arXiv:2301.09306v1 [cs.GT] 23 Jan 2023

家务分配：嫉妒与真实

预印本

Mohammad Azharuddin Sanpui数学系 印度理工学院卡拉格浦尔分校 印度
azharuddinsanpui123@gmail.com

摘要

我们研究具有策略型代理人的可分割不利资源的公平分配问题，这些代理人可以操纵其私人信息以获得更好的分配。在某些约束条件下，我们尤其关注在分段常数估值下是否存在真实无嫉妒机制。我们证明，在连通份额情形下，不存在确定性真实无嫉妒机制；对于贪婪代理人，同样存在这一不可能性结果。我们还证明，没有任何确定性的真实独裁机制能够满足无嫉妒准则；当约束改为非浪费约束而非独裁制时，该结论仍然成立。我们进一步讨论了若干相关问题和研究方向。

关键词 蛋糕切分 · 博弈论 · 经济学

1 引言

将具有不同偏好的异质、可分资源分配给一组 n 参与者，这个问题本质上可以直观地描述为切分蛋糕的问题。蛋糕切分问题是公平分配理论中的一个基础课题，Brams and Taylor [1996], Robertson and Webb [1998], Moulin [2004], Brandt 等人 [2016]，并且在数学、经济学、政治学和计算机科学领域受到了广泛关注，Caragiannis 等人 [2009], Edmonds and Pruhs [2006], Aumann and Dombb [2010],Thomson [2007], Procaccia [2013], Brânzei and Nisan [2017]。要在参与者之间公平地分蛋糕是一项颇具挑战的任务。无嫉妒性和比例公平性是蛋糕切分文献中公平分配最“重要”的标准。在无嫉妒分配中，每位参与者对自己获分的份额都感到满意，不会更想要其他参与者获得的份额。在比例分配中，每位参与者获得的份额至少达到其对蛋糕估值的 $\frac{1}{n}$。当整块蛋糕都分完时，无嫉妒性意味着比例公平性。众所周知，无嫉妒分配总是存在的，Brams and Taylor [1995]；即便规定每位参与者都必须获得一个连通份额，情况亦是如此，Su [1999],Stromquist [1980]。除了是否存在这类分配之外，人们也长期以来一直在研究这一过程的算法设计，Aziz and Mackenzie [2016, 2020, 2015], Dubins and Spanier [1961], Even and Paz [1984], Stromquist[2008]。对于任意数量的参与者，我们都能计算出一种比例分配，Dubins and Spanier [1961], Even and Paz [1984]，也能计算出一种无嫉妒分配，Aziz and Mackenzie [2016]。

与之相反，蛋糕切分的对偶问题也称为家务分配，其目标是将一种不受欢迎的资源分配给一组 n 参与者，每位参与者都希望尽可能少地获得这种资源。家务分配可以用于模拟家庭内部的家务分配、破产公司的负债分配等。与蛋糕切分问题类似，公平地分配厌恶品也是一项具有挑战性的问题。与蛋糕切分类似，公平分配最重要的标准是无嫉妒性 和 比例公平性。对于蛋糕切分中的大多数问题，家务分配中也存在相应的问题；例如，Brams and Taylor 找到了一个针对 n人的无嫉妒蛋糕切分算法，在该算法中，每位参与者都确信，按自己的估值，没有其他参与者获得的份额比自己更大；而 Peterson and Su Peterson and Su [2009]则找到了相应的家务分配结果。我们知道如何为任意数量的参与者计算比例分配（类似于蛋糕切分中的比例分配）和无嫉妒分配 Dehghani 等人 [2018] 。虽然有几种蛋糕切分算法也适用于家务分配，但这两个问题的理论

性质在许多情况下有所不同，而且与蛋糕切分相比，家务分配方面的研究少得多 Deng 等人 [2012], Brânzei 和 Sandomirskiy [2019],Farhadi 和 Hajiaghayi [2017], Heydrich 和 van Stee[2013], Petersonand Su [1998], Chaudhuryetal. [2020]。

然而，在部署某种蛋糕切分（或家务分配）算法时，一个根本问题在于，参与者都以自身利益为重，可能会操纵估值并向算法虚报，以获得更好的分配。这促使人们从博弈论视角，尤其是机制设计视角，研究蛋糕切分问题（或家务分配问题）。是否存在一种真实且公平的蛋糕切分机制，使如实报告成为每位参与者的占优策略? Chen、Lai、Parkes 和 Procaccia Chen 等人最先提出了这个问题 [2010]。
那么，如何简洁地表示价值密度函数呢? 文献中已有两种不同的方法。第一种实际上是文献中最广泛采用的模型，即 Robertson-Webb 模型。在该模型中，机制通过一系列针对参与者估值函数的查询来运行，查询类型如下：

- **评估**$_i(x,\ y)$：询问参与者 i 对区间 $[x, y]$的估值。
- **切分**$_i(x,\ p)$：询问参与者 i 一个点 y，使得 $[x, y]$ 的价值恰好为 p。

