arXiv:2301.09327v1 [math.PR] 23 Jan 2023

主观概率、三值逻辑与复合条件句

Angelo Gilio[1] 和 Giuseppe Sanfilippo[2]

[1] 罗马“拉萨皮恩扎”大学 SBAI系，意大利罗马（退休）
angelo.gilio@sbai.uniroma1.it[2] 巴勒莫大学数学与计算机科学系，意大利巴勒莫
giuseppe.sanfilippo@unipa.it

摘要。本文首先阐述德·菲内蒂的主观理论。我们回顾投注方案和惩罚准则下相干性的概念，并分别考察无条件和条件情形。通过给出相干性的几何解释，我们证明这两种准则等价。我们还讨论基于适当评分规则的相干性概念。我们探讨德·菲内蒂三值逻辑中的条件事件及真值的数值表示。我们检验若干三值逻辑的选定基本逻辑性质和概率性质是否有效：克莱尼–卢卡西维茨–海廷–德·菲内蒂逻辑、卢卡西维茨逻辑、博赫瓦尔–克莱尼逻辑和索博钦斯基逻辑。我们验证这些逻辑无一满足所有性质。随后，我们在条件随机量的框架下，讨论我们处理条件事件合取与析取的方法。我们验证，该方法保留了所有基本逻辑性质和概率性质（包括 Fr´echet–Hoeffding 界）。我们还回顾了如何通过我们的合取概念刻画 p-一致性和 p- 蕴涵。

关键词：相干性；条件概率评估；投注方案；惩罚准则；凸包；三值逻辑；复合条件句。

1 引言

条件句在许多领域都发挥着重要作用，例如哲学、不确定推理心理学、人工智能、决策、非单调推理和知识表示。在一篇开创性论文中，德·菲内蒂（[13]）将条件事件引入为三事件，并提出了三值逻辑。许多学者都为条件句研究作出了重要贡献；例如参见
[1,9,10,17,19,20,23,29,32,33,43,45,46,47,50,51,52,54,55,60,63,65]。通常，在三值逻辑框架下，合取和析取条件句被定义为适当的条件句；例如参见
[2,3,4,6,21,42,53,62]。然而，这种做法无法保留适用于无条件事件的基本逻辑性质和概率性质。例如，条件事件的合取或析取的概率上下界与弗雷歇–霍芬丁界并不一致。对于复合条件句，更一般的处理方法是

在这种方法中，合取或析取的结果不再是一个三值对象，该方法见 [46,50]。相干性框架下也发展出一种相关理论（[32,33,34,39]）：通过将合取条件句和析取条件句定义为取值于区间[0, 1]内的适当条件随机量来实现。应用示例可参见 [31,59,60]。[22] 进一步发展了这种处理一般复合条件句的方法。在各种概率方法中，我们采用德·菲内蒂的主观解释，它以相干性原则为基础。德·菲内蒂理论能够灵活、渐进地处理概率不确定性。在这一理论中，我们可以直接为任意条件事件族赋予条件概率，无须要求其具有代数结构；而且，我们还能将概率相干地扩展到更多条件事件（德·菲内蒂概率基本定理及其推广）。另一个优点是能够妥善处理概率为零的条件事件。

下面列出本文探讨的主要方面。

- 我们回顾赌注方案中的相干性概念、惩罚准则和适当评分规则。• 我们回顾相干性的几何解释。• 我们在赌注框架下讨论条件事件 $A|H$ 的数值表示，指出逻辑值“真”“假”和“无效”对应于适当条件随机量的数值 1、0、 $P(A|H)$（即 $A|H$ 的示性函数）。• 我们考察无条件事件情形下成立的一些基本逻辑性质和概率性质。随后，我们研究四种三值逻辑，并验证它们都无法满足所有这些性质。• 我们阐述处理复合条件句的方法，其中合取和析取被定义为适当的条件随机量。我们验证，在我们的方法中，所有基本性质（以及其他更多性质）都得以保留。

本文结构如下。第2节中，我们回顾无条件事件概率评估的相干性概念，分别讨论投注方案和惩罚准则。随后，回顾德·菲内蒂给出的相干性几何刻画。第3节中，我们讨论德·菲内蒂三值逻辑中的条件事件及其真值的数值表示，并指出，条件事件$A|H$ 的逻辑值 void 对应的数值表示为 $P(A|H)$。然后，我们说明投注方案和惩罚准则下条件概率评估的相干性概念。我们通过证明这两种准则下相干性的几何解释相同，来验证两种准则的等价性。我们还简要讨论如何通过一般的适当评分规则来界定条件概率评估的相干性。第4节中，我们在三值逻辑框架下讨论复合条件句。我们考察四种合取：克利尼-卢卡西维茨-海廷-德·菲内蒂合取（$\wedge_K$）、卢卡西维茨合取（$\wedge_L$）；博赫瓦尔内部合取，或克利尼弱合取（$\wedge_B$）；索博钦斯基合取，或准合取（$\wedge_S$）。根据德摩根定律，我们还考虑相应的

析取 $\vee_K$、 $\vee_L$、 $\vee_B$、 $\vee_S$。接着，我们考察一些适用于无条件事件的基本逻辑和概率性质，并验证上述三值逻辑均不满足全部这些性质。第5节中，我们回顾针对条件事件的合取与析取所采用的方法：在相干性框架下，将它们定义为适当的条件随机量。我们验证，在考察条件事件时，适用于无条件事件的所有基本逻辑和概率性质仍然成立。最后，第 6 节中，我们考察我们处理复合条件句的方法所满足的一些其他性质。

2 相容概率赋值

几乎所有现实问题中都存在不确定性，我们必须面对最终会被判定为真或假的事实。我们用明确无歧义的逻辑命题来描述不确定事实，称之为事件。那么，事件 E 是一个二值逻辑实体，可以为真，也可以为假。 E 的示性函数用相同的符号表示；根据 E 为真还是为假，其值为 1 或 0。因此，像 sE 这样的符号表示量 s 与事件 E 的示性函数的乘积。必然事件和不可能事件分别记为 Ω 和 $\varnothing$。给定两个事件 E_1 和 E_2，我们用 $E_1 \wedge E_2$，或简写为 E_1E_2（分别用 $E_1 \vee E_2$）表示它们的逻辑合取（分别表示逻辑析取）。$_E$ 的否定记为 E。我们简记 $E_1 \subseteq E_2$，表示 E_1 逻辑蕴涵 E_2，$^-$，即 $E_1E_2 = \varnothing$。我们回顾一下：若由事件 E_1、……、E_n 生成的构元（或可能世界）的数量 m 为 2^n，则称事件 n 逻辑独立；也就是说，所有形如 $E_1^* \cdots E_n^*$ 的 2^n 合取，其中 $E_i^* \in \{E_i$、 $E_i^*\}$、 $i = 1$、2、……、n，都不是不可能事件。

在德·菲内蒂的主观主义理论中，个体在当前知识状态下赋予事件 E 的概率 $P(E)$，是其对 E 为真的信念程度的度量。为了对概率进行操作性评估，德·菲内蒂提出了两种等价的准则： (i) 投注方案； (ii)惩罚准则。在这两种准则中，概率评估的一致性都由相干性原则保证。所有概率性质都源于相干性；此外，如果某项概率评估不满足某个基本概率性质，那么它就不相容。

2.1 投注方案

按照这一准则，对 $P(E) = p$ 进行赋值意味着：对于每个实数 s，你都愿意支付金额 sp，并收取 sE，也就是根据 E 为真还是 E 为假，分别收取 s或 0。随机收益为$G = s(E-p) \in \{s(1-p),\ -ps\}$。若对于每个$s$，随机收益的取值不会同时为正或同时为负，则称赋值 p 相干。相干性要求 $P(E) \in [0,\ 1]$，其中 $P(\Omega) = 1$ 且 $P(\varnothing) = 0$。更一般地，给定任意事件族 $\mathcal{K}$，通过指定一个实值函数 $P:\ \mathcal{K} \to \mathcal{R}$，即可对 $\mathcal{K}$ 中的事件作出概率评估。对于每个

有限子族 $\mathcal{F} = \{E_1, \ldots\ldots, E_n\}$，其中 $\mathcal{K}$，我们用 $\mathcal{P} = (p_1, \ldots\ldots, p_n)$表示，其中$p_i = P(E_i)$，$i \in \{1, \ldots\ldots, n\}$，即对 $\mathcal{F}$的概率评估。在投注方案中，对于任意实数 $s_1, \ldots\ldots, s_n$，你同意支付 $\sum_{i=1}^n s_i p_i$，并收取随机金额 $\sum_{i=1}^n s_i E_i$。与配对 ($\mathcal{F}$、$\mathcal{P}$)相关的随机收益 G，是你收到的（随机）金额与支付金额之差，即 $G = \sum_{i=1}^n s_i E_i - \sum_{i=1}^n s_i p_i = \sum_{i=1}^n s_i(E_i - p_i)$。随机量 G 表示参与每笔交易$(E_i - p_i)$所获得的净收益；交易的规模及其含义（买入或卖出）分别由 s_i的大小和符号决定。我们注意到，将等式 $\Omega = (E_1 \vee E_1) \wedge \cdots \wedge (E_n \vee E_n)$右边展开后，可得由 2^n 个合取 $A_1 \cdots A_n$构成的析取，其中 $A_i \in \{E_i, E_i\}$，$i = 1, \ldots\ldots, n$。舍去与不可能事件 $\varnothing$相同的合取后，必然事件 Ω可表示为适当的析取 $\Omega = C_1 \vee \cdots \vee C_m$，其中 $C_1, \ldots\ldots, C_m$ 是由 $\mathcal{F}$生成的构元，或可能情形，且$m \leqslant 2^n$。在逻辑独立的情况下 $m = 2^n$。

例1。与 $\mathcal{F} = \{A, B\}$相关的构元，其中 $A \subseteq B$，为 $C_1 = AB$、$C_2 = AB$ 和 $C_3 = A\,B$。

用 g_h 表示当 C_h 为真时 G 的值，可得 $G \in \{g_1, \ldots\ldots, g_m\}$，其中$g_h = \sum_{i:\, C_h \subseteq E_i} s_i - \sum_{i=1}^n s_i p_i$。那么，在投注方案中，我们有

定义1。定义在 $\mathcal{K}$ 上的函数 P 称为相容，当且仅当对于每个整数 n、每个由 $\mathcal{K}$ 构成的有限子族 $\mathcal{F}$ 以及每个实数$s_1, \ldots\ldots, s_n$，都有：$\min G \leqslant 0 \leqslant \max G$。

条件 $\min G \leqslant 0 \leqslant \max G$ 等价地可写为：$\min G \leqslant 0$，或 $\max G \geqslant 0$。如定义1所示，概率评估相容，当且仅当在 n 投注的任何有限组合中，不会出现 $g_1, \ldots\ldots, g_m$ 全为正或全为负的情况（不存在荷兰簿）。

注1. 给定有限族$\mathcal{F} = \{E_1, \ldots, E_n\}$上的概率评估 $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_n)$，按照定义1，$\mathcal{P}$ 的相干性意味着：对于任意实数 $s_1, \ldots, s_n$，条件 $\min G \leqslant 0 \leqslant \max G$ 均成立。

例2. 设 $\mathcal{P} = (p_1, p_2, p_3) = (0.4, 0.3, 0.8)$ 是定义在 $\mathcal{F} = \{E_1, E_2, E_3\}$上的概率评估，其中 $E_1 = A$, $E_2 = B$和 $E_3 = A \vee B$满足 A, B逻辑独立。我们证明该定义在 $\mathcal{F}$ 上的赋值 $\mathcal{P}$ 是不相容的。令 $s_1 = s_2 = -s_3 = 1$。相应的随机收益为

$$G = (A - 0.4) + (B - 0.3) - (A \vee B - 0.8).$$

与 $\mathcal{F}$ 相关联的构元为 $C_1 = AB$、$C_2 = AB$、$C_3 = AB$ 和 $C_4 = A\,B$。与$C_1, \ldots\ldots, C_4$相关联的随机收益 G的可能取值 $g_1, \ldots\ldots, g_4$ 为

$$\begin{aligned}
g_1 &= (1 - 0.4) + (1 - 0.3) - (1 - 0.8) = .0.6 + 0.7 - 0.2 = 1.1,\\
g_2 &= (1 - 0.4) + (-0.3) - (1 - 0.2) = 0.6 - 0.3 - 0.2 = 0.1,\\
g_3 &= (-0.4) + (1 - 0.3) - (1 - 0.2) = -0.4 + 0.7 - 0.2 = 0.1,\\
g_4 &= (0 - 0.4) + (0 - 0.3) + (1 - 0.2) = -0.4 - 0.3 + 0.8 = 0.1.
\end{aligned}$$

由于 G 的可能取值全为正数，因此 $\mathcal{P}$ 不相容；事实上，在这种情况下 $P(A \vee B) > P(A) + P(B)$，而相干性要求$\max\{P(A)、P(B)\} \leqslant P(A \vee B) \leqslant \min\{P(A) + P(B)、1\}$。

2.2 惩罚准则

相干性的概念也可以通过惩罚准则来定义，而惩罚准则与投注方案等价。对于在 $\mathcal{F} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ 上的赋值 $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_n)$，我们关联一个随机损失 $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n}(E_i - p_i)^2$，它表示（二元）随机点 $(E_1, \ldots, E_n) \in \{0,1\}^n$ 与先验期望点 $\mathcal{P}$ 之间距离的平方。于是，根据惩罚准则，我们有

定义 2. 定义在 $\mathcal{K}$ 上的函数 P 称为相容，当且仅当对于每个整数 n，以及 $\mathcal{K}$ 的每个有限子族 $\mathcal{F} = \{E_1, \ldots, E_n\}$，将 P 在 $\mathcal{F}$ 上的限制记为 $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_n)$，不存在 $\mathcal{P}^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$ 使得：$\mathcal{L}^* < \mathcal{L}$，其中 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}^*$ 分别是与 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}^*$ 相关联的损失。

相干性的几何解释。在 de Finetti 概率论中，相干性也可用几何解释来刻画。我们用一个点 $Q_h = (q_{h1}$ 表示每个构元 C_h，……，$q_{hn})$；对于每个指标 i，若 $C_h \subseteq E_i$，则为 $_q{}_{hi} = 1$；若 $C_h \subseteq E_i$，则为 $q_{hi} = 0$。注意，q_{hi} 不过是当C_h为真时，E_i 的示性函数所取的值。我们用 $\mathcal{I}$ 表示点 Q_1，……，Q_m 的凸包。

注 2. 给定有限族 $\mathcal{F} = \{E_1$，……，$E_n\}$ 上的概率评估 $\mathcal{P} = (p_1$，……，$p_n)$，按照定义 2，相干性意味着不存在 $\mathcal{P}^* = (p_1^*$，……，$p_n^*)$ 使得 $\mathcal{L}^* < \mathcal{L}$；$\mathcal{P}$ 的相干性也等价于几何条件 $\mathcal{P} \in \mathcal{I}$ ([15])。

我们稍后将证明（见注释 4）

$$\min G \leqslant 0 \leqslant \max G \iff \mathcal{P} \in \mathcal{I}. \tag{1}$$

因此，根据注释 1 和 2，为了确定 $\mathcal{F}$ 上相干赋值的集合，定义 1 和 2 是等价的。

我们回顾一下，如果定义在 $\mathcal{K}$ 上的函数 P 是相干的，那么它满足所有基本概率性质。此外，它可以扩展为一个有限可加概率 P'，定义在每个代数 $\mathcal{A}$ 上，且 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$。

3 相干条件概率赋值

更一般的情形是，我们希望评估条件概率 $P(A|H)$，它表示在假定事件 H 为真（且不作其他假设）的情况下，对事件 A 的信念程度。$P(A|H)$ 也称为“给定 H时A 的概率”，或条件事件的概率

$A|H$，其中 $H \neq \emptyset$。
请注意，许多哲学家和心理学家在研究条件句时，认为方程（例如，见 [16,20,64]）或条件概率假说（CPH）（[11,54,59]）有效，因为他们判定条件句“如果 H，那么 A”的概率与条件概率 $P(A|H)$ 一致。

3.1 真值的数值表示

在 de Finetti 理论（[13]）中，条件事件 $A|H$ 被视为一个三值逻辑实体，其取值为真、假或无效，具体取决于 AH 为真、 $A\bar{H}$ 为真还是 H 为真（根据 $\bar{\ }$ $\bar{\ }$）。

如何恰当地定义 $A|H$ 的示性函数，即如何用数值表示 $A|H$ 的真值?

