2) 若 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P) / \mathrm{Aut}_P(P)$ 不含非平凡正规 p-子群，则称子群 $P \subseteq S$ 为 $\mathcal{F}$-根子群。

命题 2.8. [BLO07，推论 3。5] 在饱和融合系统 $\mathcal{F}$ 上，若其定义在离散p-环面群 S 上，则 $\mathcal{F}$-中心 $\mathcal{F}$-根子群的共轭类只有有限多个。

群 $\mathcal{F}_S(G)$ 的饱和融合系统 G 所包含的信息不足以恢复 G。例如，若 G 是有限 p-群，则融合系统只能检测到 $G/Z(G)$。我们回顾中心链接系统的定义。中心链接系统是与饱和融合系统相关联的一个范畴，其神经与 p模 BG等价。关于链接系统性质的细节可见 [BLO14]的附录。我们从传递子范畴开始。

定义 2.9. 若 G 是一个群，且 $\mathcal{H}$ 是 G 的一个子群集，则 $\mathcal{H}$ 的传递子范畴记作 $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(G)$，它是一个对象集为 $\mathcal{H}$、态射集定义如下的范畴：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(G)}(P,Q) := \left\{ g \in G \,\middle|\, gPg^{-1} \subseteq Q \right\}.$$

若 S 是 G 的一个子群，且 $\mathcal{H}$ 是 S 的所有子群组成的集合，则将相应的传递子范畴记作 $\mathcal{T}_S(G)$。

定义 2.10. [BLO07，定义 4。1] [BLO14，定义 1。9]设 $\mathcal{F}$ 是一个定义在离散 p-环面群 S 上的融合系统，且 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{F}$-中心子群的集合。与 相关联的中心链接系统 $\mathcal{F}$ 是一个范畴 $\mathcal{L}$，其对象为 $\mathcal{H}$中的子群，并带有一对函子

$$\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(S) \xrightarrow{\delta} \mathcal{L} \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}$$

使得每个对象都在 $\mathcal{L}$ 中同构于一个在 $\mathcal{F}$ 中完全中心化的对象，并且满足以下条件。

(A) 函子 δ 是对象上的恒等映射，而 π 是对象上的包含映射。对于每一对对象 P、$Q \in \mathcal{H}$，中心化子 $Z(P)$ 通过经由 δ 的前复合在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(P,Q)$ 上自由作用，并且 $\pi_{P,Q}$ 诱导出一个双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(P,Q)/Z(P) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q).$$

(B) 对每个 P、$Q \in \mathcal{H}$，以及每个 $g \in N_S(P,Q)$，由函子 $\pi_{P,Q}$ 诱导的映射：$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(P,Q) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$，将元素 $\delta_{P,Q}(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(P,Q)$ 映至 $c_g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$。

(C) 对每个 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(P,Q)$ 和每个 $g \in P$，下列 $\mathcal{L}$ 中的方块交换：

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & Q \\ {\scriptstyle \delta_P(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta_Q(\pi(f)(g))} \\ P & \xrightarrow{f} & Q. \end{array}$$

定义 2.11。 [BLO07，定义 4。2] 一个 p-局部紧群是一个三元组 $(S,\mathcal{F},\mathcal{L})$，其中 $\mathcal{F}$ 是定义在离散 p-环面群 S上的饱和融合系统，且 $\mathcal{L}$ 是与 $\mathcal{F}$相关联的中心链接系统。（分类空间 $(S,\mathcal{F},\mathcal{L})$ 定义为 $|\mathcal{L}|^\wedge_p$ 。

Broto、Levi 和 Oliver 在[BLO07，§9], 中证明，紧李群 G 可通过对 p-局部紧群（S, $\mathcal{F}_S(G)$ $\mathcal{L}_S(G)$)给出一个具体构造，从而得到一个 $\mathcal{L}_S(G$；随后他们证明，该构造为 p-完备化提供了一个合适的模型： BG。

定理 2.12. [BLO07，定理 9。10]设 G 是一个紧李群，并固定一个极大离散 p-环面子群 $S \subseteq G$。那么存在一个中心链接系统 $\mathcal{L}_S(G)$ 与 $\mathcal{F}_S(G)$ 相关联，使得 $|\mathcal{L}_S(G)|^\wedge_p \simeq BG^\wedge_p$。

因此，关于 $|\mathcal{L}|$ 的分解的任何定理，对于 p-局部紧群同样适用于李群。在计算时，我们将采用另一种更具体的 $\mathcal{L}_S(G$模型，BLO 中也对其作了介绍 [BLO07], ，我们将在第 4节详细说明。

融合系统理论中的一个关键结果是：与给定饱和融合系统相关联的中心链接系统存在且唯一（在等价意义下）。对于有限 p-群 S上的饱和融合系统，这一结果最早由 [Che13] 利用局部性的新理论证明。随后，[Oli13] 利用 [BLO03]中发展的阻碍理论给出了另一种证明。后来， [LL15] 将这一结果推广到离散 p-环面群上的饱和融合系统。

定理 2.13。 [LL15] 设 $\mathcal{F}$ 是定义在离散 p-环面群上的饱和融合系统。除等价外，存在唯一一个与 $\mathcal{F}$相关联的中心链接系统。

3. THE NORMALIZER DECOMPOSITION FOR p-LOCAL COMPACT GROUPS

在本节中，我们假设给定一个固定的 p-局部紧群（S， $\mathcal{F}$， $\mathcal{L}$）（定义2.11）。我们建立一个正规化子分解，将未完成的神经 $|\mathcal{L}|$ 表示为由链的有限偏序集所索引的同伦余极限。我们首先引入链及其自同构。接着证明 $\mathcal{L}$ 中链的自同构群是几乎离散的 p-环面群（定义3.9）。最后，

我们证明了 p-局部紧群的普遍抽象正规化子分解结果（定理3.16），其证明过程大体上类似于 p-局部有限群的情形，见 [Lib06]。

我们从融合系统开始。 $\mathcal{F}$ 中的一条链由 S的子群序列 $\mathbb{P} = (P_0 \subsetneq P_1 \subseteq \ldots \subseteq P_k)$给出。如果所有包含都是严格包含，则称这条链为真链。如果 $\mathbb{P}'$ 与 $\mathbb{P}$长度相同，若存在同构 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P_k, P_k')$使得 $f(P_i) = P_i'$，则称 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{P}'$ $\mathcal{F}$共轭。

定义 3.1. 设 $\mathbb{P} = (P_0 \subseteq \ldots \subseteq P_k)$是 S的 $\mathcal{F}$-中心化子型子群的一条链。我们将 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}\mathbb{P}$ 定义为 P_k 的 $\mathcal{F}$-自同构群中，对每个 $0 \leq i < k$都将 P_i 限制为自同构的那些自同构所构成的群。

我们希望为一条链定义 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P})$，但首先需要一种类似于用于定义 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(\mathbb{P}$的典范子群包含的构造。我们可以在 $\mathcal{L}$ 中构造相容的“特征包含”，使其具有如下性质：它们经由 $\mathcal{F}$ 投影到 π中的子集包含： $\mathcal{L} \to \mathcal{F}$ (定义 2.10)。

引理 3.2。 [JLL12，注 1。6] 设 $\mathcal{L}$ 是与饱和融合系统 $\mathcal{F}$ 相关联的中心链接系统，该系统定义在离散 p-环面群 S上。存在一组相容的态射 $\left\{\iota_P^Q \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(P,Q) \mid P \subseteq Q\right\}$，具有以下性质。

(1) $\pi\left(\iota_P^Q\right)$ 是 $\mathcal{F}$中的包含态射 $P \subseteq Q$ 。(2) $\iota_P^P = \mathrm{Id}$。(
3) 若 $P \subseteq Q \subseteq R$ 是 S的子群，则 $\iota_Q^R \circ \iota_P^Q = \iota_P^R$。

我们对 $|\mathcal{L}|$ 的分解中的空间将是链接系统中自同构群的分类空间。

定义 3.3。 [Lib06，定义 1。4] 设 $\mathbb{P} = (P_0 \subseteq \ldots \subseteq P_k)$ 是由 $\mathcal{F}$-中心化子型子群组成的链。 S定义 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P})$ 为 $\prod_{i=0}^{k} \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}} P_i$ 的子群，该子群由满足条件 f_i 的序列 ($f_{i+1} \circ \iota_{P_i}^{P_{i+1}} = \iota_{P_i}^{P_{i+1}} \circ f_i$) 组成。也就是说，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P})$ 的每个元素都给出一个交换梯

$$
\begin{array}{ccccccccc}
P_0 & \xrightarrow{\iota_{P_0}^{P_1}} & P_1 & \xrightarrow{\iota_{P_1}^{P_2}} & \cdots & \xrightarrow{\iota_{P_{k-2}}^{P_{k-1}}} & P_{k-1} & \xrightarrow{\iota_{P_{k-1}}^{P_k}} & P_k \\
\downarrow{\scriptstyle f_0}\cong & & \downarrow{\scriptstyle f_1}\cong & & & & \downarrow{\scriptstyle f_{k-1}}\cong & & \downarrow{\scriptstyle f_k}\cong \\
P_0 & \xrightarrow[\iota_{P_0}^{P_1}]{} & P_1 & \xrightarrow[\iota_{P_1}^{P_2}]{} & \cdots & \xrightarrow[\iota_{P_{k-2}}^{P_{k-1}}]{} & P_{k-1} & \xrightarrow[\iota_{P_{k-1}}^{P_k}]{} & P_k.
\end{array}
\tag{3.4}
$$

在继续讨论从融合系统到链接系统的提升以及验证唯一性性质之前，我们先介绍两个基本引理。首先，一个分解引理可直接由中心链接系统的公理推出。

~引理 3.5。给定左侧的 $\mathcal{F}$ 图表，以及将 ψ 提升至 $\mathcal{L}$ 的提升 ψ，存在唯一的提升 ~ ϕ，它将 ϕ 提升至 $\mathcal{L}$，并使右侧图表交换。

$$
\begin{array}{ccc}
P & \xrightarrow{\subseteq} & P' \\
{\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\
Q & \xrightarrow{\subseteq} & Q'
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
P & \xrightarrow{\iota_P^{P'}} & P' \\
{\scriptstyle\widetilde{\phi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\widetilde{\psi}} \\
Q & \xrightarrow[\iota_Q^{Q'}]{} & Q'
\end{array}
$$

证明。 这是由应用 [BLO07，引理 43] 于 $P \xrightarrow{\phi} Q \hookrightarrow Q'$ 得出的。 □

由上述分解性质可知，中心链接系统中的态射具有良好的范畴性质。

引理 3.6。 [JLL12，推论 1。8] 中心链接系统中的态射既是范畴单态射，也是范畴满态射。

回到对链的自同构群的研究，我们能够将链接系统中的自同构群与融合系统中的自同构群联系起来。

引理 3.7。设 $\mathbb{P} = (P_0 \subseteq \ldots \subseteq P_k)$ 是一个由 $\mathcal{F}$-中心化子型子群构成的链。存在一个短正合列

$$1 \longrightarrow Z(P_k) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(\mathbb{P}) \longrightarrow 1.$$

证明。 该引理由引理 3.5 得出。给定一个 $\mathcal{F}$-自同构 $\mathbb{P}$，我们将 $P_k \to P_k$ 提升到 $\mathcal{L}$，根据定义 $Z(P_k)$，该提升有 2.10(A) 种选择，因为P_k 是 $\mathcal{F}$-中心化子型。于是引理 3.5 保证了所有较小子群上存在唯一的相容提升。 □

引理 3.8. 自然映射 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P}) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P_i)$ 是单态射。

证明。 该引理可由引理 3.6 直接推出。较大的子群的自同构通过特征包含唯一地限制到较小的子群。$\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}$ P_i 中的某个特定元素未必能扩张为较大子群的自同构以构成交换图（3.4），但若可以，则该扩张是唯一的。 □

我们将链接系统中链的自同构群与几乎离散的p-环面群联系起来；这些群曾在链接系统的背景下于 [LL15] 和 [Mol18] 中得到研究。

定义 3.9. 几乎离散的 p-环面群是包含一个有限指数正规离散 p-环面的离散群。

与离散 p-环面群一样，几乎离散的 p-环面群具有良好的遗传性质。

引理 3.10. 若 G 是一个几乎离散的 p-环面群且 $H \subseteq G$，则 H 也是一个几乎离散的 p-环面群。

证明。设 $P \lhd G$ 是 G 的有限指数正规离散 p-环面子群，且设 T_P 是 P 的单位连通分支。那么 $T_P \lhd G$，并且 $[G : T_P]$ 是有限的。

令 T_H 表示 $T_P \cap H$ 中由无限 p-可除元素组成的子群。由于 $(T_P \cap H) \lhd H$，且 T_H 是 $T_P \cap H$ 的特征子群，我们有 $T_H \lhd H$。结果成立，因为 $H/T_H \subseteq G/T_P$，而后者是有限的。 □

$\mathcal{L}$ 中链的自同构群取值于几乎离散的 p-环面群。

引理 3.11. 设 $\mathbb{P}$ 是 $\mathcal{L}^{cr}$ 中的子群链。那么 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P})$ 是一个几乎离散的 p-环面群。

证明。 我们先对单个 $\mathcal{F}$-中心群 P证明该结果。根据定义 2.10(C)（取 $P = Q$），特征单态射 δ_P 将 P 识别为 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P$的正规子群。我们有如下短正合列阶梯:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & Z(P) & \hookrightarrow & P & \twoheadrightarrow & \text{自同构群}_P(P) & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \delta_P} & & \downarrow & & \\ 1 & \xrightarrow{\quad} & Z(P) & \hookrightarrow & \text{自同构}_{\mathcal{L}}(P) & \xrightarrow{\pi} & \text{自同构群}_{\mathcal{F}}(P) & \xrightarrow{\quad} & 1, \end{array}$$

且右侧列的余核为 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)$（根据定义）。因此我们得到一个群的短正合列

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P) \longrightarrow \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P) \longrightarrow 0, \tag{3.12}$$

其中 $P \lhd$自同构$_{\mathcal{L}}(P)$，且 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)$ 由 [BLO07，命题 2。3] 可知是有限的。由于 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P)$ 是一个由离散 p-环面群扩张的有限群，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P)$ 几乎是离散 p-环面群。

由引理 3.8 和 3.10 可知，该结论对链也成立。 □

有了自同构群之后，我们就可以讨论正规化子分解的指标范畴，并沿用 S lomi´nska 的工作。我们改编了 [Lib06，定理 5。1] 的证明。

定义 3.13（[S lo91]，[Lib06，第4]节）。若范畴 $\mathcal{A}$ 中所有自同态都是同构，则称其为 E-I 范畴；若存在函数$h : \mathrm{ob}(\mathcal{A}) \to \mathbb{N}$，使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \neq \emptyset$ 蕴含 $h(A) \leq h(B)$，且等号成立当且仅当$A \cong B$ 属于 $\mathcal{A}$，则称 $\mathcal{A}$ 具有高度分级。