在此模型下，已有研究证明，不存在具有有限次查询的真实无嫉妒机制（Kurokawa 等人 [2013] ），而任何真实机制都是独裁式的（Brânzei 和 Miltersen [2015] ）（即在两个参与者中，有一个固定的参与者获得完整的蛋糕）。

第二种方法假设价值密度函数是分段常数的。分段常数函数简洁明了，能够以任意精度近似一般估值函数（ Kurokawa 等人 [2013] , ），而且可以简洁地编码。随后，机制以直接揭示机制所需的编码后的价值密度函数作为输入，并输出一种分配。这些机制称为直接揭示机制。
对于直接揭示机制，Chen 等人（Chen 等人 [2010] ）首次针对任意数量的参与者、具有分段均匀估值函数的情形，提出了一种确定性、真实、帕累托最优且无嫉妒的蛋糕切分机制。Chen 等人的结果表明，在分配异质资源（蛋糕）时，公平性与真实性是兼容的。随后，Chen 等人（Chen 等人 [2010]）提出了以下自然的开放问题。

是否存在　适用于分段常数价值密度函数的真实无嫉妒蛋糕切分机制　*?*

Tao Tao [2021] 证明了 Chen 等人提出的上述问题的否定结果。Chen 等人 [2010]。基本上，对于蛋糕切分中的大多数问题，家务分配中都存在对应的问题。现在你可能会想到以下问题：

是否存在　适用于分段常数价值密度函　*ns?*

Bei 等人 Bei 等人 [2018] 首先证明了存在适用于两个参与者的真实无嫉妒家务分配机制。他们还证明，当每个参与者只对形如 $[0, x_i]$ 的单个区间有价值时，不存在满足以下任一性质的真实无嫉妒家务分配机制：

- 匿名性；
- 连通份额假设；
- 位置无关。

Francis Francis [2022] 展示了一种用于家务分配的真实比例帕累托最优算法，该算法采用分段均匀估值函数。

本文旨在展示一些不可能性结果，探讨在若干已知约束下真实无嫉妒家务分配机制是否存在。

1.1 我们的结果

本文始终关注参与者具有分段常数估值时的确定性真实无嫉妒机制。在多种估值函数类别中，这类函数尤为突出，是蛋糕切分研究中表达能力最强的函数之一 Bei 等人 [2017, 2012],Cohler 等人 [2011], Aziz 和 Ye [2013], Chen 等人 [2010], Bei 等人[2018], Menon 和 Larson [2017], Caragiannis etal. [2011]。此外，分段常数函数简洁明了，而且可以任意精确地近似一般估值函数，因此更具吸引力 Kurokawa 等人[2013]。

在第一部分中，一个家族 展示了与家务分配机制相关的一系列不可能性结果。首先，我们证明不存在 o

满足连通份额假设的确定性真实无嫉妒机制。即使每个代理人对整项家务都有非零的家务价值，即对于所有 $x \in [0,1]$， $f_i(x) > 0$，同样的不可能性结果仍然成立。其次，我们证明不存在无嫉妒的确定性真实独裁机制；也就是说，不存在这样的确定性真实无嫉妒家务机制，其中代理人不会接受任何家务估值。移除独裁约束后，同样的不可能性结果也适用于非浪费约束。

1.2 相关工作

多年来，“蛋糕切分问题”一直是公平分配和社会选择领域的重要课题。公平分配研究起源于 20 世纪 40 年代，波兰数学家 Hugo Dyonizy Steinhaus 致力于研究如何通过蛋糕切分协议实现公平目标。Steinhaus [1949]。尽管公平分配方案的存在性与计算问题已得到深入研究 Brams and Taylor [1995], Dubins and Spanier [1961], Su [1999],Even and Paz [1984], Stromquist [1980],Chen 等人的 Chen 等人 [2010] 研究工作，即前文提到的研究，首次考虑了激励问题。Chen 等人 Chen 等人 [2010] 提出了首个真实、无嫉妒且帕累托最优的蛋糕切分机制；当每位代理人的估值为分段均匀时，该机制能够运行，而分段均匀是分段常数估值的一种特殊情形。具体而言，Chen 等人提出的适用于分段均匀价值密度函数的机制 Chen 等人 [2010] 已被许多研究者进一步研究：Aziz 和 Ye [2013], Maya 和 Nisan [2012], Li 等人 [2015], Bei 等人 [2017, 2018], Tao [2021], Menon 和 Larson [2017], Bei 等人 [2021],Alijani 等人 [2017],Asano 和 Umeda[2020], Cole 等人 [2012], Mossel 和 Tamuz [2010]。Aziz 和 Ye Aziz 和 Ye [2013] 证明，如果一种真实的蛋糕切分机制满足以下任一性质，则该机制不存在：