我们注意到，与无条件情形一样，真和假的数值对应项分别为 1 和 0。至于第三种取值“无效”，在 de Finetti 的基于相干性的途径中（[13], ，另见 [14]），对 $P(A|H)$ 的评估在操作上基于以下条件赌注:

（方案 1）。当 H 尚不确定时，你对 $P(A|H)$ 进行评估，记为 $P(A|H) = x$。H 得到验证后，赌注生效，你同意支付金额 sx，以此押注 A: 若 A 为真，则收取 s；若 A 为假，则收取 0。若 H 未得到验证，赌注便不生效。在这个条件赌注中，我们可以说：如果 H，那么我押注 A；也就是说，在 H 为真的条件下押注 A。

只需考虑赌注生效的情形（即 H 得到验证时），即可检验赋值 $P(A|H) = x$ 的相干性。赌注生效时（即 H 为真时）的随机收益为 $G_H = s(A - x) \in \{s(1 - x), -sx\}$。因此，当且仅当 $\min G_H \leqslant 0 \leqslant \max G_H$ 时， x 相干；也就是说， $x \in [0, 1]$，其中 $x = 1$; 或者，当 $AH = H$ 时为 $x = 0$，当 $AH = \emptyset$ 时则分别为 $AH = \emptyset$。

前述条件赌注可以用以下等价形式表示：（方案 2）。如果您评估 $P(A|H) = x$，那么（在得知 $\bar{\ }$的真值之前）您接受支付 sx，并在 AH 为真时收取 s，或在 $A\bar{H}$ 为真时收取 0，或在 H 为真时收取 sx（赌注取消）。在此方案中，$G = sH(A - x)$，其中$G \in \{s(1 - x)$、$-sx$、$0\}$和 $G_H \in \{s(1 - x)$，$-sx\}$。根据定义，为检验相干性，只考虑赌注未被取消的情况。因此， x 的相干性等价于 $\min G_H \leqslant 0 \leqslant \max G_H$，即

$$\min\{s(1 - x), -sx\} \leqslant 0 \leqslant \max\{s(1 - x), -sx\}.$$

3.2 条件事件的第三个值

聚焦于逻辑值 void 的数值对应物，我们回顾一下：在对非条件事件 A 下注时，例如，你支付 $P(A)$，并获得（示性函数的值） A。同样，在条件情形下，你支付例如_$P(A|H)$，并获得 $AH + P(A|H)H$，它应当表示条件事件的示性函数。那么，定义 $A|H$ 的示性函数的自然方式是

（用同一符号表示）是（参见例如 [35, 第2节。2]）

$$A|H = AH + x\bar{H} = \begin{cases} 1, \text{ if } AH \text{ is true}, \\ 0, \text{ if } \bar{A}H \text{ is true}, \\ x, \text{ if } \bar{H} \text{ is true}, \end{cases}$$

其中 $x = P(A|H)$。因此， $A|H$的第三个取值“空缺”在数值上就是条件概率 $P(A|H)$。当 H 为假时，将 $P(A|H)$ 选作示性函数的第三个取值，这种做法已在其他研究中探讨过（例如参见 [8,27,45,48,49,50,63]）。注意，作为 $P(AH) = P(A|H)P(H)$，用 $\mathbb{P}(\cdot)$ 表示先验期望的符号，对于随机量 $A|H$，有

$$\mathbb{P}(A|H) = \mathbb{P}(AH + x\bar{H}) = P(AH) + xP(\bar{H}) = x[P(H) + P(\bar{H})] = x = P(A|H).$$

因此，德·菲内蒂提出的条件赌注可以解释为对条件事件 $A|H$ 的赌注，或对“若 H，则 A”这一条件句的赌注。从这个意义上说，条件赌注与对条件句的赌注这两个概念是一致的。注意，使用示性函数 $A|H$，随机收益 $G = sH(A - x)$ 也可以写成 $G = s(A|H - x) = s(AH + xH) - sx$。

还有一种等价的方案可用于评估 $P(A|H)$:

（方案3）。考虑随机量 $Y = AH + yH$，根据定义， y 是 Y的先验期望。为了评估 y，在赌注框架下，例如，你同意支付 y，并根据 AH 为真、 $\bar{A}H$ 为真或 $\bar{H}$ 为真，分别收取1、0或 y。检验相干性时，无论 y 取何值，都要舍弃收回已支付金额 y 的所有情形；也就是说，舍弃 H 为真的情形。当赌注未被取消时，差值 $Y - A|H$ 为零，因此其先验期望必须为0，即 $\mathbb{P}(Y - A|H) = y - x = 0$；因此 $y = x = P(A|H)$ 且 $Y = A|H$。换言之，$A|H$ 也可以作为随机量 $AH + yH$ 引入，满足以下条件： (i) $y = \mathbb{P}(AH + yH)$；检验相干性时，舍弃收回已支付金额 y的情形，即 H 为真。形式上，在条件 (i) 和 (ii)下，有： $AH + yH = (AH + yH)|H = AH|H + yH|H = A|H$。

3.3 条件概率评估的投注方案

给定任意一族条件事件 $\mathcal{K}$，通过指定一个实值函数 P： $\mathcal{K} \to \mathcal{R}$，即可对 $\mathcal{K}$ 中的事件进行概率评估。对于 $\mathcal{K}$ 的每个有限子族 $\mathcal{F} = \{E_1|H_1, \ldots, E_n|H_n\}$，将 P 在 $\mathcal{F}$ 上的限制记作 $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_n)$，其中 $p_i = P(E_i|H_i)$， $i = 1, \ldots, n$。在投注方案中，与单个赋值 p_i 相关联的随机收益为 $G_i = s_iH_i(E_i - p_i) = s_i(E_i|H_i - p_i)$，其中 s_i 是任意实数。与赋值 $\mathcal{P}$ 相关联的随机收益为 $G = \sum_{i=1}^n G_i = \sum_{i=1}^n s_iH_i(E_i - p_i) = \sum_{i=1}^n s_i(E_i|H_i - p_i)$，其中 $s_1, \ldots, s_n$ 是任意实数。随机收益 G 可视为差值 $\sum_{i=1}^n s_iE_i|H_i - \sum_{i=1}^n s_ip_i$，即你所收到的 $\sum_{i=1}^n s_iE_i|H_i$ 与你所支付的 $\sum_{i=1}^n s_ip_i$ 之间的差。令 $\mathcal{H}_n = H_1 \vee \cdots \vee H_n$，并将 G 在 $\mathcal{H}_n$ 上的限制记作 $G_{\mathcal{H}_n}$，

也就是说，这是至少有一笔赌注未被撤销时的随机收益。我们注意到，通过展开等式右边

$$\Omega = (E_1H_1 \vee \bar{E}_1H_1 \vee \bar{H}_1) \wedge \cdots \wedge (E_nH_n \vee \bar{E}_nH_n \vee \bar{H}_n),$$

我们得到 3^n 合取的析取 $A_1 \cdots A_n$，其中 $A_i \in \{E_iH_i, E_i\bar{H}_i, \bar{H}_i\}$，$i = 1, \ldots, n$。舍弃与不可能事件 $\varnothing$ 重合的合取后，必然事件 Ω 可表示为适当的析取 $\Omega = C_0 \vee C_1 \cdots \vee C_m$，其中 $C_1, \ldots, C_m$ 是在逻辑上蕴含 $\mathcal{H}_n$ 的构元 $\bar{}$ $\bar{}$，且 $m \leqslant 3^n - 1$。若 $H_1 \cdots H_n \neq \varnothing$，则记作 C_0。当 C_0 为真时，$G = g_0 = 0$（所有赌注均作废）。注意，对于每个 $h = 1, \ldots, m$，与构元 C_h 相关联的 $G_{\mathcal{H}_n}$ 的值 g_h 由 $g_h = \sum_{i:\ C_h \subseteq E_iH_i} s_i(1-p_i) - \sum_{i:\ C_h \subseteq \bar{E}_iH_i} p_is_i$ 给出。下面给出相干性的定义。

定义 3。定义在任意条件事件族 $\mathcal{K}$ 上的函数 P，称为相干，当且仅当对于每个整数 n、$\mathcal{K}$ 的每个有限子族 $\mathcal{F} = \{E_1|H_1、\ldots\ldots、E_n|H_n\}$，以及每个实数 $s_1、\ldots\ldots、s_n$，均有：$\min G_{\mathcal{H}_n} \leqslant 0 \leqslant \max G_{\mathcal{H}_n}$。

条件 $\min G_{\mathcal{H}_n} \leqslant 0 \leqslant \max G_{\mathcal{H}_n}$ 等价地可写为：$\min G_{\mathcal{H}_n} \leqslant 0$，或 $\max G_{\mathcal{H}_n} \geqslant 0$。如定义 3 所示，概率赋值相干，当且仅当在 n 赌注的任何有限组合中，舍弃所有赌注均被取消的情况后，随机收益的值 $g_1、\ldots\ldots、g_m$ 不会全为正或全为负（不存在荷兰簿）。

注 3。给定有限族 $\mathcal{F} = \{E_1|H_1、\ldots\ldots、E_n|H_n\}$ 上的概率赋值 $\mathcal{P} = (p_1、\ldots\ldots、p_n)$，与无条件情形不同（见注 1），条件 $\min G_{\mathcal{H}_n} \leqslant 0 \leqslant \max G_{\mathcal{H}_n}$ 是 $\mathcal{P}$ 相干的必要条件，但并非充分条件，下一例将对此作出说明。

例 3. 设 E_1, E_2, H_1, H_2 为四个事件，其中 $E_1H_1 = \varnothing$，$H_1 \neq \varnothing$，$H_2 \neq \varnothing$，$\bar{H}_1E_2H_2 \neq \varnothing$。给定关于 $\mathcal{F} = \{E_1|H_1, E_2|H_2\}$ 的概率赋值 $\mathcal{P} = (\frac{1}{2}, 1)$，随机收益为 $G = s_1H_1(E_1 - \frac{1}{2}) + s_2H_2(E_2 - 1)$。我们观察到，当构元 $H_1E_2H_2$ 为真时，对于每个 s_1, s_2，都有 $G_{\mathcal{H}_2} = s_1 \cdot 0(E_1 - \frac{1}{2}) + s_2 \cdot 1(1-1) = 0$。因此，条件 $\min G_{\mathcal{H}_2} \leqslant 0 \leqslant \max G_{\mathcal{H}_2}$ 得到满足。然而，赋值 $\mathcal{P}$ 不相容，因为与子赋值 $P(E_1|H_1) = \frac{1}{2}$ 相关的条件 $\min G_{H_1} \leqslant 0 \leqslant \max G_{H_1}$ 未得到满足。事实上，由于 $E_1H_1 = 0$，根据 H_1 为真还是为假，分别有 $G = -\frac{1}{2}s_1$ 或 $G = 0$。于是，对于每个 $s_1 > 0$，都有 $G_{H_1} = -\frac{1}{2}s_1 < 0$。

3.4 公理化条件概率与相干性

我们注意到，给定一个定义在 $\mathcal{B} \times \mathcal{H}$ 上的函数 P，其中 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{H}$ 是任意事件族，且对于每个 $H \in \mathcal{H}$ 都有 $H \neq \varnothing$，如果满足以下条件，则 P 具有条件概率的性质。

对于每个 $E\in\mathcal{B}$ 和 $H\in\mathcal{H}$, (i) $P(E|H)\geqslant 0$ 和 $P(H|H)=1$；若 $E_1E_2H=\varnothing$, 则 (ii) $P[(E_1\vee E_2)|H]=P(E_1|H)+P(E_2|H)$、$E_1$、$E_2\in\mathcal{B}$、$H\in\mathcal{H}$; 对于每个 E, (iii) $P(EH|K)=P(E|HK)P(H|K)$、EH、$H\in\mathcal{B}$ 和 K、$HK\in\mathcal{H}$。

我们回顾一下：若 P相干，则性质 (i)、(ii) 和 (iii) 均成立；然而，一般而言，这些性质不足以保证 P的相干性。下面列出一些条件，它们与 (i)、(ii) 和 (iii) 结合，可推出 P 相干（例如参见 [8,18,25,28,37,44,56,57,61]）：

(a) $\mathcal{B}$ 是布尔代数，且 $\mathcal{H}=\mathcal{B}^0=\mathcal{B}\backslash\{\varnothing\}$; (b) $\mathcal{B}$ 是布尔代数，且 $\mathcal{H}\cup\{\varnothing\}$ 是 $\mathcal{B}$ 的子代数; (c) $\mathcal{B}$ 是布尔代数，且 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{B}\backslash\{\varnothing\}$的可加（或 P-拟可加）子集; (d) $\mathcal{B}$ 是布尔代数，$\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{B}\backslash\{\varnothing\}$的非空子集，且满足以下条件（[12]）

$$\prod_{i=1}^{n}P(E_i|H_i)=\prod_{i=1}^{n}P(E_i|H_{i+1}),$$

其中 $E_i\in\mathcal{B}$、$H_i\in\mathcal{H}$、$E_i\subseteq H_iH_{i+1}$、$i=1$、.....、n和 $H_{n+1}=H_1$。
当 P 相容时，称其为条件概率。特别地，当$\mathcal{B}$ 是一个代数且 $\mathcal{H}=\mathcal{B}^0$, P 时，称其为完全条件概率（[18]）。此外，若定义在任意条件事件族 $\mathcal{K}$上的函数 P 相容，则可将其扩展为定义在 $\mathcal{B}\times\mathcal{B}^0\supseteq\mathcal{K}$上的完全条件概率 P'。

一致性的几何表示。设 $\mathcal{P}=(p_1,\ldots,p_n)$，其中 $p_i=P(E_i|H_i)$，$i=1,\ldots,n$ 是定义在 $\mathcal{F}=\{E_1|H_1,\ldots,E_n|H_n\}$上的概率评估。我们将每个构元 C_h 表示为一个点 $Q_h=(q_{h1},\ldots,q_{hn})$，其中（对每个指标 i），根据 $C_h\subseteq E_i$、$C_h\subseteq E_i$ 或 $C_h\subseteq H_i$是否成立，分别有 $q_{hi}=1$、$q_{hi}=0$ 或 $q_{hi}=p_i$。注意，q_{hi} 是当 C_h 为真时示性函数 $E_i|H_i$ 所取的值；于是，随机向量$(E_1|H_1,\ldots,E_n|H_n)$ 的可能取值是点 $Q_1,\ldots,Q_m,Q_0$，其中 $Q_0=\mathcal{P}$。点Q_h在（[27],，另见 [26]）中被引入，称为 $(\mathcal{F},\mathcal{P})$-原子，或广义构成项。对于每个构元 C_h，随机收益 $G=\sum_{i=1}^{n}s_i(E_i|H_i-p_i)$ 的相应取值 g_h 由 $g_h=\sum_{i=1}^{n}s_i(q_{hi}-p_i)=f(Q_h-\mathcal{P})=f(Q_h)-f(\mathcal{P})$给出，其中函数 f定义为 $f(x_1,\ldots,x_n)=s_1x_1+\cdots+s_nx_n$。注意，对于每个常数 k，方程 $s_1x_1+\cdots+s_nx_n=k$ 描述了 $\mathbb{R}^n$中的一个超平面。特别地，$\mathcal{P}$ 属于方程为 $s_1x_1+\cdots+s_nx_n=f(\mathcal{P})$的超平面$\pi_{\mathcal{P}}$；此外，每个 Q_h都属于方程为 $s_1x_1+\cdots+s_nx_n=f(Q_h)$的超平面 π_h。我们注意到，超平面 $\pi_{\mathcal{P}},\pi_1,\ldots,\pi_m$彼此平行。我们用 $\mathcal{I}$表示凸包$Q_1,\ldots,Q_m$；然后区分两种情况：(i) $\mathcal{P}\notin\mathcal{I}$；$(ii)$ $\mathcal{P}\in\mathcal{I}$。