令 $\mathcal{F}^{cr}$ （分别地， $\mathcal{L}^{cr}$）表示 $\mathcal{F}$ （分别地， $\mathcal{L}$）的满子范畴，它由 S 的同时为 $\mathcal{F}$-中心且 $\mathcal{F}$-根的子群组成。回忆一下，若一个子群链中的所有包含关系都是严格的，则称该链为“真”的。

在引理 3.14 中，我们验证 $\mathcal{L}^{cr}$ 具有定义 3.13中的结构。

引理 3.14。 $\mathcal{L}^{cr}$ 具有有限个对象同构类，并且是一个带高度的 E-I 范畴，其高度函数为大小$(-)$，见定义 2.2。

证明。 有限性由命题2.8得出。定义 2.2 给出了高度函数，因为到 $\mathcal{F}$ 的投影将 $\mathcal{L}$ 中的所有态射映射为离散 p-环面群之间的群单态射，而这类单态射的高度必定非递减。只有对于群同构才会达到等号，而这些同构可提升为 $\mathcal{L}$中的同构。 □

定义 3.15。偏序集范畴$\overline{s}d(\mathcal{F}^{cr})$的对象是 $\mathcal{F}^{cr}$中对象的真链 $\mathbb{P}$ 的 $\mathcal{F}$-共轭类 $[\mathbb{P}]$ 。当且仅当 $\mathbb{P}'$ 与 $\mathbb{P}$的某个子集所给出的链 $\mathcal{F}$- $[\mathbb{P}] \to [\mathbb{P}']$ 共轭时，存在一个态射 $[\mathbb{P}] \to [\mathbb{P}']$ 。

抽象的“正规化子分解定理”将 $|\mathcal{L}|$ 表示为关于有限偏序集 $\overline{s}d\mathcal{F}^{cr}$的同伦余极限。

定理 3.16. 设 $(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$ 是一个 p-局部紧群。存在一个函子δ: $\overline{s}d\mathcal{F}^{cr} \longrightarrow \mathrm{Top}$，并有一个等价 $\mathrm{hocolim}_{\overline{s}d(\mathcal{F}^{cr})}\ \delta \longrightarrow |\mathcal{L}|$，且对每条链 $\mathbb{P}$，都有一个自然同伦等价 $\mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P}) \longrightarrow \delta([\mathbb{P}])$。此外，群 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P})$ 是一个几乎离散的 p-环面群。

证明. 根据 [BCL22], , 由包含映射 $|\mathcal{L}^{cr}| \to |\mathcal{L}|$ 诱导的映射是一个同伦等价。因此，只需证明存在一个函子 $\delta\colon \overline{s}d\mathcal{F}^{cr} \longrightarrow \mathrm{Top}$，并有一个等价 $\mathrm{hocolim}_{\overline{s}d(\mathcal{F}^{cr})}\ \delta \longrightarrow |\mathcal{L}^{cr}|$，且对每条链 $\mathbb{P}$，都有一个自然等价 $\mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P}) \longrightarrow \delta([\mathbb{P}])$。Lib06 定理 5.1] 的证明可原样应用于 $\mathcal{L}^{cr}$，因为根据引理 3.14，$\mathcal{L}^{cr}$ 是一个有限高度的 E-I 范畴。定理的第二个结论在引理 3.11 中证明。□

注 3.17。 如果极大环面 T 恰好是 $\mathcal{F}$-中心的且 $\mathcal{F}$-根的，那么定理 3.16的指标范畴可以简化。假 $\mathbb{P} = (T \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_k)$ 设是由 $\mathcal{F}$-中心子群和 $\mathcal{F}$-根子群构成的真链。由于 T 是每个 P_i的特征子群，因此存在一个同构

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_k) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(T \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_k) \tag{3.18}$$

而引理 3.7 给出一个同构

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_k) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(T \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_k) \tag{3.19}$$

(若利用引理 3.8 将两边都视为 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P_k)$ 的子群，甚至可以得到等式)。如果指标偏序集 $\overline{s}d\mathcal{F}^{cr}$ 不太复杂，就可以将图表中对应的两个节点合并。我们在第 6 节关于 U(p) 的计算中使用了这个技巧（见 (6.4) 与 (6.6)，其中我们合并了箭头 $\mathbf{S} \leftarrow (\mathbf{T} \subset \mathbf{S})$，并在第 ´e–Zabrodsky p-紧群中再次使用该技巧，详见第 7节。

4. Application to compact Lie groups

本节将研究我们的抽象正规化子分解（定理 3.16）在由紧李群导出的 p-局部紧群中的应用（例 2.5）。回顾一下，定理 $|\mathcal{L}|$ 3.16 中的分解是通过 $\mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P}$来描述的，其中 $\mathbb{P} = (P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_k$是由 $\mathcal{F}$-中心且 $\mathcal{F}$-根的子群构成的真链。在紧李群理论中也有类似的概念。

定义 4.1. 设 G 是一个紧李群，且具有一个 p-环面子群 P。

(1) 若 P 是 G 中 C_G(P) 的极大 p-环面子群，则称 P 在 G 中是 p-中心的。

(2) 若 N_GP/P 有限且不包含非平凡正规p-子群，则称 P 在 G 中是 p-顽固的。

以下定理是本节的主要结果。它恢复了 Libman 在 [Lib11, §1.4]中描述的紧李群正规化子分解的一个版本。我们通过 p-局部紧群采取的方法有一个优点：为了在拓扑背景中应用 Quillen 定理 A，我们无需处理 [Lib11, §5] 中研究的那些微妙问题。

令 $\mathcal{R}$ 表示 G 中同时为 p-中心且为 p-顽固的 p-环面子群的集合，并令 $\overline{s}d\mathcal{R}$ 为 $\mathcal{R}$ 中子群真包含链的 G-共轭类所构成的偏序集。

定理 4.2. 设 G 是一个紧李群，并设 $(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$ 是与之相关的p-局部紧群。若 $P \in \mathcal{F}^{cr}$，令 P 表示其在 G 中的闭包。若 $\mathbb{P} = (P_0 \subsetneq .. \subsetneq P_k)$ 是 $\mathcal{F}^{cr}$ 中的真子群链，则存在一个自然的模 p 弱等价

$$\mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P}) \simeq \mathrm{B}\big(\cap_i N_G(\mathbf{P}_i)\big).$$

此外，若 $\pi_0 G$ 是一个 p-群，则由 $P \mapsto \mathrm{P}$ 给出的函子 $\mathcal{F}^{cr} \to \mathcal{R}$ 诱导偏序集同构 $\overline{s}d\mathcal{F}^{cr} \cong \overline{s}d\mathcal{R}$。

证明位于本节末尾，分为几个步骤。首先，关于指标范畴，我们有以下来自先前工作的结果。

定理 4.3. [BCG+22，定理 4.3] 设 $\mathbf{S}$ 是紧李群 G的极大 p-环面子群，且 S 是极大离散 p-环面子群 $S \subseteq \mathbf{S}$。闭包映射 $P \mapsto \mathbf{P}$ 定义了链的共轭类之间的单射

$$\begin{array}{c} \left\{P_0 \subseteq \ldots \subseteq P_k \subseteq S \,|\, all\ P_i\ are\ \mathcal{F}\text{-}centric\ and\ \mathcal{F}\text{-}radical\right\}/G \\ \downarrow \\ \left\{\mathbf{P}_0 \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{P}_k \subseteq \mathbf{S} \,|\, all\ \mathbf{P}_i\ are\ p\text{-}toral,\ p\text{-}centric,\ and\ p\text{-}stubborn\right\}/G. \end{array}$$

如果 $\pi_0 G$ 是一个 p-群，那么该映射是一一对应。

备注 4.4. 如果 $\pi_0 G$ 不是一个 p-群，仍可利用定理 4.2 来确定正规化子分解（定理 3.16）中函子取值的模 p 同伦型，但此时应将定理 4.3 中映射的像作为指标范畴，而不是 $\overline{s}d\mathcal{R}$。定理4.3 的陪域是出发点。需要进行有限次检查，以确定 p-中心子群和 p-顽固子群 G 是否具有极大离散 p-环面子群，且这些子群是 $\mathcal{F}_S(G)$-根基的，从而确定实际的指标范畴。（参见 [BCG+22，定理 4.3]的证明。）

本节余下部分旨在证明定理 p 4.2 中的弱模 $\mathcal{L}$等价 $\mathbb{P}\mathrm{BAut} \simeq \left(\left(\cap_i N_G\right)_i \mathrm{B}\right)^{\wedge}_p$。具体而言，我们的策略是构造一串关于子群链的函子的自然模等价（最左边的等价由定理3.16给出）：

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{BAut}_{\widetilde{\mathcal{L}}_S(G)}(\mathbb{P}) & \xrightarrow{\simeq_p} & B\left(\bigcap_{i=1}^k N_G(P_i)\right) \\ & & \simeq_p \downarrow & & \simeq_p \downarrow \\ \delta([\mathbb{P}]) & \xleftarrow[\simeq]{} & \mathrm{BAut}_{\mathcal{L}_S(G)}(\mathbb{P}) & & B\left(\bigcap_{i=1}^k N_G(\mathbf{P}_i)\right). \end{array} \tag{4.5}$$

~辅助范畴 $\mathcal{L}_S(G)$ 是传递子系统的一种变体，用于构造 G $\mathcal{L}_S(G)$，见 [BLO07，命题 912]。

我们先考察图（4.5）中的左垂直箭头，这部分占据了本节的大部分篇幅。除了关于与 $\mathcal{F}_S(G)$ 关联的链接系统存在性的抽象结果（定理 2.12）外， [BLO07，第 9] 节还构造了一个更直接的 $\mathcal{L}_S(G)$ 模型，其起点是传递子范畴（定义 2.9）。构造中的一个困难是，链接系统的公理要求 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(P,Q)$ 上自由的 $Z(P)$- 作用的轨道。因此，传递子系统 $\mathcal{T}_S(G)$ 本身无法直接提供链接系统：要从 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_S(G)}(P,Q) = N_G(P,Q)$ 得到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q)$，就必须对整个中心化子 $C_G P$ 的作用取轨道，而它通常包含阶与 p 互素的有限阶元素以及无限阶元素。解决办法是考察 $\mathcal{T}_S(G)$ 的逐次商（参照 [BLO07，第 398] 页）。我们先给出一个技术引理。

引理 4.6. 给定一个 $\mathcal{F}_S(G)$-中心子群 $P \subseteq S$， $C_G(P)$ 中有限阶且阶与 p 互素的元素构成 $C_G(P)$ 的正规子群。

证明. 令 P 表示 P 在 G中的闭包。由于 $C_G(P) = C_G(\mathbf{P})$，我们不妨假设 P 是 P 的极大离散 p-环面子群，也就是说，按照 [BLO07, §9] 的意义， P是“紧密嵌入”的。[BCG+22, 命题 4.6] 证明的第一部分表明，P 在 G中是 p-中心的。因此， $C_G(P)/Z(\mathbf{P})$ 中没有阶为 p 的元素，且必为一个阶与 P互素的有限群，记作 F'。

由于 P 是 p-环面型的， $Z(\mathbf{P})$ 是一个环面与有限 p-群的乘积。令$T_{p'}$ 表示 $Z(\mathbf{P})$ 中由有限阶且阶与 p 互素的元素组成的子群；这些元素全都位于环面中。令 $Q := C_G(\mathbf{P})/T_{p'}$，则我们有一个中心扩张的映射

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & T_{p'} & \longrightarrow & C_G(\mathbf{P}) & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle s} & & \\ 1 & \longrightarrow & Z(\mathbf{P}) & \longrightarrow & C_G(\mathbf{P}) & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

于是 $\ker(Q \twoheadrightarrow F') = Z(\mathbf{P})/T_{p'}$ 在 $Q = C_G(\mathbf{P})/T_{p'}$ 中是中心的，而且该核是一个 p-挠群与一个有理向量空间的乘积。因此，Q 是 F' 的可裂中心扩张，并且我们有一个截面 s: $F' \to Q$。 $s(F') \triangleleft Q$ 在 $C_G(P)$ 中的原像是正规子群，且包含所有阶与 p 互素的元素。□

引理 4.6 告诉我们， $C_G(P) = C_G(\mathbf{P})$ 中阶与 p互素的元素构成一个子群，我们将其记为 ν'_P。

推论 4.7。对于一个 $\mathcal{F}_S(G)$-中心化子型子群 $P \subseteq S$，映射$Z(P) \times \nu'_P \to C_G(P)$ 的余核是一个有理向量空间。

注意， ν'_P 在 $\mathcal{F}_S(G)$-中心化子型子群 P上是函子性的。此外，由于 $Z(P)$ 被 $\nu'_P \subseteq C_G(P)$ 中心化，我们可以定义一个函子 $(\mathcal{Z} \times \nu')(P) := Z(P) \times \nu'_P \subseteq C_G(P)$，其由所有有限阶元素组成。存在一个商映射

$$\mathcal{T}_S(G)/(\mathcal{Z} \times \nu') \xrightarrow{f_\infty} \mathcal{F}_S(G)$$

它将 $N_G(P,Q)/(Z(P) \times \nu'_P)$ 对有理向量空间 $C_G(P)/(Z(P) \times \nu'_P)$ 的作用取商。刚性化论证 [BLO07, 引理 9.11] 表明 f_∞ 存在一个函子性截面 s；也就是说，可以选择有理向量空间 $C_G(P)/(Z(P) \times \nu'_P)$ 到 $C_G(P)$ 中的相容分裂。

定义 4.8。 [BLO07， §9] 给定一个截面 s ，它属于 f_∞，范畴 $\mathcal{L}_S(G)$ 和$\sim\mathcal{L}_S(G)$ 定义为下图中的逐次拉回：

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathcal{L}}_S(G) & \longrightarrow & \mathcal{L}_S(G) & \longrightarrow & \mathcal{F}_S(G) \\ \downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle f_\infty}\uparrow\downarrow{\scriptstyle s} \\ \mathcal{T}_S(G) & \xrightarrow[f_{\nu'}]{} & \mathcal{T}_S(G)/\nu' & \xrightarrow[f_{\mathcal{Z}}]{} & \mathcal{T}_S(G)/(\mathcal{Z} \times \nu'). \end{array} \tag{4.9}$$

命题 4.10。 [BLO07， 命题 9。12] $\mathcal{L}_S(G)$ 是与 $\mathcal{F}_S(G)$相关联的中心链接系统。

~在继续讨论 $\mathcal{L}$ 的一般性质之前，我们先指出一个特殊情形，后文将在 $G =$ 特殊酉群(p) 的第 6 节和第 7节中使用。

引理 4.11. 若 $P \subseteq S$ 满足 $C_G(P) = Z(P)$，则存在一个自然的对应

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{L}_S(G)}(P,Q) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_S(G)}(P,Q).$$