- 比例公平且帕累托最优；
- 鲁棒比例公平且无浪费。

Bei 等人 Bei 等人 [2017] 表明，在以下四项约束之一成立时，不存在真实无嫉妒切蛋糕机制：
四项约束：

- 无浪费；
- 位置无关；
- 连通份额假设；
- 参与者依次报告其价值密度函数。

Bei 等人 Bei 等人 [2018] 证明，不存在满足以下四项约束之一、且具有 $[0, x_i]$ 形式的均匀密度函数真实无嫉妒蛋糕切分（或家务分配）机制：

- 匿名性；
- 连通份额假设；
- 位置无关。

Tao Tao [2021]证明，即使满足以下所有条件，也不存在真实的比例公平蛋糕切分机制：

- 有两个参与者；
- 估值密度函数是分段常数；
- 每个参与者都饥饿：对于 $i = 1, 2, f_i(x) > 0 \, \forall x \in [0,1]$;
- 该机制无需完整：机制可以丢弃部分蛋糕。

Maya 和 Nisan Maya 和 Nisan [2012] 给出了两个参与者情形下真实且帕累托最优机制的刻画。最近，Francis Francis [2022] 提出了一种用于家务分配的真实且比例公平的帕累托最优算法，其估值函数为分段均匀。

2 预备知识

在家务分配实例中，一种可分且异质的不良资源（或“厌恶品”）由区间[1] $[0,1]$ 表示，需要分配给参与者集合 $N = \{1, 2, ..., n\}$ Farhadi 和 Hajiaghayi [2017], Heydrich 和 van Stee [2013]，

[1]为方便起见，我们通常用区间 $[a, b]$ 表示厌恶品。它可以归一化为 $[0, 1]$。

Brânzei 和 Sandomirskiy [2019]。每位参与者 i 都配有一个可积的非负厌恶品密度函数f_i： $[0,1] \to \mathbb{R}^+ \cup 0$，用于刻画该参与者 i 对厌恶品不同部分的价值评估。我们用 $f_i(x)$表示参与者 i 在点 x处的密度函数值。厌恶品份额 X 是 $[0,1]$的若干互不相交子区间的有限并。基本上，参与者 i对份额 X的厌恶品价值，记作 $v_i(X)$，由下式给出

$$v_i(X) = \sum_{I \in X} \int_I f_i(x)\, dx$$

分配是将 $[0,1]$ 划分为一个集合 $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$，其中每个 A_i 都分配给参与者 i，并且 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 适用于任何 $i \neq j$。如果 $\bigcup_{i=1}^n A_i = [0,1]$，则称该分配是完整的。请注意，在家务分配中，参与者希望使其价值最小化。家务分配文献中研究了两种公平性概念。

如果分配 (A_1， A_2，....， A_n) 中每个参与者获得的厌恶品不超过其平均份额，则称该分配是比例公平的：

$$\forall i : v_i(A_i) \leq \tfrac{1}{n} v_i([0,1]).$$

如果分配 (A_1， A_2，....， A_n) 中没有参与者能够通过与其他任何参与者交换而获得更少的厌恶品，则称该分配是无嫉妒的：

$$\forall i, j : v_i(A_i) \leq v_i(A_j).$$

完整的无嫉妒分配总是比例公平的。对于两个参与者的情况，当且仅当一个分配是比例公平的，它才是无嫉妒的。

直接揭示式家务切分机制 $\mathscr{M}$是一个函数，它以参与者的估值函数 (f_1， f_2，.....， f_n) 为输入，并返回一个分配 (A_1， A_2，.....， A_n) 作为输出。本文只考虑确定性机制，也就是说，分配完全由输入的密度函数决定。此外，我们假设该机制必须将完整的厌恶品分配给参与者。
我们在本节末尾定义本文所考察的若干性质。

定义 1. 设 F =(f_1， f_2，.....， f_n) 为给定的输入厌恶品密度函数向量。示性函数L_F: $\mathbb{R}^n \to [0,1]$ 定义为

$$L_F(r_1, r_2, ..., r_n) = |\{x | \forall \mathrm{i}, f_i(x) = r_i\}|.$$
where $(r_1, r_2, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n$ and $|S|$ indicates the sum total of the lengths of the intervals in S.

定义 2. 若直接揭示式家务切分机制 $\mathscr{M}$: (f_1， f_2，.....， f_n) →(A_1， A_2，.....， A_n) 满足

- 比例公平性，即始终提供比例分配；
- 无嫉妒性：如果它始终给出无嫉妒分配；
- 真实性：如果每个代理人的占优策略都是如实报告其家务密度函数，即对于每个代理人 i，任意(f_1，.....， f_n) 以及任意 f_i'，

$$v_i(\mathscr{M}_i(f_1, ..., f_n)) \leq v_i(\mathscr{M}_i(f_1, ..., f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, ..., f_n)).$$

  请注意，这意味着虚报密度函数绝不会使代理人受益。
- 连通份额假设：如果每个 A_i 始终都是一段连续的份额。
- 非浪费性：如果对于每个代理人 i， $f_i(x) > 0$ 对任意 $x \in A_i$ 均成立，即没有代理人会得到家务价值为 0 的任何部分。