在 (i)的情况下，存在一个与 $\pi_{\mathcal{P}},\pi_1,\ldots,\pi_m$ 平行的超平面 π^*，它将 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{I}$ 分隔开，因此

$$f(Q_h)>k^*>f(P),\ h=1,\ldots,m,\ \text{ or }\ f(Q_h)<k^*<f(P),\ h=1,\ldots,m.$$

Then

$$g_h = f(Q_h) - f(P) > 0\,,\ h = 1,\ldots,m,\ \text{ or }\ g_h = f(Q_h) - f(P) < 0\,,\ h = 1,\ldots,m,$$

即 $\min G_{\mathcal{H}_n} > 0$，或 $\max\ G_{\mathcal{H}_n} < 0$。因此，条件 $\mathcal{P} \notin \mathcal{I}$ 意味着相干性条件 $\min\ G_{\mathcal{H}_n} \leqslant 0 \leqslant \max\ G_{\mathcal{H}_n}$ 不成立。在 (ii) 的情况下，存在一个向量 $\Lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$，使得

$$\mathcal{P} = \sum_{h=1}^{m} \lambda_h Q_h\,,\ \ \sum_{h=1}^{m} \lambda_h = 1\,,\ \ \lambda_h \geqslant 0\,,\ h = 1,\ldots,m.$$

Then

$$\sum_{h=1}^{m} \lambda_h g_h = \sum_{h=1}^{m} \lambda_h [f(Q_h) - f(\mathcal{P})] = \sum_{h=1}^{m} \lambda_h f(Q_h) - f(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P}) - f(\mathcal{P}) = 0\,,$$

因此：$\min\{g_1,\ldots,g_m\} \leqslant 0 \leqslant \max\{g_1,\ldots,g_m\}$；也就是说，$\min\ \mathcal{G}_{\mathcal{H}_n} \leqslant 0 \leqslant \max\ \mathcal{G}_{\mathcal{H}_n}$。因此，$\mathcal{P} \in \mathcal{I}$意味着 $\min\ G_{\mathcal{H}_n} \leqslant 0 \leqslant \max\ G_{\mathcal{H}_n}$。总之，根据对情形 (i) 和 (ii) 的分析，可得：

$$\mathcal{P} \in \mathcal{I} \iff \min G_{\mathcal{H}_n} \leqslant 0 \leqslant \max G_{\mathcal{H}_n}. \tag{2}$$

利用一个适当的替代定理（[24, 定理 2.9], 另见 [35, 定理 1]），也可以推出公式 (1)。

注释 4. 我们注意到，当 $H_i = \Omega$, $i = 1,\ldots,n$ 时，有 $\mathcal{H}_n = \Omega$。此外，所有点 Q_h's 都具有二元分量，即 $Q_h \in \{0,1\}^n$, $h = 1,\ldots,n$。那么，在特殊情形 $H_i = \Omega$, $i = 1,\ldots,n$ 下，公式 (2) 就变成公式 (1)。

根据定义 3 和公式 (2)，我们得到相干性的如下几何刻画。

定理 1. 定义在任意条件事件族 $\mathcal{K}$ 上的函数 P 是相容的，当且仅当，对于每个整数 n，对于 $\mathcal{K}$ 的每个有限子族 $\mathcal{F} = \{E_1|H_1,\ldots,E_n|H_n\}$，记 $\mathcal{P}$ 为 P 在 $\mathcal{F}$ 上的限制，有 $\mathcal{P} \in \mathcal{I}$。

下一个例子阐明了前述刻画。

例 4. 给定四个事件 A、H、B、K，其中 $H \neq \emptyset$、$K \neq \emptyset$，假设 $\bar{A}HK = AH\bar{B}K = H\bar{B}K = AHB\bar{K} = \emptyset$。那么，由族 $\mathcal{F} = \{A|H,\ B|K\}$ 生成的构元为

$$C_0 = \bar{H}\bar{K}\,,\ C_1 = AHBK\,,\ C_2 = \bar{H}BK\,,\ C_3 = \bar{A}H\bar{K}\,,\ C_4 = \bar{A}H\bar{B}K\,,$$

并且，通过设置 $P(A|H) = x, P(B|K) = y$，点 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 是

$$Q_1 = (1,1)\,,\ Q_2 = (x,1)\,,\ Q_3 = (0,y)\,,\ Q_4 = (0,0)\,,$$

其中 $Q_0 = \mathcal{P} = (x, y)$。首先我们注意到，关于定义在 $A|H$ 上的子评估x （相应地，$B|K$ 上的子评估 y），条件 $\mathcal{P} \in \mathcal{I}$可化简为 $x \in [0,1]$ （相应地，$y \in [0,1]$）；因此 $(x, y) \in [0,1]^2$。给定任意 $(x, y) \in [0,1]^2$，条件 $\mathcal{P} \in \mathcal{I}$成立，当且仅当 $x \leqslant y$。事实上，若 $x = y + a$，且 $a > 0$，则方程为 $x = y + \frac{a}{2}$ 的直线将 $\mathcal{P}$ 与凸包 $\mathcal{I}$ 分隔开，因此 $\mathcal{P}$ 不相容。相反，若 $x \leqslant y$，则 $\mathcal{P} \in \mathcal{I}$。那么，$(x, y)$ 相容，当且仅当 $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$。

注意，在例 4 中，$A|H \subseteq B|K$成立，即 $A|H$ 为真蕴含$B|K$ 为真，且 $B|K$ 为假蕴含 $A|H$ 为假（两个条件事件之间的 Goodman-Nguyen 包含关系）。

3.5 条件概率评估的惩罚准则

相干性的概念也可以通过惩罚准则来定义，该准则与投注方案等价。对于在 $\mathcal{F} = \{E_1|H_1, \ldots, E_n|H_n\}$ 上的赋值 $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_n)$，我们关联一个随机损失 $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} H_i(E_i - p_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(E_i|H_i - p_i)^2$，它表示随机点 $(E_1|H_1, \ldots, E_n|H_n) \in \{0, 1, p_i\}^n$ 与先验期望点 $\mathcal{P}$之间距离的平方。更确切地说，记 L_h 为与构元 C_h相关联的 $\mathcal{L}$ 的值，则有 $L_h = \overline{\mathcal{P}Q_h}^2$，其中 $L_0 = \overline{\mathcal{P}Q_0}^2 = 0$。给定另一个先验期望点$\mathcal{P}^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$，我们用 $\mathcal{L}^*$ 表示与 $\mathcal{P}^*$相关联的损失。那么，在惩罚准则下，有

定义 4. 族 $\mathcal{F} = \{E_1|H_1, \ldots, E_n|H_n\}$ 上的概率评估 $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_n)$ 当且仅当不存在$\mathcal{P}^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$ 使得：对于每个 h，都有 $L_h^* \leqslant L_h$，且至少对一个指标 h，有 $L_h^* < L_h$，此时称其为相容。

相干性的几何解释。给定族 $\mathcal{F} = \{E_1|H_1, \ldots, E_n|H_n\}$上的概率评估 $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_n)$，对于 $\mathcal{F}$ 的每个子族 $\mathcal{S}$，我们用 $\mathcal{P}_\mathcal{S}$ 表示 $\mathcal{P}$ 在 $\mathcal{S}$ 上的子评估，用 $\mathcal{I}_\mathcal{S}$ 表示与 $(\mathcal{S}, \mathcal{P}_\mathcal{S})$这一对相关联的凸包。然后，根据定义 5，可以验证 [27,定理 4.4]

$$\mathcal{P} \text{ is coherent } \iff \mathcal{P}_\mathcal{S} \in \mathcal{I}_\mathcal{S},\ \forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}. \tag{3}$$

下面给出惩罚准则下相干性的一般定义

定义 5. 定义在任意条件事件族$\mathcal{K}$ 上的函数 P 称为相容的，当且仅当，对于每个整数 n，对于每个子族$\mathcal{F} = \{E_1|H_1, \ldots, E_n|H_n\} \subseteq \mathcal{K}$，将$P$在 $\mathcal{F}$上的限制记为 $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_n)$，不存在 $\mathcal{P}^* = (p_1^*, \ldots, p_n^*)$ 使得：$\mathcal{L}^* \leqslant \mathcal{L}$ 且 $\mathcal{L}^* \neq \mathcal{L}$，也就是说，对于每个 h，$L_h^* < L_h$ 对至少一个指标 h成立。

根据公式 (2) 和 (3)，基于投注方案的相干性概念与惩罚准则是等价的，因为在这两种情况下，函数 P 在 $\mathcal{K}$ 上的相干性都意味着 ([26],[27])

$$\mathcal{P} \in \mathcal{I}，\text{对于每个有限子族 } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}.$$

我们注意到，损失 $\mathcal{L}$ 可以写成 $\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{L}_i$，其中 $\mathcal{L}_i=H_i(E_i-p_i)^2$ 是与赋值 $P(E_i|H_i)=p_i$相关的损失。若将损失 $H_i(E_i-p_i)^2$ 替换为 $H_i s(E_i,p_i)$，则可得到定义 5 的推广，其中 $s(E_i,p_i)$ 是给定的（严格）适当评分规则。对于给定事件 E_i 的概率，评分规则是示性函数 E_i 和所赋概率 $P(E_i)=p_i$的函数。假设有人请你断言 $P(E_i)$，并且你知道自己的断言将按照规则 $s(E_i,P(E_i))$评分；此外，假设你的信念程度为 $P(E)=p$，但你却宣布了另一个数值 $P(E)=x$，希望借此获得“更好”的分数。如果通过指定一个不同于 p的值 x 无法期望获得更好的分数，那么该规则就称为适当评分规则。分数可以代表奖励或惩罚；我们将分数视为惩罚，因此，改善分数意味着降低分数。定义 5 中使用的评分规则 $s(E_i,p_i)=(E_i-p_i)^2$是适当评分规则，称为布里尔二次评分规则。于是，我们有 ([38])

定义 6. 设 s 为一个适当评分规则， P 为定义在任意条件事件族 $\mathcal{K}$上的函数。对于每个整数 n，以及每个子族$\mathcal{F}=\{E_1|H_1、\ldots\ldots、E_n|H_n\}\subseteq\mathcal{K}$，我们用 $\mathcal{P}=(p_1、\ldots\ldots、p_n)$ 表示P在 $\mathcal{F}$上的限制，并用 $\mathcal{L}=\sum_{i=1}^{n}H_i s(E_i、p_i)$ 表示与 $\mathcal{P}$相关联的评分。函数P 称为相容的，当且仅当对于每个 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{K}$，不存在 $\mathcal{P}^*=(p_1^*、\ldots\ldots、p_n^*)$ 使得： $\mathcal{L}^*\leqslant\mathcal{L}$ 且 $\mathcal{L}^*\neq\mathcal{L}$，其中 $\mathcal{L}^*=\sum_{i=1}^{n}H_i s(E_i、p_i^*)$。

我们用 Π 表示定义在 K上的相干条件概率评估 P 的集合，用 Π_s 表示与适当评分规则 s相关联的相干条件概率集合。于是，对于每个（有界、连续且严格的）适当评分规则 s ([38, 定理 4])，都有 $\Pi_s=\Pi$。

4 三值逻辑与复合条件句

本节分析在三值逻辑框架下定义的若干合取概念，其中合取是一个条件事件，其真值集合为 {真、假、无效} （例如，参见 [5,7]）。我们考察它们是否满足一些基本的逻辑性质和概率性质。具体而言，我们考察以下合取：克利尼-卢卡西维茨-海廷合取（$\wedge_K$），又称德·菲内蒂合取（[13]）；卢卡西维茨合取（$\wedge_L$）；博赫瓦尔内部合取，又称克利尼弱合取（$\wedge_B$）；索博钦斯基合取，又称准合取（$\wedge_S$）。

- $(A|H)\wedge_K(B|K)=AHBK|(AHBK\vee\overline{A}H\vee\overline{B}K)$;
- $(A|H)\wedge_L(B|K)=AHBK|(AHBK\vee\overline{A}H\vee\overline{B}K\vee\overline{H}\,\overline{K})$;
- $(A|H)\wedge_B(B|K)=AHBK|HK=AB|HK$;
- $(A|H)\wedge_S(B|K)=[(AH\vee\overline{H})\wedge(BK\vee\overline{K})]|(H\vee K)=$

$=[(A\vee\overline{H})\wedge(B\vee\overline{K})]|(H\vee K)$。

我们回顾一下，对于任意条件事件 $A|H$，其否定 $A|H$ 定义为$\overline{A|H}=A|H$。根据德摩根定律，我们在下面列出与前述合取列表相对应的析取。

– $(A|H) \vee_K (B|K)$ 是 $(A|H) \wedge_K (B|K)$的否定，这与 $AHBK|(AHBK \vee AH \vee BK)$一致；于是

$$(A|H) \vee_K (B|K) = (AH \vee BK)|(\bar{A}H\bar{B}K \vee AH \vee BK)\,;$$

– $(A|H) \vee_L (B|K)$ 是 $(A|H) \wedge_L (B|K)$的否定，它与 $AHBK|(AHBK \vee AH \vee BK \vee \overline{H}\,\overline{K})$相同；于是

$$(A|H) \vee_L (B|K) = (AH \vee BK)|(\bar{A}H\bar{B}K \vee AH \vee BK \vee \overline{H}\,\overline{K})\,;$$

– $(A|H) \vee_B (B|K)$ 是 $(A|H) \wedge_B (B|K)$的否定，它与 $ABHK|HK = AB|HK$相同；于是

$$(A|H) \vee_B (B|K) = (A \vee B)|HK\,.$$

– $(A|H) \vee_S (B|K)$ 是 $(A|H) \wedge_S (B|K)$的否定，它与 $(AH \vee \overline{H}) \wedge (BK \vee \overline{K})|(H \vee K)$相同。于是

$$(A|H) \vee_S (B|K) = (AH \vee BK)|(H \vee K)\,.$$

4.1 一些基本逻辑性质

我们考察一些基本逻辑性质，并检验前述合取概念是否满足这些性质。首先考察以下性质：P1. 给定两个事件 A 和 B，有

$$A \subseteq B \iff A \wedge B = A.$$

我们将 A 和 B 替换为条件事件 $A|H$ 和 $B|K$；此外，我们使用条件事件之间的 Goodman-Nguyen 包含关系，其定义见（[41, 公式 (3.18)]）

$$A|H \subseteq B|K \iff AH \subseteq BK \text{ and } \bar{B}K \subseteq \bar{A}H\,.$$

请注意，$A|H \subseteq B|K$ 相当于 $AHBK = AHK = HBK = \varnothing$。

我们将通过验证等式，检查每个 $\wedge \in \{\wedge_K, \wedge_L, \wedge_B, \wedge_S\}$的 P1 有效性

$$A|H \subseteq B|K \iff (A|H) \wedge (B|K) = A|H.$$

考虑合取 $\wedge_K$，当 $A|H \subseteq B|K$时，有 $AHBK = AH$ 和 $\overline{A}H \vee \overline{B}K = \overline{A}H$；于是，

$$(A|H) \wedge_K (B|K) = AHBK|(AHBK \vee \overline{A}H \vee \overline{B}K) = AH|(AH \vee \overline{A}H) = A|H,$$

因此 $A|H \subseteq B|K \implies (A|H) \wedge_K (B|K) = A|H$。

反过来，如果 $(A|H) \wedge_K (B|K) = A|H$，那么 $A|H \subseteq B|K$，因为 $AHBK = AHK = HBK = \varnothing$。因此，$\wedge_K$ 满足性质 P1，也就是说（另见 [41,公式 (3.17)]），

$$A|H \subseteq B|K \iff (A|H) \wedge_K (B|K) = A|H.$$

关于合取 $\wedge_L$，当 $A|H \subseteq B|K$ 时，有

$$(A|H) \wedge_L (B|K) = AHBK|(AHBK \vee \overline{A}\,H \vee \overline{B}\,K \vee \overline{H}\,\overline{K}) = AH|(H \vee \bar{H}\bar{K}).$$

