arXiv:2301.09314v1 [math-ph] 23 Jan 2023

三足蜘蛛的胡克能量与库仑能量

GIORGI KHIMSHIASHVILI 和 DIRK SIERS

Abstract. 三足蜘蛛是蛛形机构中最简单的实例。其工作空间和构形空间已广为人知。对于胡克势，我们完整描述了莫尔斯理论，并研究了蜘蛛的鲁棒控制。对于库仑能量，我们利用静止电荷和捕获域研究蜘蛛的鲁棒控制。我们证明，对于正三角形和正电荷，鲁棒控制域非空。这与关于点电荷的麦克斯韦猜想相关。最后，我们提出若干由研究结果引出的自然问题和研究展望。

1. Introduction

机械连杆机构的几何与拓扑在应用问题中发挥着日益重要的作用。以往的大多数研究都关注工作空间以及构形空间的拓扑，而后者目前仅在少数情况下有所了解，相关情况总结于 [KM], [Oh], [Mo]。本文旨在将已知结果拓展到新的连杆机构类别，并通过考察工作空间上的势函数来丰富这些结果，同时将其应用于所研究连杆机构的控制。我们的方法基于莫尔斯理论，它揭示了构形空间的拓扑与势函数临界点之间的明确联系。

我们主要关注所谓的蛛形机构，其拓扑是一个鲜少有人探索的领域。如今，这类物体通常被称为“蜘蛛式连杆机构”。有关蛛形连杆机构拓扑的详细信息，对于设计和控制某些类型的蜘蛛机器人至关重要。更具体地说，我们研究最简单的蛛形机构——三足蜘蛛，也称为三脚蜘蛛 [Oh], [Mo]。

在第 2 节中，我们将胡克能量用作势函数，并详细介绍工作空间和临界点理论。这尤其意味着，可以使用加权版本的胡克能量来控制这类连杆机构。

在第 3 节中，我们研究放置在三腿蜘蛛连杆机构各腿末端的点电荷所产生的库仑势。我们讨论蜘蛛中心（各腿的公共交点）的所谓静止电荷，以及 [GK1], [GK2] 中确定的静止电荷所谓的捕获域。这使我们能够确定蜘蛛工作空间中的一个区域，在该区域内，可以利用 [KPS], [GK1] 中提出的库仑控制方案，通过调节静止电荷的数值来鲁棒地控制蜘蛛中心的位置。对于基于正三角形且工作空间可缩的对称蜘蛛，我们证明，

日期：2023 年 1 月 24 日。2020 年 数学主题分类。58K05，70B15。关键词和短语。蜘蛛连杆机构、工作空间、胡克能量、库仑能量、静止电荷、鲁棒控制。

鲁棒库仑控制域是工作空间中的一个非空开子集，且包含参考三角形的中心。

下文将使用莫尔斯理论研究带边界和角的流形。其中大部分内容是隐藏在文献中的“常识”。我们将 [JJT] 和 [GM] 列为最一般的参考文献。关于带边界和角的流形上函数的临界点，请参阅 [Si]。为简洁起见，我们将这类临界点的判据以及水平曲面中相应的拓扑变化称为“标准规则”。

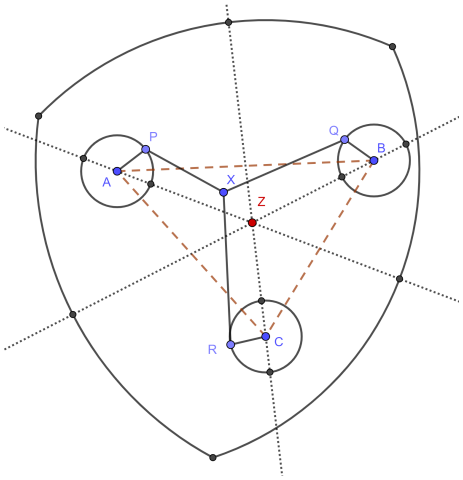
最后，我们提及若干由研究结果引出的相关问题和展望。总体而言，本文可视为将我们的方法应用于蜘蛛连杆机构，并为这一方向的后续研究开创新范式的第一步。