- 帕累托最优性：如果对于机制返回的任意分配，都不存在另一种分配，能使至少一名代理人相对于特定的估值密度函数境况更好，同时不使任何代理人境况变差。例如，假设相对于家务密度函数 f_1， f_2，.....， f_n， $\mathscr{M}$返回的另一种分配是(A_1'， A_2'，.....， A_n')，而不是(A_1， A_2，.....， A_n)。那么，如果对于所有 i，$v_1(A_i') \geq v_(A_i)$，且至少存在一个 i 使得 $v_1(A_i') > v_(A_i)$，则(A_1， A_2，.....， A_n)是帕累托最优的。
- 独裁式：如果存在一位固定的代理人，不接受厌恶品估值非零的份额。
- 位置无关：对于任意两个厌恶品密度函数为 F =(f_1， f_2，.....， f_n) 和 F' =(f_1'， f_2'，.....， f_n') 的蛋糕切分实例，若 $L_F = L_{F'}$，机制 $\mathscr{M}$ 返回分配 $\mathscr{M}(F)$ =(A_1， A_2，.....， A_n) 和 $\mathscr{M}(F')$ =(A_1'， A_2'，.....， A_n')，使得对于每个 i，均有 $v_i(A_i) = v_i(A_i')$。

- 匿名性：对于任意厌恶品密度函数向量 $(f_1, ..., f_n)$ 以及任意置换 σ of $(1, 2, ..., n)$，对于每个满足 $\mathscr{M}(f_1, f_2, ..., f_n) = (A_1, A_2, ..., A_n)$ 且 $\mathscr{M}(f_{\sigma(1)}\ f_{\sigma(2)}\ \cdots, f_{\sigma(n)}) = (A'_1, A'_2, ..., A'_n)$ 的 i，均有 $v_i(A_i) = v_i(A'_{\sigma^{-1}(i)})$。

如果存在一个参与者，无论厌恶品密度函数如何，该参与者永远不会分到价值大于零的厌恶品份额，那么就称该家务分割机制是独裁式的。

显然，如果参与者获得的厌恶品价值只取决于不同参与者群体所估值的份额长度，而与这些份额的位置无关，那么该机制就是位置无关的；如果参与者获得的价值不取决于其身份，那么该机制就是匿名的。

请注意，本文始终假设参与者具有分段常值估值函数。若函数 f_i 满足以下条件，则称其为分段常值函数：蛋糕可以划分为有限个区间，且 f_i 在每个区间上均为常值。

3 不可能性结果

定理 1. 即使只有两个参与者，也不存在满足连通份额假设的确定性真实无嫉妒机制。

证明. 假设厌恶品由 $[0, 9]$ 呈现。令 $\epsilon > 0$ 为一个足够小的常数。考虑任务分割实例 $F = (f_1, f_2)$，其中

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [3, 4+\epsilon] \cup [5, 6] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [1, 2] \cup [7-\epsilon, 8] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

在连通份额约束下，很容易看出，他们两人得到的价值都至少为 1，而参与者 2 将从厌恶品的左侧得到一个连通份额。

由于无嫉妒性和连通份额条件，我们必有 $v_2(\mathscr{M}_2(F)) = 1$ 以及 $V_1(\mathscr{M}_1(F)) \leq 1 + \frac{\epsilon}{2}$，这意味着 $\mathscr{M}_2(F)$ 且 $\mathscr{M}_1(F) \subseteq [4 - \frac{\epsilon}{2}, 9]$。考虑参与者 1 将其密度函数虚报为 $[0, 4 - \frac{\epsilon}{4}] \subseteq$

$$f'_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [3, 4+\epsilon] \cup [5, 6] \\ 2 & \text{if } x \in [8, 9] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

由于无嫉妒性和连通份额条件，很明显，参与者 2 必须从厌恶品的左侧获得一块连续份额 $[0, 9]$，而参与者 1 获得的估值至多为 $2 + \frac{\epsilon}{2}$，这意味着 $\mathscr{M}_1(f'_1,\ f_2) \subseteq [6 - \frac{\epsilon}{2}, 9]$。由于 $v_1([6 - \frac{\epsilon}{2}, 9]) = \frac{\epsilon}{2}$。这与 $\mathscr{M}$ 是真实的相矛盾。

定理 2。 如果要求每位参与者都获得一块连通份额，那么不存在确定性真实无嫉妒机制，即使只有两个贪婪代理人也不例外。

证明。 我们将通过反证法证明该定理。假设存在一个适用于两个参与者的此类机制 $\mathscr{M}$。我们构造三个家务分配实例，并分析 $\mathscr{M}$ 在这些实例上的输出。对于前两个实例，我们将证明其输出是唯一的。基于前两个实例，我们将证明由 $\mathscr{M}$ 输出的最后一个家务分配实例的分配会违反连续性约束。