我们注意到，当 HK 为真时，$(A|H) \wedge_L (B|K)$ 为假，而 $A|H$ 无效；因此 $(A|H) \wedge_L (B|K) \neq A|H$。所以 $\wedge_L$ 不满足性质 P1。

关于合取 $\wedge_B$，当 $A|H \subseteq B|K$时，有

$$(A|H) \wedge_B (B|K) = AHBK|HK = A|HK.$$

我们注意到，当 AHK 为真时，$(A|H) \wedge_B (B|K)$ 无效，而 $A|H$ 为假；因此 $(A|H) \wedge_B (B|K) \neq A|H$。所以 $\wedge_B$ 不满足性质 P1。

关于合取 $\wedge_S$，当 $A|H \subseteq B|K$时，有

$$(A|H) \wedge_S (B|K) = (AH \vee \bar{H}BK)|(H \vee K).$$

我们注意到，当 HBK 为真时，$(A|H) \wedge_S (B|K)$ 为真，而 $A|H$ 无效；因此 $(A|H) \wedge_S (B|K) \neq A|H$。所以 $\wedge_S$ 不满足性质 P1。

P2. 现在我们来考察析取与合取之间的以下关系：

$$A = AB \vee A\bar{B} \tag{4}$$

并且，当事件被替换为条件事件时，我们会在前述三值逻辑中检验其有效性。我们还注意到，前述等式与分配律有关，因为

$$A = A \wedge \Omega = A \wedge (B \vee \bar{B}) = AB \vee A\bar{B}\,.$$

我们还将考察这一方面，即将 A 和 B 替换为 $A|H$ 和 $B|K$；对于每一种与一对 $(\wedge, \vee)$ 相关联的三值逻辑，我们将检验以下关系的有效性

$$A|H = [(A|H) \wedge (B|K)] \vee [(A|H) \wedge (\bar{B}|K)], \tag{5}$$

$$A|H = (A|H) \wedge (K|K), \tag{6}$$

$$(A|H) \wedge [(B|K) \vee (\bar{B}|K)] = [(A|H) \wedge (B|K)] \vee [(A|H) \wedge (\bar{B}|K)]\,. \tag{7}$$

关于 $\wedge_K$ 和 $\vee_K$，我们需要检验以下关系是否成立：

$$(A|H) = [(A|H) \wedge_K (B|K)] \vee_K [(A|H) \wedge_K (\bar{B}|K)]\,.$$

我们注意到

$$(A|H) \wedge_K (\bar{B}|K) = AH\bar{B}K|(AH\bar{B}K \vee \bar{A}H \vee BK).$$

Then

$$[(A|H) \wedge_K (B|K)] \vee_K [(A|H) \wedge_K (\bar{B}|K)] =$$

$$= [\bar{AH}BK|(AHBK \vee \bar{AH} \vee BK)] \bar{\vee}_K [\bar{AH}BK|(AHBK \vee AH \vee BK)] =$$

$$= (AHBK \vee AH\bar{BK})|(\bar{AH}BK \vee \bar{AH}\bar{BK} \vee (AH \vee BK) \wedge (AH \vee BK)) = AHK|(AHK \vee AH) \neq A|H, \tag{8}$$

因为，例如，当 AHK 为真时，
$AHK|(AHK \vee AH)$ 为空，而$A|H$ 为真。因此，公式（5）不满足于 $\wedge_K$ 和 $\vee_K$。
关于公式（6），我们注意到它并不成立；事实上

$$(A|H) \wedge_K (K|K) = AHK|(AHK \vee \overline{A}H) \neq A|H\,,$$

如（8）所示（注意，$(A|H) \wedge_K (H|H) = A|H$）。关于公式（7），我们注意到

$$(A|H) \wedge_K [(B|K) \vee_K (\bar{B}|K)] = (A|H) \wedge_K (\Omega|K)] = AHK|(AHK \vee \overline{A}H)\,,$$

回顾（8）可知，这与

$$[(A|H) \wedge_K (B|K)] \vee_K [(A|H) \wedge_K (\bar{B}|K)]\,.$$

因此，公式（7）对 $\wedge_K$ 和 $\vee_K$成立。
关于 $\wedge_L$ 和 $\vee_L$，我们需要检验以下结论是否成立

$$(A|H) = [(A|H) \wedge_L (B|K)] \vee_L [(A|H) \wedge_L (\bar{B}|K)]\,.$$

我们观察到

$$(A|H) \wedge_L (\bar{B}|K) = AH\bar{B}K|(AH\bar{B}K \vee \bar{A}H \vee BK \vee \bar{H}\bar{K}).$$

那么，正如可以验证的那样，

$$[(A|H) \wedge_L (B|K)] \vee_L [(A|H) \wedge_L (B|K)] =$$
$$= [AHBK|(AHBK \vee AH \vee BK \vee HK)] \vee_L [AHBK|(AHBK \vee AH \vee BK \vee HK)] =$$
$$= \cdots = AHK|(AHK \vee AH \vee HK \vee AHK) = AHK|(H \vee K) \neq A|H, \tag{9}$$

因为，例如，当 AHK 为真时，$AHK|(H \vee K)$
为假，而 $A|H$ 为真。因此，$\wedge_L$ 和 $\vee_L$不满足公式（5）。
关于公式（6），我们观察到它不成立；事实上

$$(A|H) \wedge_L (K|K) = AHK|(AHK \vee \bar{A}H \vee \bar{H}\bar{K}) \neq A|H\,,$$

因为，当 AHK为真时，$A|H$
为真，而$AHK|(AHK \vee AH \vee HK)$为空（注意 $(A|H) \wedge_L (H|H) = AH \neq A|H$；更一般地说，$(A|H) \wedge_L (B|H) = ABH$，特别是 $(A|H) \wedge_L (A|H) = AH$；因此
$(A|H) \wedge_L (A|H) \neq A|H$）。关于公式（7），我们观察到

$$(A|H) \wedge_L [(B|K) \vee_L (\bar{B}|K)] = (A|H) \wedge_L (\Omega|K) = AHK|(AHK \vee \overline{A}H \vee \bar{H}\bar{K})\,,$$

回顾式（9）可知，它与.....并不一致

$$[(A|H) \wedge_L (B|K)] \vee_L [(A|H) \wedge_L (\bar{B}|K)] = AHK|(H \vee \bar{K}),$$

因为，例如，当 AHK 为真、$AHK|(H \vee K)$
为假时，$AHK|(AHK \vee \overline{A}H \vee HK)$ 则为空。因此，$\wedge_L$不满足公式（7）

以及 $\vee_L$。
关于 $\wedge_B$ 和 $\vee_B$，我们需要检查以下命题是否成立：

$$(A|H) = [(A|H) \wedge_B (B|K)] \vee_B [(A|H) \wedge_B (\bar{B}|K)] .$$

我们注意到：

$$(A|H) \wedge_B (B|K) = AB|HK , \quad (A|H) \wedge_B (\bar{B}|K) = A\bar{B}|HK.$$

Then

$$[(A|H) \wedge_B (B|K)] \vee_B [(A|H) \wedge_B (\bar{B}|K)] = (AB \vee A\bar{B})|HK = A|HK \neq A|H , \tag{10}$$

因为，例如，当 AHK 为真时， $A|HK$ 是空的，而 $A|H$ 为真。因此， $\wedge_B$ 和 $\vee_B$不满足公式（5）。
关于公式（6），我们注意到它不成立；事实上，

$$(A|H) \wedge_B (K|K) = A|HK \neq A|H ,$$

如（10）所示（注意 $(A|H) \wedge_B (H|H) = A|H$；更一般地， $(A|H) \wedge_B (B|H) = AB|H$）。关于公式（7），我们注意到：

$$(A|H) \wedge_B [(B|K) \vee_B (\bar{B}|K)] = (A|H) \wedge_B (\Omega|K) = A|HK ,$$

根据（10），这与.....相同

$$[(A|H) \wedge_B (B|K)] \vee_B [(A|H) \wedge_B (\bar{B}|K)].$$

因此，公式（7）满足 $\wedge_B$ 和 $\vee_B$。

关于 $\wedge_S$ 和 $\vee_S$，我们需要检查以下命题是否成立：

$$(A|H) = [(A|H) \wedge_S (B|K)] \vee_S [(A|H) \wedge_S (\bar{B}|K)] .$$

我们注意到

$$(A|H) \wedge_S (B|K) = (AHBK \vee AH\bar{K} \vee \bar{H}BK)|(H \vee K) ,$$

and

$$(A|H) \wedge_S (\bar{B}|K) = (AH\bar{B}K \vee AH\bar{K} \vee \bar{H}\bar{B}K)|(H \vee K).$$

Then

$$[(A|H) \wedge_S (B|K)] \vee_S [(A|H) \wedge_S (\bar{B}|K)] = (AH \vee \bar{H}K)|(H \vee K) = \\ = (A \vee \bar{H})|(H \vee K) \neq A|H , \tag{11}$$

因为，例如，当 HK 为真时， $(A \vee H)|(H \vee K)$ 为真，而 $A|H$ 为空。因此，公式（5）不满足 $\wedge_S$ 和 $\vee_S$。
关于公式（6），我们注意到它并不成立；事实上

$$(A|H) \wedge_S (K|K) = (A \vee \bar{H})|(H \vee K) \neq A|H ,$$

如（11）所示。（注意 $(A|H)\wedge_S(H|H)=A|H$；更一般地说 $(A|H)\wedge_S(B|H)=AB|H$）。关于公式（7），我们注意到

$$(A|H)\wedge_S[(B|K)\vee_S(\bar{B}|K)]=(A|H)\wedge_S(K|K)=(A\vee\bar{H})|(H\vee K),$$

回想公式（11）可知，这与.....一致

$$[(A|H)\wedge_S(B|K)]\vee_S[(A|H)\wedge_S(\bar{B}|K)].$$

于是，$\wedge_S$ 和 $\vee_S$满足公式（7）。

P3. 现在我们考察析取与合取之间的以下关系：

$$A\vee B=A\vee\bar{A}B=B\vee A\bar{B}$$

我们注意到，用逻辑术语来说，关系 $A\vee B=A+B-AB$等价于到 $A\vee B=A\vee AB=B\vee AB$；我们将检验这类性质。

关于合取 $\wedge_K$ 和析取 $\vee_K$，我们需要检验以下关系是否成立：

$$(A|H)\vee_K(B|K)=(A|H)\vee_K[(\bar{A}|H)\wedge_K(B|K)].$$

我们注意到

$$(\bar{A}|H)\wedge_K(B|K)=\bar{A}HBK|(\bar{A}HBK\vee AH\vee\overline{B}K);$$

then

$$(A|H)\vee_K[(\bar{A}|H)\wedge_K(B|K)]=(A|H)\vee_K\bar{A}HBK|(\bar{A}HBK\vee AH\vee\overline{B}K)=$$

$$=(AH\vee\bar{A}HBK)|(AH\vee\bar{A}HK).$$

我们注意到，当 HBK 为真时，$(AH\vee AHBK)|(AH\vee AHBK\vee AHBK)$ 为空，而 $(A|H)\vee_K(B|K)$ 为真；因此

$$(A|H)\vee_K(B|K)\neq(A|H)\vee_K[(\bar{A}|H)\wedge_K(B|K)].$$

通过类似的推理，可以验证

$$(A|H)\vee_K(B|K)\neq(B|K)\vee_K[(A|H)\wedge_K(\bar{B}|K)].$$

事实上，

$$(A|H)\wedge_K(\bar{B}|K)=AH\bar{B}K|(AH\bar{B}K\vee\bar{A}H\vee BK),$$

and

$$(B|K)\vee_K[(A|H)\wedge_K(\bar{B}|K)]=(BK\vee AH\bar{B}K)|(BK\vee AH\bar{B}K\vee\bar{A}H\bar{B}K).$$

那么，当 AHK 为真时，$(BK\vee AHBK)|(BK\vee AHBK\vee AHBK)$ 为空，而 $(A|H)\vee_K(B|K)$ 为真。因此，$\vee_K$ 和 $\wedge_K$ 不满足性质 P3。

关于合取 $\wedge_L$ 和析取 $\vee_L$，我们需要检验以下命题是否成立：

$$(A|H)\vee_L(B|K)=(A|H)\vee_L[(\bar{A}|H)\wedge_L(B|K)].$$

我们观察到

$$(\bar{A}|H) \wedge_L (B|K) = \bar{A}HBK|(\bar{A}HBK \vee AH \vee \overline{B}\,K \vee \overline{H}\,\overline{K});$$

此外，可以验证

$$(A|H)\vee_L[\bar{A}HBK|(\bar{A}HBK\vee AH\vee\overline{B}\,K\vee\overline{H}\,\overline{K})] = (AH\vee\bar{A}HBK)|(\bar{A}HK\vee AH\vee\bar{H}BK).$$

那么，当 HBK 为真时，
$(AH \vee AHBK)|(AHK \vee AH \vee HBK)$ 为假，而 $(A|H) \vee_L (B|K)$ 为真。因此

$$(A|H) \vee_L (B|K) \neq (A|H) \vee_L [(\bar{A}|H) \wedge_L (B|K)].$$

通过类似的推理，可以验证

$$(A|H) \vee_L (B|K) \neq (B|K) \vee_L [(A|H) \wedge_L (\bar{B}|K)].$$

事实上，

$$(A|H) \wedge_L (\bar{B}|K) = AH\bar{B}K|(AH\bar{B}K \vee \bar{A}H \vee BK \vee \bar{H}\bar{K});$$

此外，可以验证

$$(B|K) \vee_L [(A|H) \wedge_L (\bar{B}|K)] = (BK \vee AH\bar{B}K)|(H\bar{B}K \vee BK \vee AH\bar{K}).$$

然后，当 AHK 为真时，
$(BK \vee AHBK)|(HBK \vee BK \vee AHK)$ 为假，而 $(A|H) \vee_L (B|K)$ 为真。因此，$\vee_L$ 和 $\wedge_L$ 不满足性质 P3。

关于合取 $\wedge_B$ 和析取 $\vee_B$，回顾 $(A|H) \vee_B (B|K) = (A \vee B)|HK$，可得

$$(A|H) \vee_B (B|K) = (A|H) \vee_B [(\bar{A}|H) \wedge_B (B|K)].$$

事实上，$(A|H) \wedge_B (B|K) = AB|HK$；此外

$$(A|H)\vee_B[(\bar{A}|H)\wedge_B(B|K)] = (A|H)\vee_B(\bar{A}B|HK) = (A\vee\bar{A}B)|HK = (A\vee B)|HK.$$

通过类似的推理，可得

$$(A|H) \vee_B (B|K) = (B|K) \vee_B [(A|H) \wedge_B (\bar{B}|K)].$$

事实上，$(A|H) \wedge_B (B|K) = AB|HK$；此外

$$(B|K)\vee_B[(A|H)\wedge_B(\bar{B}|K)] = (B|K)\vee_B(A\bar{B}|HK) = (B\vee A\bar{B})|HK = (A\vee B)|HK.$$

因此，$\vee_B$ 和 $\wedge_B$ 满足性质 P3。
关于合取 $\wedge_S$ 和析取 $\vee_S$，我们需要检查以下结论是否成立：

$$(A|H) \vee_S (B|K) = (A|H) \vee_S [(\bar{A}|H) \wedge_S (B|K)].$$

我们观察到

$$(\bar{A}|H) \wedge_S (B|K) = [(\bar{A} \vee \bar{H})(B \vee \bar{K})]|(H \vee K) = (\bar{A}B \vee \bar{A}\bar{K} \vee \bar{H}B)|(H \vee K);$$

此外，

$$(A|H)\vee_S[(\bar{A}B\vee\bar{A}\bar{K}\vee\bar{H}B)|(H\vee K)]=(AH\vee\bar{A}BH\vee\bar{A}BK\vee\bar{A}H\bar{K}\vee\bar{H}BK)|(H\vee K).$$

当 AHK 为真时，$(AH\vee ABH\vee ABK\vee AHK\vee HBK)|(H\vee K)$ 为真，而 $(A|H)\vee_S(B|K)$ 为假。因此

$$(A|H)\vee_S(B|K)\neq(A|H)\vee_S[(\bar{A}|H)\wedge_S(B|K)].$$

通过类似的推理，可以验证

$$(A|H)\vee_S(B|K)\ \neq\ (B|K)\vee_S[(A|H)\wedge_S(\bar{B}|K)].$$

事实上，

$$(A|H)\wedge_S(\bar{B}|K)=[(A\vee\bar{H})(\bar{B}\vee\bar{K})]|(H\vee K)=(A\bar{B}\vee A\bar{K}\vee\bar{H}\bar{B})|(H\vee K);$$

此外，可以验证

$$(B|K)\vee_S[(A|H)\wedge_S(\bar{B}|K)]=(AH\vee BK\vee\bar{H}K)|(H\vee K).$$

当 HBK 为真时，$(AH\vee BK\vee HK)|(H\vee K)$ 为真，而 $(A|H)\vee_S(B|K)$ 为假。因此，$\vee_S$ 和 $\wedge_S$ 不满足性质 P3。

4.2 一些基本概率性质

我们考察一些基本概率性质，并检验先前提出的合取概念是否满足这些性质。我们考察以下性质，它们对无条件事件均成立：

P4. $P(AB)\leqslant P(A)$, $P(A\vee B)\geqslant P(A)$; P5. $P(A\vee B)=P(A)+P(B)-P(AB)$; P6. $\max\{P(A)+P(B)-1, 0\}\leqslant P(AB)\leqslant\min\{P(A),P(B)\}$.

