arXiv:2301.09265v1 [math.GR] 23 Jan 2023

关于 p-指标极值群

ANDREY V. VASIL'EV 和 ILYA B. GORSHKOV

Abstract. 有限群 G 的结构与 G 元素指标性质之间的联系，多年来一直是热门研究课题。群中元素 x 的 p-指标 $|x^G|_p$ G 是其指标 $|x^G| = |G$ p的 C_G部分：x()。本文简要介绍了这一领域的一些新结果和未解决问题，这些内容均围绕群元素的 p-指标这一概念展开。
Key words: 有限群、共轭类、指标、群元素的 p-指标。MSC: 20E45，20D60。

有限群中一个元素的共轭类大小等于其中心化子的指标，这是有限群的主要数值特征之一。有限群的结构与其共轭类大小集合的性质之间的联系，多年来一直是热门研究课题。因此，20世纪初，W. Burnside 在 [1] 证明，合数阶群若有一个共轭类的大小是某个素数的幂，则该群不可能是单群。这一论断是他关于有限 $\{p, q\}$-群可解性的著名定理的关键。本文简要介绍了这一领域的一些新结果和未解决问题，这些内容均围绕群元素的 p-指标这一概念展开。

首先，我们介绍必要的定义和记号。设 G 是一个有限群，且 $x \in G$。通常， $Z(G)$表示 G 的中心， $C_G(x)$表示 G中 x 的中心化子，而 x^G表示 G 中包含元素 x的共轭类。换言之， x^G 是 G 对自身的共轭作用下x 的轨道。给定轨道（类）$|x^G| = |G$的大小： $C_G(x)|$ ，称为元素 x 在 G中的指标。 G 中所有元素的指标组成的集合记为 $N(G)$（记号 cl(G)也很常见，参见例如 [2]）。

若 p是一个素数（π 是某个素数集），对于正整数 n，我们将 n_p 称为 n的p部分，即整除 n 的 p 的最大幂（相应地，将 n_π 称为 n的 π部分）。群 G 中元素 x 的 p-指标 $|x^G|_p$ 是 $|x^G|$的 p部分。对于群 G，令 $N(G)_p = \{|x^G|_p : \ x \in G\}$ ，并将 G 的 p-指标 $|G|_p$ 称为集合$N(G)_p$中的最大元素，即 $|G|_p = \max\{|x^G|_p : \ x \in G\}$。

按照 [2], ，我们用 $e_p(G)$ 表示 $N(G)_p$ 中非平凡元素的个数。我们关注满足 $e_p(G) = 1$ 的群 G ；称它们为关于 p-指标的极值群，或简称 p-指标极值群，并记为 $G \in R(p)$（在第二作者近期的论文 [3] 中，这些群被称为 $R(p)$-群）。

尽管类 $R(p)$ 最近才被特别关注，但关于这一类群（附加各种限制条件）的结果早已广为人知。早在 1953 年，N. Ito 就证明，在一个满足 G 且 $N(G) = \{1, n\}$ 的群中，数 n 是某个素数 p 的幂，并且该群本身是幂零的 [4]。更确切地说， G 是一个 p-群 A 与一个阶与 p 互素的阿贝尔群B 的直积。后来， [5] 证明了该群A 的幂零类不超过 3。在 [6], ，A. Kamina 证明，对于任意素数 p 和 q ，满足 $N(G) = \{1, p^\alpha, q^\beta, p^\alpha q^\beta\}$ 的群 G 是一个 p-群 A 与一个 q- 群 B 的直积，并且

A. V. Vasil'ev 获得中国国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12171126），I. B. Gorshkov 获得俄罗斯科学基金会资助，项目编号为 18-71-10007。

特别地，该群是幂零的；而 Beltran 和 Felipe $[7,8]$ 将这一结果推广到了两个任意互素正整数 m 和 n 的情形。显然，以上所有群对于任意素数 p 都是极值的（稍后我们将回到具有这一性质的群）。

回顾一下，若一个群含有一个正规列，其各因子要么是 p-群，要么是 p'-群，则称该群为 p-可解群。在 $[2]$, Casolo 和 Tombari 研究了 p-指标极值p-可解群。研究表明，所有这类群的 p-长必定等于 1。此外，如果这类群的一个 Sylow p-子群 P 是非阿贝尔群，那么 G 有一个正规 p-补 $[2,$ 定理 2.3$]$ 和 $Z(P) \leq Z(G)$ $[2,$ 引理 2.4$]$。结果表明，后两条结论在更一般的情形下也成立。首先注意到，类 $R(p)$ 自然地分成两个互不重叠的子类:

1) $G \in R(p)^*$，如果 G 中存在一个具有非平凡 p-指标的 p-元素；
2) $G \in R(p)^{**}$，否则。最近，第二位作者得到了以下结果。

定理1。 $[3,$ 定理1。3$]$ 如果 $G \in R(p)^*$，那么 G 有正规 p-补群。
推论1。 $[3,$推论1。4$]$ 如果 $G \in R(p)^*$ 且 P 是 G的一个 Sylow p-子群，那么$Z(P) \leq Z(G)$。

当然，如果 G 中存在一个 p-元素，且其 p-指标非平凡，那么 Sylow p-子群 P是非阿贝尔的。反过来一般并不成立 $[9,$ 定理 B$]$。然而，很容易由 $[10,$ 引理 7$]$ 推得，对于 p-指标极值群， G 的 Sylow p-子群的非交换性蕴含 $G \in R(p)^*$。

在 $[11],$ 中，第一作者指出，在一个 G 具有平凡中心且 $|G||_p = p$的群中，Sylow$p$-子群必为阿贝尔群（甚至是初等阿贝尔群）。在$G \in R(p)^*$ 的情形下使用推论1，并在 $G \in R(p)^{**}$的情形下使用 $[12,$ 定理 B$]$ ，很容易为任意一个 p-指标极值群 G （其中心平凡）证明类似的结论。

推论2. $[3,$ 推论1.5$]$ 若 $G \in R(p)$ 和 $Z(G) = 1$，则 G 的一个 Sylow p-子群是阿贝尔群。

尽管一个中心平凡的 $R(p)$-群 G 可以具有非循环 Sylow p-子群（例如，群 $A_5 \in R(2)^{**}$ 就具有这一性质），但这类群似乎可以得到完整分类。

问题 1. 描述中心平凡且具有非循环 Sylow p-子群的 p-指标极值群的结构。

回到定理1。根据该定理，群 G 是 G 的正规 p'-子群与一个 p-子群 P 的半直积。P 的结构通常是清楚的（见 $[5,13]$），若能回答下面的问题将会很有意思。

问题 2. 描述 $G \in R(p)^*$ 的正规 p-补群的结构。

容易看出，具有 $R(p)^{**}$ 性质的群相当常见。例如，利用中心化子的众所周知的性质，可以证明，对于任意有限非阿贝尔单群 G ，都存在一个素数 p ，使得其 Sylow p-子群 S 是循环群，并且$C_G(S) = C_G(x)$ 对任意非平凡元素 $x \in S$均成立，因此 $G \in R(p)^{**}$。结果表明，类 $R(p)^{**}$ 中的任意群都具有如下性质。

定理 2. $[10,$ 引理 8$]$ 若 $G \in R(p)^{**}$，则 G 至多包含一个阶可被 p整除的非阿贝尔合成因子 S 。

我们认为，在这种情况下还可以得出更多结论。

问题3. 设 $G \in R(p)^{**}$ 是一个不可解群。是否有 $G = P \times H$ 是一个 p群 P 与群 H 的直积，且 $O^{p'}(H/O_{p'}(H))$ 是一个非阿贝尔单群?

Ito、Kamina 等人此前的结果研究了相对于任意 p-指标而言为极值的群，我们称之为指标极值群（按照 [2] 中的术语，称为 $\mathcal{D}$-群）。这些群也可以用具有以下性质的群来描述:

$$N(G) \subseteq \prod_{p \in \pi(N(G))} N(G)_p, \text{ where } N(G)_p = \{1, p^{\alpha(p)}\} \ \forall p \in \pi(N(G)). \tag{1}$$

当 (1) 中取等号而非包含关系时，群 G 将是幂零群。这一事实已在 [2, 定理 1] 中得到证明。此外，本文还明确描述了满足附加条件 $p^{\alpha(p)} \in N(G)$（对任意 $p \in \pi(N(G))$ [2, 定理 2]）的指标极值群。特别地，所有这类群都是可解群。一般情况下，后者并不成立——非阿贝尔单群 A_5 显然是指标极值群。因此，出现了以下问题。

问题4. 描述有限指标极值群的结构。

设 p 和 q 是不同素数。若对任意 $a \in N(G) \setminus \{1\}$，都有 $G \in R(p) \cap R(q)$ 且 $a_{\{p,q\}} > 1$，则称有限群具有性质 $\{p,q\}^*$。在 [14], ，Ito 研究了 $\{p,q\}^*$-群中最简单的非平凡子类，并证明: 若 $N(G) = \{1, m, n\}$，其中 m 和 n是互素数，则 G 可解。然而，在一般情况下，$\{p,q\}^*$-群不一定可解。此外，可以证明（例如，参见经典群的 [15, 引理 3.4(v)]和 [16, 引理 3.2(v)]）：对于一个李型单群 G，除某些例外情形外，存在素数 p 和 q，使得 G 是一个 $\{p,q\}^*$-群。

回忆一下，$|G|_p$ 表示群 G的 p指标。若 π 是一个素数集，则令$|G|_\pi = \prod_{p \in \pi} |G|_p$。显然，对于每个 π，$|G|_\pi$ 整除 $|G|_\pi$。在 [17], 中，得到了关于具有平凡中心的 $\{p,q\}^*$-群的以下性质。

定理3. 设 p 和 q 是大于5的不同素数。若 G 是一个具有平凡中心的 $\{p,q\}^*$-群，则 $|G|_{\{p,q\}} = |G|_{\{p,q\}}$。

推论3. 设 p 和 q 是大于5的不同素数。若 G 是一个具有平凡中心的 $\{p,q\}^*$-群，则对于 G 的每个非平凡 p-元 g 和每个非平凡q-元 h，都有 $C_G(g) \cap C_G(h) = 1$。

最后这个推论后来成为证明一项关于维数为8和 16 [18, 的正交群的断言的关键；定理 1], 是证明由 J. G. Thompson 于1987年在致 W. Shi 的一封信中提出、并于1992年由 A. S. Kondratiev 记入《库罗夫卡笔记本》的著名猜想成立的最后一步（详见 [18]）。

Thompson猜想 [19, 问题 12.38]。若 L 是有限非阿贝尔单群，G 是具有平凡中心的有限群，且 $N(G) = N(L)$，则 G 与 L 同构。

当然，Thompson猜想的断言不能推广到 L 是任意具有平凡中心的有限群的情形；特别是，存在一个不可解群 L 和一个可解群 G，二者都具有平凡中心，并满足 $N(L) = N(G)$ [20]。然而，以下问题仍未解决。

问题5。 [19,问题 20。29] 对于任意自然数 n 和任意非阿贝尔单群 L，若 G 是具有平凡中心的有限群，且 $N(G) = N(P)$，其中 $P = L^n$ 是 L 的第 n 个直积幂，那么 G 与 P 是否同构?

在 $n = 1$ 的情形下，这个问题的肯定答案可由汤普森猜想成立推出。如果 $n > 1$，那么目前只有少数几个非常特殊的结果 [21–23]。

References

[1] W. Burnside，关于阶为 $p^\alpha q^\beta$ 的群，《伦敦数学会会刊》，2，第 1 期（1904），388–392。[2] C. Casolo、E. M. Tombari，某些直积的共轭类大小，《澳大利亚数学会通报》，85（2012），217–231。[3] I. B. Gorshkov，关于共轭类大小受限的有限群中正规 p-补群的存在性，《数学通讯》，30，第 1 期（2022），93–99。[4] N. Ito，关于具有给定共轭类型的有限群。I，《名古屋数学杂志》，6（1953），17–28。[5] K. Ishikawa，关于仅有两个共轭长度的有限 p-群，《以色列数学杂志》，129（2002），119–123。[6] A. R. Camina，有限群共轭类数的算术条件，《伦敦数学会杂志》，5，第 2 期（1972），127–132。[7] A. Beltran、M. J. Felipe，Alan Camina 关于共轭类大小的一个定理的变体，《代数杂志》，296，第 1 期（2006），253–266。[8] A. Beltran、M. J. Felipe，蕴含有限群可解性的一些类大小条件，《群论杂志》，9（2006），787–797。[9] G. Navarro、R. Solomon、P. H. Tiep，有限群中的阿贝尔 Sylow 子群 II，《代数杂志》，421（2015），3–11。[10] I. B. Gorshkov，共轭类大小集合受限的有限群结构（2022），arXiv:2206.09547。[11] A.V. Vasil'ev，关于 Thompson猜想，《西伯利亚电子数学报告》，6（2009），457–464。[12] G. Navarro、P. H. Tiep，有限群中的阿贝尔 Sylow 子群，《代数杂志》，398（2014），519–526。[13] T. K. Naik、R. D. Kitture、M. K. Yadav，具有两个共轭类大小的幂零类为 3 的有限 p-群，《以色列数学杂志》，236，第 2 期（2020），899–930。[14] N. Ito，关于具有给定共轭类型的有限群 III，《数学杂志》，117（1970），267–271。[15] A. V. Vasil'ev 和 M. A. Grechkoseeva，特征 2 下经典单群的谱识别，《西伯利亚数学杂志》，56，第 6 期（2015），1009–1018。[16] M. A. Grechkoseeva 和 M. A. Zvezdina，关于群 $L_4(q)$ 和 $U_4(q)$ 的谱识别，《西伯利亚数学杂志》，61 第 6 期（2020），1039–1065。[17] I.B. Gorshkov，关于共轭类大小集合受限的有限群，《马来西亚数学科学学会通报》，43，第 4 期（2020），2995–3005。[18] I. B. Gorshkov，关于有限单群的 Thompson猜想，《代数通讯》，47，第 12 期（2019），5192–5206。[19] V. D. Mazurov、E. I. Khukhro（编），《库罗夫卡笔记：群论未解问题》，俄罗斯科学院西伯利亚分部数学研究所，新西伯利亚，俄罗斯，第 20 版，2022。[20] G. Navarro，有限群的共轭类大小集合不能确定其可解性，《代数杂志》411（2014），47–49。[21] I. B. Gorshkov，关于通过共轭类大小集合刻画有限群，《代数及其应用杂志》，21，第 11 期（2022），2250226。[22] V. Panshin，关于通过共轭类大小集合识别 $A_6 \times A_6$，《西伯利亚电子数学报告》，19，第 2 期（2022），457–464。[23] I. B. Gorshkov 和 V. V. Panshin，通过共轭类大小集合刻画群 $A_5 \times A_5 \times A_5$，已被《代数与逻辑》接收。

安德烈·V.瓦西里耶夫，俄罗斯新西伯利亚索伯列夫数学研究所；

海南大学理学院，中国海南海口，中华人民共和国。电子邮箱：vasand@math.nsc.ru

Ilya B. Gorshkov，俄罗斯新西伯利亚索博列夫数学研究所；俄罗斯克拉斯诺亚尔斯克西伯利亚联邦大学。电子邮件：ilygor8@gmail.com