实例 1。 $F^{(1)} = (f^{(1)}_1, f_2^{(1)})$，其中 $f^{(1)}_1(x) = 1$ 和 $f^{(1)}_2(x) = 1$ 对于 $x \in [0, 1]$。由于无嫉妒性，我们必须有 $|\mathscr{M}_1(F^{(1)})| = |\mathscr{M}_2(F^{(1)})| = \frac{1}{2}$。我们将用 (A_1, A_2) 表示 $\mathscr{M}(F^1)$ 的分配。我们将在剩余两个实例的定义中使用 A_1 和 A_2。**定义。** $A_1 = \mathscr{M}_1(F^{(1)})$ 和 $A_2 = \mathscr{M}_2(F^{(1)})$。

不失一般性，我们假设 $A_1 = [0, .5]$ 和 $A_2 = (。5, 1]$。由于 A_1 和 A_2 是连续片段。

设 ϵ 为一个足够小的正实数 r.

实例 2。 $F^{(2)} = (f^{(2)}_1, f_2^{(2)})$，其中 $f^{(2)}_1(x) = 1$对于 $x \in [0,1]$和

$$f_2^{(2)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A_1 \\ \epsilon & \text{if } x \in A_2 \end{cases}.$$

在下面的命题中，我们将看到， $\mathscr{M}$唯一可能的输出是（A_1， A_2）。

命题 1. $\mathscr{M}(F^{(2)}) = (A_1, A_2)$。

证明。 首先，必有 $|\mathscr{M}_2(F^{(2)})| \geq \frac{1}{2}$。否则，代理人 1 将分得长度严格大于$\frac{1}{2}$的厌恶品份额。由于代理人 1 的估值函数在 [0,1] 上是均匀的， $\mathscr{M}$并非无嫉妒。
其次，必有 $\mathscr{M}_2(F^{(2)}) \subseteq A_2$。假设 A_2 不包含全部的 $\mathscr{M}_2(F^{(2)})$，即 $|A_2 \cap \mathscr{M}_2(F^{(2)})| < \frac{1}{2}$。鉴于 $|\mathscr{M}_2(F^{(2)})| \geq \frac{1}{2}$。

$$\begin{aligned} v_2(\mathscr{M}_2(F^{(2)})) &= v_2(A_1 \cap \mathscr{M}_2(F^{(2)})) + v_2(A_2 \cap \mathscr{M}_2(F^{(2)})) \\ &= 1.|A_1 \cap \mathscr{M}_2(F^{(2)})| + \epsilon.|A_2 \cap \mathscr{M}_2(F^{(2)})| \\ &\geq (\tfrac{1}{2} - |A_2 \cap \mathscr{M}_2(F^{(2)})|) + \epsilon.|A_2 \cap \mathscr{M}_2(F^{(2)})| \\ &= \tfrac{1}{2} - (1-\epsilon)|A_2 \cap \mathscr{M}_2(F_{(2)})| \\ &> \tfrac{1}{2} - (1-\epsilon).\tfrac{1}{2} > \tfrac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

另一方面，如果代理人 2 将其价值密度函数虚报为 $f_2^{(1)}$ （而非其真实价值密度函数$f_{(2)2}$），则机制收到的输入为 $(f^{(2)1}, f_2^{(1)})$，这将成为实例 1，因为 $f_{(1)1} = f_{(2)1}$。在这种情况下，分配输出为 (A_1, A_2)，而代理人 2 按其真实估值 $f_2^{(2)}$ 计算的总价值为 $\frac{\epsilon}{2}$。因此，代理人 2 虚报其价值密度函数反而会获得较低的价值，且 $\mathscr{M}$不可能是真实的。

综上，我们有 $\mathscr{M}_2(F^{(2)}) \subseteq A_2$且 $|\mathscr{M}_2(F^{(2)})| \geq \frac{\epsilon}{2}$，这意味着 $M_2(F^{(2)}) = A_2$。因此，我们必须有$M_1(F^{(2)}) = A_1$

实例 3。 $F^{(3)} = (f^{(3)}_1, f_2^{(3)})$，其中

$$f_1^{(3)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A_1 \\ 0.5 & \text{if } x \in A_2 \end{cases}$$

and

$$f_2^{(3)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A_1 \\ \epsilon & \text{if } x \in A_2 \end{cases}.$$

现在我们将证明 在以下命题中，每位参与者从 A_1 和 A_2中恰好各获得一半 . 这与 $\mathscr{M}$为每位参与者分配连通份额相矛盾。

命题 2. $|\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_1| = |\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_2| = |\mathscr{M}_2(F^{(3)}) \cap A_1| = |\mathscr{M}_2(F^{(3)}) \cap A_2| = \frac{1}{4}$.