我们将 A 和 B 替换为条件事件 $A|H$ 和 $B|K$；然后检验使用合取$\wedge_K$、$\wedge_L$、$\wedge_B$、$\wedge_S$ 以及析取 $\vee_K$、$\vee_L$、$\vee_B$、$\vee_S$时，性质 P4、P5、P6 是否成立。

P4. 关于 $\wedge_K$ 和 $\vee_K$，我们需要检验以下结论是否成立：

$$P[(A|H)\wedge_K(B|K)]\leqslant P(A|H),\quad P[(A|H)\vee_K(B|K)]\geqslant P(A|H).\tag{12}$$

我们回顾一下

$$(A|H)\wedge_K(B|K)=AHBK|(AHBK\vee\overline{A}H\vee\overline{B}K).$$

我们设定 $P(A|H)=x, P[AHBK|(AHBK\vee\overline{A}H\vee\overline{B}K\vee\overline{H}\overline{K})]=y$，其中 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$。我们可以将该划分称为具有以下构成项：$C_0=HBK\vee HK$，$C_1=AHBK$, $C_2=AHBK$, $C_3=AHKK$, $C_4=AH$,$C_5=HBK$，以及相应的点：$Q_0=\mathcal{P}=(x,y)$, $Q_1=(1,1)$, $Q_2=(1,0)$, $Q_3=(1,y)$,$Q_4=(0,0)$, $Q_5=(x,0)$。$\mathcal{I}$的凸包 $Q_1,\ldots,Q_5$是一个三角形，其

顶点为 Q_1, Q_2, Q_4，并且，为了使 $\mathcal{P} = (x, y)$ 相容，必须满足 $\mathcal{P} \in \mathcal{I}$，也就是说 $y \leqslant x$。事实上，这个不等式也可由包含关系推出

$$AHBK|(AHBK \vee \overline{A}H \vee \overline{B}K) \subseteq A|H\,.$$

此外，由于 $(A|H) \vee_K (B|K)$ 是 $(A|H) \wedge_K (B|K)$的否定，因此有

$$P[(A|H) \vee_K (B|K)] = 1 - P[(\bar{A}|H) \wedge_K (\bar{B}|K)] \geqslant 1 - P(\bar{A}|H) = P(A|H)\,.$$

因此，$\wedge_K$ 和 $\vee_K$满足性质 **P4**。
关于 $\wedge_L$ 和 $\vee_L$，我们需要检查是否有

$$P[(A|H) \wedge_L (B|K)] \leqslant P(A|H)\,, \quad P[(A|H) \vee_L (B|K)] \geqslant P(A|H)\,. \tag{13}$$

我们回顾一下

$$(A|H) \wedge_L (B|K) = AHBK|(AHBK \vee \overline{A}H \vee \overline{B}K \vee \bar{H}\bar{K})\,.$$

设 $P(A|H) = x$, $P[AHBK|(AHBK \vee \overline{A}H \vee \overline{B}K \vee HK)] = y$，其中 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$。我们可以参照由以下构元组成的划分：$C_0 = HBK$, $C_1 = AHBK$, $C_2 = AHBK$, $C_3 = AHK$, $C_4 = AH$,$C_5 = HBK \vee HK$。各点 Q_h与 $(\wedge_K, \vee_K)$这一对中的相同，因此 $\mathcal{P} = (x, y)$相容当且仅当 $y \leqslant x$。事实上，在这种情况下，包含关系也成立，即

$$AHBK|(AHBK \vee \overline{A}H \vee \overline{B}K \vee \bar{H}\bar{K}) \subseteq A|H\,.$$

此外

$$P[(A|H) \vee_L (B|K)] = 1 - P[(\bar{A}|H) \wedge_L (\bar{B}|K)] \geqslant 1 - P(\bar{A}|H) = P(A|H)\,.$$

因此，$\wedge_L$ 和 $\vee_L$满足性质 **P4**。
关于 $\wedge_B$ 和 $\vee_B$，我们需要检查以下命题是否成立：

$$P[(A|H) \wedge_B (B|K)] \leqslant P(A|H)\,, \quad P[(A|H) \vee_B (B|K)] \geqslant P(A|H)\,. \tag{14}$$

我们回顾 $(A|H) \wedge_B (B|K) = AB|HK$，并设定 $P(A|H) = x$,$P(AB|HK) = y$，其中 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$。我们可以考虑由以下构元组成的划分：$C_0 = H$, $C_1 = AHBK$, $C_2 = AHBK$, $C_3 = AHK$,$C_4 = AHK$,$C_5 = AHK$，以及相应的点：$Q_0 = \mathcal{P} = (x, y)$, $Q_1 = (1, 1)$,$Q_2 = (1, 0)$, $Q_3 = (1, y)$, $Q_4 = (0, 0)$, $Q_5 = (0, y)$。$\mathcal{I}$的凸包 $Q_1, \ldots, Q_5$ 是顶点为 Q_1, Q_2, Q_4, Q_5 的多边形，并且对于每个 $(x, y) \in [0, 1]^2$，条件 $\mathcal{P} \in \mathcal{I}$ 都成立。换言之，对于每个 $(x, y) \in [0, 1]^2$，在 $\{A|H, AB|HK\}$ 上的赋值 (x, y) 是相容的；事实上 $AB|HK \not\subseteq A|H$。此外，由于 $(A|H) \vee_B (B|K) = (A \vee B)|HK$，若我们设定 $P(A|H) = x$ 和 $P[(A \vee B)|HK] = z$，则可以考虑由以下构元组成的划分：$C_0 = H$, $C_1 = AHK$, $C_2 = AHK$, $C_3 = AHBK$, $C_4 = AHBK$, $C_5 = AHK$，以及相应的点：$Q_0 = \mathcal{P} = (x, z)$, $Q_1 = (1, 1)$, $Q_2 = (1, z)$, $Q_3 = (0, 0)$, $Q_4 = (0, 1)$,$Q_5 = (0, z)$。凸包 $\mathcal{I}$ 是顶点为 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 的多边形，并且

对于每个 $(x,z)\in[0,1]^2$，条件 $\mathcal{P}\in\mathcal{I}$ 都成立。换言之，对于每个 $(x,z)\in[0,1]^2$，在 $\{A|H,(A\vee B)|HK\}$ 上的赋值 (x,z) 是相容的；事实上 $A|K\nsubseteq(A\vee B)|H$。因此，$\wedge_B$ 和 $\vee_B$ 不满足性质 P4。关于 $\wedge_S$ 和 $\vee_S$，我们需要检验以下命题是否成立：

$$P[(A|H)\wedge_S(B|K)]\leqslant P(A|H)\,,\quad P[(A|H)\vee_S(B|K)]\geqslant P(A|H)\,. \tag{15}$$

我们回顾一下，$(A|H)\wedge_S(B|K)=(AH\vee H)(BK\vee K)|(H\vee K)$ 并设 $P(A|H)=x$、$P[(AH\vee H)(BK\vee K)|(H\vee K)]=y$，其中 $0\leqslant x\leqslant 1$、$0\leqslant y\leqslant 1$。我们可以考虑由以下构成项组成的划分：$C_0=HK$、$C_1=AHBK\vee AHK$、$C_2=AHBK$、$C_3=AH$、$C_4=HBK$、$C_5=HBK$，以及相应的点：$Q_0=\mathcal{P}=(x,\ y)$、$Q_1=(1,\ 1)$、$Q_2=(1,\ 0)$、$Q_3=(0,\ 0)$、$Q_4=(x,\ 1)$、$Q_5=(x,\ 0)$。$\mathcal{I}$的凸包 Q_1、.....、Q_5 是一个多边形，其顶点为 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4，并且对于每个 $(x,\ y)\in[0,\ 1]^2$，条件 $\mathcal{P}\in\mathcal{I}$ 都成立。换言之，赋值 $(x,\ y)$ 在 $\{A|H,\ (AH\vee H)(BK\vee K)|(H\vee K)\}$ 上相容，对每个 $(x,\ y)\in[0,\ 1]^2$均如此；事实上 $(AH\vee\bar{H})(BK\vee\bar{K})|(H\vee K)\nsubseteq A|H$。此外，由于 $(A|H)\vee_S(B|K)=(AH\vee BK)|(H\vee K)$，若设 $P(A|H)=x$ 和 $P[(AH\vee BK)|(H\vee K)]=z$，我们可以考虑由以下构成项组成的划分：$C_0=HK$、$C_1=AH$、$C_2=AHBK$、$C_3=AHBK\vee AHK$、$C_4=HBK$、$C_5=HBK$，以及相应的点：$Q_0=\mathcal{P}=(x,\ z)$、$Q_1=(1,\ 1)$、$Q_2=(1,\ 0)$、$Q_3=(0,\ 0)$、$Q_4=(x,\ 1)$、$Q_5=(x,\ 0)$。$\mathcal{I}$的凸包是一个多边形，其顶点为 Q_1、Q_2、Q_3、Q_5，并且对于每个 $(x,\ z)\in[0,\ 1]^2$，条件 $\mathcal{P}\in\mathcal{I}$都成立。换言之，赋值 $(x,\ z)$ 在 $\{A|H,\ (AH\vee BK)|(H\vee K)\}$ 上相容，对每个$(x,\ z)\in[0,\ 1]^2$均如此；事实上 $A|H\nsubseteq(AH\vee BK)|(H\vee K)$。因此，$\wedge_S$ 和 $\vee_S$不满足性质 P4。

P5. 关于 $\wedge_K$ 和 $\vee_K$，我们需要检查以下命题是否成立：

$$P[(A|H)\vee_K(B|K)]=P(A|H)+P(B|K)-P[(A|H)\wedge_K(B|K)]\,, \tag{16}$$

在 A、H、B、K逻辑独立的条件下。我们令 $P(A|H)=x$、$P(B|K)=y$、$P[(A|H)\wedge_K(B|K)]=z$，其中 $0\leqslant x\leqslant 1$、$0\leqslant y\leqslant 1$、$0\leqslant z\leqslant 1$。此外，我们回顾（[58, 定理 3]）：z 是 $(x,\ y)$ 的相干扩展，当且仅当$z'\leqslant z\leqslant z''$，其中 $z'=0$、$z''=\min\{x,\ y\}$，因此赋值 $(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 0)$ 是相容的。那么，由（16）可推出

$$P[(A|H)\vee_K(B|K)]=1+1-0=2\,,$$

这是不相容的。实际上，在这种情况下 $P[(A|H)\vee_K(B|K)]=1$。确实，由于 $P(A|H)=P(B|K)=0$ 在 $(A|H)\wedge_K(B|K)$ 上的唯一相容扩展是 $P((A|H)\wedge_K(B|K))=0$。因此，根据德摩根定律，在 $(A|H)\vee_K(B|K)$ 上的唯一相容扩展是 $P((A|H)\vee_K(B|K))=1$。所以，$\wedge_K$、$\vee_K$不满足性质 P5。

关于 $\wedge_L$ 和 $\vee_L$，我们必须检查以下命题是否成立：

$$P[(A|H)\vee_L(B|K)]=P(A|H)+P(B|K)-P[(A|H)\wedge_L(B|K)]\,, \tag{17}$$

在 A,H,B,K逻辑独立的条件下。我们设 $P(A|H)=x$, $P(B|K)=y$, $P[(A|H)\wedge_L(B|K)]=z$，其中 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$。此外，我们

回想一下（[58, 定理 4]），z 是 (x,y) 的相干扩展，当且仅当 $z' \leqslant z \leqslant z''$，其中 $z'=0, z''=\min\{x,y\}$，因此赋值 $(x,y,z)=(1,1,0)$是相容的。那么，对于这对 $(\wedge_K, \vee_k)$，$\wedge_L, \vee_L$不满足性质 P5。

关于 $\wedge_B$ 和 $\vee_B$，我们需要检验以下结论是否成立：

$$P[(A|H) \vee_B (B|K)] = P(A|H) + P(B|K) - P[(A|H) \wedge_B (B|K)], \qquad (18)$$

在 A、H、B、K 逻辑独立的条件下。设 $P(A|H)=x$、$P(B|K)=y$、$P[(A|H) \wedge_B (B|K)]=z$，其中 $0 \leqslant x \leqslant 1$、$0 \leqslant y \leqslant 1$、$0 \leqslant z \leqslant 1$。此外，我们回顾（[58, 定理 5]）：对于任意 $z \in [0、1]$，z 都是 $(x、y)$ 的相干扩展，因此赋值 $(x、y、z)=(1、1、0)$ 是相容的。接着，对于 $(\wedge_K、\vee_k)$ 这一对，$\wedge_B、\vee_B$不满足性质 P5。

关于 $\wedge_S$ 和 $\vee_S$，我们需要检验以下结论是否成立：

$$P[(A|H) \vee_S (B|K)] = P(A|H) + P(B|K) - P[(A|H) \wedge_S (B|K)], \qquad (19)$$

在 A,H,B,K 逻辑独立的条件下。令 $P(A|H)=x$, $P(B|K)=y$, $P[(A|H) \wedge_S (B|K)]=z$，其中 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$。此外，我们回顾一下（[30]），$z$ 是 (x,y) 的相干扩展，当且仅当 $z' \leqslant z \leqslant z''$，其中

$$z' = \max\{x+y-1, 0\}, \quad z'' = \begin{cases} \frac{x+y-2xy}{1-xy}, & \text{if } (x,y) \neq (1,1), \\ 1, & \text{if } (x,y)=(1,1). \end{cases}$$

那么，赋值 $P[(A|H) \wedge_S (B|K)]] = w$ 是赋值 (x,y) 在 $\{A|H, B|K\}$ 上的相干扩展，当且仅当 $\nu' \leqslant \nu \leqslant \nu''$，其中

$$\nu' = \max\{1-x+1-y-1, 0\} = \max\{1-x-y, 0\},$$

and

$$\nu'' = \begin{cases} \frac{1-x+1-y-2(1-x)(1-y)}{1-(1-x)(1-y)}, & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{if } (x,y)=(0,0), \end{cases} = \begin{cases} \frac{x+y-2xy}{x+y-xy}, & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{if } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

特别地，当 $x=y=\frac{2}{3}$ 时，我们得到 $\nu'=0, \nu''=\frac{1}{2}$；于是，赋值 $(x,y,w)=(\frac{2}{3}, 2\,3, \frac{1}{3})$ 是相容的；此外，由于

$$P[(A|H) \vee_S (B|K)] = 1 - P[(\bar{A}|H) \wedge_S (\bar{B}|K)]],$$

由此可得

$$P[(A|H) \vee_S (B|K)] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1 = P(A|H) + P(B|K) - P[(A|H) \wedge_S (B|K)].$$