本文的研究成果是在2022年11月于法国 Luminy 的数学交流中心（CIRM）开展的“驻地研究”项目框架下取得并撰写完成的。我们很荣幸能够感谢 CIRM 提供的支持和优良的工作条件，这些条件极大地促进了我们的研究。

2. Hooke Energy as a potential function of tripod spider

我们将在几种情形下考察三个点的胡克势。首先是不施加任何约束，其次是对最大和最小距离施加约束，最后是针对三足蜘蛛的情形。

2.1. 无约束。 我们从以下简化情形开始。给定 3 个点A， B， C（用向量表示为 a， b, c），它们是蜘蛛的支点，其中心（关节）为点 X。腿 AX、 BX、 CX 可围绕支点完全自由活动，其长度也可以改变。



胡克能量定义为

$$H(x) = ||x-a||^2 + ||x-b||^2 + ||x-c||^2$$

驻点由以下条件确定： $\nabla H = 6x - 2(a+b+c) = 0$，因此 $x = \frac{1}{3}(a+b+c)$，即重心。不存在其他驻点。注意， $H(X) = ||x-z||^2 + K$，其中 $z = \frac{1}{3}(a+b+c)$，即重心 Z 和 $K = ||a||^2 + ||b||^2 + ||c||^2 - ||z||^2$。所有等值曲线都是圆。

2.2. **最大长度约束**。我们要求

$$|XA| \leq R_A \ , \ |XB| \leq R_B \ , \ |XC| \leq R_C.$$

构形空间是三个圆盘的交集 D_A， D_B， D_C，其中心分别为 A， B， C，半径分别为 R_A， R_B，R_C。我们研究 H 的边界极值。

引理1。 映射 H 在 D_A 的边界上的限制有极值，当且仅当 AY 的方向与 $AB + AC$ 相同；也就是说，经过 A 和 Z 的直线与 D_A 边界的两个交点分别是极小值和极大值。

证明。 假设 A 是原点。设 $R_A e_\phi$ 是 δD_A 上的一点。使用拉格朗日乘数法:

$$\nabla H = 6R_A e_\phi - 2(b + c) = \lambda e_\phi$$

因此

$$(-\lambda + 6r_A)e_\phi = 2(b + c)$$

□

命题1。 设工作空间 $W = D_A \cap D_B \cap D_C$ 包含 Z 的一个开邻域，则 Z 是 H 唯一的驻点，也是绝对最小值。不存在边界奇点。

证明。 重心 Z 显然是一个极小值。其他可能的临界点包括 H 在边界圆上的限制函数的临界点（ ZA 与以 A为圆心的圆的交点，等等），以及三个“角点”，即两个边界圆的交点。根据标准规则即可得出结论。边界点的情况如下:

限制类型	法向方向类型	胞腔附着
极小值	向内	没有变化，没有
极小值	向外	极小值 0-胞腔
最大值	向内	无变化
最大值	向外	鞍点 1-胞腔

我们所说的没有变化，是指下水平集的拓扑类型没有变化。对于角点，也有类似的规则。在我们的情况下，它们给出的结果是：没有变化。由于等值曲线和边界具有特殊的（圆形）形状，通过“观察图形”也可以得出相同的结果。□

2.3. **双侧长度约束**。我们要求

$$0 < R_A^- \leq |XA| \leq R_A \ , \ 0 < R_B^- \leq |XB| \leq R_B \ , \ 0 < R_C^- \leq |XC| < R_C.$$

构形空间是以 A, B, C 为中心、以R_A, R_B, R_C为半径的 3 个圆盘的交集，其中去除了若干较小的（开）圆盘。在众多不同的可能性中，我们在此考虑这样一种情况：这 3 个圆盘的半径相对较小，而工作空间 W 是一个带有 3 个孔洞的圆盘，并包含重心 Z的一个开邻域。

命题 2. 在这种情况下，点 Z 是 H 在 W 上的绝对最小值；此外，在小圆盘与 ZA、ZB、 ZC的（外部）交点处还有 *3* 个鞍点。

证明. 重心 Z 是一个绝对最小值。其他可能的临界点包括 H 在边界圆、3 个小圆以及 3 个 " 角点 " 上的限制函数的临界点；角点是 2 个边界圆相交之处。根据上文所述关于边界与角点奇异性的标准规则，即可得出结论。