我们首先简要说明证明背后的直觉。首先，代理人 1 不可能获得长度小于$\frac{1}{2}$的子集。否则，在实例 2 中，代理人 1 会将其价值密度函数从 $f_1^{(2)}$虚报为 $f_1^{(3)}$，这对代理人 1 更有利（因为 $f_1^{(2)}$ 是均匀的，而代理人 1 通过虚报获得的长度更低）。
其次，代理人 1 不可能获得超过 A_1一半的部分。如果代理人 1 获得超过 x，为了保证无嫉妒性，代理人 1 需要少获得长度至少为 $2x$ 的 A_2 的一半。这将使代理人 1 获得的总长度小于$\frac{1}{2}$。

第三，代理人 1 得到的 A_1 不能少于一半。如果代理人得到的 A_1 少于一半，那么代理人 2 对 A_2 的价值显著较低，而对 A_1 的价值较高。由于代理人 2 会从 A_1 中得到一块长度超过一半的部分，这会破坏代理人 1 的无嫉妒性，因为代理人 2 得到的太多了。

最后，既然已经证明代理人 1 必须恰好得到一半的 A_1，代理人 1 的无嫉妒性以及代理人 1 得到的总长度至少为 0.5 这一已知事实，意味着代理人 1 必须恰好得到一半的 A_2。

命题的证明。 首先必须有 $|\mathscr{M}_1(F^{(3)})| \geq \frac{1}{2}$。假设并非如此： $|\mathscr{M}_1(F^{(3)})| < \frac{1}{3}$.

我们证明 $\mathscr{M}$ 不可能是真实的。考虑实例 2，其中代理人 1 的密度函数为均匀分布。在实例 2 中，如果代理人 1 将其密度函数虚报为 $f_1^{(3)}$，机制 $\mathscr{M}$ 将看到与 $F^{(3)}$ 完全相同的输入（注意 $f_2^{(2)} = f_2^{(3)}$），而代理人 1 获得的子集长度将严格小于 $\frac{1}{2}$。然而，我们在命题1中已经看到，如果代理人 1 如实报告，其获得的子集长度恰好为 $\frac{1}{2}$。由于代理人 1 的真实估值服从均匀分布，因此代理人 1 会从这种虚报中获益。

设 $|\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_1| = \frac{1}{4} + x$ 其中 $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$。我们的目标是证明 $x = 0$。代理人 1 在 [0,1] 中的总效用为 $\int_0^1 f_1^{(3)}(x)dx = \frac{3}{4}$。为保证无嫉妒性，我们必须满足

$$\begin{aligned} v_1(\mathscr{M}_1(F^{(3)})) &= v_1(\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_1) + v_1(\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_2) \\ &= 1.|\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_1| + \tfrac{1}{2}|\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_2| \\ &= 1.(\tfrac{1}{4} + x) + \tfrac{1}{2}.|\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_2| \leq \tfrac{3}{8} \quad .....(1) \end{aligned}$$

由 (1) 可得 $|\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_2| \leq \frac{1}{4} - 2x$。因此代理人 1 获得的总长度为 $|\mathscr{M}_1(F^{(3)})| \leq \frac{1}{2} - x$。由于我们在开头已经看到 $|\mathscr{M}_1(F^{(3)})| \geq \frac{1}{2}$，因此有 $x \leq 0$。

另一方面，由于 $|\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_1| = \frac{1}{4} + x$，我们有 $|\mathscr{M}_2(F^{(3)}) \cap A_1| \geq \frac{1}{4} - x$。由于 $v_2([0,1]) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2}$ 且 $v_2(\mathscr{M}_2(F^{(3)}) \cap A_1) = 1.|\mathscr{M}_2(F^{(3)}) \cap A_1| \geq \frac{1}{4} - x$，为保证代理人 2 无嫉妒，我们必须满足 $v_2(\mathscr{M}_2(F^{(3)}) \cap A_2) \leq \frac{\epsilon}{4} + x$。因此 $|\mathscr{M}_2(F^{(3)}) \cap A_2| \leq \frac{1}{4} + \frac{x}{\epsilon}$，这意味着 $|\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_2| \geq \frac{1}{4} - \frac{x}{\epsilon}$。将其代入 (1)，得到

$$1.(\tfrac{1}{4} + x) + \tfrac{1}{2}.(\tfrac{1}{4} - \tfrac{x}{\epsilon}) \leq \tfrac{3}{8}$$

这意味着 $x \geq 0$ 当 ϵ 足够小时。因此 $x = 0$，我们有 $|\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_1| = \frac{1}{4}$。由于参与者 1 在 A_1 上恰好获得长度为 $\frac{1}{4}$ 的部分。由于无嫉妒性，参与者 1 在 A_2 上至多能获得 $\frac{1}{4}$，且 $|\mathscr{M}_1(F^{(3)})| \geq \frac{1}{2}$。因此 $|\mathscr{M}_1(F^{(3)}) \cap A_2| = \frac{1}{4}$。

定理 3。即使只有两个参与者，也不存在确定性的无浪费、真实且无嫉妒的机制。

证明。反设这样的机制 $\mathscr{M}$ 存在。考虑一个有两个参与者的家务分配实例，其密度函数分别为 $f_1(x) = 1$ 和 $f_2(x) = 1$，且定义在完整的厌恶品上。由 $\mathscr{M}$ 给出的分配 $A = (A_1, A_2)$ 必须满足 $|A_1| = |A_2| = \frac{1}{2}$。现在考虑另一个有两个参与者的家务分配实例，其价值密度函数为 $h_2(x) = 1$ 和

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A_1 \\ 1 & \text{if } x \in A_2 \end{cases}$$

由于真实性，参与者 1 将获得这份厌恶品 A_1。否则，他可以谎报自己的价值密度函数 $h_1' = f_1$。由于该机制 $\mathscr{M}$ 无浪费，因此参与者 2 将获得整份厌恶品 A_2。由于无嫉妒性，参与者 1 获得的份额至多为 A_1 的 $\frac{1}{2}$。这与参与者 2 的无嫉妒性相矛盾。因此，这样的机制 $\mathscr{M}$ 不存在。

定理 4. 即使只有两个参与者，也不存在独裁制的确定性真实无嫉妒机制。

证明。反设存在一种独裁制的真实无嫉妒机制。考虑一个有两个参与者的家务分配实例，其中两位参与者在整份厌恶品上的密度函数分别为 $f_1(x) = 1$ 和 $f_2(x) = 1$。由 $\mathscr{M}$ 给出的分配 $A = (A_1, A_2)$ 必须满足 $|A_1| = |A_2| = \frac{1}{2}$。再考虑另一个有两个参与者的家务分配实例，其中两位参与者的价值密度函数为 $g_2(x) = 1$，其中 $x \in [0,1]$ 和

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in A_1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

例如 (g_1, g_2)，如果 $\mathscr{M}$ 是真实的，代理人 1 将获得 A_1；否则她可以出价 $g_1'(x) = 1$ 并获得 A_1。此外，由于无嫉妒性，代理人 1 不可能获得少于 A_1。因此，对于实例 (g_1, g_2)，$\mathscr{M}$ 所生成的唯一可能分配是 $A = (A_1, A_2)$。

然而，通过取一个 利用独裁制条件，代理人 2 可以虚报自己的密度函数，从而获得更好的 r

分配，而不是 A_2。例如，代理人 2 可以提交以下函数 g_2':

$$g_2' = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } x \in A_1 \\ 1 & \text{if } x \in A_2 \end{cases}$$

由于独裁制，代理人 1 只能获得来自 A_1 的份额。不失一般性，代理人 1 获得 A_1 的全部。由于无嫉妒性，代理人 2 从 A_2 获得的份额至多为 3 4 。因此，代理人 2 通过操纵获得的价值严格更小，这意味着 $\mathscr{M}$ 不可能是真实的。

4 致谢

作者谨向 Bodhayan Roy 致谢，感谢他提出的建议，这些建议显著改善了本文的表达。

参考文献

Steven J. Brams 和 Alan D. Taylor。《公平分配——从蛋糕切分到争议解决》。剑桥大学出版社，1996年。Jack Robertson 和 William Webb。《只要可能，蛋糕切分算法就应公平》。CRC出版社，1998年。Hervé Moulin。《公平分配与集体福利》。麻省理工学院出版社，2004年。F. Brandt、Vincent Conitzer、Ulle Endriss、Jérôme Lang 和 Ariel D. Procaccia。《计算社会选择手册》。剑桥大学出版社，2016年。Ioannis Caragiannis、Christos Kaklamanis、P. Kanellopoulos 和 Maria Kyropoulou。公平分配的效率。《计算系统理论》，50:589–610，2009年。Jeff Edmonds 和 Kirk Pruhs。蛋糕切分确实不是件轻而易举的事。载于*ACM-SIAM*离散算法研讨会，2006年。Yonatan Aumann 和 Yair Dombb。连通份额下公平分配的效率。《*ACM*经济学与计算汇刊》*(TEAC)*，3:1–16，2010年。William Thomson。孩子们为何会在生日派对上哭闹？《经济理论》，31:501–521，2007年。Ariel D. Procaccia。蛋糕切分：不只是孩子的游戏。《*ACM*通讯》，56:78–87，2013。Simina Brânzei 和 Noam Nisan。蛋糕切分的查询复杂度。*ArXiv*，abs/1705.02946，2017。Steven J. Brams 和 Alan D. Taylor。无嫉妒蛋糕分配协议。《美国数学月刊》，102:9–18，1995年。Francis Edward Su。租房和谐分配：斯佩纳引理在公平分配中的应用。《美国数学月刊》，106:930–942，1999。Walter R. Stromquist。如何公平地切分蛋糕。《美国数学月刊》，87:640–644，1980。Haris Aziz 和 Simon Mackenzie。适用于任意数量参与者的离散有界无嫉妒蛋糕切分协议。*2016*年*IEEE*第*57*届计算机科学基础年会研讨会*(FOCS)*，第416–427页，2016年。Haris Aziz 和 Simon Mackenzie。一种有界无嫉妒蛋糕切分算法。《美国计算机学会通讯》，63:119–126，2020年。Haris Aziz 和 Simon Mackenzie。适用于四位参与者的离散有界无嫉妒蛋糕切分协议。第四十八届*ACM*计算理论研讨会论文集，2015年。Lester E. Dubins 和 Edwin H. Spanier。如何公平地切分蛋糕。《美国数学月刊》，68:1–17，1961年。Shimon Even 和 Azaria Paz。关于蛋糕切分的一则注记。《离散应用数学》，7:285–296，1984年。Walter Stromquist。无法通过有限协议找到无嫉妒蛋糕分配。《电子组合学杂志》，15，2008年。Elisha Peterson 和 Francis Edward Su。N人无嫉妒家务分配。*arXiv*：组合学，2009年。Sina Dehghani、Alireza Farhadi、Mohammad Taghi Hajiaghayi 和 Hadi Yami。任意数量参与者的无嫉妒家务分配。载于*ACM-SIAM*离散算法研讨会，2018年。Xiaotie Deng、Qi Qi 和 Amin Saberi。无嫉妒蛋糕切分的算法解决方案。《运筹学》，60:1461–1476，2012年。