因此，$\wedge_S, \vee_S$ 不满足性质 P5。

P6. 关于 $\wedge_K$，我们需要检查以下命题是否成立：

$$\max\{x+y-1, 0\} \leqslant z \leqslant \min\{x,y\}, \qquad (20)$$

其中 $x = P(A|H)$、$y = P(B|K)$、$z = P[(A|H) \wedge_K (B|K)]$。根据（[58,定理 3]），$z$ 是 $(x$ 的相干扩展，当且仅当 $z' \leqslant z \leqslant z''$，其中 $z' = 0$、$z'' =$ 的最小值为 $\{x$、$y\}$。由于 $z' \neq$ 是 $\{x+y-1$、$0\}$ 的最大值，$\wedge_K$ 不满足性质 P6。

关于 $\wedge_L$，我们需要检查以下条件是否成立：

$$\max\{x+y-1,0\} \leqslant z \leqslant \min\{x,y\}, \tag{21}$$

其中 $x = P(A|H), y = P(B|K), z = P[(A|H) \wedge_L (B|K)]$。根据（[58, 定理 4]），$z$ 是 (x,y) 的相干扩展，当且仅当 $z' \leqslant z \leqslant z''$，其中$z' = 0, z'' =$最小 $\{x,y\}$。由于 $z' \neq$最大 $\{x+y-1,0\}$，性质 P6 不满足 $\wedge_L$。

关于 $\wedge_B$，我们需要检查以下条件是否成立：

$$\max\{x+y-1,0\} \leqslant z \leqslant \min\{x,y\}, \tag{22}$$

其中 $x = P(A|H), y = P(B|K), z = P[(A|H) \wedge_B (B|K)]$。根据（[58,定理 5]），$z$ 是 (x,y) 的相干扩展，当且仅当 $z' \leqslant z \leqslant z''$，其中$z' = 0, z'' = 1$。由于 $z' \neq$最大 $\{x+y-1,0\}$ 且 $z'' \neq$最小 $\{x,y\}$，性质 P6 不满足 $\wedge_B$。

关于 $\wedge_S$，我们需要检查以下条件是否成立

$$\max\{x+y-1,0\} \leqslant z \leqslant \min\{x,y\}, \tag{23}$$

其中 $x = P(A|H), y = P(B|K), z = P[(A|H) \wedge_S (B|K)]$。我们回顾一下（[30]）：$z$ 是 (x,y) 的相干扩展，当且仅当 $z' \leqslant z \leqslant z''$，其中

$$z' = \max\{x+y-1,0\}, \quad z'' = \begin{cases} \frac{x+y-2xy}{1-xy}, & \text{if } (x,y) \neq (1,1), \\ 1, & \text{if } (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

由于 $z'' \neq \min\{x,y\}$，$\wedge_S$不满足性质 P6。

备注 5。注意，给定关于 $\{A|H, B|K\}$ 的赋值 (x,y)，利用德摩根¯ ¯律以及合取 $A|H$ 和 $B|K$ 的下界与上界，可以得到析取的下界与上界，即

$$P[(A|H) \vee (B|K)] = 1 - P[(\bar{A}|H) \wedge (\bar{B}|K)].$$

表 1 给出了将关于 $\{A|H, B|K\}$ 的赋值 (x,y) 扩展到其合取与析取时的相容扩展区间。如表 1 所示，$\vee_K, \vee_L, \vee_B, \vee_S$不满足析取的弗雷歇-霍夫丁界（即 $[\max\{x,y\}, \min\{x+y,1\}]$）。

在表2中，我们列出了从 P1 到 P6 的基本性质，并针对每一对逻辑运算，在该性质适用于这对运算时插入符号 $*$。

逻辑运算	相容扩展区间
$\wedge_K$	$[0,$ 最小值$\{x,y\}]$
$\vee_K$	[最大$\{x,y\}$, 1]
$\wedge_L$	$[0,$ min$\{x,y\}]$
$\vee_L$	[最大值$\{x,y\},$ 1]
$\wedge_B$	$[0,$ 1]
$\vee_B$	$[0,$ 1]
$\wedge_S$	$\left[\text{最大值 } \{x+y-1,0\},\ \begin{cases} \frac{x+y-2xy}{1-xy}, & \text{若 } (x,y)\neq(1,1) \\ 1, & \text{若 } (x,y)=(1,1) \end{cases}\right]$
$\vee_S$	$\left[\begin{cases} \frac{xy}{x+y-xy}, & \text{若 } (x\ y)\neq(0\ 0), \\ 0 & \\ \text{,若 } (x,y)=(0,0), & \end{cases}\right.$ 最小值 $\{x+y,$ $1\}\Big]$
$\wedge_{gs}$	[最大值 $\{x+y-1,0\},$ 最小值$\{x,y\}$]
$\vee_{gs}$	[最大值 $\{x,y\},$ 最小值$\{x+y,1\}$]

表 1. 赋值 (x,y) 在 $\{A|H,B|K\}$ 上的相容扩展区间，扩展到其合取 $\wedge_K$, $\wedge_L$, $\wedge_B$, $\wedge_S$, $\wedge_{gs}$ 及析取 $\vee_K$, $\vee_L$, $\vee_B$, $\vee_S$, $\vee_{gs}$。符号 $\wedge_{gs}$ 和 $\vee_{gs}$ 指第5节中说明的合取与析取。

	性质	$\wedge_K$ $\vee_K$	$\wedge_L$ $\vee_L$	$\wedge_B$ $\vee_B$	$\wedge_S$ $\vee_S$	$\wedge_{gs}$ $\vee_{gs}$
P1	$\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2 \iff \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1$	$*$				$*$
P2	$\mathcal{C}_1 = (\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2) \vee (\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_{\bar{2}})$					$*$
	$\mathcal{C} = \mathcal{C} \wedge (K\|K)$					$*$
	$\mathcal{C}_1 \wedge (\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{C}_{\bar{2}}) = (\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2) \vee (\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_{\bar{2}})$	$*$		$*$	$*$	$*$
P3	$\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \vee (\mathcal{C}_{\bar{1}} \wedge \mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2 \vee (\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_{\bar{2}})$			$*$		$*$
P4	$z \leqslant x \leqslant w,\ z \leqslant y \leqslant w$	$*$	$*$			$*$
P5	$w = x + y - z$					$*$
P6	$\max\{x+y-1,0\} \leqslant z \leqslant \min\{x,y\}$					$*$
	$\max\{x,y\} \leqslant w \leqslant \min\{x+y,1\}$					$*$

表2。性质 P1—P6 以及逻辑运算对。符号 $*$ 表示该运算对满足此性质。符号 $\mathcal{C}$、$\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 表示条件事件。$P(\mathcal{C}_1) = x$、$P(\mathcal{C}_2) = y$、$P(\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2) = z$、$P(\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2) = w$。对于第5节中说明的逻辑运算对（$\wedge_{gs}$、$\vee_{gs}$），符号 z 和 w 分别表示 $\mathcal{C}_1 \wedge_{gs} \mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{C}_1 \vee_{gs} \mathcal{C}_2$ 的 *previsions*。

5 条件随机量框架下的合取与析取

本节将阐释合取 $\wedge_{gs}$ 和析取 $\vee_{gs}$的概念，此处分别简记为 $\wedge$ 和 $\vee$。这些概念由 Gilio 和 Sanfilippo 在相干性的框架下提出（例如，参见 [32,33,34,36]）。这一方法可与 McGee（[50]）和 Kaufman（[46]）的一些研究联系起来。首先，我们注意到，在概率推理以及实际应用中，两个主要方面是：(i) the

检查概率评估的一致性或相干性；(ii) 将给定的初始赋值相干地扩展到更多条件事件和/或随机量。在这两个方面，我们都需要用数值恰当地表示条件事件的真值。如前文所示，对于条件事件 $A|H$，真、假、无效这三个逻辑值的自然表示分别为 1、0、 $P(A|H)$；这使得我们能够采用实用的程序和算法来检验相干性。此外，通过将构元 C_h 表示为点 Q_h，我们可以针对投注方案和惩罚准则两者建立相干性的几何方法，正如德·菲内蒂在无条件事件和随机量的情形下所做的那样。基于这些动机，在我们的方法中，两个条件事件 $A|H$ 和 $B|K$ 的合取（以及析取） $(A|H) \wedge (B|K)$，被直接定义为一种恰当的五值条件随机量。这种数值方法可以区分三种不同程度的不确定性： (a) H 真且 K假； (b) H 假且 K 真； (c) H 和 K 均为假。更确切地说，根据 $AHBK$ 为真、 $AH \vee BK$ 为 $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$真、或 HBK、或 AHK 为真、或 HK 为真的情况，$(A|H) \wedge (B|K)$ 的值分别为 1、0、 $P(A|H)$、 $P(B|K)$ 或 $\mathbb{P}[(A|H) \wedge (B|K)]$（合取的预测值）。在投注方案中，从对 $\{A|H$、 $B|K\}$ 的相干赋值 $(x$、 $y)$ 出发，如果你通过添加赋值 $\mathbb{P}[(A|H) \wedge (B|K)] = z$，以相干的方式扩展 $(x$、 $y)$，那么例如你同意支付 z，以换取随机金额

$$(A|H) \wedge (B|K) = AHBK + x\bar{H}BK + yAH\bar{K} + z\bar{H}\bar{K} \in \{1, 0, x, y, z\}.$$

$\bar{}$ $\bar{}$注意，当 HK 为真时，你会收回已支付的金额 z，因此在检验 z 的相干性时，必须排除此情形。此外，回想第3.2节中关于方案3的推理，合取是一个条件随机量，如下所示。

$$(A|H) \wedge (B|K) = (AHBK + x\bar{H}BK + yAH\bar{K})|(H \vee K), \tag{24}$$

with

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[(A|H) \wedge (B|K)] = \mathbb{P}[(AHBK + x\bar{H}BK + yAH\bar{K})|(H \vee K)] = \\ &= P[AHBK|(H \vee K)] + xP[\bar{H}BK|(H \vee K)] + yP[AH\bar{K}|(H \vee K)]. \end{aligned} \tag{25}$$

更一般地，为了检验关于 $\{A|H$、 $B|K$、 $(A|H) \wedge (B|K)\}$ 的任意给定赋值 $(x$、 y、 $z)$ 是否相干，我们可以利用适用于条件随机量的定理 1 的一个恰当版本（例如，参见 [34, 定理 1]）。

注意，当 $P(H \vee K) > 0$ 时，公式 (25) 变为

$$\mathbb{P}[(A|H) \wedge (B|K)] = \frac{P(AHBK) + P(A|H)P(\bar{H}BK) + P(B|K)P(AH\bar{K})}{P(H \vee K)}, \tag{26}$$

这就是 [46,50] 中给出的公式。此外，如果 A, B, H, K 随机独立，则有

$$\begin{aligned} &P(AHBK) + P(A|H)P(\bar{H}BK) + P(B|K)P(AH\bar{K}) = \\ &= P(A)P(B)P(H)P(K) + P(A)P(B)P(\bar{H})P(K) + P(A)P(B)P(H)P(\bar{K}) = \\ &= P(A)P(B)P(H \vee K), \end{aligned}$$

因此，公式 (26) 化简为 $\mathbb{P}[(A|H) \wedge (B|K)] = P(A)P(B)$。
通过对偶方法，析取 $(A|H) \vee (B|K)$ 被定义为一个条件随机量；当 $AH \vee BK$ 为真、 $AHBK$ 为真、 HBK、 AHK 为真或 HK 为真时，它的值分别为 1、0、 $P(A|H)$、 $P(B|K)$或 $\mathbb{P}[(A|H) \vee (B|K)]$ （析取的先验期望）。于是

$$(A|H) \vee (B|K) = AH \vee BK + x\bar{H}\bar{B}K + y\bar{A}H\bar{K} + w\bar{H}\bar{K} \in \{1, 0, x, y, w\},$$

其中 $x = P(A|H)$、 $y = P(B|K)$、 $w = \mathbb{P}[(A|H) \vee (B|K)]$。与合取一样，析取也是一个条件随机量，如下所示。

$$(A|H) \vee (B|K) = (AH \vee BK + x\bar{H}\bar{B}K + y\bar{A}H\bar{K})|(H \vee K), \tag{27}$$

其中
$w = \mathbb{P}[(A|H) \vee (B|K)] = \mathbb{P}[(AH \vee BK + xHBK + yAHK)|(H \vee K)]$。可以验证，德摩根定律（数值形式）成立，即（[33, 定理 5]）

$$(A|H) \vee (B|K) = 1 - (\bar{A}|H) \wedge (\bar{B}|K), \ (A|H) \wedge (B|K) = 1 - (\bar{A}|H) \vee (\bar{B}|K). \tag{28}$$

现在，我们将证明，按照我们的方法定义的合取与析取在数值意义上满足性质 P1 至 P6。随后，我们将列举一些对无条件事件成立的其他基本性质，并说明这些性质在我们的方法中仍然成立。

P1. 性质 $A \subseteq B \iff A \wedge B = B$ 在数值意义上可写为

$$A \leqslant B \iff A \wedge B = B.$$

将 A 和 B 分别替换为 $A|H$ 和 $B|K$ 后，有 ([36, 方程 (16)])

$$A|H \leqslant B|K \iff (A|H) \wedge (B|K) = A|H\,.$$

因此， $\wedge$ 满足性质 P1。注意，([36, 方程 (15)])

$$A|H \leqslant B|K \iff A|H \subseteq B|K\,, \text{ or } AH = \varnothing\,, \text{ or } BK = K\,,$$

于是 $A|H \subseteq B|K \Rightarrow (A|H) \wedge (B|K) = A|H$。
P2. 我们将验证

$$A|H = (A|H) \wedge (K|K), \tag{29}$$

and

$$(A|H) \wedge [(B|K) \vee (\bar{B}|K)] = [(A|H) \wedge (B|K)] + [(A|H) \wedge (\bar{B}|K)]\,. \tag{30}$$

关于公式（29），由（24）可知，作为 $y = P(K|K) = 1$，有

$$(A|H) \wedge (K|K) = (AHK + x\bar{H}K + AH\bar{K})|(H \vee K) = (AH + x\bar{H}K)|(H \vee K)\,,$$

其中 $x = P(A|H)$。我们观察到，当 $H \vee K$ 为真时，$(AH + xHK)|(H \vee K) = A|H$ $(AH + xHK)|(H \vee K) = \mathbb{P}[(AH + xHK)|(H \vee K)]$；当 $H \vee K$为假时， $(AH + xHK)|(H \vee K) = \mathbb{P}[(AH + xHK)|(H \vee K)]$。此外，

$$\mathbb{P}[(AH + x\bar{H}K)|(H \vee K)] = P[AH|(H \vee K)] + xP[\bar{H}K|(H \vee K)] =$$

$= x[P[H|(H \vee K)] + P[\bar{H}K|(H \vee K)] = xP[(H \vee K)|(H \vee K)] = x\,;$

因此：$(AH + xHK)|(H \vee K)$ 与 $A|H$ 一致，故公式 (29) 得以满足。关于公式 (30)，我们观察到

$$(A|H) \wedge [(B|K) \vee (\bar{B}|K)] = (A|H) \wedge (\Omega|K) = (A|H) \wedge (K|K) = A|H\,.$$

此外，正如可以验证的那样（[34, 定理 7]），

$$(A|H) \wedge (B|K) + (A|H) \wedge (\bar{B}|K) = A|H,$$

因此公式 (30) 得以满足。由此，性质P2得以满足。注意，在（[22]）中，有人提出了一种关于复合条件句的理论，其中公式 (30) 可写为

$$(A|H) \wedge [(B|K) \vee (\bar{B}|K)] = [(A|H) \wedge (B|K)] \vee [(A|H) \wedge (\bar{B}|K)]\,.$$

P3. 用数值表示，性质 $A \vee B = A \vee AB$变为 $A \vee B = A + AB$。将 A 和 B 替换为 $A|H$ 和 $B|K$ 后，我们可以验证

$$(A|H) \vee (B|K) = (A|H) + [(\bar{A}|H) \wedge (B|K)]\,. \tag{31}$$

我们注意到 $(B|K) = (A|H) \wedge (B|K) + (A|H) \wedge (B|K)$；此外，回顾一下（[32, 第 6]节）

$$(A|H) \vee (B|K) = A|H + B|K - (A|H) \wedge (B|K). \tag{32}$$

那么，

$$(A|H) \vee (B|K) = A|H + B|K - (A|H) \wedge (B|K) = (A|H) + (\bar{A}|H) \wedge (B|K).$$