证明。 在我们的假设下，ν'_P 是平凡的。在图表（4.9）中，我们首先考虑融合系统 $\mathcal{F}_S$（G），其中有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q) &= N_G(P,Q)/C_G(P)\\ &= N_G(P,Q)/Z(P)\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_S(G)/(\mathcal{Z}\times\nu')}(P,Q).\end{aligned}$$

因此， f_∞ 在定义域为 P 的态射集上是恒等映射， s也如此。中间的垂直箭头在定义域为 P 的态射集上成为同构。同样， $f_{\nu'}$ 在定义域为 P 的态射集上是恒等映射，由此得证。□

~我们继续讨论 $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{L}$ 的一般关系，检查~$\mathcal{L}$ 仍具有 $\mathcal{L}$良好的范畴性质。

~引理 4.12。范畴 $\mathcal{L}_S(G)$ 中的所有态射都是范畴单态射和范畴满态射。

~证明。 结论由以下事实推出： $\mathcal{L}_S$（G）是两个都具有所需性质的范畴的拉回范畴（根据命题4.10 和引理3.6，对于 $\mathcal{L}_S$（G）；而对于 $\mathcal{T}_S$（G），则可通过直接计算得出）。□

有了这些技术要素，我们来考察图表（~4.5）中的左侧竖直映射，它比较了 $\mathcal{L}$ 中的链的自同构群与 $\mathcal{L}$中的链的自同构群。若$\mathbb{P} = (P_0 \subseteq \ldots \subseteq P_k)$ 是由 $\mathcal{F}_S$(G)-中心化子型群构成的链，则 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P})$ 的一个元素是类似于（3.4）的图表，并使用 ~ 的指定包含态射 $\mathcal{L}$ （引理 3.2）。我们以相同的方式定义 $\mathcal{L}_S(G)$ 中链的自同构， ~从 $\mathcal{L}_S(G)$ 中的指定包含开始。

定义 4.13。

(1) 若 $P \subseteq Q \subseteq S$ 是 $\mathcal{F}_S(G)$-中心化子型群，则“指定包含” $\tilde{\iota}_P^Q \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{L}}_S(G)}(P,Q)$ 定义为

$$\tilde{\iota}_P^Q := (\iota_P^Q, e) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{L}}(P,Q) \times N_G(P,Q).$$

(2) 若 $\mathbb{P} = (P_0 \subseteq \ldots \subseteq P_k)$ 是由 $\mathcal{F}_S(G)$-中心化子型子群构成的链，则 $f = (f_i) \in \mathrm{Aut}_{\tilde{\mathcal{L}}_S(G)}(\mathbb{P})$ 的一个元素是一个交换梯形

$$\begin{array}{ccccccccc} P_0 & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & P_1 & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & \cdots & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & P_{k-1} & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & P_k \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}_0}\cong & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}_1}\cong & & & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}_{k-1}}\cong & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}_k}\cong \\ P_0 & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & P_1 & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & \cdots & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & P_{k-1} & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & P_k. \end{array}$$

命题 4.14。 设 G 是一个紧李群，且 $\mathbb{P}$ 是由 $\mathcal{F}_S(G)$-中心$\mathcal{F}_S(G)$-根子群组成的链。那么，由拉回图表 $\mathrm{BAut}_{\tilde{\mathcal{L}}_S(G)}(\mathbb{P}) \to \mathrm{BAut}_{\mathcal{L}_S(G)}(\mathbb{P})$（(4.9)）诱导的映射是模 p 等价。

证明。 由引理 3.8，自然映射 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P}) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P_0)$ 是单态射。此外，$\mathrm{Aut}\,\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{P}) \to \mathrm{Aut}\tilde{\mathcal{L}}(P_0)$ 同样是单态射，证明与引理 3.8 的证明相同（但以引理 4.12替代引理 3.6）。

设 $K_{\mathbb{P}} := \ker\left[\mathrm{Aut}\,\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{P}) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P})\right]$ 以及 $K_0 := \ker\left[\mathrm{Aut}\,\tilde{\mathcal{L}}(P_0) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P_0)\right]$。我们有一个由短正合列构成的交换图

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & K_{\mathbb{P}} & \xrightarrow{\ \cong\ \text{自同构群}_{\tilde{\mathcal{L}}}(\mathbb{P})\ } & & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & K_0 & \xrightarrow{\ \cong\ \text{自同构群}_{\tilde{\mathcal{L}}}(P_0)\ } & & \xrightarrow{\ \cong\ \text{自同构群}_{\mathcal{L}}(P_0)\ } & & \longrightarrow & 1.
\end{array}
\tag{4.15}
$$

由拉回图（4.9），我们知道 $K_0 \cong \nu'_{P_0}$ 是一个阶与 p 互素的有限群。映射 $K_{\mathbb{P}} \to K_0$ 是单态射，因此 $K_{\mathbb{P}}$ 也是阶与 p 互素的有限群。利用分类空间的模 p 同调的 Serre 谱序列即可得出该引理。□

接下来考察图表（4.5）的顶行。我们需要比较 $\mathrm{Aut}_{\tilde{\mathcal{L}}_S(G)}(\mathbb{P})$ 与正规化子交集 $\bigcap N_G(P_i)$。

命题 4.16. 设 G 是一个紧李群，且 $\mathbb{P}$ 是由 $\mathcal{F}_S(G)$-中心的 $\mathcal{F}_S(G)$-根子群组成的链。那么，包含映射 $\mathrm{Aut}_{\tilde{\mathcal{L}}}(\mathbb{P}) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathcal{T}_S(G)}(\mathbb{P}) = \bigcap_i N_G(P_i)$ 诱导出分类空间之间的模 p 等价。

证明。 我们使用拉回图（4.9），并将其应用于自同构群后重现如下：

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Aut}_{\tilde{\mathcal{L}}_S(G)}(\mathbb{P}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_S(G)}(\mathbb{P}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(\mathbb{P}) \\
\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle f_\infty(\mathbb{P})}\uparrow\downarrow{\scriptstyle s(\mathbb{P})} \\
\mathrm{Aut}_{\mathcal{T}_S(G)}(\mathbb{P}) & \xrightarrow[f_{\nu'}(\mathbb{P})]{} & \mathrm{Aut}_{\mathcal{T}_S(G)/\nu'}(\mathbb{P}) & \xrightarrow[f_{\mathcal{Z}}(\mathbb{P})]{} & \mathrm{Aut}_{\mathcal{T}_S(G)/(\mathcal{Z}\times\nu')}(\mathbb{P}).
\end{array}
$$

由于 s 是一个截面，从 $\mathrm{Aut}_{\tilde{\mathcal{L}}_S(G)}(\mathbb{P})$ 到 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(\mathbb{P})$ 的矩形外框两条路径可交换。此外，若 $\mathbb{P} = (P_0 \subseteq \ldots \subseteq P_k)$，则 $\ker\left[\mathrm{Aut}_{\mathcal{T}_S(G)}(\mathbb{P}) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(\mathbb{P})\right] \cong C_G(P_k)$，因为核由 G 中对 $\mathbb{P}$ 内所有子群均作用平凡的元素组成。另一方面，根据拉回图，$\ker\left[\mathrm{Aut}\,\tilde{\mathcal{L}}_S(G)(\mathbb{P}) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(\mathbb{P})\right]$ 是 $C_G(P_k)$ 的一个子群，由拉回图识别为 $Z(P_k) \times \nu'_{P_k}$。

于是我们得到一个由水平纤维化构成的同伦交换图表

$$
\begin{array}{ccccc}
B\big(Z(P_k) \times \nu'_{P_k}\big) & \longrightarrow & \mathrm{BAut}_{\tilde{\mathcal{L}}_S(G)}(\mathbb{P}) & \longrightarrow & \mathrm{BAut}_{\mathcal{F}_S(G)}(\mathbb{P}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
BC_G(P_k) & \longrightarrow & \mathrm{BAut}_{\mathcal{T}_S(G)}(\mathbb{P}) & \longrightarrow & \mathrm{BAut}_{\mathcal{F}_S(G)}(\mathbb{P}).
\end{array}
\tag{4.17}
$$

考虑最左侧的垂直映射。对于一个 $\mathcal{F}_S(G)$-中心子群 P，与短正合列相对应的模 p 同调 Lyndon-Hochschild-Serre 谱序列

$$1 \longrightarrow Z(P) \times \nu'_P \longrightarrow C_G(P) \longrightarrow C_G(P)/(Z(P) \times \nu'_P) \longrightarrow 1$$

因为 $C_G(P)/(Z(P) \times \nu'_P)$ 是一个有理向量空间（推论 4.7）。因此，(4.17) 中的纤维映射是模 p 等价。比较 Serre

模 p 同调的谱序列与 (4.17) 中纤维化的谱序列，即得所需结果。

□

定理 *4.2* 的证明。 在图表（4.5）中，我们有一组之字形自然变换，它们都是模 p 等价，这是由命题4.14 （左侧竖列）和命题 4.16（顶行）得出的。（4.5）中的右侧竖直映射是模 p 等价，这是由我们先前的工作得出的（[BCG+22] 定理 5.1，由引理 4.4 支持）。

定理 4.3 恰好说明，若 $\pi_0 G$ 是一个 p-群，则存在偏序集同构 $\overline{s}d(\mathcal{F}^{cr}) \cong \overline{s}d(\mathcal{R})$，该同构由将每个子群 P 取闭包$\mathbf{P}$于 G中所诱导。 □

5. GROUP-THEORETIC INGREDIENTS FOR 酉群(p) AND特殊酉群(p)

本节为第 6 节做技术准备；在该节中，我们将把李群分解结果（定理4.2）应用于 U(p) 和特殊酉群(p)。应用定理 4.2 需要了解 p-中心子群和 p-顽固子群之链的正规化子，因此本节将详细计算 U(p) 和特殊酉群(p) 中这类正规化子。特殊酉群(p) 的结果通过将 U(p) 的结果与特殊酉群(p) 相交而得。我们重点研究 U(p)，并在本节末尾推导出特殊酉群(p) 的结果。本节中的结果专家们都已知晓。特别感谢 Dave Benson 在波恩为我们授课。

由于我们必须通过求子群正规化子的交来计算链的正规化子，因此给出非常具体的表示。令 Σ_p 在 $\{1, 2, \ldots, p\}$ 的右侧作用。

定义 5.1。令 ζ 为一个固定的 p 次单位根，并令 $\sigma \in \Sigma_p$。
(1) $\Sigma_p \subset$U(p) 由置换矩阵表示：$\sigma_{i,\ j} = 1$ 如果 $(i)\sigma = j$。(2) A 是具有 $A_{ii} = \zeta^{i-1}$ 的 $p \times p$ 对角矩阵。(3) B 表示 p 轮换 $(1, 2, \ldots, p)$，即 $B_{i,\ i+1} = 1$。

定义 5.1 明确了我们在第 p 节中为特殊酉群 U(p) 的子群所采用的具体表示，这些表示是特殊酉群 U(p) 的正规化子分解所需的。我们选取对角矩阵子群作为特殊酉群 U(p) 的极大环面 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{T} \cong \mathbf{T} \rtimes \Sigma_p$。一个极大 p-环面子群 $\mathbf{S}$ 由 $\mathbf{T} \rtimes \mathbb{Z}/p$ 给出，其正规化子为 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{S} \cong \mathbf{T} \rtimes N_{\Sigma_p}\mathbb{Z}/p$。

定义 5.2。
(1) $\mathrm{S} := \mathrm{T} \rtimes \langle B \rangle \cong \mathrm{T} \rtimes \mathbb{Z}/p$ 是包含 T 的所选极大 p-环面子群。(2) $\mathbf{\Gamma} \subset$ U(p) 是由 A、B 和 $S^1 = Z(U(p))$ 生成的 pU(p) 的子群。

定义 5.2中， $\mathbf{\Gamma} \subset \mathrm{U}(p)$ 是 Γ_p^U 在[Oli94，定义 1]中所记的群。它是一个中心扩张

$$1 \to S^1 \to \mathbf{\Gamma} \to \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p \to 1, \tag{5.3}$$

其中，商集的因子由以下矩阵表示： A 和 B （定义5.1）。交换子形式为 $[A, B] = \zeta^{-1} I$。根据 [Oli94，定理 6(ii)]，存在一个短正合列

$$1 \to \mathbf{\Gamma} \to N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma} \to \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p \to 1. \tag{5.4}$$

我们注意到，从概念上讲，（5.4）中的商集实际上是 $\mathrm{Sp}_2\,\mathbb{F}_p$，即由交换子给出的 $\mathbf{\Gamma}/S^1$ 上辛形式的自同构群。然而，$\mathrm{Sp}_2(\mathbb{F}_p) \cong \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$，后一种写法对我们而言更方便。

为了应用第 4.2 节中的 6定理，我们需要从群论角度理解$N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma})$ 和 $N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma} \subseteq \mathbf{S})$，同样也要理解它们在特殊酉群$(p)$中的对应对象。对于奇素数，理解 $N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma})$ 与 $N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma} \subseteq \mathbf{S})$ 之间关系的最佳方法，是证明(5.4)分裂（命题 5.9）。

这里需要一些初步的准备。我们固定一个奇素数 p。首先注意，$\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$ 含有一个中心对合，即单位矩阵的负矩阵。我们选取该对合在 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}$ 中的一个提升。

定义 5.5。对于奇素数，令 $\tau := (2,p)(3,p-1)\ldots(\frac{p+1}{2},\frac{p+3}{2}) \in \Sigma_p$。

按照我们的约定，τ 由一个置换矩阵表示，该矩阵的左上角及副反对角线上各有 1（定义 5.1）。这个对合使我们能够将 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}$ 表示为两个几乎不相交部分的乘积。

引理 5.6. 对于奇数 p，$\mathbf{\Gamma} \cap C_{\mathrm{U}(p)}(\tau) = S^1$ 和 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma} \cdot C_{N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}}(\tau)$。

证明. 直接计算表明，τ 通过 $\tau A \tau = A^{-1}$ 和 $\tau B \tau = B^{-1}$作用于 $\mathbf{\Gamma}$；特别地，$\tau \in N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}$。要证明 $\mathbf{\Gamma} \cap C_{\mathrm{U}(p)}(\tau) = S^1$，注意到 τ在 $\mathbf{\Gamma}/S^1$的非单位元集合上自由作用。

为处理 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}$的生成问题，令 $\mathbf{\Gamma}.2$（使用 Atlas 记号）为由 $\mathbf{\Gamma}$ 和 τ生成的 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}$ 的子群。由于 τ 通过一个对合在 $\mathbf{\Gamma}$ 上作用，存在一个短正合列

$$1 \to \mathbf{\Gamma} \to \mathbf{\Gamma}.2 \to \mathbb{Z}/2 \to 1.$$

$\mathbf{\Gamma}.2$ 的每个元素都具有 γ 或 $\tau\gamma$ 的形式，其中 $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$为某个元素。

为证明该引理，我们任取一个 $x \in N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}$，并构造 $y \in \mathbf{\Gamma}$和 $z \in C_{N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}}(\tau)$，使得 $x = yz$。考察 x 与 τ的关系：假设 $x\tau x^{-1} = \alpha \in \mathbf{\Gamma}.2$。由于 p是奇数，子群 $S^1 \cdot \tau$和 $S^1 \cdot \alpha$是 $\mathbf{\Gamma}.2$的 Sylow 2-环面子群，因此它们在 $\mathbf{\Gamma}.2$中共轭。

我们可以选择 $\tau\gamma \in \mathbf{\Gamma}.2$，使得 $c_{\tau\gamma}(S^1\cdot\alpha) = S^1\cdot\tau$。我们希望知道$c_{\tau\gamma}(\alpha) = \tau$。显然，$c_{\tau\gamma}(\alpha)$ 是 $S^1 \cdot \tau$ 中的一个对合，并且由于 S^1 是中心的，我们很容易算出可用的对合为 $-I$、τ 和 $(-I)\tau$。通过观察可知，τ 的迹为 1，而 $-I$ 和 $(-I)\tau$ 的迹分别为 $-p$ 和 -1。因此，τ 是 $c_{\tau\gamma}(\alpha)$ 的唯一选择。

在方程 $(\tau\gamma)(\alpha)(\gamma^{-1}\tau) = \tau$ 中用 $x\tau x^{-1}$ 代替 α 并化简，得到 $x = \gamma^{-1}(\gamma x)$ 这一所需表达式，因此 $y = \gamma^{-1} \in \mathbf{\Gamma}$ 且 $z = \gamma x \in C_{N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}}(\tau)$。□

引理 5.6 告诉我们，要理解 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}$ 的结构，我们应该关注 $C_{N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}}(\tau)$ 的结构。

引理 5.7. 对于 p 奇数，存在一个同构

$$C_{N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}}(\tau) \cong S^1 \times \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p.$$

证明。由于 $C_{N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}}(\tau) \cap \mathbf{\Gamma} = S^1$ (引理 5.6)，(5.4) 中的短正合列限制为一个中心扩张

$$1 \to S^1 \to C_{N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}}(\tau) \to \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p \to 1. \tag{5.8}$$

这类扩张由以下对象分类

$$H^2(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p; S^1) \cong H^3(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p; \mathbb{Z}).$$

然而，根据上同调的普遍系数定理，$H^3(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p;\mathbb{Z}) = 0$

- $\mathrm{Hom}\left(H_3(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p;\ \mathbb{Z})\ \mathbb{Z}\right) = 0$（定义域是一个挠群），并且
- 舒尔乘子 $H_2(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p;\ \mathbb{Z})$ 为零（[Ste16，第52]页）。

因此，中心扩张（5.8）分裂，正如所需。 □

命题 5.9. 若 p 为奇数，则短正合列存在一个分裂

$$1 \to \mathbf{\Gamma} \to N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma} \to \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p \to 1.$$

证明。 引理 5.7 使我们能够选取一个分裂

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p) \longrightarrow C_{N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}}(\tau) \subset N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma}).$$

□

命题5.9 的直观含义是，$\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$ 作用于 $\mathbb{F}_p$ 上的一个二维向量空间，$\mathbf{\Gamma}/Z(\mathbf{\Gamma}) \cong \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$，其基元素由 A 和 B（定义 5.1 ）给出（消去中心后，它们彼此交换）。虽然引理 5.7中的分裂对整个商群 $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$并非构造性的，但我们的下一步任务是为上三角矩阵子群计算一个显式分裂。这一显式计算将用于求出 $\mathrm{U}(p)$ 中链 $(\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{S})$ 的正规化子、$\mathrm{SU}(p)$ 中相应链的正规化子，以及第 7 节 Aguad´e–Zabrodsky -紧群的链接系统中的相关自同构群。为便于后续计算，我们选取的表示不仅取值于 $\mathrm{U}(p)$，也取值于 $\mathrm{SU}(p)$。

定义 5.10. 令 $\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$ 表示 $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$ 中上三角矩阵构成的群，令 $d := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，并令 $s\colon\ \mathbb{Z}/p^\times \hookrightarrow \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$ 为同态 $k \mapsto s_k := \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$。

通过简单计算可得到以下引理。

引理 5.11. 群 $\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$ 由 d 和 $\{s_k\}$ 生成，它们满足关系式 $d^p = I$ 和 $s_k\, d\, s_k^{-1} = d^{k^2}$。

下一个定义将为我们要使用的 $\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$ 表示规定记号。

定义 5.12. 令 ζ 表示固定的 p 次单位根。

(1) 令 $D \in \mathrm{SU}(p)$ 为具有 $D_{ii} = \zeta^{-(i-1)^2}$ 的 $p \times p$ 对角矩阵。(2) 对于 $p \neq 2$，令 $\sigma\colon (\mathbb{Z}/p)^\times \to \Sigma_p$ 为由 $(i)\sigma_k = k(i-1)+1$ 定义的同态。令 $C_{p-1} \subseteq \mathrm{SU}(p)$ 表示相应的带符号置换矩阵群。

引理 5.13。群 C_{p-1} 正规化 $\langle D\rangle$ 和 $\langle D\rangle \rtimes C_{p-1} \subseteq C_{\mathrm{U}(p)}(\tau)$ 。

证明。 用置换矩阵共轭一个对角矩阵（按照定义 5.1 的约定）会对角线上的元素进行置换，因此我们得到

$$\left(\sigma_k D \sigma_k^{-1}\right)_{ii} = D_{(i)\sigma_k,(i)\sigma_k} = \zeta^{-[k(i-1)]^2} = \left(\zeta^{-(i-1)^2}\right)^{k^2} = D_{ii}^{k^2}.$$

另一个简单的计算表明，τ 与 C_{p-1} 和 $\langle D\rangle$都可交换。（事实上，如果 ξ 生成 $\mathbb{Z}/p^\times$，那么对于 $k=\xi^{(p-1)/2}$，$\tau=\sigma_k$。）□

推论 5.14. 对于 p 为奇数的情形，存在同态 $\rho\colon \mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)\to \mathrm{SU}(p)$，定义为 $\rho(d)=D$ 和 $\rho(s_k)=\sigma_k$。

证明。矩阵 σ_k 和 D 的阶与其原像相同，而必要的共轭关系已在引理 5.13 的证明中得到验证。□

现在我们可以解释上三角 2×2 矩阵与 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}$之间的关系。

引理 5.15. 设 p 为奇数。$\rho:\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)\to \mathrm{SU}(p)$ 的像正规化 $\mathbf{\Gamma}$。对于 $M\in\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$，$\rho(M)$ 在 $\mathbf{\Gamma}/Z(\mathbf{\Gamma})$ 上的作用由线性变换 M给出。

证明。ρ 的像由 C_{p-1} 和 D生成。矩阵 $\sigma_k\in C_{p-1}$ 将 A 共轭为 A^k，并将 B 共轭为 $B^{(k^{-1}\bmod p)}$，因此 σ_k 正规化 $\mathbf{\Gamma}$，并通过 s_k 在 $\mathbf{\Gamma}/Z(\mathbf{\Gamma})$ 的基 (A,B) 上作用（定义 5.10）。我们还可以计算 $DAD^{-1}=A$ 和$DBD^{-1}=\zeta A^2B$，因此 D 正规化 $\mathbf{\Gamma}$，并通过 $d\in\mathcal{U}$ 在 (A,B) 上作用$(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$。□

命题 5.16. 对所有素数，都存在一个扩张

$$1\longrightarrow \mathbf{\Gamma}\longrightarrow N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma}\subset \mathbf{S})\longrightarrow \mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)\longrightarrow 1.$$

当 p 为奇数时，该扩张由 ρ 分裂：$\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)\hookrightarrow \mathrm{SU}(p)\hookrightarrow \mathrm{U}(p)$。

证明. 设 p 为奇数。由引理 5.15 可知，我们只需验证 ρ 的像正规化 S。由于 σ_k 是一个（带符号的）置换矩阵，它正规化 T。回忆一下，$\mathbf{S}=\mathbf{T}\rtimes\langle B\rangle$（定义 5.2）且 $\sigma_kB\sigma_k^{-1}=B^{(k^{-1}\bmod p)}$，因此$\sigma_k$ 正规化 S。此外，由于 D 是一个对角矩阵，$D\in$S，并且必然正规化 S。由此可得 $\mathrm{im}(\rho)\subseteq N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma}\subset \mathbf{S})$。

我们希望知道，$\mathbf{\Gamma}$ 和 ρ 的像生成了 $N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma}\subset$S) 的全部元素。我们注意到 $\rho(\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p))\subseteq C_{N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}}(\tau)$（引理 5.13），且 $\rho(\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p))\cap S^1=1$，因此由引理 5.6，$\rho(\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p))\cap\mathbf{\Gamma}=1$。所以 ρ 是一个单态射。

由于上三角矩阵构成 $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$ 的极大真子群，因此 $N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma}\subset \mathrm{S})/\mathbf{\Gamma}\cong\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$ 或 $N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma}\subset \mathrm{S})/\mathbf{\Gamma}\cong \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$。后一种情况要求 $N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma}\subset$S$)=N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma})$，也就是说，$N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}\subset N_{\mathrm{U}(p)}$S；在这种情况下，我们会得到一个同态

$$N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma})/\mathbf{\Gamma}\to N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{S})/\mathbf{S}.$$

其中定义域的阶为 $p(p^2-1)$，陪域的阶为 $p-1$，而核为 $N_{\mathbf{S}}(\mathbf{\Gamma})/\mathbf{\Gamma}$，它是 p-环面型的（[JMO92，引理 A。3]）。这不可能，因此$N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma}\subset\mathbf{S})/\mathbf{\Gamma}\cong\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$，如所需。

对于 $p=2$，我们必须调整计算。在这个特殊情形下，$N_{\mathrm{U}(2)}$S $=$S，因此 $N_{\mathrm{U}(2)}(\mathbf{\Gamma}\subset \mathrm{S})=N_{\mathbf{S}}\mathbf{\Gamma}$。我们有一个包含关系

$$N_{\mathbf{S}}(\mathbf{\Gamma})/\mathbf{\Gamma}\subset N_{\mathrm{U}(2)}(\mathbf{\Gamma})/\mathbf{\Gamma}\cong \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_2\cong\Sigma_3.$$

2-环面群 $N_{\mathbf{S}}(\mathbf{\Gamma})/\mathbf{\Gamma}$ 是非平凡的，因为 $\mathbf{\Gamma}\subsetneq$ S。因此 $N_{\mathbf{S}}(\mathbf{\Gamma})/\mathbf{\Gamma}\cong\mathbb{Z}/2\cong\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_2)$。然而，该扩张并不分裂，因为 $\mathbb{Z}/2$ 的生成元的原像阶为 4。□

对于素数 2，我们在 $\mathbf{\Gamma}$ 的正规化子中定义一些额外的特定元素，并用它们来识别这种情况下适当的群。

定义 5.17。令 F 和 H 表示 U(2) 中的以下元素：

$$F := \begin{pmatrix} e^{\pi i/4} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/4} \end{pmatrix} \text{ and } H := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

引理 5.18. 设 $p = 2$。

(1) $\mathbf{\Gamma}$ 和 F 生成 $N_{\mathrm{U}(2)}(\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{S})$，这是一个以 $\mathbb{Z}/2$ 为底、以 $\mathbf{\Gamma}$ 为纤维的扩张。
(2) $\mathbf{\Gamma}$、F和 H 生成 $N_{\mathrm{U}(2)}(\mathbf{\Gamma})$，这是一个以 Σ_3 为底、以 $\mathbf{\Gamma}$ 为纤维的扩张。

证明。 由命题5.16，我们得到一个短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbf{\Gamma} \longrightarrow N_{\mathrm{U}(2)}(\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{S}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 1.$$

通过直接计算可知 F通过自同构 $\mathbf{\Gamma}$ 作用于 $FAF^{-1} = A$，而 $FBF^{-1} = (iI)AB$。命题 5.16 给出了 $N_{\mathrm{U}(2)}(\mathbf{\Gamma} \subset \mathbf{S})/\mathbf{\Gamma}$的值 $\mathbb{Z}/2$，直接计算可得 $F \notin \mathbf{\Gamma}$ (例如，因为其迹非零)以及 $F^2 = (iI)A \in \mathbf{\Gamma}$。

同样，由（5.4）（因为 $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_2 \cong \Sigma_3$），我们得到一个短正合列

$$1 \longrightarrow \mathbf{\Gamma} \longrightarrow N_{\mathrm{U}(2)}(\mathbf{\Gamma}) \longrightarrow \Sigma_3 \longrightarrow 1.$$

我们可以验证 $HAH^{-1} = B$ 和 $HBH^{-1} = -A$，因此 H 正规化 $\mathbf{\Gamma}$。由于 F和 H 在 Σ_3中表示不同的对换，我们找到了一个生成集。□

本节最后一部分将讨论与命题 5.9 和 5.16相对应的 SU(p) 的群及其正规化子。与我们研究 U(p) 时不同，这部分讨论将转向离散情形。原因在于， $SU(p)$ 的传递子系统中存在一些特殊情况，因此在第 6 节中，我们将能够直接在离散情形下开展研究，而不必像研究 U(p) 时那样采用紧（连续）情形。

定义 5.19。设 p 为奇素数。我们定义以下 SU(p) 的离散素数环面子群 p。

(1) T是由 $p \times p$ 阶为 p-幂且行列式为 1 的对角矩阵组成的集合，是一个秩为 $p-1$ 的离散 p- 环面。(2) $S = T \rtimes \langle B \rangle \cong T \rtimes \mathbb{Z}/p$ (定义 5.1)。(3) $\Gamma = \mathrm{SU}(p) \cap \mathbf{\Gamma}$。

将 Γ 表示为群扩张时，我们用一个 SU(5.3) 中的中心扩张来替换 (p)：

$$1 \to \mathbb{Z}/p \to \Gamma \to \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p \to 1. \tag{5.20}$$

当 p 为奇数时，定义 A 和 B 5.1 中的矩阵都属于 SU(p)，并且仍表示商集中各因子的生成元。当 $p = 2$时，我们分别用 A 和 B 替换 $A' = iA$和 $B' = iB$，这两个矩阵都属于 SU(p)。交换子形式保持不变。注意， Γ 同构于（唯一的）阶为 p、指数为p^3 的超特殊 p群。

关于我们在 U(p) 的计算中使用的其他要素，我们用 τ （定义5.5）替换为 $\tau' := (-I)\tau \in \mathrm{SU}(p)$，当 $p \equiv 1$ （模 4）。在定义5.12中，我们已经安排了 $D \in \mathrm{SU}(p)$ 和 $C_{p-1} \subset \mathrm{SU}(p)$。

命题 5.21。设 T、 S、 Γ 和 $\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$ 如上所定义。

(1) 存在一个短正合列

$$1 \to \Gamma \to N_{\mathrm{SU}(p)}\Gamma \to \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p \to 1,$$

且当素数为奇数时，该序列分裂。对于 $p = 2$、 $N_{\mathrm{SU}(2)}\Gamma \cong O_{48}$，即阶为 48 的二元八面体群。

(2) 存在一个短正合列

$$1 \to \Gamma \to N_{\mathrm{SU}(p)}(\Gamma \subset S) \to \mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p) \to 1.$$

当素数为奇数时，该扩张由 ρ： $\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p) \hookrightarrow \mathrm{SU}(p)$分裂，其中 ρ 定义见推论 5.14。对于 $p = 2$， $N_{\mathrm{SU}(p)}(\Gamma \subset S) \cong Q_{16}$，即阶为 16 的广义四元数群。

证明。我们首先注意到 $N_{\mathrm{SU}(p)}(\Gamma) = \mathrm{SU}(p) \cap N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma})$，因为 $\mathbf{\Gamma} = \Gamma \cdot S^1$，同理 $N_{\mathrm{SU}(p)}(S) = \mathrm{SU}(p) \cap N_{\mathrm{U}(p)}(\mathrm{S})$。

对于 (1) 的证明，用 τ' 替换 τ （如上定义）后，命题5.9 （尤其是引理 5.6）的证明即可按原文进行。因此，分裂 $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p \to N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma})$ 可取为映入 $\mathrm{SU}(p)$；又由于其像正规化 $\mathbf{\Gamma}$，它也正规化 Γ，即行列式为 1 的元素构成的子群。当 $p = 2$ 时，众所周知， Γ 中的元素可视为 $\mathbb{C}^2$ 中单位立方体的顶点，而其对称群（按定义）为 O_{48}。

继续讨论（2），引理 5.15 和命题 5.16 的证明仍可按原文进行，只需作如下调整：将 $\mathbf{\Gamma}/Z(\mathbf{\Gamma})$ 与 $\Gamma/Z(\Gamma)$ 视为相同，并将 T 替换为 T，即 T 中阶为 p 次幂且行列式为 1 的元素。对于 $p = 2$，引理 5.18 同样可按原文进行，只需分别将 SU(2)、 Γ、 S、 iA 和 iB 替换为 U(2)、 $\mathbf{\Gamma}$、S、 A 和 B。要证明 $N_{\mathrm{SU}(p)}(\Gamma \subset S) \cong Q_{16}$，请注意， $F = \begin{pmatrix} e^{\pi i/4} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/4} \end{pmatrix} \in N_{\mathrm{SU}(p)}(\Gamma \subset S)$ 和 $(iA)(iB) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ 是 Q_{16} 的一个众所周知的生成集。□

注 5.22. 命题5.21 关于 $p = 2$ 将在第6 节中用于重现[DMW87定理 4 的同伦推出结果。1]。

6. DECOMPOSITIONS OF U(p) AND 特殊酉群(p)

在本节中，我们结合第4.2节的定理与第5 节和[BCG+22]的结果，得到模 p BU(p) 和 BSU(p) 的正规化子分解，这些结果见定理6.7 和6.14。关于奇素数下 BSU(p) 的结果将在第7 节中用于构造 Aguad´e–Zabrodsky 奇异p紧群的分解。

回想一下，我们已选定了 T、S 及其在 U(p) 中的正规化子的明确表示（定义 5.1 和 5.2）。环面 T 由对角矩阵给出，$\Sigma_p \subset \mathrm{U}(p)$ 通过置换矩阵作用，并且 $N_{\mathrm{U}(p)}(\mathrm{T}) \cong \mathrm{T} \rtimes \Sigma_p$。我们选取 S $\cong \mathrm{T} \rtimes \mathbb{Z}/p$ 由 T 和矩阵 B 生成，该矩阵表示 p-轮换 $(1\ 2\ \dots\ p)$。此外， $N_{\mathrm{U}(p)}\mathrm{S} \cong \mathrm{T} \rtimes N_{\Sigma_p}\mathbb{Z}/p$ [Oli94，引理 3]，，其中 $N_{\Sigma_p}\mathbb{Z}/p = \langle B \rangle \rtimes C_{p-1}$（定义 5.12）。

引理 6.1. 对于 $p \geq 5$， U(p) 中 p-中心且 p-顽固子群有三个共轭类，分别由 S、T 和 $\mathbf{\Gamma}$ 表示。对于 $p = 2$， 3，只有两个这样的共轭类，即 S 和 $\mathbf{\Gamma}$ 的共轭类。

证明。由 [Oli94，定理 6] 可知，所述群恰好是 p- 顽固子群 $\mathbf{S}$。我们验证它们也都是 p-中心的。群 $\mathbf{S}$和 $\mathbf{\Gamma}$ 不可约地作用，因此它们的中心化子都是 S^1 [Oli94，命题 4], ，且同时包含于 $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{\Gamma}$中。最后， $C_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$，所以这三个群确实都是$p$-中心的。□

应用定理 4.2时，我们不仅需要知道适当子群的共轭类，还需要知道子群链的共轭类；理论上，这可能是一种更精细的区分。

命题 6.2. 对于 $p \geq 5$，S 的 p-中心且 p-顽固子群的子群链有五个 U(p)-共轭类，分别由 S、T、 $\mathbf{\Gamma}$、T $\subset$ S 和 $\mathbf{\Gamma} \subset$ S 表示。对于 $p = 2$，3，则有三个：S、 $\mathbf{\Gamma}$ 和 $\mathbf{\Gamma} \subset$ S。

证明. 引理 6.1 给出了只有一个子群的链的结果。链 $\mathrm{P}_0 \subsetneq \mathrm{P}_1$ 具有形式 P $\subsetneq$ S，其中 P 在 U(p) 中共轭于 T（若 $p \geq 5$）或 $\mathbf{\Gamma}$ （对于任意素数）。如果 P 共轭于 T，那么 P = T，因此这种类型的链唯一。我们将在下面讨论 P $\cong \mathbf{\Gamma}$ 。最后，由于 $\mathbf{\Gamma}$ 的任何共轭都不包含于 T 中，反之亦然，因此对于任意素数，都不存在链 $\mathrm{P}_0 \subsetneq \mathrm{P}_1 \subsetneq \mathrm{P}_2$ 。

若 P $\subsetneq$ S，且 P 与 $\mathbf{\Gamma}$ 在 U(p) 中共轭，那么我们必须证明链 P $\subsetneq$S 与 $\mathbf{\Gamma} \subsetneq$ S 共轭；也就是说，存在某个 $u \in$ U(p) 中的元素，能将 P 共轭到 Γ ，并将 S 共轭到 S。我们的策略是证明子群 P $\cap$T 决定 T（即 $C_{\mathrm{U}(p)}$(P $\cap$T)），然后用 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}$ 中的一个元素调整 u ，使得 P 仍映射到 $\mathbf{\Gamma}$，但 S 保持不变。

首先，我们断言 P $\cap$T 是 P 的一个子群，其指数为 p。由于 P/(P $\cap$ T) $\subseteq$S/T $\cong \mathbb{Z}/p$，所以要么 [P : P $\cap$ T] = 1 ，要么 [P : P $\cap$T] = p。由于 P 不是阿贝尔群，我们知道 [P : P $\cap$T] $\neq 1$，因此 [P : P $\cap$ T] = p；基于同样的理由，我们知道 [$\mathbf{\Gamma}$: $\mathbf{\Gamma} \cap$ T] = p。（事实上， $\mathbf{\Gamma} \cap$ T 是 S^1 与由定义 5.1 中的矩阵 A 生成的 p 阶群的乘积。）

现在假设 P 与 $\mathbf{\Gamma}$ by $u \in$ U(p) 共轭。我们必须证明链 P $\subset$ S 与链 $\mathbf{\Gamma} \subset$ S 是 U(p)-共轭的。首先，注意到

$$[\mathbf{\Gamma} : \mathbf{\Gamma} \cap \mathbf{T}] = p = [\mathbf{P} : \mathbf{P} \cap \mathbf{T}] = [\mathbf{\Gamma} : c_u(\mathbf{P} \cap \mathbf{T})],$$

因此， $\mathbf{\Gamma} \cap$ T 和 c_u(P $\cap$ T) 都是 $\mathbf{\Gamma}$ 的指数为 p 的子群。然而，由于 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}/\mathbf{\Gamma} \cong \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$， $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}$ 在指数为 p 的 $\mathbf{\Gamma}$ 的子群集合上传递作用。令 $n \in N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{\Gamma}$ 将 c_u (P $\cap$T) 共轭到 $\mathbf{\Gamma} \cap$T，从而 $c_n \circ c_u$ 将 (P, P $\cap$T) 共轭到 ($\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma} \cap$ T)。

我们断言 $c_n \circ c_u$ 实际上将 S 共轭到 S。首先，我们指出 $C_{\mathrm{U}(p)}$(P$\cap$T) 和 $C_{\mathrm{U}(p)}$ ($\mathbf{\Gamma} \cap$ T) 都是 S 的极大环面。这是因为 P $\cap$ T 和$\mathbf{\Gamma}\cap$T 都同构于 $S^1 \times \mathbb{Z}/p$，其中第二个因子以 p 个互不相同的特征值作用于 $\mathbb{C}^p$ 。

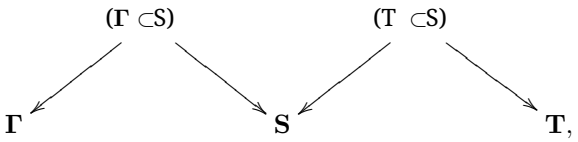
由于 T 中心化 P $\cap$T 和 $\mathbf{\Gamma}\cap$T，我们有 $C_{\mathrm{U}(p)}$(P $\cap$T) =T = $C_{\mathrm{U}(p)}$($\mathbf{\Gamma}\cap$T)。我们知道 $c_n \circ c_u$ 将 $C_{\mathrm{U}(p)}$(P $\cap$T) 映射到 $C_{\mathrm{U}(p)}$($\mathbf{\Gamma} \cap$T)，因此得出，$c_n \circ c_u$ 将 T 映射到自身，同时仍将 P 映射到 $\mathbf{\Gamma}$。

最后， $\mathbf{\Gamma}$ 和 T 生成 S（P 和 T 也同样如此）。因此 $c_n \circ c_u$ 将 P $\subset$ S 共轭到 $\mathbf{\Gamma} \subset$ S，从而完成证明。□

注 6.3. 为了稍后在本节中进行特殊酉群(p)计算，注意到我们可以在命题 u 和 n 的证明中调整 6.2 ，使其成为特殊酉群(p)的元素（如果我们愿意的话）。

由引理 6.1 和命题6.2可知，对于 $p \geq 5$，定理4.2 中关于 U(p) 的正规化子分解的指标偏序集为

(6.4)



而对于 $p = 2$，3，该图表只有上方图表最左侧的三个节点。根据注记 3.17，

引理 6.5. 对所有素数，以下图表的同伦余极限模 p 等价于 $BU(p)$:

$$\begin{array}{ccc} BN_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma} \subseteq \mathbf{S}) & \longrightarrow & BN_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{T}) \\ \downarrow & & \\ BN_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{\Gamma}). & & \end{array} \tag{6.6}$$

证明。 我们使用定理 4.2。当 $p \geq 5$ 时，所得图表（6.4）有五个节点，此时有 $N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{S}) = N_{\mathrm{U}(p)}(\mathbf{T} \subset \mathbf{S})$，因此我们可以收缩图表中的这一支。

对于 $p = 2$，3，图表（6.4）只有三个节点，其中标记为“S”的节点被赋予 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{S}$ 的分类空间。不过，当 $p = 2$，3 时，有 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{S} = N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{T}$，因此我们仍然得到（6.6）。□

用于识别引理中正规化子的详细群论计算 6.5，更具体地说，已在第 5节完成；下面的定理将以此为基础。

定理 6.7. 令 $\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$ 表示 $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$ 中的上三角矩阵群，并令 T 表示 U(p) 的固定极大环面。

(1) 令 p 为奇素数。下方图表的同伦推出与 $BU(p)$ 模 p 等价:

$$\begin{array}{ccc} B\left(\mathbf{\Gamma} \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)\right) & \longrightarrow & B\left(\mathbf{T} \rtimes \Sigma_p\right) \\ \downarrow & & \\ B\left(\mathbf{\Gamma} \rtimes \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p\right). & & \end{array}$$

(2) 令 $p = 2$，并令 $\mathbf{\Gamma}.\Sigma_2$ 和 $\mathbf{\Gamma}.\Sigma_3$ 表示引理中的扩张 *5.18*。下方图表的同伦推出模 2 等价于 $BU(2)$:

$$\begin{array}{ccc} B\left(\mathbf{\Gamma}.\Sigma_2\right) & \longrightarrow & B\left(\mathbf{T} \rtimes \Sigma_2\right) \\ \downarrow & & \\ B\left(\mathbf{\Gamma}.\Sigma_3\right). & & \end{array}$$

证明。引理6.5 给出了一个图表，其同伦余极限在模 p 意义下等价于 BU(p)，适用于所有素数，而 $N_{\mathrm{U}(p)}\mathbf{T}$ 的值是经典结果。我们已明确选取了共轭类中链的相容代表元

在命题6.2中。采用这些选择后，我们可以考虑函子 $\mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P})$，其定义在一个偏序集上，且该偏序集的同伦余极限与 $\delta(|\mathbb{P}|)$ 相同。对于奇素数，$B(\mathbf{\Gamma} \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p))$ 的值由命题 5.16 给出，而 $B\left(\mathbf{\Gamma} \rtimes \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p\right)$ 的值由命题 5.9给出。对于 $p=2$，其值由引理 5.18给出。□

注 6.8。 我们可以将定理 6.7 中间和左侧节点的项写成有限群 $\mathbb{F}_p^2 \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$ 和 $\mathbb{F}_p^2 \rtimes \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$分别由 S^1中心扩张的分类空间。

在本节余下部分，我们将调整对 $\mathrm{U}(p)$ 的计算，以得到类似于定理 6.7 关于特殊酉群 $\mathrm{SU}(p)$ 的结果。具体而言，我们将调整方法，直接用离散 p-环面子群来描述链接系统的相关部分；对于 $\mathrm{U}(p)$，这是不可能的，因为 $Z(\mathrm{U}(p))$ 不是有限群。

首先，我们需要确定构成指标范畴的子群链。我们从紧群入手，并确定 $\mathrm{SU}(p)$ 中 p-顽固且 p-中心的子群的共轭类，以便应用定理 4.3。令 $\mathbf{T}^{\mathrm{SU}(p)} := \mathrm{SU}(p) \cap \mathbf{T}$，令 $\mathbf{S}^{\mathrm{SU}(p)} := \mathrm{SU}(p) \cap \mathbf{S}$，并令 $\Gamma := \mathrm{SU}(p) \cap \mathbf{\Gamma}$。

引理 6.9. 对于 $p \geq 5$，特殊酉群 $\mathrm{SU}(p)$ 中有三个 p-中心且 p-顽固子群的共轭类，分别由 $\mathbf{S}^{\mathrm{SU}(p)}$、$\mathbf{T}^{\mathrm{SU}(p)}$ 和 Γ 表示。对于$p=2$，3，仅有两个这样的共轭类，即 $\mathbf{S}^{\mathrm{SU}(p)}$ 和 Γ 的共轭类。

证明。 该引理由引理 6.1 和 [Oli94，定理 10] 得出。 □

注 6.10. 群 $\mathbf{T}^{\mathrm{SU}(p)}$ 由行列式为 1 的对角矩阵表示。群 $\mathbf{S}_{\mathrm{SU}(p)} \cong \mathbf{T}_{\mathrm{SU}(p)} \rtimes \Sigma_p$，其中 Σ_p 通过带符号置换矩阵作用。群 Γ 是一个超特殊 p- 群

$$1 \to \mathbb{Z}/p \to \Gamma \to \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p \to 1,$$

对应于辛形式。回忆一下，$\mathbf{\Gamma}$ 由矩阵 A和 B生成，它们的行列式为 1（见定义 5.1），以及 S^1。类似地，Γ 中的每个元素都可以写成形式 $(\zeta I)A^iB^j$，其中 ζ 是一个 p 次单位根（将 A 和 B 替换为 $A' = iA$ 和 $B' = iB$，其中 $p=2$——参见定义 5.19之后的讨论）。

引理 6.11. 对于 $p \geq 5$，$\mathbf{S}^{\mathrm{SU}(p)}$ 的 p-中心化且 p-顽固子群的链有五个 $\mathrm{SU}(p)$-共轭类；它们分别由 $\mathbf{S}^{\mathrm{SU}(p)}$、$\mathbf{T}^{\mathrm{SU}(p)}$, Γ、$(\mathbf{T}_{\mathrm{SU}(p)} \subset \mathbf{S}^{\mathrm{SU}(p)})$ 和 $(\Gamma \subset \mathbf{S}^{\mathrm{SU}(p)})$ 表示。对于 $p=2$,3，则有三个：$\mathbf{S}^{\mathrm{SU}(p)}$、 Γ 和 $(\Gamma \subset \mathbf{S}^{\mathrm{SU}(p)})$。

证明。 命题6.2 的证明可原样适用（参见注 6.3）。 □

我们已经在定义 p中定义了极大离散 S -环面子群 T 和 $\mathbf{S}^{\mathrm{SU}(p)}$以及 $\mathbf{T}^{\mathrm{SU}(p)}$，分别见定义 5.19；而 Γ 是一个有限 p-群。

命题 6.12. 子群 $S \subset \mathrm{SU}(p)$ 是一个极大离散 p-环面子群。 S 的 $\mathcal{F}_S(\mathrm{SU}(p))$-中心化且 $\mathcal{F}_S(\mathrm{SU}(p))$-根子群的链的 $\mathrm{SU}(p)$-共轭类由 S、 Γ、$(\Gamma \subset S)$ 表示；当 $p \geq 5$ 时还包括 T 和 $(T \subset S)$。

证明。首先， S、 T 和 Γ 在各自的闭包中都是极大的，而这些闭包是 p-中心且 p-顽固的。由于 $\pi_0\mathrm{SU}(p)$ 是一个 p-群， [BCG+22] 中定理 4.3 的证明表明， S、 T 和 Γ 都是 $\mathcal{F}_S(\mathrm{SU}(p))$-中心且 $\mathcal{F}_S(\mathrm{SU}(p))$-根的。因此，该命题由定理 4.3 得证。□

掌握了 $\mathcal{F}_S(G)$-中心且 $\mathcal{F}_S(G)$-根子群 S 的链共轭类后，我们知道，SU(p) 的指标范畴与 (6.4) 完全类似，其中 S、T 和 Γ 分别取代 $\mathbf{S}$、$\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{\Gamma}$。接下来，我们需要了解链接系统中相应的自同构群。与 U(p) 的情形不同，对于 SU(p)，在我们需要计算的大多数自同构群中，传递子系统都与链接系统同构。因此，下一个引理将明确指出 $\mathcal{L}_S(\mathrm{SU}(p))$ 中的自同构群。

引理 6.13. 设 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_S$(特殊酉群($p$))。

(1) $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(\Gamma) \cong N_{\mathrm{SU}(p)}\Gamma$。(2) $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}($

$\Gamma \subset S) \cong N_{\mathrm{SU}(p)}(\Gamma \subset S)$。

证明。为了利用引理 4.11，将 $\mathcal{L}$ 中的自同构群与特殊酉群(p) 中的正规化子对应起来，我们需要验证对于 $P = \Gamma$、S，有 $C_{\mathrm{SU}(p)}(P) = Z(P)$。子群 Γ 和 S 在 $\mathbb{C}^p$ [上都不可约地作用（Oli94，定理 6] 适用），因此$C_{\mathrm{SU}(p)}(\Gamma) = C_{\mathrm{SU}(p)}(S) = Z$(特殊酉群($p$)) $\cong \mathbb{Z}/p$，其中包含阶为 p 的数量矩阵。确实，这个群恰好是 $Z(\Gamma) = Z(S)$。

□

在下一个定理中，我们给出特殊酉群(p) 的正规化子分解，并注意到右上角是 $N_{\mathrm{SU}(p)}T$。由于 $\mathbf{T}^{\mathrm{SU}(p)}$ 是阿贝尔群，其极大离散 p-环面子群是唯一的，事实上 $N_{\mathrm{SU}(p)}T = N_{\mathrm{SU}(p)}\mathbf{T}^{\mathrm{SU}(p)}$。

定理 6.14. 令 $\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$ 表示 $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$ 中的上三角矩阵群，令 T 表示 SU(p) 的选定极大离散 p-环面，并令 Γ 表示阶为 p^3、指数为 p 的额外特殊 p-群。

(1) 对于奇素数，下图的同伦推出在模 p 意义下等价于 BSU(p)：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}(\Gamma \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)) & \longrightarrow & \mathrm{B}\big(T \rtimes \Sigma_p\big) \\ \downarrow & & \\ \mathrm{B}\big(\Gamma \rtimes \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p\big)\,. & & \end{array}$$

(2) [DMW87，定理 4。1] 下图的同伦推出在模 2意义下等价于$\mathrm{BSU}(2)$：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}\,Q_{16} & \longrightarrow & \mathrm{B}\big(T \rtimes \Sigma_2\big) \\ \downarrow & & \\ \mathrm{B}\,O_{48}, & & \end{array}$$

其中 Q_{16} 和 O_{48} 分别表示阶为 16 的四元数群和阶为 48 的二元八面体群。

证明。对于 $p \geq 5$，定理 3.16与命题 6.12 给出下图，其推出在模 p 意义下等价于 B特殊酉群(p)（第三条边的同胚由注记 3.17给出）：

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}(\Gamma \subset S) & & \mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}(T \subset S) & \\ \swarrow & & \searrow \quad \cong \quad \swarrow & & \searrow \\ \mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}\,\Gamma & & \mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}\,S & & \mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}\,T. \end{array}$$

我们可以将这个同胚缩并，得到图表

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}(\Gamma \subset S) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}\,\Gamma & & \mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}\,T \end{array} \tag{6.15}$$

对于 $p \geq 5$，根据（3.12）可知 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(T) \cong T \rtimes \Sigma_p$。对于另外两个节点，我们有到 $BN_{\mathrm{SU}(p)}\Gamma$ 和 $BN_{\mathrm{SU}(p)}(\Gamma \subset S)$ 的实际等价，这由引理 6.13给出。$N_{\mathrm{SU}(p)}\Gamma$ 和 $N_{\mathrm{SU}(p)}(\Gamma \subset S)$ 的值由命题 5.21给出，由此证明了关于 $p \geq 5$的结果。

对于 $p = 2$，3，T 不是 $\mathcal{F}_S$（特殊酉群（p））-根式的，因此我们的指标图表仅包含Γ，（$\Gamma \subset S$），以及 S。然而，对于 $p = 2$，3，我们有 $N_{\mathrm{SU}(p)}S \cong T \rtimes N_{\Sigma_p}\mathbb{Z}/p \cong N_{\mathrm{SU}(p)}T$并且（6.15）仍然是正确的图表。□

7. AGUADÉ–ZABRODSKY p-COMPACT GROUPS

本节以下内容中，我们均假设 p 是一个奇素数。

在定理 3.16中，我们给出了任意 p-局部紧群的分类空间的正规化子分解（S，$\mathcal{F}$，$\mathcal{L}$），而第一个例子来自紧李群，见第 6 节。另一类重要的 p-局部紧群例子来自 p-紧群（定义 7.2），这类环空间由 [DW94b] 引入，推广了连通紧李群的 p-完备化分类空间。尽管它们可能没有底层群，但仍有 Sylow p-子群和极大环面的类似物，可据此构造融合系统 [BLO07，§10]。

本节的目标是计算 p-紧群中在 [Agu89]，构造的特定一类群的正规化子分解，它们也称为 Aguad´e–Zabrodsky$p$-紧群。这类空间共有四个：一个位于 $p = 3$，两个位于 $p = 5$，另一个位于 $p = 7$。它们是 p-紧群分类中的奇异例子，见 [AGMV08]。Aguad´e–Zabrodsky p-紧群与相应素数处的特殊酉群密切相关：粗略地说，它们是将 SU(p) 的 Weyl 群扩展为某些反射群而得到的。我们的策略是利用这种联系，并结合第 6 节中对 SU(p) 的计算。特别是，Aguad´e–Zabrodsky$p$-紧群的融合系统与相应特殊酉群的融合系统具有相同的对象。二者态射集的差异可用 Adams 运算的作用来描述（定义 7.8）。

我们将在下文描述这些空间，而我们的主要结果是这些奇异 p-紧群的如下正规化子分解。令 $\mathcal{U}(\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p)$ 表示 GL 中由上三角矩阵构成的子群$_2\mathbb{F}_p$。（群 Γ 定义于定义5.19中。）

定理 7.1. 设 X 表示 Aguad´e–Zabrodsky 的 p-紧群 X_{12}（其中 $p = 3$）、X_{29}（其中 $p = 5$）、X_{31}（其中 $p = 5$）或 X_{34}（其中 $p = 7$）之一。设 $T \cong (\mathbb{Z}/p^\infty)^{p-1}$ 表示相应融合系统中的极大离散 p-环面，并设 G 为与 X相关联的 Weyl 群。图表的同伦推出

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B}\big(\Gamma \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p)\big) & \longrightarrow & \mathrm{B}\,(T \rtimes G) \\ \downarrow & & \\ \mathrm{B}(\Gamma \rtimes \mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p) & & \end{array}$$

与和 X相关联的链接系统的神经同伦等价，并且模 p等价于 BX 本身。

我们首先回顾有关 p-紧群的相关定义，依照 [DW94b，§3]。

定义 7.2。[DW94b，定义 2。3] 一个 p-紧群是一个环空间（X， BX），满足 $H^*(X;\mathbb{F}_p)$是有限 $\mathbb{F}_p$-向量空间，并配备一个基点 p-完备空间 BX 以及一个等价 $X \xrightarrow{\simeq} \Omega BX$。

如果 G 是连通紧李群，那么（$G_p^\wedge$， $BG_p^\wedge$）对于任意素数 p都是一个 p-紧群，因为 $H^*(\Omega(BG_p^\wedge);\ \mathbb{F}_p) \cong H^*(G_p^\wedge;\ \mathbb{F}_p)$是有限的。并非所有 p-紧群都以这种方式产生，但它们确实具有与紧李群类似的结构，下面我们将对此进行讨论。基于 Weyl 群数据的 p-紧群分类由 [AGMV08、AG09]完成。

要定义与一个 p-紧群相关联的 p-局部紧群，需要引入离散 p-环面子群的概念。

定义 7.3。

(1) p-紧群 X 的离散 p-环面子群 (p,P)，是指一个离散 p-环面群 P，以及一个映射 $Bi\colon BP_p^\wedge \to BX$，其同伦纤维具有有限模 p 同调。(2) 若 T 是离散 p-环面，(T,i) 是 X 的子群，并且对于 X 的任意其他离散 p-环面 (A,j)，都存在一个群同态 $f\colon A \to T$ 使得 $Bi \circ Bf \simeq Bj$，则称 (T,i) 是 X 的极大离散 p-环面。(3) 若对于 X 的任意其他离散 p-环面子群 (Q,j)，都存在一个群同态 $f\colon Q \to S$ 使得 $Bi \circ Bf \simeq Bj$，则称 (S,i) 是 X 的极大离散 p-环面子群（或称 X 的 Sylow p-子群）。

定理 7.4 ([BLO07，命题 10.1(a)])。 任意 p-紧群都有一个极大离散 p-环面以及一个极大离散 p-环面子群。

我们固定一个选择 (S,ι)，它是 X 的极大离散 p-环面子群。若 X 是李群 G，则 $\mathcal{F}_S(G)$ 中的映射将是共轭映射$G \to G$的限制，并诱导出一个与恒等映射同伦的映射 $BG \to BG$。这一观察促使我们定义与 p-紧群 X 相关联的融合系统中的态射。

定义 7.5（[BLO07，定义 10.2]）。设 (X,BX) 是一个 p-紧群，且 (S,ι)（其中 $B\iota\colon BS \to BX$ ）是一个极大离散 p- 环面子群的选择。其关联的 S 上的融合系统 $\mathcal{F}_X$ 具有如下态射集：对于 $P,Q \subseteq S$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_X}(P,Q)$ 中的元素由一个群同态 $f\colon P \to Q$ 构成，使得图表

$$\begin{array}{ccc} BP & \xrightarrow{B\iota_P} & BX \\ {\scriptstyle Bf}\downarrow & \nearrow_{B\iota_Q} & \\ BQ & & \end{array}$$

在同伦意义下交换，其中 $B\iota_P$表示复合 $BP \to BS \xrightarrow{B\iota} BX$。

定理 7.6 ([BLO07，命题 10.5，定理 10.7])。 设 $(X,\ BX)$ 是一个 p-紧群，并设 $S \to X$ 是一个极大离散 p-环面子群的选取。那么

融合系统 $\mathcal{F}_X$ 在 S 上是饱和的，并且存在一个与 $\mathcal{F}_X$ 相关联的中心链接系统 $\mathcal{L}_X$，其满足 $|\mathcal{L}_X|^\wedge_p \simeq BX$.

我们关注 Aguad´e–Zabrodsky p-紧群，它们是在特定素数 p 处通过修改 $\mathrm{BSU}(p)^\wedge_p$ 构造而成，从而扩大 Weyl 群。

定义 7.7。沿用定义 7.5中的记号，Weyl 群 BX为 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(T)$，其中 T是 S中的极大环面。

扩大 $\mathrm{BSU}(p)^\wedge_p$ 的 Weyl 群，会为该 p-紧群带来一个新的 Weyl 群，其中包含 Adams 运算；这些运算是离散 p-环面上著名的自映射，其定义将在下文回顾。设 $T = (\mathbb{Z}/p^\infty)^r$ 是一个离散 $\wr p$- 环面，并回忆 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}/p^\infty) \cong \mathbb{Z}_p$，即整数的 p-完备化。对于任意 $\xi \in (\mathbb{Z}^\wedge_p)^\times$，相应的对角群同构 $T \to T$ 诱导出一个自同伦等价 $BT^\wedge_p \to BT^\wedge_p$，它在$\wr H^*(BT; \mathbb{Z}_p)$上诱导乘以 ξ的映射。它在极大离散 p-环面 $T \subset S$上的限制就是 ξ次幂自同构（参见 [JLL12，定义 2.3]）。

定义 7.8. 设 (X, BX) 是一个 p-紧群。对于 $\xi \in (\mathbb{Z}^\wedge_p)^\times$，Adams 运算 ψ^ξ: $BX \to BX$ 是一个自同伦等价，其在极大环面 $BT^\wedge_p$ 上的限制同伦于由$\xi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^\infty, \mathbb{Z}/p^\infty)$诱导的自同伦等价。

对于紧致连通李群，存在性结果如下。

定理 7.9. [JMO95，推论 3。5] 设 G 是一个紧致连通李群。对于所有 $\xi \in (\mathbb{Z}^\wedge_p)^\times$，存在一个不稳定 Adams 运算映射 $\psi^\xi : BG^\wedge_p \to BG^\wedge_p$。

同样，对于 p-局部紧群，也有存在性与唯一性结果。

定理 7.10. [AGMV08，AG09] 对于任意连通的 p-紧群，对于每个 ξ -进单位 p $\xi \in \widehat{\ }(\mathbb{Z}_p)^\times$,

在 p-局部紧群的背景下，不稳定 Adams 运算已在 [JLL12] 和 [LL17] 中得到研究。

我们接下来描述 Aguad´e–Zabrodsky p-紧群的结构；本节将计算其正规化子分解的四个 p-紧群。令 ω 表示 Teichm¨uller 提升 ω: $\mathbb{Z}/(p-1) \cong (\mathbb{Z}/p)^\times \to \mathbb{Z}_p$，它将 $\mathbb{Z}_p$ 中的 $(p-1)$-次单位根对应起来。

定义 7.11 ([Agu89, §10, p.37])。对于 $i = 12$，29，31，34，令 G_i 表示 i 阶谢泼德–托德 [ST54]，列表中的第 $p_{12} = 3$，$p_{29} = 5$，$p_{31} = 5$，以及$p_{34} = 7$。令 BX_i 表示图表的同伦余极限

$$G_i \curvearrowright (BT_i)^\wedge_p \xrightarrow{G_i/\Sigma_{p_i}} B\,\mathrm{SU}(p_i)^\wedge_p \curvearrowleft Z(G_i)\ , \tag{7.12}$$

其中，T_i 是特殊酉群 $\mathrm{SU}(p_i)$ 的一个极大离散 p-环面，标记为 G_i/Σ_{p_i} 的箭头表示，两个节点之间的态射集在前复合下作为 G_i-集同构于商集 G_i/Σ_{p_i}。群 $Z(G_i) \cong \mathbb{Z}/(p_i - 1)$ 通过不稳定 Adams 运算 $\psi^{\omega(k)}$ 作用于 $B\mathrm{SU}(p_i)^\wedge_p$，而 G_i 则通过其作为 p-进反射群的表示作用于 $(BT_i)^\wedge_p$。

为简化记号，我们固定定义 i 中的指数 7.11，并省略下标，分别将相应的 Aguad X 和 BX e– Zabrodsky 空间及其分类空间记作 ´，将素数记作 p，并将 Weyl 群 G 记作 G_i。

自同构 $BT^\wedge_p$ 若对应于由特殊酉群(p中的元素诱导的共轭，则在态射集 G/Σ_p 上作用平凡，因为这类共轭会诱导出映射 BSU(p)，且该映射同伦于恒等映射。另一方面，Adams 运算在 $BSU(p)^\wedge_p$ 上的作用由不同伦于恒等映射的映射给出 [JMO92，定理 1]。我们总结所需的 Aguad´e–Zabrodsky p-紧群的性质。

定理 7.13 ([Agu89])。 设 BX 表示一个 Aguad´*e–Zabrodsky* p-紧群（定义 *7.11*）。那么 BX 是一个 p-紧群，其 Weyl 群为 G。此外：

(1) 素数p紧群的映射 BSU(p)$^\wedge_p \to BX$ 是单态射；也就是说，其同伦纤维具有有限的模 p 同调。(2) 若 S 是 SU(p) 的 Sylow p子群，则复合映射 $BS \to$ BSU(p) $\to$BSU(p)$^\wedge_p \to BX$ 是 X的 Sylow p子群。(3) 中心 $Z(G) = \mathbb{Z}/(p-1) \subset G$ 通过 Adams 运算作用于 $BT^\wedge_p$。

一旦我们固定了特殊酉群 pSU(p的 Sylow 子群，我们就将利用定理X 7.13 (2) 固定相应的子群。随后，我们将 $\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}$ 和$\mathcal{F}_X$ 分别记作相应的融合系统 $\mathcal{F}_S$ (SU(p)) 和 $\mathcal{F}_S(X)$。类似地，我们将$\mathcal{L}_{\mathrm{SU}(p)}$ 和 $\mathcal{L}_X$ 分别记作相应的链接系统。

令 $(S, \mathcal{F}_X)$ 表示与 BX 相关联的融合系统，该系统由定理 7.6 给出，并且其 Sylow p-子群与第 $S6$ $\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}$ 节中研究的特殊酉群 SU(p) 的融合系统 (,) 具有相同的子群。我们的下一个目标是联系这两个融合系统；关键依据是定理7.16，该定理指出，$\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}$与 $\mathcal{F}_X$ 之间的差异完全由 $Z(S)$ 的自同构描述。将其应用于所关注的子群（推论7.18）时，这些自同构就是 Adams 运算。

为了比较 $\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}$和 $\mathcal{F}_X$，我们需要一个融合系统的限制。下面的定义是根据 [BLO14，定义 2。1] 特化而来。

定义 7.14. 给定离散素数 p-环面群 S 上的饱和融合系统 $\mathcal{F}$，令 $C_{\mathcal{F}}(Z(S))$ 表示以下融合系统：

- $C_{\mathcal{F}}(Z(S))$ 的对象是满足 $Z(S) \subseteq P \subseteq S$ 的子群 P
- $C_{\mathcal{F}}(Z(S))$ 的态射是 $\mathcal{F}$ 中在 $Z(S)$ 上限制为恒等映射的态射。

命题 7.15. [BLO14，定理 2。3] $C_{\mathcal{F}}(Z(S))$ 是一个定义在 S 上的饱和融合系统。

定义 7.14恰好给出了我们所需的概念，以便在 $\mathcal{F}_X$ 中识别 $\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}$。

定理 7.16。[CC17，§5。2] 令 X 为 Aguad´*e–Zabrodsky* p-紧群，其融合系统为(S, $\mathcal{F}_X$)。那么存在一个融合系统的同构

$$C_{\mathcal{F}_X}(Z(S)) \cong \mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}.$$

此外，$\mathcal{F}_X$的中心化子型子群与 S 的中心化子型子群相同；同样，$\mathcal{F}_X$的根子群与 S 的根子群相同。

我们的目标是利用定理 BX 3.16，得到与 SU(p)（见引理 6.11）采用相同指标范畴的同伦余极限分解。为便于计算，我们使用第 p节中的显式离散 6-环面表示。

引理 7.17。令 $\mathcal{H}_X$ 表示 S 中的 $\mathcal{F}_X$-中心、 $\mathcal{F}_X$-根子群的集合，对于 $\mathcal{H}_{\mathrm{SU}(p)}$ 也类似。则 $\overline{s}d\mathcal{H}_X = \overline{s}d\mathcal{H}_{\mathrm{SU}(p)}$。
证明。 根据定理 7.16，子群 $P \subseteq S$ 是 $\mathcal{F}_X$-中心且 $\mathcal{F}_X$-根，当且仅当它是 $\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}$-中心且 $\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}$-根。若两个链在 $\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}$中共轭，则它们在较大的融合系统 $\mathcal{F}_X$中也共轭。由于这些链在群论意义下彼此不同，因此在 $\mathcal{F}_X$ 中不可能出现新的链共轭。 □

推论 7.18。指标范畴 $\overline{s}d\mathcal{H}_X$ 的对象为 S、 Γ、($\Gamma \subset S$)，并且对于$p \geq 5$，还包括 T 和 $T \subset S$。
证明。 该推论由引理 7.17 和命题 6.12得出。 □

为了使用我们的抽象分解结果，定理 3.16，我们将通过将这些群与 Aut$_{\mathcal{L}_X}(\mathbb{P})$ 联系起来，计算链 $\mathbb{P} \in \mathcal{H}_X$的 Aut$^{\mathcal{L}_{\mathrm{SU}(p)}}(\mathbb{P})$。通过计数论证，我们计算 Aut($\Gamma$)，即 Γ 的完整抽象自同构群。

引理 7.19. 抽象自同构群 Aut(Γ) 同构于 Aff$_2\,\mathbb{F}_p$ =($\mathbb{F}_p$)^2 ⋊GL$_2\mathbb{F}_p$。特别地，采用式 (5.20) 中 Γ 的表示，我们可以将映射 Aut(Γ) →GL$_2\mathbb{F}_p$ 取为由 Aut(Γ) 在 $\Gamma/Z(\Gamma)$ ≅ ($\mathbb{F}_p$)^2 ≅ $\langle A\rangle \times \langle B\rangle$ 上的作用所给出的表示；也就是说， A 和 B 表示 ($\mathbb{F}_p$)^2 的基，GL$_2\mathbb{F}_p$ 在其上作用。

证明。作为准备，假设 f 是 Γ 的一个自同构，它固定中心 $Z(\Gamma)$，并在 $\Gamma/Z(\Gamma)$ ≅ $\langle A\rangle \times \langle B\rangle$ 上诱导恒等映射。那么对某些 i、 j，有 $f(A) = \zeta^i A$，且 $f(B) = \zeta^j B$。由于 $ABA^{-1} = \zeta^{-1}B$ 和 $BAB^{-1} = \zeta A$，对所有 i 和 j，这类自同构都可由 Γ 的内自同构实现。反过来，由于 $[A, B] \in Z(\Gamma)$， Γ 的内自同构在 $\Gamma/Z(\Gamma)$ 上诱导恒等自同构。

我们断言存在一个短正合列

$$1 \longrightarrow \Gamma/(Z(\Gamma)) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Gamma/Z(\Gamma)) \longrightarrow 1. \tag{7.20}$$

这个包含映射通过内自同构给出，而 Aut(Γ) → Aut($\Gamma/Z(\Gamma)$) 是自然诱导的映射，因为任何群自同构都必须稳定中心。如上所示， Γ 通过共轭对自身的作用在 Γ/Z (Γ) 上诱导出恒等自同构。

剩下要证明的是，(7.20) 中的第二个映射是一个分裂满同态。按照上文将 Γ/Z (Γ) ≅ $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ 与 $\langle A\rangle \times \langle B\rangle$ 等同后，我们注意到，对于 Aut($\Gamma/Z(\Gamma)$) ≅ GL$_2\mathbb{F}_p$ 中的任意元素，都存在唯一的 $Z(\Gamma)$ 的自同构，使得 Γ 上的交换子保持不变，这足以给出 Γ的一个自同构。此外，唯一性保证这些原像构成 Aut(Γ) 的一个子群，即该短正合列由一个群同态分裂。引理得证。 □

与 SU(p) 的情形一样，我们只需计算$\mathcal{L}_X$ 中推论 7.18所列部分链的自同构群，即 Γ 和 ($\Gamma \subset S$)，我们从融合系统入手。任何 Γ (或 S) 的自同构在其上诱导出一个

群中心的自同构， $Z(\Gamma) = Z(S) = Z$(特殊酉群(p)) $\cong \mathbb{Z}/p$。值得指出的是，融合系统的自同构对这些群的中心所起的作用。

定义 7.21. 令 $R_\Gamma\colon \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$，其定义为限制到 $Z(\Gamma)$，并类似地定义 $R_{\Gamma\subset S}\colon \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma \subset S) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$。

引理 7.22. 同态 $R_{\Gamma\subset S}$ 和 R_Γ 是满射。

证明. 我们只需证明 $R_{\Gamma\subset S}$的结论。设 $\xi \in \mathbb{Z}/p^\times \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$ 是一个生成元；我们要找一个 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma \subset S)$ 中的元素，其阶为 $p-1$，且限制到 Z(特殊酉群(p)) $\cong \mathbb{Z}/p$ 后等于 $\xi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$。

令 ψ^ξ 为 $\mathrm{BSU}(p)^\wedge_p$ 上的不稳定 Adams 运算（见定理 7.8），其限制到 T 后为 $x \mapsto x^\xi$。根据 [JLL12，命题 3.5]，ψ^ξ 限制为 ψ^ξ 的一个自同构：$S \to S$，它根据定义 7.5 属于 $\mathcal{F}_X$。可能 ψ^ξ 不会稳定 Γ，因此假设 ψ^ξ 将 $(\Gamma \subset S)$ 映到某个 $(\Gamma' \subset S)$。根据命题 6.12，存在 $x \in$ 特殊酉群(p)，使得 $c_x(\Gamma' \subset S) = (\Gamma \subset S)$。于是可以考虑自同构 $\phi := c_x \circ \psi^\xi \in \mathcal{F}_X$，它仍然稳定 S，并且限制为 Γ 的一个自同构。我们有 $R(\phi) = R(\psi^\xi) = \xi$（因为与特殊酉群($p$) 中元素的共轭作用固定 $\mathbb{Z}/p = Z$(特殊酉群(p))），并且 $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma \subset S)$，这表明 $R_{\Gamma\subset S}$ 是满射。□

引理 7.22 表明，所有 Adams 运算都能扩张为与我们的分解相关的链的自同构，并使我们能够提取完整的融合系统自同构群。

命题 7.23. 令 $\mathcal{U}(\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p) \subset \mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p$ 表示上三角矩阵子群。

(1) $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma) \cong \mathrm{Aff}_2\,\mathbb{F}_p = (\mathbb{F}_p)^2 \rtimes \mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p$.
(2) $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma \subset S) \cong (\mathbb{F}_p)^2 \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p)$.