□

注 1. H 的梯度相图由通向 Z 的直线组成，但与小圆盘之一相交的直线除外。这些轨迹从与这些圆盘相交的边界圆部分开始，直到它们从 Z 变得"可见"，然后继续沿直线前进。外圆与内圆之间有 3 个区间，它们是梯度流的冲突层。

注 2. 上述 3 种情形中的莫尔斯理论如下：在 2.1 中： $b_0 = 1, b_i = 0\,(i \geq 1)$ 和 $\mu_1 = 1, \mu_i = 0\,(i \geq 1)$；在 2.2 中： $b_0 = 1, b_i = 0\ (i \geq 1)$ 和 $\mu_1 = 1, \mu_i = 0$ $(i \geq 1)$；在 2.3 中： $b_0 = 1, b_2 = 3, b_i = 0\ (i \geq 2)$ 和 $\mu_1 = 1, \mu_1 = 3, \mu_i = 0\ ($ $i \geq 2)$。在这三种情形中， H 是一个完美莫尔斯函数。

2.4. **鲁棒控制**。 对于加权胡克能量，也可以进行类似研究：

$$H_{\alpha,\beta,\gamma} = \alpha||x-a||^2 + \beta||x-b||^2 + \gamma||x-c||^2$$

假设 $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$。该势函数以点 $Z = (\alpha : \beta : \gamma)$（重心坐标）为绝对最小值。等值曲线是以该点 Z为中心的圆。临界点理论与 H的情形类似，对应于 $(\alpha : \beta :$ $\gamma) = (1 : 1 : 1)$。

适当选择控制参数（α, β, γ），即可通过胡克能量的极小值点，将三足蜘蛛移动到三角形 ABC 中的任意点。此过程可实现对蜘蛛的鲁棒控制 。

2.5. 三**足蜘蛛**。 在这种情况下，伸缩连接被具有固定臂长和灵活转动点的双臂所取代。我们假设手臂的两部分长度不同。因此， AX 被手臂 $AP \cdot PX$取代， BX 被 $BQ \cdot QX$ 取代，而CX 被 $CR \cdot RX$取代。构形空间 $\mathcal{C}$ 是工作空间 W 的八重覆盖，并在边界处进行某些识别。P. Mounod [Mo]对其拓扑进行了全面研究。他证明，具有一般臂长的 n足蜘蛛具有光滑的二维构形空间，并给出了其欧拉示性数的公式。在他的论文中，他还解决了 J. O'hara [Oh]提出的一些问题。

现在，三足蜘蛛的构形空间明确地投影到 2.3 中的工作空间 W （带有 3 个小孔洞）。R_A^-等于 $AP \cdot PX$ 中臂长之差，而 R_A 等于它们的和。点 B 和 C也类似。这里假设臂长满足上述条件，从而得到前面提到的工作空间。

根据 [Mo] 的公式， $\mathcal{C}$ 的欧拉示性数为 -22。因此，我们得到一个亏格为 12 的光滑曲面。

我们考虑二次距离函数 H （见上文）。

命题 3。 三足蜘蛛在构形空间 $\mathcal{C}$ 上的胡克能量 H 具有：

- *8*极小值

- 36鞍点
- 6极大点

证明。 势 H 通过投影到工作空间定义在构形空间上。我们将使用命题 2 的结果，并采用（分支）覆盖论证。在工作空间的开部分上，覆盖是 8 重的。分支发生在边界和角点处。势的临界点恰好是特殊点的原像，这些点已在命题 2 中研究过。

由此我们找到重心 Z的 8 个临界原像，它们都是绝对极小值（且取值相同）。36 个鞍点来自边界圆上的 9 个特殊点，这些点处的覆盖次数为 4。其类型可通过对两块边界部分粘合方式的拓扑研究推导出来。最后，我们有 6 个极大点，它们对应于三个角点；在这些点处覆盖是 2 重的，并且每个这样的点都将四块部分粘合在一起。

在上文讨论的工作空间上的莫尔斯理论与构形空间之间存在一种对应关系。通过粘合比较两种情况下的等值曲线，即可得到命题中提到的莫尔斯指标。□

3. Coulomb Energy as a potential function of tripod spider

从控制理论的角度来看，研究放置在蜘蛛固定支点处的点电荷的库仑势也很有意义且具有实际重要性；通过改变这些电荷，可以改变带有固定电荷的主体的位置。论文 [GK1], [GK2] 对类似情形进行了深入研究，本节的论述依赖于这两篇论文中给出的构造与结果。