因此，公式 (31) 成立，即满足性质 P3。在 ([22]) 中提出的方法下，
前一个公式变为

$$(A|H) \vee (B|K) = (A|H) \vee [(\bar{A}|H) \wedge (B|K)]\,.$$

P4。我们需要检验 $\mathbb{P}[(A|H) \wedge (B|K)] \leqslant P(A|H) \leqslant \mathbb{P}[(A|H) \vee (B|K)]$。如表 3 所示，

$$(A|H) \wedge (B|K) - A|H = -AH\bar{B}K - (1-y)AH\bar{K} - x\bar{H}\bar{B}K + (z-x)\bar{H}\bar{K},$$

其中 $x = P(A|H)$、 $y = P(B|K)$、 $z = \mathbb{P}[(A|H) \wedge (B|K)]$。注意到 $z - x = \mathbb{P}[(A|H) \wedge (B|K) - A|H]$；然后，回顾第3.2节中关于方案3的推理，差值 $(A|H) \wedge (B|K) - A|H$ 是如下条件随机量

$$(A|H) \wedge (B|K) - A|H = (-AH\bar{B}K - (1-y)AH\bar{K} - x\bar{H}\bar{B}K)|(H \vee K),$$

其中 $(-AHBK - (1-y)AHK - xHBK) \leqslant 0$。因此 $z - x \leqslant 0$，也就是说 $z \leqslant x$。同理， $w - x \geqslant 0$，也就是说 $w \geqslant x$，其中 $w = \mathbb{P}[(A|H) \vee (B|K)]$。因此，性质 P4 由 $\wedge$ 和 $\vee$ 满足。注意，前面的结果意味着

$$(A|H) \wedge (B|K) \leqslant A|H \leqslant (A|H) \vee (B|K).$$

	C_h	$A\|H$	$B\|K$	$(A\|H)\wedge(B\|K)$	$(A\|H)\vee(B\|K)$
C_1	$AHBK$	1	1	1	1
C_2	$AH\bar{B}K$	1	0	0	1
C_3	$AH\bar{K}$	1	y	y	1
C_4	$\bar{A}HBK$	0	1	0	1
C_5	$\bar{A}H\bar{B}K$	0	0	0	0
C_6	$\bar{A}H\,\bar{K}$	0	y	0	y
C_7	$\bar{H}BK$	x	1	x	1
C_8	$\bar{H}\,\bar{B}K$	x	0	0	x
C_0	$\bar{H}\,\bar{K}$	x	y	z	w

表 3. 与构元 C_1 C_8 C_0 $x = P(A|H)$ $y = P(B|K)$ $z = \mathbb{P}[(A|H)\wedge$, . . $(B|K)]$ $w = \mathbb{P}[(A|H)\vee(B|K)]$. , , , 相关联的 $A|H$, $B|K$, $(A|H)\wedge(B|K)$, $(A|H)\vee(B|K)$ 的数值，其中 , , 和 。

当然，同样的不等式也适用于 $B|K$。
P5. 由 (32) 可得以下预期值求和法则

$$\mathbb{P}[(A|H)\vee(B|K)] = P(A|H) + P(B|K) - \mathbb{P}[(A|H)\wedge(B|K)]. \tag{33}$$

因此，性质 P5 对 $\wedge$ 和 $\vee$ 成立。注意，前述公式是更一般的容斥公式的一个特例，该公式对 $\wedge$ 和 $\vee$（[34]）成立。

P6. 在 [32] 中已证明，在逻辑独立的条件下，关于 $\{A|H、B|K、(A|H)\wedge(B|K)\}$ 的所有相干赋值 $(x、y、z)$ 构成的集合 Π 为 $\{(x,y,z):(x,y)\in[0,1], \max\{x+y-1,0\}\leqslant z\leqslant \min\{x,y\}\}$。因此，当用 $A|H$ 和 $B|K$ 替换 A 和 B 时，Fr´echet-Hoeffding 界成立，即

$$\max\{x+y-1,0\}\leqslant z\leqslant \min\{x,y\}.$$

因此，$\wedge$满足性质 P6。此外，应用（33），我们还可以得到关于析取 $(A|H)\vee(B|K)$ 的先验期望 w 的对偶结果

$$\max\{x,y\}\leqslant w \leqslant \min\{x+y,1\}.$$

6 一些进一步的逻辑和概率性质

下面我们讨论本方法所满足的一些进一步性质。(a) 我们可以验证，

$$(E|HK)\wedge(H|K) = EH|K. \tag{34}$$

我们设定 $P(E|HK)=x$, $P(H|K)=y$, $\mathbb{P}[(E|HK)\wedge(H|K)]=z$，则由 (24) 可得

$$(E|HK)\wedge(H|K) = (EHK + x(\bar{H}\vee\bar{K})HK + y\bar{K}EHK)|K = EH|K.$$

因此，性质 (a) 得以满足；此外，由于相干性 $P(EH|K) = P(E|HK)P(H|K)$, 可得

$$z = \mathbb{P}[(E|HK) \wedge (H|K)] = P(EH|K) = P(E|HK)P(H|K) = xy.$$

注6. 可以验证

$$\begin{array}{l}(E|HK) \wedge_K (H|K) = EH|K, \\ (E|HK) \wedge_L (H|K) = EHK \neq EH|K, \\ (E|HK) \wedge_B (H|K) = E|HK \neq EH|K, \\ (E|HK) \wedge_S (H|K) = EH|K.\end{array}$$

因此，性质 (a) 对 $\wedge_K$ 和 $\wedge_S$ 成立，但对 $\wedge_L$ 和 $\wedge_B$ 不成立。注意，性质 (a) 可以等价地写成

$$(A|B) \wedge (B|C) = A|C, \quad \text{if } A \subseteq B \subseteq C. \tag{35}$$

事实上，等式 $(E|HK) \wedge (H|K) = EH|K$ 可以写成 $(EHK|HK) \wedge (HK|K) = EHK|K$, 其中 $EHK \subseteq HK \subseteq K$。反过来，在假设 $A \subseteq B \subseteq C$ 的条件下，由于 $A = AB$, $B = BC$，等式 $(A|B) \wedge (B|C) = A|C$ 可以写成 $AB|C = (A|BC) \wedge (B|C)$。

我们回顾一下，等式 (35) 是文献 [23] 提出的条件句布尔代数中的公理 C5。

(b) 借助我们的方法中定义的 n 条件事件的合取概念（例如，参见 [34]），我们可以验证

$$E_1 \cdots E_n = E_1 \wedge (E_2|E_1) \wedge \cdots \wedge (E_n|E_1 \cdots E_{n-1}) \tag{36}$$

and

$$\mathbb{P}[E_1 \wedge (E_2|E_1) \wedge \cdots \wedge (E_n|E_1 \cdots E_{n-1})] = P(E_1)P(E_2|E_1) \cdots P(E_n|E_1 \cdots E_{n-1}). \tag{37}$$

合取运算满足结合律和交换律。 $\mathcal{C}_{1\cdots n}$ 与 $E_1|H_1$、.....、 $E_n|H_n$ 的合取定义为一个（条件）随机量，其取值为1、0或 x_S，具体取决于 $\bigwedge_{i=1}^n E_i H_i$是否为真、 $\bigvee_{i=1}^n \bar{E}_i H_i$ 是 $(\bigwedge_{i \notin S} E_i H_i) \wedge (\bigwedge_{i \in S} \bar{H}_i)$ 为真、 $\varnothing \neq S \subseteq \{1 \ \ldots \ n\}$ 是 $x_S = \mathbb{P}[\bigwedge_{i \in S}(E_i|H_i)]$ 为真、 $S = \{1 \ \ldots \ n\}$ 否为真，或者.....，其中.....、.....和.....。特别地，当.....、.....、.....时，有 $x_{\{1,\ldots,n\}} = \mathbb{P}(\mathcal{C}_{1\cdots n})$，我们也将其记作 $x_{1\cdots n}$。例如，在投注方案框架下， $x_{1\cdots n}$ 是为获得随机量 $\mathcal{C}_{1\cdots n}$所取值而需支付的金额。当 $H_1 \cdots H_n$为真（即 $\bigvee_{i=1}^n H_i$ 为假）时，所有条件事件均为空， $\mathcal{C}_{1\cdots n}$ 的值与已支付的金额 $x_{1\cdots n}$相同；因此，在检验相干性时，必须舍弃 $H_1 \cdots H_n$ 这一情形。由此，再回顾第3.2节中的方案3可知， $\mathcal{C}_{1\cdots n}$ 是一个以$\bigvee_{i=1}^n H_i$为条件事件的条件随机量。通过对偶方法，析取 $\mathcal{D}_{1\cdots n}$ 的

$E_1|H_1$、.....、 $E_n|H_n$ 定义为一个条件随机量（其条件事件为 $\bigvee_{i=1}^{n} H_i$），其取值为1、0或 y_S，具体取决于 $\bigvee_{i=1}^{n} E_i H_i$ 是否为真、 $\bigwedge_{i=1}^{n} \bar{E}_i H_i$ $(\bigwedge_{i \notin S} \bar{E}_i H_i) \wedge (\bigwedge_{i \in S} \bar{H}_i)$ $\varnothing \neq S \subseteq$ 是否为 $\{1 \ldots n\}$ $y_S = \mathbb{P}[\bigvee_{i \in S}(E_i|H_i)]$ $S = \{1 \ldots n\}$ 真，或者.....，其中.....、.....和.....。特别地，当.....、.....、.....时，有 $y_{\{1,\ldots,n\}} = \mathbb{P}(\mathfrak{D}_{1\cdots n})$，我们也将其记作 $y_{1\cdots n}$。通过迭代应用（34），我们得到

$$\bigwedge_{i=1}^{n} E_i = (\bigwedge_{i=1}^{n-1} E_i) \wedge (E_n | \bigwedge_{i=1}^{n-1} E_i) = \cdots = E_1 \wedge (E_2|E_1) \wedge \cdots \wedge (E_n|E_1 \cdots E_{n-1}).$$

此外，回顾

$$P(E_1 E_2 \cdots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)\cdots P(E_n|E_1 \cdots E_{n-1}),$$

由此可得

$$\mathbb{P}[E_1 \wedge (E_2|E_1) \wedge \cdots \wedge (E_n|E_1 \cdots E_{n-1})] = P(E_1)P(E_2|E_1)\cdots P(E_n|E_1 \cdots E_{n-1}).$$

等式 (37) 表明， $E_1, E_2|E_1, \ldots, E_n|E_1 \cdots E_{n-1}$ 的合取的先验期望等于它们概率的乘积。

(c) 我们回顾一下，给定 n 个逻辑独立事件 $E_1, \ldots, E_n$，其合取概率的最佳界为 Fr´echet-Hoeffding 界，即

$$\max\{\sum_{i=1}^{n} P(E_i) - n + 1, 0\} \leqslant P(E_1 \cdots E_n) \leqslant \min\{P(E_1), \ldots, P(E_n)\}, \quad (38)$$

and

$$\max\{P(E_1), \ldots, P(E_n)\} \leqslant P(E_1 \vee \cdots \vee E_n) \leqslant \min\{\sum_{i=1}^{n} P(E_i), 1\}, \quad (39)$$

在所有事件逻辑独立的前提下，将每个事件 E_i 替换为条件事件 $E_i|H_i$ 时，这些结果仍然成立。换言之，在我们的方法中， n 个条件事件 $E_1|H_1, \ldots E_n|H_n$ 的合取和析取的先验期望的最佳界为 Fr´echet-Hoeffding 界（[39]）：

$$\max\{\sum_{i=1}^{n} P(E_i|H_i) - n + 1, 0\} \leqslant \mathbb{P}[\bigwedge_{i=1}^{n}(E_i|H_i)] \leqslant \min\{P(E_1|H_1), \ldots, P(E_n|H_n)\}, \quad (40)$$

and

$$\max\{P(E_1|H_1), \ldots, P(E_n|H_n)\} \leqslant \mathbb{P}[\bigvee_{i=1}^{n}(E_i|H_i)] \leqslant \min\{\sum_{i=1}^{n} P(E_i|H_i), 1\}. \quad (41)$$

(d) 给定 n 事件 E_1、.....、 E_n，回顾一下，根据容斥原理，它们的析取可表示为

$$E_1 \vee \cdots \vee E_n = \sum_{i=1}^{n} E_i - \sum_{i_1 < i_2} E_{i_1} E_{i_2} + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} E_{i_1} E_{i_2} E_{i_3} - \cdots + (-1)^{n+1} E_1 \cdots E_n.$$

这一原理在我们的方法中仍然成立。给定 n 条件事件$E_1|H_1$、……、$E_n|H_n$，有([34])

$$\bigvee_{i=1}^{n}(E_i|H_i)=\sum_{i=1}^{n}(E_i|H_i)-\sum_{i_1<i_2}(E_{i_1}|H_{i_1})\wedge(E_{i_2}|H_{i_2})+\cdots+(-1)^{n+1}\bigwedge_{i=1}^{n}(E_i|H_i). \tag{42}$$

令 $P(E_i|H_i)=x_i$，$\mathbb{P}[(E_{i_1}|H_{i_1})\wedge(E_{i_2}|H_{i_2})]=x_{i_1i_2}$，$i_1\neq i_2$，…，$\mathbb{P}[\bigwedge_{i=1}^{n}(E_i|H_i)]=x_{1\cdots n}$，$\mathbb{P}[\bigvee_{i=1}^{n}(E_i|H_i)]=y_{1\cdots n}$。那么，当 $\bar{H}_1\bar{H}_2\cdots\bar{H}_n$为真时，也就是说，所有条件事件 $E_i|H_i$ 均为无效事件，(42) 式左侧的值为 $y_{1\cdots n}$，而右侧的值为 $\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i_1<i_2}x_{i_1i_2}+\cdots+(-1)^{n+1}x_{1\cdots n}$；因此，$(E_1|H_1)\vee\cdots\vee(E_n|H_n)$的先验期望为

$$y_{1\cdots n}=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i_1<i_2}x_{i_1i_2}+\cdots+(-1)^{n+1}x_{1\cdots n}.$$

(e) 给定事件 n E_1、……、E_n，由 (38) 可知

$$P(E_i)=1,i=1,\ldots,n\iff P(E_1\cdots E_n)=1.$$

若 $P(E_i)=1$、$i=1$、……、n 相容，则可以说，族 $\mathcal{F}=\{E_1$、……、$E_n\}$ 是 p-相容的，因此这一性质等价于赋值 $P(E_1\cdots E_n)=1$ 的相干性。将每个 E_i 替换为 $E_i|H_i$ 后，这一刻画仍然成立；事实上，当赋值 $P(E_i|H_i)=1$、$i=1$、……、n 相容时，族 $\mathcal{F}=\{E_1|H_1$、……、$E_n|H_n\}$ 是 p-相容的。此外，由 (40) 可得

$$P(E_i|H_i)=1,i=1,\ldots,n\iff\mathbb{P}[(E_1|H_1)\wedge\cdots\wedge(E_n|H_n)]=1,$$

也就是说，$\mathcal{F}$ 的 p-一致性等价于赋值$\mathbb{P}[(E_1|H_1)\wedge\cdots\wedge(E_n|H_n)]=1$ 的相干性。

(f) 给定一个 p-相容族 $\mathcal{F}=\{E_1,\ldots,E_n\}$ 以及另一个事件 E_{n+1}，族 $\mathcal{F}$ p-蕴涵事件 E_{n+1}，当且仅当 $P(E_i)=1,i=1,\ldots,n$ 蕴涵 $P(E_{n+1})=1$。从 $\mathcal{F}$ 到 E_{n+1} 的 p-蕴涵等价于以下各项性质（[36]）：

(i) $E_1\cdots E_n\subseteq E_{n+1}$，即 $E_1\cdots E_nE_{n+1}=E_1\cdots E_n$；
(ii) 条件事件 $E_{n+1}|E_1\cdots E_n$ 的（示性函数）为常数，且等于 1。

对于条件事件，同样的刻画也成立。更确切地说，给定一个 p-相容族 $\mathcal{F}=\{E_1|H_1,\ldots,E_n|H_n\}$ 以及另一个条件事件 $E_{n+1}|H_{n+1}$，我们回顾一下：$\mathcal{F}$ p-蕴涵 $E_{n+1}|H_{n+1}$，当且仅当 $P(E_i|H_i)=1,i=1,\ldots,n$ 蕴涵 $P(E_{n+1}|H_{n+1})=1$。这一 p-蕴涵概念将 Adams 在 [1] 中借助真概率分布提出的概念推广到了相干性的框架下。在（[33, 定理 18]）中，已证明从 p-相容族 $\mathcal{F}$ 到 $E_{n+1}|H_{n+1}$ 的 p-蕴涵可以由以下等价性质刻画：

(i) $(E_1|H_1)\wedge\cdots\wedge(E_n|H_n)\leqslant E_{n+1}|H_{n+1}$；
(ii) $(E_1|H_1)\wedge\cdots\wedge(E_n|H_n)\wedge E_{n+1}|H_{n+1}=(E_1|H_1)\wedge\cdots\wedge(E_n|H_n)$。

最后，通过引入一种恰当的迭代条件概念$(E_{n+1}|H_{n+1})\,|\,[(E_1|H_1)\wedge\cdots\wedge(E_n|H_n)]$，在 [40] 中已经证明

$$\mathcal{F}\text{ p-entails }E_{n+1}|H_{n+1}\iff(E_{n+1}|H_{n+1})\,|\,[(E_1|H_1)\wedge\cdots\wedge(E_n|H_n)]\;=\;1\,, \tag{43}$$

也就是说，p-一致族 $\mathcal{F}$ p-蕴涵 $E_{n+1}|H_{n+1}$，当且仅当迭代条件 $(E_{n+1}|H_{n+1})\,|\,[(E_1|H_1)\wedge\cdots\wedge(E_n|H_n)]$ 为常数且等于 1。文献 [31,36]研究了若干推理规则的 p-蕴涵刻画。

7 结论

本文第一部分阐述了德·菲内蒂的主观概率方法。我们回顾了无条件和条件情形下，适用于投注方案和惩罚准则的相干性原则。我们证明了这两种准则等价，并阐述了相干性的几何解释。我们还探讨了适当评分规则框架下的相干性概念。我们讨论了德·菲内蒂三值逻辑中的条件事件概念，重点考察真值的数值表示。随后，我们考察了一些适用于无条件事件的基本逻辑和概率性质，并检验它们在若干三值逻辑中针对某些合取与析取组合的有效性：$(\wedge_K,\ \vee_K)$、$(\wedge_L,\ \vee_L)$、$(\wedge_B,\ \vee_B)$、$(\wedge_S,\ \vee_S)$。我们证实，这些组合无一满足所有性质；具体而言，我们发现，对于这些三值逻辑，Fr´echet-Hoeffding 概率界并不成立。接着，我们在相干性框架下考察了复合条件句的方法，并基于投注方案证明，合取与析取是合适的条件随机量。在这一概率逻辑中，我们证实，对于条件事件，无条件事件所适用的所有基本逻辑和概率性质仍然成立。具体而言，Fr´echet-Hoeffding 概率界成立。此外，我们发现，无条件事件 $E_1\cdots E_n$ 与 n 的合取等同于合取 $\mathcal{C}=E_1\wedge(E_2|E_1)\wedge\cdots\wedge(E_n|E_1\cdots E_{n-1})$。因此，在我们的方法中，$\mathcal{C}$ 的先验期望是乘积 $P(E_1)P(E_2|E_1)\cdots P(E_n|E_1\cdots E_{n-1})$。我们还回顾了 p-一致性和 p-蕴涵的概念，并阐明了在我们的方法中通过合取对它们进行刻画的方式。

参考文献

1. Adams, E.W.:《条件句逻辑》。Reidel，多德雷赫特（1975） 2. Baratgin, J., Politzer, G., Over, D., Takahashi, T.:《不确定性心理学与三值真值表》。《心理学前沿》9，1479（2018）。https://doi.org/10 01479 3 3389 2018 . /fpsyg. . .
Benferhat, S., Dubois, D., Prade, H.:《非单调推理、条件对象与可能性理论》。人工智能92，259–276（1997）。https://doi.org/10.1016/S0004-3702(97)00012-X

4. Calabrese, P.: 《逻辑与概率基础的代数综合》。Information Sciences 42(3), 187–237（1987）。https://doi.org/10 5 5 1016 0020 0255 87 90023 . / - ( ) - . Ciucci, D., Dubois, D.: 《三值逻辑中联结词之间的关系》。载于：Greco, S., Bouchon-Meunier, B., Coletti, G., Fedrizzi, M., Matarazzo, B., Yager, R.R.（编）, Advances in Computational Intelligence。IPMU 2012，CCIS，第297卷，第633–642页。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡（2012） 6. Ciucci, D., Dubois, D.: 《三值逻辑之间依赖关系图》。Information Sciences 250，162–177（2013）。https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.06.040 7. Ciucci, D., Dubois, D.: 《三值逻辑之间依赖关系图》。Information Sciences 250，162–177（2013） 8. Coletti, G., Scozzafava, R.: 《相干框架下的概率逻辑》。Kluwer，多德雷赫特（2002） 9. Coletti, G., Scozzafava, R., Vantaggi, B.: 《相干条件概率、模糊包含与默认规则》。载于：Yager, R., Abbasov, A.M., Reformat, M.Z., Shahbazova, S.N.（编）, 《软计算：理论现状与新颖应用》，第193–208页。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡（2013） 10. Coletti, G., Scozzafava, R., Vantaggi, B.: 《相干性下的可能性逻辑与概率逻辑：默认推理与系统 P》。Mathematica Slovaca 65(4)，863–890（2015）。https://doi.org/10.1515/ms-2015-0060 11. Cruz, N.: 《从不确定前提进行演绎? 》。载于：Elqayam, S., Douven, I., Evans, J.S.B.T., Cruz, N.（编）, 《人类思维中的逻辑与不确定性：献给 David E. Over》，第27–41页。Routledge，Oxon（2020）。https://doi.org/ 10 4324 9781315111902 3 . / - . Csaszar, A.: 《论条件概率空间的结构》。Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica 6(3-4)，337–361（1955）。https://doi.org/ 10 1007 02024394, 10 1007 02024394 . / BF http://dx.doi.org/ . /BF . de Finetti, B.: 《概率逻辑》。载于：《国际科学哲学大会论文集》，巴黎，1935年，第IV 1–IV 9页。Hermann et C.ie，巴黎（1936） 14. de Finetti, B.: 《概率逻辑》。Philosophical Studies 77，181–190（1936/1995） 15. de Finetti, B.: 《概率论》。Einaudi 出版社，2卷，都灵（1970），英文版：Theory of Probability 1（2），奇切斯特，Wiley，1974（1975） 16. Douven, I., Dietz, R.: 《关于斯托尔纳克假说的一个难题》。Topoi，第31–37页（2011）。https://doi.org/10.1007/s11245-010-9082-3 17. Douven, I., Elqayam, S., Singmann, H., van Wijnbergen-Huitink, J.: 《条件句与推理联系：迈向一种新语义学》。Thinking & Reasoning，第1–41页（2019）。https://doi.org/10.1080/13546783.2019.1619623 18. Dubins, L.E.: 《有限可加条件概率、聚合性与分解》。The Annals of Probability 3，89–99（1975） 19. Dubois, D., Prade, H.: 《条件对象作为非单调后果关系》。IEEE Trans. on Syst. Man and Cybernetics，24(12)，1724–1740（1994年12月）。https://doi.org/10 328930 20 1109 21. / . . Edgington, D.: 《论条件句》。Mind 104，235–329（1995） 21. Égré, P., Rossi, L., Sprenger, J.: 《指示性条件句的德·菲内蒂逻辑，第一部分：三值语义与有效性》。J Philos Logic（2020）。https://doi.org/https://doi.org/10 6 22 1007 10992 020 09549 . /s - - - . Flaminio, T., Gilio, A., Godo, L., Sanfilippo, G.: 《作为随机量与布尔代数的复合条件句》。已提交（2022年）

23. Flaminio, T., Godo, L., Hosni, H.：条件句的布尔代数、概率与逻辑。《人工智能》286，103347（2020）。https://doi.org/10.1016/j.artint.2020.103347 24. Gale, D.：《线性经济模型理论》。McGraw-Hill，纽约（1960）25. Gilio, A.：《近似可加事件类与条件概率的一致性》。Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universit`a di Trieste XXI(1)，22–38（1989）26. Gilio, A.：`a 条件概率 C_0-相容。数学报告 9(VII)，277–295，罗马（1989）27. Gilio, A.：主观概率评估中的惩罚准则与一致性条件。意大利数学联合会通报 4–B，645–660（1990）28. Gilio, A.：精确与不精确条件概率评估的算法。《人工智能中处理部分知识的数学模型》，第231–254页（1995）29. Gilio, A.：系统 P 中基于相干性的概率推理。《数学与人工智能年刊》34，5–34（2002）。https://doi.org/10 101442261 30 1023. /A: . Gilio, A.：在基于相干性的概率默认推理中推广推理规则。《国际近似推理杂志》53(3)，413–434（2012）。https://doi.org/10.1016/j.ijar.2011.08.004 31. Gilio, A., Pfeifer, N., Sanfilippo, G.：概率蕴涵与迭代条件句。载于：Elqayam, S., Douven, I., Evans, J.S.B.T., Cruz, N.（编），《人类思维中的逻辑与不确定性：献给 David E. Over》，第71–101页。Routledge, Oxon（2020 6 32 10 4324 9781315111902 ）。https://doi.org/ . / - . Gilio, A., Sanfilippo, G.：条件随机量与复合条件句。逻辑学研究 102(4)，709–729（2014）。https://doi.org/10.1007/s11225-013-9511-6 33. Gilio, A., Sanfilippo, G.：条件事件之间的广义逻辑运算。《应用智能》49(1)，79–102（2019年1月）。https://doi.org/10.1007/s10489-018-1229-8 34. Gilio, A., Sanfilippo, G.：合取与析取条件句的代数方面及相干性条件。《国际近似推理杂志》126，98–123（2020）35. Gilio, A., Sanfilippo, G.：复合条件句、Fr´echet-Hoeffding 界与 Frank t-范数。《国际近似推理杂志》136，168–200（2021 006 36 10 1016 2021 06 ）。https://doi.org/https://doi.org/ . /j.ijar. . . . Gilio, A., Sanfilippo, G.：论复合条件句与迭代条件句。Argumenta 6(2)，241–266（2021）。https://doi.org/10.14275/2465-2334/202112.gil, https://www.argumenta.org/article/compound-iterated-conditionals/ 37. Gilio, A., Spezzaferri, F.：随机矩阵的相干性与扩展。数学 L(I)，119–135（1995）38. Gilio, A., Sanfilippo, G.：相容的条件概率与适当评分规则。载于：Coolen, F., de Cooman, G., Fetz, T., Oberguggenberger, M.（编），ISIPTA'11：《第七届不精确概率理论与应用国际研讨会论文集》，第189–198页。SIPTA，因斯布鲁克（2011）39. Gilio, A., Sanfilippo, G.：复合条件句、Fr´echet-Hoeffding 界与 Frank t-范数。《国际近似推理杂志》136，168–200（2021）。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijar.2021.06.006

40. Gilio, A., Sanfilippo, G.：迭代条件句与 p-蕴涵的刻画。载于：Vejnarov´a, J., Wilson, N.（编），《不确定性推理的符号与定量方法》，ECSQARU 2021，LNCS，第12897卷，第629–643页。Springer International Publishing（2021），https://arxiv.org/pdf/2109.04776.pdf 41. Goodman, I.R., Nguyen, H.T.：条件对象与不确定性的建模。载于：Gupta, M.M., Yamakawa, T.（编），《模糊计算》，第119–138页。North-Holland（1988）42. Goodman, I.R., Nguyen, H.T., Walker, E.A.：《智能系统的条件推理与逻辑：无测度条件化理论》。North-Holland（1991），www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a241568.pdf 43. Hailperin, T.：《语句概率逻辑：起源、发展、现状与技术应用》。Lehigh University Press，伯利恒（1996）44. Holzer, S.：论相干性与条件预期。意大利数学联合会通报 4(6)，441–460（1985）45. Jeffrey, R.：事实性条件句 i。亚里士多德学会会刊增刊卷65，161–183（1991）46. Kaufmann, S.：左右条件句：整个条件句族的概率。《哲学逻辑杂志》38，1–53（2009）。https://doi.org/10.1007/s10992-008-9088-0 47. Kern-Isberner, G.：《非单调推理与信念修正中的条件句——将条件句视为主体》，第2087卷。LNAI，Springer（2001）48. Lad, F.：作为线性泛函且不依赖底层测度空间的相容先验期望：条件量的纯算术结构。载于：Coletti, G. 等（编），《人工智能中处理部分知识的数学模型》，第101–112页。Plenum Press，纽约（1995）49. Lad, F.：《操作性主观统计方法：数学、哲学与历史导论》。Wiley，纽约（1996）50. McGee, V.：条件概率与复合条件句。《哲学评论》98 2185116 51 4 485 541 1989 10 2307（），–（）。https://doi.org/http://dx.doi.org/ . / . Milne, P.：Bruno de Finetti 与条件事件逻辑。《英国科学哲学杂志》48(2)，195–232（1997），http://www.jstor.org/stable/687745 52. Mura, A.：迈向一种新的直陈式条件句逻辑。Logic and Philosophy of Science IX，17–31（2011）53. Nguyen, H.T., Walker, E.A.：条件事件代数与概率逻辑的历史及导论。《IEEE系统、人类与控制论汇刊》24 328924 54 12 1671 1675 1994 10 1109 21（），–（）。https://doi.org/ . / . . Over, D., Cruz, N.：条件句的假设理论与理性。载于：Knauff, M., Spohn, W.（编），《理性手册》，第395–404页。MIT出版社（2021）55. Pfeifer, N., Sanfilippo, G.：相干性下的概率对立方形与六边形。《国际近似推理杂志》88，282–294（2017）。https://doi.org/10 014 56 1016 2017 05 . /j.ijar. . . . Regazzini, E.：有限可加条件概率。《米兰数学与物理研讨会报告》55，69–89（1985）57. Rigo, P.：有限可加条件概率的一个扩展定理。意大利统计学会第三十四届科学会议论文集，第27–34页（1988）58. Sanfilippo, G.：两个条件事件的某些合取的概率下界与上界。载于：SUM 2018，LNCS，第11142卷，第260–275页。Springer International Publishing，Cham（2018）

36 Angelo Gilio[1] 和 GiuseppeSanfilippo[2]

59. Sanfilippo, G., Gilio, A., Over, D., Pfeifer, N.：《条件句的概率与迭代条件句的预见》。《国际近似推理杂志》 121，150 001 60 173 2020 10 1016 2020 03 – ( )。https://doi.org/ . /j.ijar. . . . Sanfilippo, G., Pfeifer, N., Over, D., Gilio, A.：从合取条件句到迭代条件句的概率推理。《国际近似推理杂志》93 027 61 103 118 2018 10 1016 2017 10（增刊 C），– ( )。https://doi.org/ . /j.ijar. . . . Sanfilippo, G.：从非精确概率评估到具有拟可加条件事件类的条件概率。载于：第二十八届人工智能不确定性会议（UAI-12）论文集，第 736–745 页。AUAI Press，俄勒冈州科瓦利斯（2012） 62. Schay, G.：条件事件代数。《数学分析与应用期刊》24，334 8 63 344 1968 10 1016 0022 247 68 90035 – ( )。https://doi.org/ . / - X( ) - . Stalnaker, R., Jeffrey, R.：作为随机变量的条件句。载于：Eells, E., Skyrms, B.（编）《概率与条件句：信念修正与理性决策》，第 31–46 页。剑桥大学出版社，纽约，美国纽约州（1994） 64. Stalnaker, R.C.：概率与条件句。《科学哲学》37(1)，64–80（1970） 65. van Fraassen, B.：条件句的概率。《概率论、统计推断与科学统计理论基础》1，261–308（1976），被引用 89 次