证明。对于第一个结论，我们将使用计数论证。根据命题 7.16，我们有 $\ker(R_\Gamma) = \mathrm{Aut}^{\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}}(\Gamma)$。由于根据引理 7.22，$R_\Gamma$ 是满射，因此我们有一个短正合列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}}(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma) \xrightarrow{R_\Gamma} \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p) \longrightarrow 1. \tag{7.24}$$

我们知道，$\mathrm{Aut}^{\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}}(\Gamma)$ 由 $N_{\mathrm{SU}(p)}(\Gamma)/C_{\mathrm{SU}(p)}(\Gamma)$ 给出，且有 $p^3(p^2-1)$ 个元素（命题 5.21 和 $C_{\mathrm{SU}(p)}(\Gamma) = Z$(特殊酉群($p$)) $\cong \mathbb{Z}/p$）。因此，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma)$ 有 $(p-1)\cdot p^3(p^2-1)$ 个元素。由此，引理 7.19 告诉我们，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma)$ 必定是 Γ 的完整抽象自同构群，即 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma) = (\mathbb{F}_p)^2 \rtimes \mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p$，从而完成了 (1) 的证明。

对于$\Gamma \subset S$，我们以类似的方式开始。由命题7.16，$\ker(R_{\Gamma\subset S}) = \mathrm{Aut}^{\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}}(\Gamma \subset S)$。由引理 7.22 我们有一个短正合列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}}(\Gamma \subset S) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma \subset S) \xrightarrow{R_{\Gamma\subset S}} \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p) \longrightarrow 1. \tag{7.25}$$

由命题5.21 我们有

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_{\mathrm{SU}(p)}}(\Gamma \subset S) \cong (\mathbb{F}_p)^2 \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p),$$

其中，矩阵 A 和 B 表示 $(\mathbb{F}_p)^2$ 的基，而 $\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$ 以标准方式作用于该基。

(7.25) 中的商群由在引理 7.22 中构造的 $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma \subset S)$ 生成。我们知道，ϕ 在 T 上作用为 $(-)^\xi$（由构造可知），并在 S/T 上作用为恒等映射（根据 [JLL12，引理 2.5]）。因此，我们有 $\phi(A) = A^\xi$ 和 $\phi(B) = \zeta^i A^j B$，其中某个 j。于是，ϕ 在 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma)/\Gamma$ 中对应于一个矩阵 $\begin{pmatrix} \xi & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，它是一个行列式为 ξ的上三角矩阵。因此，表示 $\mathcal{U}(\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p)$ 的矩阵与 ϕ 生成 $\mathcal{U}(\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p)$。□

命题7.23 给出了融合系统 $\mathcal{F}_X$中链的相关自同构群。接下来的任务是将它们提升到链接系统 $\mathcal{L}_X$中。

命题 7.26。

(1) $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma) \cong \Gamma \rtimes \mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p$(2) $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}($
$\Gamma \subset S) \cong \Gamma \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p)$.

证明。 根据定义 2.10(C)， Γ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma)$ 和 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_{\mathrm{SU}(p)}}(\Gamma)$ 中的正规子群，因此我们比较下方图表 (7.27) 中的两个商集。由引理 6.13 和命题 5.21，有 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_{\mathrm{SU}(p)}}(\Gamma)/\Gamma \cong \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p$。由引理 7.19 和命题 7.23，

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma)/\Gamma &\cong [\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma)/Z(\Gamma)]/[\Gamma/Z(\Gamma)] \\ &\cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma)/(\Gamma/Z(\Gamma)) \\ &\cong \mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p. \end{aligned}$$

因此，我们可以用一个交换的短正合列梯形图来比较 $\mathcal{L}_{\mathrm{SU}(p)}$ 和 $\mathcal{L}_X$ 中的自同构群，其中第一行由命题 5.21分裂：

(7.27)
$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \Gamma & \xrightarrow{\text{自同构}_{\mathcal{L}_{\text{特殊西群}(p)}}(\Gamma)} & & & \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_p & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \text{自同构}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma) & \xrightarrow[\text{群}_2\mathbb{F}]{\text{一般线性}} & p & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

我们要证明，(7.27) 的第二行也分裂。该扩张由 H^2(一般线性群$_2\mathbb{F}_p$； $Z(\Gamma)) \cong H^2$(一般线性群$_2\mathbb{F}_p$； $\mathbb{Z}/p$) 中的一个元素分类。此外，由于上方的扩张是分裂的，这个分类元素属于限制 H^2(一般线性群$_2\mathbb{F}_p$； $\mathbb{Z}/p) \to H^2$(特殊线性群$_2\mathbb{F}_p$； $\mathbb{Z}/p$) 的核。然而，限制映射是单射，因为特殊线性群$_2\mathbb{F}_p \subset$ 一般线性群$_2\mathbb{F}_p$ 是一个指数与 p互素的子群。因此，下方短正合列也分裂，由此得到 (1)。

对于 (2)，令 $Z := Z(\Gamma) = Z(S)$。注意，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma)$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma)$ 除以 Z $(= Z(\Gamma))$ 得到的商集；同样，根据引理 3.7，$\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma \subset S)$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma \subset S)$ 除以 Z $(= Z(S))$ 得到的商集。这给出以下交换方形：

(7.28)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma \subset S) & \hookrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma \subset S) & \hookrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(\Gamma). \end{array}$$

这里，上方的水平箭头由引理 3.8可知是单态射，下方的水平箭头也是单态射。虽然这还不足以说明 (7.28) 是一个拉回方形，但足以保证从 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma \subset S)$ 到其余三个顶点的拉回存在一个单态射。我们汇总这些群的取值

，取自 (1) 和命题7.23 ，并计算拉回，得到图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma \subset S) & \hookrightarrow & \Gamma \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p) & \hookrightarrow & \Gamma \rtimes \mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & (\mathbb{F}_p)^2 \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p) & \longrightarrow & (\mathbb{F}_p)^2 \rtimes \mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p. \end{array} \tag{7.29}$$

由计数论证即可得到该结果，因为 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma \subset S)$ 和 $(\mathbb{F}_p)^2 \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p)$ 的元素个数各是 p 倍于 $(\mathbb{F}_p)^2 \rtimes \mathcal{U}(\mathrm{GL}_2\mathbb{F}_p)$，分别由观察和 (7.28) 得出。□

命题 7.23 和 7.26 中的论证无法推广来计算 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(T)$，因为这些论证用到了 $Z(\Gamma) = Z(S)$ 这一事实。不过，利用文献中的结果可以轻易处理剩下的情形。

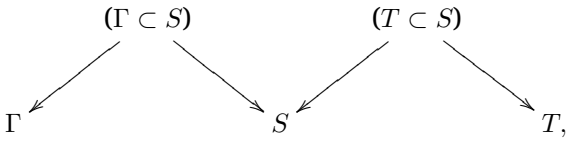
引理 7.30. 存在一个同构 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(T) \cong T \rtimes G$。

证明。 由等式 (3.12)，我们有一个短正合列

$$T \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_X}(T) \to \mathrm{Out}_{\mathcal{F}_X}(T)$$

其中 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}_X}(T) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_X}(T) = G$，根据定理 7.13。这个短正合列描述了 p-紧群中的极大环面的正规化子；由 [And99，定理 1.2] ，该短正合列分裂。□

定理 *7.1* 的证明。 结合定理 3.16 和定理 7.6，我们得到一个等价 $BX \simeq$(余极限 $\overline{s}d\mathcal{H}_X \delta)^\wedge_p$，并且有一个自然等价 $\mathrm{BAut}_{\mathcal{L}}(\mathbb{P}) \to \delta([\mathbb{P}])$。我们固定链的共轭类的一个选取（见命题6.12）。由引理 7.17和命题 6.12，指标范畴 $\overline{s}d\mathcal{H}_X$ 是



但（3.19）表明， δ 在 $\overline{s}d\mathcal{H}_X$ 上的余极限可简化为一个推出

$$\mathrm{BAut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma) \longleftarrow \mathrm{BAut}_{\mathcal{L}_X}(\Gamma \subset S) \longrightarrow \mathrm{BAut}_{\mathcal{L}_X}(T).$$

定理现在可由命题7.26和引理 7.30中对这些项的识别得出。□

REFERENCES

[AG09] Kasper K. S. Andersen 和 Jesper Grodal, *The classification of 2-compact groups*, J. Amer. Math. Soc. **22** 2009 2, 387 436 2476779 ( ), 第 – 期。MR AGMV K. K. S. Andersen、J. Grodal、J. [08] M. Møller 和 A. Viruel, *The classification of p-compact groups for p odd* 2 **167** 2008 1, 95 210 , Ann. of Math. ( ) 2373153 ( ), 第 – 期。MR [89] ´ *Constructing modular classifying spaces* **66** 1989 1 Agu J. Aguade, , 《Israel J. Math.》 ( ) , 第 -3 期, 23 40 1017153 –。MR

[And99] Kasper K. S. Andersen, *The normalizer splitting conjecture for p-compact groups*, 第 161 卷，1999 年，代数拓扑（卡齐米日·多尔尼，1997），第 1–16 页。MR 1713198[BCG+22] Eva Belmont、Nat`alia Castellana、Jelena Grbi´c、Kathryn Lesh 和 Michelle Strumila, *Normalizers of chains of discrete p-toral subgroups in compact Lie groups*, 《Topology Appl.》316（2022），论文编号 108101，17 页。MR 4438946[BCL22] Eva Belmont、Nat`alia Castellana 和 Kathryn Lesh, *Subgroup collections controlling the homotopy type of a p-local compact group*《》，https://arxiv.org/abs/2210.00952，2022 年。[BLO03] Carles Broto、Ran Levi 和 Bob Oliver, *The homotopy theory of fusion systems*, J. Amer. Math. Soc. 16（2003），第 4 期，779–856。MR 1992826[BLO07]，*Discrete models for the p-local homotopy theory of compact Lie groups and p-compact groups* **11** 2007 315 427，Geom. Topol.（），–。MR 2302494

[14] ———, *An algebraic model for finite loop spaces* BLO，，Algebr. Geom. Topol. 14（2014），第 5 期，2915–2981。MR 3276851[CC17] Jos´e Cantarero 和 Nat`alia Castellana, *Unitary embeddings of finite loop spaces*,《Forum Math.》**29** 2017 2, 287 311 3619114 ( )，第 – 期。MR Che Andrew [13] *Fusion systems and localities* Chermak，，《Acta Math.》211（2013），第 1 期，47–139。MR 3118305[CLN07] Nat`alia Castellana、Ran Levi 和 Dietrich Notbohm，，《Adv. Math.》（），第 – 期。MR *Homology decompositions for p-compact groups* **216** 2007 2, 491 534 2351369

[87] DMW William G. Dwyer、Haynes R. Miller 和 Clarence W. Wilkerson, *The homotopic uniqueness of BS^3* 1986，，代数拓扑，巴塞罗那，Lecture Notes in Math.，第 1298，1987，90 105 928825 卷，Springer，柏林，第 – 页。MR [94] DW a W. G. Dwyer 和 C. W. Wilkerson, *Homotopy fixed-point methods for Lie groups and finite loop spaces* 2 **139** 1994 2, 395 442，Ann. of Math. ( ) ( )，第 – 期。1274096 MR[94] ———, *Homotopy fixed-point methods for Lie groups and finite loop spaces* DW b，，Ann. of Math. (2 **139** 1994 2, 395 442 1274096) ( )，第 – 期。MR Dwy W. G. Dwyer, [97] *Homology decompositions for classifying spaces of finite groups*,《Topology》36（1997），第 4 期，783–804。MR 1432421[JLL12] Fabien Junod、Ran Levi 和 Assaf Libman, *Unstable Adams operations on p-local compact groups* **12** 2012 1, 49 74 2889545，Algebr. Geom. Topol.（），第 – 期。MR[JM92] Stefan Jackowski 和 James McClure, *Homology decomposition of classifying spaces via elementary abelian subgroups* **31** 1992 1, 113 132 1153240，《Topology》（），第 – 期。MR[JMO92] Stefan Jackowski、James McClure 和 Bob Oliver, *Homotopy classification of self-maps of BG via G-actions I II* 2 **135** 1992 1, 183 270 ，，Ann. of Math. ( ) ( )，第 – 期。MR 1147962 (93e:55019a)[JMO95]，———, *Self-homotopy equivalences of classifying spaces of compact connected Lie groups* **147** 1995 2, 99 126，Fund. Math.（），第 – 期。MR[06] *The normaliser decomposition for p-local finite groups*Lib 1341725

Assaf Libman，，《Algebr. Geom. Topol.》6（2006），1267–1288。MR 2253446[Lib11]，——— *Orbit spaces Quillen's theorem A and Minami's formula for compact Lie groups* **213** 2011 2, 115 167，Fund. Math.（），第 – 期。MR (2800583 2012 55010 f:)[LL15] Ran Levi 和 Assaf Libman, *Existence and uniqueness of classifying spaces for fusion systems over discrete p-toral groups* 2 **91** 2015 1, 47 70，J. Lond. Math. Soc. ( ) ( )，第 – 期。MR 3338608[LL17]，*Groups of unstable Adams operations on p-local compact groups*, Algebr. Geom. Topol. 17（2017），第 1 期，355–418。MR 3604380[Mol18] R´emi Molinier，，《J. Algebra》（），–。3758494 MR[94] *Control of fixed points over discrete p-toral groups and existence and uniqueness of linking systems* **499** 2018 43 73 *p-stubborn subgroups of classical compact Lie groups* Oli Bob Oliver，，《J. Pure Appl. Algebra》92（1994），第 1 期，55–78。MR 1259669 (94k:57055)[Oli13]，*Existence and uniqueness of linking systems: Chermak's proof via obstruction theory* **211** 2013 1, 141 175 3118306，Acta Math.（），第 – 期。MR[S lo91] Jolanta S lomi´nska，*Homotopy colimits on E-I-categories*, 代数拓扑 Pozna´n 1989，Lecture Notes in Math.，第 1474 卷，Springer，柏林，1991 年，第 273–294 页。MR 1133907[S lo01]，*Homotopy decompositions of orbit spaces and the Webb conjecture*, Fund. Math. 169（2001），第 2 期，105–137。MR 1852376

[ST54] G. C. Shephard 和 J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, 《加拿大数学杂志》6（1954 274 304 59914），–。MR Ste Robert Steinberg, [16] *Lectures on Chevalley groups*, 《大学讲座丛书》第66卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2016年，John Faulkner 和 Robert Wilson 整理的笔记，1968年原版的修订校正版 [MR0466335], 附有 Robert R. Snapp 撰写的序言。MR 3616493

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF CALIFORNIA SAN DIEGO, LA JOLLA, CA, USA*Email address*: ebelmont@ucsd.eduDEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA, AND CENTRE DERECERCA MATEMÀTICA, BARCELONA, SPAIN*Email address*: natalia@mat.uab.catSCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF SOUTHAMPTON, SOUTHAMPTON, UK*Email address*: j.grbic@soton.ac.uk DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNION COLLEGE, SCHENECTADY NY, USA*Email address*: leshk@union.eduSCHOOL OF MATHEMATICS, MONASH UNIVERSITY, CLAYTON, VICTORIA, AUSTRALIA*Email address*: michelle.strumila@gmail.com