我们先回顾后文所需的若干概念和构造。回顾一下，放置在 n 点 A_i 处的 n 个非零电量点电荷 q_i 所产生的库仑势 $E = E(Q@A)$，是定义在点A_i 的补集中的点 X 上的函数，其公式为

$$E = \sum \frac{q_i}{d_i},$$

其中， $d_i = d(X, A_i)$ 是点 P 与 A_i之间的欧几里得距离。通常，若势 E 的梯度 ∇E 在点 X 处消失，则称点 X 为驻点（或平衡点）。关于库仑势和点电荷的平衡点，已有大量研究成果和相关问题。对我们而言，值得一提的是，正如 M. Morse 本人所证明的，对于一般构形和一般的点电荷取值，库仑势是一个莫尔斯函数 [CM]。这表明，库仑势是一个合理的候选对象，可以沿用上文研究胡克能量时的思路，为蜘蛛连杆机构发展莫尔斯理论。本节旨在介绍这一方向上的若干结果，并给出一个应用，其思路与 [KPS], [GK1], [GK2]中讨论的鲁棒库仑控制相同。在我们的研究背景下，另一个相关主题是所谓的点电荷麦克斯韦猜想，该猜想指出，二维欧几里得空间中 n 个点电荷的孤立平衡点数量不超过 $(n-1)^2$ （例如，参见 [GNS]中的近期综述）。

接下来我们聚焦于 3 个点电荷的情形。给定一个顶点为 A, B, C 的三角形 $\triangle$，称其为参考三角形（或基三角形）；再给定同一平面内的一个点 X，归一化静止电荷三元组 $Q(X) = \{q_i(X; \triangle)\}$ 定义为满足 $\nabla E(X, Q) = 0$ 的一组三个非零实数 q_i。正如 [GK1] 中所证明的，这些电荷由比值唯一确定

$$q_1 : q_2 : q_3 = d_1^3\mathcal{A}_1 : d_2^3\mathcal{A}_2 : d_3^2\mathcal{A}_3,$$

其中，$\mathcal{A}_1$ 是 $\triangle BCX$的面积，$\mathcal{A}_2$ 是 $\triangle CAX$的面积，$\mathcal{A}_3$ 是 $\triangle ABX$的面积。我们分别用 α_1、α_2、α_3 表示这些三角形在 X 点处的角。

在 [GK1] , [GK2] 中，库仑俘获域 $T(\triangle)$定义为由电荷 $Q(X)$产生的势的极小值点集合。俘获域由不等式 $h(X) > 0$给出，其中 h 是 $E(X、Q(X))$的海森矩阵，我们称之为俘获海森矩阵。用几何术语可得以下公式：

$$h(X) = -2\mathcal{A} + 9(\prod_i^3 \sin\alpha_i)(\sum_{i=1}^3 d_i^2\mathcal{A}_i).$$

在 [GK2] 中曾猜想，$T(\triangle)$是一个非空子集，并且包含△的内心。这个猜想已在多种情形下得到验证，包括正三角形。

如前所述，即使在三个电荷的情形下，我们也尚不了解 E 的平衡点（驻点）及其莫尔斯指标的完整描述。不过，对于三个点电荷的特殊构型，[Ts] 已经取得了相当完整的结果。具体而言，麦克斯韦猜想已对位于正三角形顶点处的任意三个非零点电荷得到证明，且其莫尔斯指标也已计算出来。

因此，在本文其余部分，我们始终假设参考三角形为正三角形，因为这是应用中最重要的情形；同时，这种情形下所有必要的背景结果都已在 [GK2] 中得到严格证明。

此外，给定一个三足蜘蛛 S，其中心位于（可移动）点 X，足点（固定）为A, B, C，且各腿相同，连杆长度为 a（大腿长度）和 b（足长），我们将其上述工作空间记为 $W(S)$。为简化讨论，我们假设 $R > a > b > 0$；此时，蜘蛛的整个工作空间是三个圆环的交集，它们的中心分别为 A, B, C。