Simina Brânzei 和 Fedor Sandomirskiy。竞争性家务分配算法。*ArXiv*，abs/1907.01766，2019。Alireza Farhadi 和 Mohammad Taghi Hajiaghayi。论家务分配的复杂性。载于国际人工智能联合会议，2017。Sandy Heydrich 和 Rob van Stee。公平分配连通家务。载于算法博弈论，2013。Elena S. Peterson 和 Francis Edward Su。无嫉妒家务分配的精确程序。1998年。Bhaskar Ray Chaudhury、Jugal Garg、Patricia C. McGlaughlin 和 Ruta Mehta。分配不利物品比物品更难：论家务公平高效分配的复杂性。*ArXiv*，abs/2008.00285，2020年。Yiling Chen、John K. Lai、David C. Parkes 和 Ariel D. Procaccia。真实、公正与蛋糕切分。《博弈与经济行为》，77:284–297，2010年。David Kurokawa、John K. Lai 和 Ariel D. Procaccia。如何在派对结束前切分蛋糕。*AAAI*人工智能会议论文集，2013。Simina Brânzei 和 Peter Bro Miltersen。蛋糕切分中的独裁定理。载于国际人工智能联合会议，2015。Biaoshuai Tao。论真实公平蛋糕切分机制的存在性。第*23*届*ACM*经济学与计算会议论文集，2021。Xiaohui Bei、Guangda Huzhang 和 Warut Suksompong。无免费处置的真实公平分配。《社会选择与福利》，55:523–545，2018年。David Francis。针对分段均匀偏好的策略无关且比例公平的家务分配。*ArXiv*，abs/2204.00456，2022年。Xiaohui Bei、Ning Chen、Guangda Huzhang、Biaoshuai Tao 和 Jiajun Wu。蛋糕切分：嫉妒与真实。载于国际人工智能联合会议，2017。Xiaohui Bei、Ning Chen、Xia Hua、Biaoshuai Tao 和 Endong Yang。连通份额下的最优比例公平蛋糕切分。*AAAI*人工智能会议论文集，2012。Yuga J. Cohler、John K. Lai、David C. Parkes 和 Ariel D. Procaccia。最优无嫉妒蛋糕切分。*AAAI*人工智能会议论文集，2011。Haris Aziz 和 Chun Ye。针对分段常数和分段均匀估值的蛋糕切分算法。载于互联网与网络经济学研讨会，2013。Vijay Krishna Menon 和 K. Larson。确定性、策略无关且公平的蛋糕切分。载于国际人工智能联合会议，2017。Ioannis Caragiannis、John K. Lai 和 Ariel D. Procaccia。迈向更具表达性的蛋糕切分。载于国际人工智能联合会议，2011。Hugo Steinhaus。公平分配问题。《计量经济学》，17:315–319，1949年。Avishay Maya 和 Noam Nisan。激励相容的双人蛋糕切分。载于互联网与网络经济学研讨会，2012。Minming Li、Jialin Zhang 和 Qiang Zhang。具有外部性的真实蛋糕切分机制：别让参与者过分在意他人！载于国际人工智能联合会议，2015。Xiaohui Bei、Xinhang Lu 和 Warut Suksompong。真实蛋糕共享。载于*AAAI*人工智能会议，2021。Reza Alijani、Majid Farhadi、Mohammad Ghodsi、Masoud Seddighin 和 Ahmad S. Tajik。切割次数最少的无嫉妒机制。载于*AAAI*人工智能会议，2017。Takao Asano 和 Hiroyuki Umeda。蛋糕切分：切割次数较少的无嫉妒真实机制。载于第*31*届国际算法与计算研讨会*(ISAAC 2020)*，第181卷，第15:1–15:16页，2020年。Richard J. Cole、Vasilis Gkatzelis 和 Gagan Goel。真实性、比例公平与效率。*arXiv*：计算机科学与博弈论，2012。Elchanan Mossel 和 Omer Tamuz。真实的公平分配。载于算法博弈论，第288–299页。Springer Berlin Heidelberg，2010。