命题 4。在上述情形下，蜘蛛 S 的鲁棒库仑控制域等于交集 $D（S）= W（S）\cap T（\triangle）$。

如前所述，工作空间的拓扑取决于三角形和臂长。这会影响交集，甚至可能使交集为空。对于正三角形，我们选择让工作空间成为一个由三段圆弧围成且包含内心的可缩区域。此外，我们假设所有电荷均为正。在这些条件下，捕获域 $T(\triangle)$ 可明确表示为一个紧凸区域的内部，该区域由 $h = 0$ 围成，且包含三角形的内心。由此可得以下结论。

推论 1. 基于正三角形的蜘蛛 S 的鲁棒库仑控制域非空。

对于基于正三角形的蜘蛛，也可以像分析胡克势那样进行完整的莫尔斯分析。已知对于给定的正电荷，E 在捕获区域 $T(\triangle)$ 内有一个极小值，在 $\triangle$ 之外有 3 个鞍点 $T(\triangle)$。E 的极点不在工作空间内，因此也不在构形空间内；构形空间是工作空间的 8 重覆盖，在边界分支处进行分支（粘合）。在获得有关边界奇点的信息后，即可完成莫尔斯分析。

4. Concluding remarks

我们的结果引出了若干自然问题和研究方向。我们在此提及其中一些看起来最有趣且可行的问题。

首先请注意，我们论文中使用的所有概念，对于底座为任意 n 边形、连杆长度任意的 n 足蜘蛛同样适用。因此，自然的下一步是将上述结果推广到 n 足蜘蛛的胡克势和库仑势。

接下来，还可以考虑 n 足蜘蛛的其他具有几何或物理意义的势，例如黎兹能量，或由蜘蛛运动关节构成的多边形的定向面积。

此外，还可以提出若干极值问题，以设计具有理想属性的蜘蛛连杆机构，例如工作空间的面积或形状。

此外，还可以尝试将我们的结果推广到 n足蜘蛛的情形，其中平台为可移动的n边形，而非中心点。

最后，将我们的讨论拓展到空间蜘蛛也很自然，因为它们的腿可以在三维欧几里得空间中运动。

还可以考虑具有两个以上连杆的“腿”，或者带有柔性、不可伸长系绳连杆的“腿”。上述每种可能性都值得进一步审视和仔细探索，我们计划在未来的研究中对此展开探讨。

回到三足蜘蛛，我们补充一点：一个亟待研究的问题是，任意足部构型下鲁棒库仑控制域会发生什么变化。在这种情况下，有几个可行的问题涉及在连杆长度总和及基三角形外接圆半径给定的限制下进行工作空间优化。例如，有充分证据表明，$W(S)$ 的最大面积出现在最对称的蜘蛛构型中，即连杆长度相等且足部构型规则。

References

[CM] S. Cairns, M. Morse, 整体分析与微分拓扑中的临界点理论, Academic Press, 1969.[JJT] H. Th. Jongen, P. Jonker, F. Twilt, 有限维非线性优化, Kluwer, Dor- drecht, 2000.[GK1] G. Giorgadze, G. Khimshiashvili, 三角形与静电离子阱, J. Math.Phys. 62, 053501 (2021)[GK2] G. Giorgadze, G. Khimshiashvili, 三角形内心作为驻点, Georgian Math.J. ,29 (2022), 515-525.[GM] M. Goreski, R. MacPherson, 分层莫尔斯理论 Springer Verlag, 1988.[GNS] A. Gabrielov, D. Novikov, B. Shapiro, 点电荷之谜, 《伦敦数学会杂志》 2007.[KM]

[KPS] G. Khimshiashvili, G. Panina, D. Siersma, 多边形连杆的库仑控制, 动力学与控制系统杂志 20 (2014), 491–501.[Mo] P. Mounoud, 关于 ´蜘蛛的构形空间 Osaka J. Math. 48 (2011), 149-178.[Oh] J.-I. O'Hara, 平面蜘蛛连杆机构的构形空间, Top. Appl. 154 (2007), 502-526.[Si] D. Siersma 边界、角点等处的奇点 , Quarterly Journal ofMathematics, 32, (1981), 19–127[Ts] Y.-L. Tsai, 三个点电荷的特殊情形, 非线性 24 (2011), no.12, 3299-321.

Ilia State University, Tbilisi, Georgia

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht