arXiv:2301.09331v1 [math.QA] 23 Jan 2023

量子 GL_n的扭曲倾斜模环

M. S.Datt 和 Rubayya 数学与统计学院 海得拉巴大学，海得拉巴，印度-500046。电子邮件：msdatt@uohyd.ac.in

摘要：设 G 是特征为$p \neq 0$的域上的量子 GL_n 。本文定义了 G的扭曲倾斜模环。我们给出了量子 $GL_2(k)$的扭曲倾斜模环的生成元与关系。我们还证明这是一个约化环。

关键词：量子群、倾斜模、扭曲倾斜模、表示环。

2010年数学主题分类 20G05。

1 引言

设 k 是特征为 $p \neq 0$ 的域，且 q 是一个本原的 ℓ^{th} 次单位根。设 G 是 GL_n 在 k 上、参数为 q 的量子群，如 [1] 中所述。我们知道，坐标环 $k[G]$ 是一个霍普夫代数。设 c_{ij}、$1 \leq i, j \leq n$ 是 G 的坐标函数。设 T 是极大环面， B 是 G 的一个包含 T 的博雷尔子群。因此，对应于 T 的 Hopf 理想为 $\{c_{ij} \mid i \neq j\}$ ，对应于 B 的 Hopf 理想为 $\{c_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$。

设 $X(T) = \mathbb{Z}^n$。群 $X(T)$ 称为 T 的特征群。以 $\{e(\lambda) \mid \lambda \in X(T)\}$ 为基的整数群环 $\mathbb{Z}X(T)$ 是一个群代数，其乘法由规则 $e(\lambda)e(\mu) = e(\lambda + \mu)$ 给出，其中 λ、$\mu \in X(T)$。给定 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n) \in X(T)$，我们有一个一维 T-模 k_λ，其余模结构映射将 a 映至 $a \otimes c_{11}^{\lambda_1} c_{22}^{\lambda_2} \ldots c_{nn}^{\lambda_n} \in k_\lambda \otimes k[T]$。我们知道，集合 $\{k_\lambda \mid \lambda \in X(T)\}$ 是一组完备的两两不同构的不可约 T-模。对于任意量子群 H，我们用 mod(H) 表示所有有限维 H- 模构成的集合。给定 $V \in \in \text{mod}(T)$ 和 $\lambda \in X(T)$，令 V_λ 表示 V 中所有同构于 k_λ 的子模之和。我们称子模 V_λ 为 V 的 λ-权子空间。任意属于 mod(G) 的模 $V \in$ 作为 T-模都是完全可约的，即 $V = \oplus_{\lambda \in X(T)} V_\lambda$。 V 的形式特征为 $\text{ch}^V = \sum_{\lambda \in X(T)} \dim(V_\lambda) e(\lambda)$。

令 $\epsilon_i = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$，其中 $1 \leq i \leq n$，且 1 位于第 i^{th} 个位置。集合 $\Phi = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$ 称为所有

G的根的集合。若根 $\epsilon_i - \epsilon_j$ 满足 $i < j$，则称其为正根；若满足 $i > j$，则称其为负根。令 Φ^+ 和 Φ^- 分别为所有正根和负根的集合。Φ 的子集 $S = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \ldots, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n\}$ 称为所有单根的集合。我们在 $X(T)$ 上有一个 $\mathbb{Z}$-双线性形式 $(\ ,\ )$，使得对于 $1 \leq i, j \leq n$，有 $(\epsilon_i, \epsilon_j) = \delta_{ij}$。我们如下在 $X(T)$ 上定义一个偏序：对于 $\lambda, \mu \in X(T)$，若 $\mu - \lambda$ 是正根之和，则令 $\lambda \leq \mu$。现在，对每个 $\lambda \in X(T)$，我们都有诱导的 G-模 $\nabla(\lambda) = \mathrm{Ind}_B^G k_\lambda$。令$X^+(T) = \{\lambda \in X(T) \mid \nabla(\lambda) \neq 0\}$，称其为所有支配权的集合。对于 $\lambda \in X^+(T)$，模 $\nabla(\lambda)$ 称为余标准模。对于 $\lambda \in X^+(T)$，我们有一个魏尔模或标准模 $\Delta(\lambda) = (\nabla(-w_0\lambda))^*$，其中 w_0 是 S_n 中长度最大的元素。对于 $V \in \mathrm{mod}(G)$，若 G-子模 V的一个滤过 $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$满足：对所有 $1 \leq i \leq n$，存在某个 $\lambda_i \in X^+(T)$ 使得 $V_i/V_{i-1} \cong \nabla(\lambda_i)$，则称其为余标准滤过（或良滤过）。对于模 $V \in \mathrm{mod}(G)$，若 V 具有良滤过，我们记作 $V \in \mathcal{F}(\nabla)$。类似地，对于 $V \in \mathrm{mod}(G)$，若 G-子模 V的一个滤过 $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = V$满足：对所有 $1 \leq i \leq n$，存在某个 $\lambda_i \in X^+(T)$ 使得 $V_i/V_{i+1} \cong \Delta(\lambda_i)$，则称其为标准滤过（或魏尔滤过）。若 V具有标准滤过，我们记作 $V \in \mathcal{F}(\Delta)$。若模 V 同时具有余标准滤过和标准滤过，则称其为倾斜模。由 [[3],p.no. 262], 可知，对于每个 $\lambda \in X^+(T)$，都存在一个最高权为 λ的唯一不可分解倾斜模 $T(\lambda)$。此外，集合 $\{T(\lambda) \mid \lambda \in X^+(T)\}$ 构成一组完备的、两两非同构的不可分解倾斜模。任意倾斜G-模都是若干个 $T(\lambda)$ 的直和。

我们用 G 表示域 k 上的一般线性群 $GL_n(k)$。令 x_{ij} 为 G 的坐标函数，d 为（通常意义下的）行列式。令 T 为极大环面，B 为包含 T的博雷尔子群。令 $X(T)$ 为的所有特征组成的群，令 $\mathbb{Z}X(T)$ 为 $X(T)$的整数群环。G 的坐标环 $k[G]$ 是一个霍普夫代数。我们固定一个$k[G]$ 的霍普夫 $\mathbb{F}_p$-形式，并令 F为相应的弗罗贝尼乌斯态射。我们用 F^i 表示迭代 i^{th} 次的弗罗贝尼乌斯态射。若 V 是一个 G- 模，则记经由 F 得到的诱导模为 V^F。令 $X^+(T)$ 表示 G 的所有支配权组成的集合。于是，$\{L(\lambda) \mid \lambda \in X^+(T)\}$ 构成两两不等价的单 G-模的完备集合。由 [2], 我们也有一个完备集合 $\{T(\lambda) \mid \lambda \in X^+(T)\}$，其元素是两两非同构的不可分解倾斜 G-模。任一倾斜G-模都是 $T(\lambda)$ $\lambda \in X^+(T)$ 的直和，我们称这些模为部分倾斜模。

令 $F: G \longrightarrow G$ 为这样的态射，其余态射将 x_{ij} c_{ij}^{ℓ} 映至 where $1 \leq i, j \leq n$。因此，任意 G-模 V也可通过 F成为一个 G-模，而我们

将这个 G-模记为 V^F。态射 F称为量子 Frobenius 态射。令 $X_1 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in X^+(T) \mid 0 \leq \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n \leq \ell - 1\}$。由 Steinberg 张量积定理[[4],p.no.65], 对于 $\lambda \in X_1$和 $\mu \in X^+(\bar{T})$, 有 $L(\lambda + \ell\mu) \cong L(\lambda) \otimes \bar{L}(\mu)^F$。文献 [8] 已证明，两个单量子 $GL_2(k)$-模的张量积可以表示为有限个如下形式的不可分解量子扭曲倾斜模的直和： $T_{-1} \otimes (\bar{T}_0 \otimes \bar{T}_1^{\bar{F}} \otimes \cdots \bar{T}_r^{\bar{F}^r})^F$,¯其中 T_{-1} 是一个不可分解倾斜 G-模，而 T_i是倾斜 G-模，对所有 $i \geq 0$均成立。

令 rep(G) 表示 mod(G) 的所有同构类构成的集合。对于$V \in$ mod(G)，我们将其在 rep(G) 中经由 V 得到的类记为 $[V]$ 。对于 $V, W \in$mod(G)，集合 rep(G) 关于二元运算 $[V] + [W] = [V \oplus W]$和 $[V][W] = [V \otimes W]$构成一个环。我们称环 rep(G) 为 G的表示环。令 $\mathcal{B} = \{V_i \mid i \in I\} \subset$ mod(G) 为一组完备的、两两不同构的不可分解 G-模。则 $\{[V] \mid V \in \mathcal{B}\}$是 rep(G) 的一组基。类似地，mod(G) 也有 Grothendieck 环 GrotG。对于 $V \in$ mod(G)，我们将其在 GrotG 中经由 V得到的类记为 $\langle V \rangle$。令 $V \in$ mod(G)，有 $\langle V \rangle = \Sigma_i a_i \langle L_i \rangle$ ，其中 L_i是单 G-模， a_i是它们在 V中的合成重数。对于 $V, W \in$ mod(G)，定义乘法 $\langle V \rangle \langle W \rangle = \langle V \otimes W \rangle$。于是，环 GrotG 是一个以基 $\{\langle L(\lambda) \rangle \mid \lambda \in X^+(T)\}$为基的自由$\mathbb{Z}$-模。由 [[4],69,14(iii)], 可知，若 V, W是倾斜模，则 $V \otimes W$和 $V \oplus W$也是倾斜模。因此，倾斜模的类所张成的空间构成 rep(G) 的一个子环，记为 rep_{tilt}(G)。令 ch 表示从 rep(G) 到 $(\mathbb{Z}X(T))^W$ 的映射，它将类 $[V]$映为 chV。这诱导出 GrotG 到 $(\mathbb{Z}X(T))^W$ 的一个同构。由 [[2],(1.3)] 可知，rep_{tilt}(G) 与 $(\mathbb{Z}X(T))^W$ 同构。

令 $A(G)$ 为 rep(G) 的子环，它由所有倾斜 G模¯以及 G的扭曲倾斜模的量子 Frobenius 扭曲生成。在 [6], 中，Doty 和 Henke 已证明，不可约有理模 L、 L' 的张量积 $L \otimes L'$可以表示为以下形式的 $GL_2(k)$模的直和： $\bar{T}_0 \otimes \bar{T}_1^{\bar{F}} \otimes \cdots \otimes \bar{T}_r^{\bar{F}^r}$， 其中每个 $\bar{T}_i$都是 $GL_2(k)$的不可分解倾斜模。在 [7], 的一篇论文中，已证明 $SL_2(k)$ 的扭曲倾斜模环是一个约化环。在 [8], 中，已证明任意两个单量子 $GL_2(k)$模的张量积都可以表示为扭曲倾斜模的有限直和。

本文给出了环 $A(G)$ 的生成元与关系。我们证明，量子 $GL_2(k)$ 的扭曲倾斜模环是一个约化环。

2 量子 GL_n 的扭曲倾斜模环

设 R 是由元素 $\{X_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n\}$生成的自由 k-代数。则 R 配备余乘法 δ: $R \longrightarrow R \otimes R, \delta(X_{ij}) = \Sigma_{r=1}^{n} X_{ir} \otimes X_{rj}$和余单位 ϵ: $R \longrightarrow k, \epsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$后是一个双代数。设 I是 R由形如以下元素生成的理想

$$\begin{gathered} X_{ir}X_{is} - X_{is}X_{ir} \quad \text{for all } i,r,s, \\ X_{jr}X_{is} - qX_{is}X_{jr} \quad \text{for all } i<j \text{ and } r \leq s, \\ X_{jr}X_{is} - X_{is}X_{jr} - (q-1)X_{ir}X_{js} \quad \text{for all } i<j \text{ and } r>s, \end{gathered}$$

其中 $i \leq i,j,r,s \leq n$。令 $X_{ij} = 1$ 的次数为 deg（对于 $1 \leq i,j \leq n$），则理想 I 是齐次理想。设 $A_q(n) = R/I$，且 $c_{ij} = X_{ij} + I$ 对于 $1 \leq i,j \leq n$。我们用 d_q 表示量子行列式 $\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) c_{1,1\sigma} c_{2,2\sigma} \cdots c_{n,n\sigma}$。相对于 d_q 对 $A_q(n)$ 进行局部化，得到霍普夫代数 $k[G]$。我们用 G 表示相应的量子一般线性群。霍普夫代数 $k[G]$ 也称为 G 的坐标环。设 E 是 k 上一个 n 维向量空间，其标准基为 $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$。从 E 到 $E \otimes k[G]$ 的映射 $e_i \mapsto \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes c_{ji}$ 在 E 上定义了左 G-模结构。我们称左 G-模 E 为自然左 G-模。

设 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$。设 $\psi^+ = \{(i,j) \mid 1 \leq j < i \leq n\}$ 和 $\psi^- = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$。那么，所有 $c_{11}^{a_{11}} c_{12}^{a_{12}} \cdots c_{nn}^{a_{nn}}$ 的 k-张成空间 I_{ψ^+}，其中 $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{N}_0^{n^2}$，且对于某个 $(i,j) \in \psi^+$，$a_{ij} \neq 0$，是 $k[G]$ 的一个 Hopf 理想。与霍普夫代数 H/I_{ψ^+} 对应的量子群 B^+ 称为 G 的正 Borel 子群。类似地，与霍普夫代数 $k[G]/I_{\psi^-}$ 对应的量子子群称为 G 的负 Borel 子群。设 $\psi_0 = \{(i,j) \mid i \neq j\}$。设 I_{ψ_0} 为 $c_{11}^{a_{11}} c_{12}^{a_{12}} \cdots c_{nn}^{a_{nn}}$ 的 k-张成空间，其中 $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}) \in \mathbb{N}_0^{n^2}$，且对于某个 $(i,j) \in \psi_0$，$a_{ij} \neq 0$。那么，与霍普夫代数 $k[G]/I_{\psi_0}$ 对应的 G 的量子子群 T 称为群 G 的一个环面。设 G 的子群 G_1 的定义理想是由 $c_{ij}^{\ell} - \delta_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$ 生成的 $k[G]$ 的理想。设 $B_1 = G_1 \cap B, B_1^+ = G_1 \cap B^+$ 和 $T_1 = G_1 \cap T$。令 $X_1 = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) \in X^+(T) \mid 0 \leq \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_n \leq \ell - 1\}$。那么，$\{L(\lambda)_{|G_1} \mid \lambda \in X_1\}$ 是一组完备的、两两非同构的单 G_1-模。

令 $\rho = (n, n-1, \ldots, 1) \in X^+(T)$。我们有 $L((\ell-1)\rho) = \nabla((\ell-1)\rho) = _T((\ell-1)\rho)$，且 $L((\rho-1)\rho) = \nabla((\rho-1)\rho)$。我们将 $\nabla((\ell-1)\rho)$ 记作 St^{-}，将 $\nabla((\rho-1)\rho)$ 记作 St，并分别称它们为量子斯坦伯格模和斯坦伯格（普通）模。更一般地，我们有普通的 r^{th}

斯坦伯格模 St_r，对于 $r \geq 1$。

令 $X^+(T)_\infty$ 为所有序列 $(\lambda) = (\lambda(0)\ \lambda(1)\ldots)$ 的集合，其中各项均为 G 的支配权，且当 i 充分大时，$\lambda(i) = 0$。令 $X^+(T)_\infty = X^+(T) \times X^+(T)_\infty$。令 $\mathbb{N}_{-1} = \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$。对每个 $n \in \mathbb{N}_{-1}$，令 $X^+(T)_n = \{(\lambda) = (\lambda(-1)\ \lambda(0)\ldots) \in X^+(T)_\infty \mid \lambda(i) = 0 \text{ 对所有 } i > n\}$ 成立。

令 $\phi : \mathrm{rep}(G) \longrightarrow \mathrm{rep}(G)$ 为端同态，它将类 $[V]$ 映为 $[V^F]$。对于 $a \in \mathrm{rep}(\bar{G})$，我们将 $\phi(a)$ 记作 a^ϕ。类似地，令 $\bar{\phi}: \mathrm{rep}(\bar{G}) \longrightarrow \mathrm{rep}(\bar{G})$ 为端同态，它将 $[V]$ 映为 $[V^{\bar{F}}]$。与之前对 ϕ 的处理相同，对于 $a \in \mathrm{rep}(\bar{G})$，我们将 $\bar{\phi}(a)$ 记作 $a^{\bar{\phi}}$。我们将 $\bar{a}^{\psi^{r+1}}$ 写作 $(\bar{a}^{\bar{F}^r})^F$，其中 $r \geq 0$。由 $[[4],\ 3.3]$，环 $\mathrm{rep}(G)$ 具有一个 $\mathbb{Z}$-基 $\{[T(\lambda)] \mid \lambda \in X^+(T)\}$。我们将类 $[T(\lambda)]$ 记作 $t(\lambda)$。类似地，对于 $\lambda \in X^+(T)$，我们将类 $[T(\lambda)]$ 记作 $\bar{t}(\lambda)$。对于 $(\lambda) \in X^+(T)_\infty$，令 $T((\lambda)) = T(\lambda(-1)) \otimes (\bar{T}(\lambda(0)) \otimes (\bar{T}(\lambda(1))^{\bar{F}} \otimes \bar{T}(\lambda(2))^{\bar{F}^2} \otimes)^F$。因此，我们有 $t((\lambda)) = t(\lambda(-1))\bar{t}(\lambda(0))^\psi \bar{t}(\lambda(1))^{\psi^2} \ldots \bar{t}(\lambda(r))^{\psi^r} \ldots$。现在，环 $A = A(G)$ 是 $\mathrm{rep}(G)$ 的子环，由所有满足 $(\lambda) \in X^+(T)_\infty$ 的元素 $t((\lambda))$ 张成。对于 $n \in \mathbb{N}_{-1}$，我们用 $A_n = A(G)_n$ 表示 $\mathrm{rep}(G)$ 的子环，它由所有满足 $(\lambda) \in X^+(T)_n$ 且 $A = \cup_{n=1}^\infty A_n$ 的元素 $t((\lambda))$ 张成。

令 $X_s^+(T)$ 为所有满足以下条件之一的元素 $\lambda \in X^+(T)$ 的集合：对于某个单根 α，有 $(\lambda, \check{\alpha}) < \check{\ell} - 1$；或者对于量子群 G 的所有单根 $\check{\beta}$，有 $\ell - 1 \leq (\lambda, \beta) \leq 2(\ell - 1)$，其中 $\check{\alpha} = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ 且 $\beta = 2\beta/(\beta, \beta)$。类似地，令 $X_s^+(T)$ 为所有满足以下条件之一的元素 $\lambda \in X^+(T)$ 的集合：对于 G 的某个单根 α，有 $(\lambda, \check{\alpha}) < p - 1$；或者对于 G 的所有单根 β，有 $p - 1 \leq (\lambda, \beta) \leq 2p - 2$。若元素 $(\lambda) = (\lambda(-1)\ \lambda(0) \ldots, \lambda(r) \ldots) \in X^+(T)_\infty$ 满足：对所有 $0 \leq i \leq n$，$\lambda(-1) \in X_s^+(T)$ 且 $\lambda(i) \in X_s^+(T)$；并且对所有 $j > n$，$\lambda(j) = 0$，则称其为 n- 特殊元素。我们将 $X_s^+(T)_n$ 记作 $X^+(T)_\infty$ 的子集，其中包含所有特殊 n 元素。若元素 $(\lambda) \in X^+(T)_\infty$ 在充分大的 n 下是 n-特殊的，则称其为特殊元素。我们将 $X_s^+(T)_\infty$ 记作 $X^+(T)_\infty$ 的子集，其中包含所有特殊元素。

对于 $\lambda \in X^+(T)$，对量子群 G 的所有单根 β，我们设 $\mathrm{ln}(\lambda) = \sum(\lambda, \check{\beta})$。我们称 $\mathrm{ln}(\lambda)$ 为 λ 的长度。注意，对于所有 $0 \neq \lambda \in X^+(T)$，$\mathrm{ln}(\lambda) \neq 0$。类似地，对于 $\lambda \in X^+(\bar{T})$，我们有 $\mathrm{ln}(\lambda) = \sum(\lambda, \check{\beta})$，其中求和遍及 G 的所有单根 β。对于量子 GL_2 的每个正根 α（对于 G 的正根 α 也是如此），若 $\lambda \neq 0$，则有 $\mathrm{ln}(\lambda) > 0$（分别有 $\mathrm{ln}(\lambda) > 0$）。我们有如下命题。

命题 2.1
(i) A_n 由 $\{t((\lambda)) \mid (\lambda) \in X_s^+(T)_n\}$ 张成。

(ii) A 由 $\{t((\lambda)) \mid (\lambda) \in X_s^+(T)_\infty\}$ 张成。

证明。我们仿照 [7] 中命题的证明。对于元素 $(\lambda) = (\lambda(-1)\ \lambda(0)\dots) \in X^+(T)_n$, 定义 $\ln((\lambda)) = \ln(\lambda(-1)) + \ell(\Sigma_{i=0}^{\infty} p^i \ln(\lambda(i)))$。我们按 $(\lambda) \in X^+(T)_n$ 的长度归纳证明该命题。对于$n = -1$, A_{-1} 由所有 $t(\lambda)\ \lambda \in X_s^+(T)$张成, 因为两个倾斜模的张量积仍是倾斜模。现在假设 $n > -1$。对于 $m \in \mathbb{N}_0$, 令$A_{n,m}$ 为 A_n 的子群, 它们由所有满足 $\ln((\lambda)) = m$ 的元素 $(\lambda) \in X^+(T)_n$ 生成。如果 $m = 0$, 那么 $A_{n,m} = \mathbb{Z}[t(0)]$, 于是结论成立。因此, 假设归纳假设对 $m-1$ 以内的情形成立, 并且 $m > 0$。

令 Z 为 A_n 的子群, 由所有 $t((\lambda)), (\lambda) \in X_s^+(T)_n$ 张成。我们要证明 $Z = A_n$。设 $(\lambda) \in X^+(T)_n$, 使得 $\ln((\lambda)) < m$。那么由归纳法可得 $t((\lambda)) \in Z$。因此我们假设 $(\lambda) = (\lambda(-1)\ \lambda(0)\ \lambda(1)\dots) \in X^+(T)_n$, 使得 $\ln((\lambda)) = m$。

情形(i) 设 $\lambda(-1) \in X_s^+(T)$。令 $(\mu) = (\lambda(0)\ \lambda(1)\dots)$。若 $(\mu) = (0, 0, \dots, 0, \dots)$, 则 $T((\lambda)) = T(\lambda(-1))$。现在由 $[[4], 72(40)]$, 可得 $t((\lambda)) = t(\lambda(-1)) \in Z$。若 $(\mu) \neq (0, 0, \dots, 0, \dots)$, 则 $\ln((\mu)) < m$。因此由归纳法可得 $\bar{t}(\mu) = \Sigma_{(\xi)\in\Lambda} r_{(}\xi)\bar{t}(\xi)$, 其中 Λ 是 $X_s^+(T)_{n-1}$ 的有限子集, 由长度不超过 $\ln((\mu))$ 的元素组成; 并且$r_{(\xi)} \in \mathbb{Z}$, 对于 $(\xi) \in \Lambda$。因此我们有 $t((\lambda)) = t(\lambda(-1))\bar{t}(\mu)^{\phi}$。然后$t((\lambda)) = \Sigma_{(\xi)\in\Lambda'} r_{(}\xi)t((\xi^+))$, 其中 $(\xi^+) = (\lambda(-1)\ \xi(0)\ \xi(1)\dots) \in X_s^+(T)_n$, 且长度 $\ln(\lambda(-1)) + \ell\ln((\xi)) \leq \ln(\lambda(-1)) + \ell\ln((\xi)) = \ln((\lambda)) = m$, 证毕。

情形(ii) 假设 $\lambda(-1) \notin X_s^+(T)$。那么我们可以写成 $\lambda(-1) = (\ell - \bar{1})\rho + \nu + \ell\tau$, 其中 $\nu \in X_1(T)$ 且 $\tau \in X^+(T)$。现在考虑模 $\mathrm{St} \otimes T(\nu) \otimes (T((\ell-1)\rho) + \ell\tau)$, 它是一个倾斜模。由 $[[4],$p.no. $72], $可知, $T((\ell-1)\rho+\nu)$ 是倾斜模 $\mathrm{St} \otimes T(\nu)$ 的一个直和项, 并且恰好作为一个合成因子出现。再由 $[[4],$p.no. $73], $可知, $T((\ell-1)\rho+\nu)\otimes\bar{T}(\tau)^F$是一个最高权为 $\lambda(-1)$ 的倾斜模。因此我们有 $[T((\ell-1)\rho+\nu) \otimes T(\tau)^F] = [T(\lambda(-1))] + \Sigma_{(\xi)\in\Lambda} r_{(\xi)}[T(\xi)]$,, 其中 Λ 是 $X^+(T)$ 的一个子集, 且 $\ln((\xi)) < \ln(\lambda(-1))$。这意味着 $[T((\ell-1)\rho+\nu) \otimes \bar{T}(\tau)^F][\bar{T}(\mu)^F] = [T(\lambda(-1))] + \Sigma_{(\xi)\in\Lambda} r_{(\xi)}[T(\xi)][T(\mu)]^F$。因此 $[T(\lambda)] = [T((\ell-1)\rho+\nu) \otimes \bar{T}(\tau)^F][\bar{T}(\mu)^F] - \Sigma_{(\xi)\in\Lambda} r_{(\xi)}[T(\xi)][T(\mu)]^F$。对于 $(\xi) \in \Lambda$, 令 $(\eta) = (\xi, \lambda(0)\ \lambda(1)\dots)$。现在 $(\eta) \in X^+(T)_n$ 且

$$\ln((\eta)) = \ln((\xi)) + \ln((\mu)) < \ln(\lambda(-1)) + \ell\ln((\mu)) = \ln((\lambda)) = m.$$

因此, 由归纳法可得 $t((\xi))t((\mu))^F = t((\eta)) \in Z$。因此, 要证明 $t((\lambda)) \in Z$, 只需证明 $[T((\ell-1)\rho+\nu)\otimes\bar{T}(\tau)^F][\bar{T}(\mu)^F] \in Z$。

现在根据第1节的命题], ，我们有 $t(\tau)t(\mu) = \Sigma_{(\theta)\in\Omega} s_\theta t((\theta))$，其中$s_\theta \in \mathbb{Z}$，且 Ω 是 $X_s^+(T)_n$ 的有限子集，由满足 $\theta(-1) = 0$ 的元素 (θ) 组成。因此我们有

$$[T((\ell-1)\rho+\nu)\otimes \bar{T}(\tau)^F][\bar{T}(\mu)^F] = \Sigma_{(\theta)\in\Omega} s_\theta [T((\ell-1)\rho+\nu)\otimes \bar{T}(\theta)^F].$$

¯由于每个 $[T(\theta)] \in Z$ 和 $[T((\ell-1)\rho+\nu)] \in Z$，我们有 $[T((\ell-1)\rho+\nu) \otimes \bar{T}(\tau)^F][\bar{T}(\mu)^F] \in Z$，如所需。 □

3 量子 GL_2的两个单模张量积的结构

本节中，我们考虑 k 上本原 ℓ^{th} 次单位根 q 处的量子 GL_2。于是 $X(T) = \mathbb{Z}^2$ 和 $X^+(T) = \{(\lambda_1,\lambda_2) \mid \lambda_1 \geq \lambda_2\}$ 以及 $W = S_2$。令 $X_1 = \{(a,b) \in X^+(T) \mid a-b \leq \ell-1\}$，并令 $X_1 = \{(a,b) \in X^+(T) \mid a-b \leq 2p-2\}$。设 $\pi = \{(a,b) \in X^+(T) \mid a-b \leq 2(\ell-1)\}$ 以及 $\bar{\pi} = \{(a,b) \in X^+(T) \mid a-b \leq 2p-2\}$。那么 π 和 $\bar{\pi}$ 分别是 $X^+(T)$ 和 $X^+(T)$ 的饱和子集¯。我们用 $\chi(\lambda)$ 表示 $\nabla(\lambda)$ 的特征。于是由 [8] 可得以下结果:

引理 3.1 设 $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2) \in \pi$。若 $\lambda \in X_1$，则有 $L(\lambda) = T(\lambda) = \nabla(\lambda) = \Delta(\lambda)$。若 $\lambda \in \pi\backslash X_1$，则可写为 $\lambda_1-\lambda_2 = \ell+r$, $0 \leq r \leq \ell-2$。此时， $L(\lambda)$ $L(\lambda-(r+1)(\epsilon_1-\epsilon_2))$ 是 $\nabla(\lambda)$ 的合成因子。此外， $\chi(\lambda) + \chi(\lambda-(r+1)(\epsilon_1-\epsilon_2))$ 是 $T(\lambda)$ 的特征。

引理 3.2 设 $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$ $\lambda' = (\lambda_1',\lambda_2') \in X_1$。我们可以写为 $\lambda = (\lambda_1-\lambda_2)$ $\epsilon_1 + \lambda_2(\epsilon_1+\epsilon_2)$ 和 $\lambda' = (\lambda_1'-\lambda_2')\epsilon_1 + \lambda_2'(\epsilon_1+\epsilon_2)$。令 $d_q = L(\epsilon_1+\epsilon_2)$ $a = \lambda_1-\lambda_2$, $b = \lambda_1'-\lambda_2'$ 和 $r = \lambda_2+\lambda_2'$。那么， $L(\lambda) \otimes L(\lambda')$ 是 $d_q^{\otimes r}$ 倍的 $T(u)$ 的直和，其中 u 遍历集合 $S(-1)$，该集合可按如下方式计算:

我们列出 $L(a,0) \otimes L(b,0)$ 的权 $(a+b,0)$、$(a+b-1,1)\ldots,(a+b-i,i)\ldots,(a+b-s,s)$，其中 $s = a+b-\ell, 0 \leq s \leq (\ell-2)$。对于每个 $j, 0 \leq j \leq s$， 若 $a+b-2j = \ell+u_j, 0 \leq u_j \leq (\ell-2)$，则从列表中划去 $(a+b-j-u_j-1, j+u_j+1)$。

¯引理 3.3 设 $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$ $\lambda' = (\lambda_1',\lambda_2') \in X^+(T)$ 满足 $\lambda_1-\lambda_2, \lambda_1'-\lambda_2' < p$ 且 $d = L(\epsilon_1+\epsilon_2)$。那么 $\bar{L}(\lambda) \otimes \bar{L}(\lambda')$ 是 $d^{\otimes(\lambda_2+\lambda_2')}$ </style}倍的¯直和，其中各项为 $T(u)$， u 遍历集合 S，该集合可按如下方式计算: 设 $a = \lambda_1-\lambda_2, b = \lambda_1'-\lambda_2'$ 和 $a+b = p+r$, $0 \leq r \leq (p-2)$。设 $A = \{(a+b,0),(a+b-1,1)\ldots,(a+b-r,r)\}$。设 $S(0) = A\backslash\{(a+$

$b-i-u_i-1, i+u_i+1) \mid (a+b-i, i) \in A, a+b-2i = p+u_i, 0 \leq u_i \leq (p-2)\}$.

引理 3.4 对于 $M \in \mathrm{mod}(G)$ 和 $N \in \mathrm{mod}(\bar{G})$，映射 $\phi\colon M \otimes N^F \longrightarrow N^F \otimes M$ 由 $\phi(x \otimes y) = y \otimes x$ 给出，是一个 G-模同构。

下面的定理可利用引理 3.2、引理 3.3 和引理 3.4 证明。

定理 3.5 [8] 两个单 G-模的张量积是 $d_q^{r'}$ $(d^{r''})^F$ 个形如 $T(u_{-1}) \otimes (\bar{T}(u_0) \otimes \bar{T}(u_1)^{\bar{F}} \otimes \cdots \otimes \bar{T}(u_m)^{\bar{F}^m})^F$ 的不可分解模的有限直和，其中 $u_{-1} \in X_1$ 且 $u_i \in \bar{\pi}$，当 $0 \leq i \leq m$ 时。

定理 3.6 [8] $T(u_{-1}) \otimes \bar{T}(u_0) \otimes \bar{T}(u_1)^{\bar{F}} \otimes \cdots \otimes \bar{T}(u_m)^{\bar{F}^m})^F$ 前一定理中的不可分解直和项 $(T(u_{-1}) \otimes (\bar{T}(u_0) \otimes \bar{T}(u_1)^{\bar{F}} \otimes \cdots \otimes \bar{T}(u_{\ell-1})^{\bar{F}^{\ell-1}} \otimes \bar{T}(u_m)^{\bar{F}^m})^F)$ 是倾斜模，当且仅当 $a_{-1} - b_{-1} \leq 2(\ell-1)$ 且 $p-1 \leq a_i - b_i \leq 2p-2$，其中 $u_i = (a_i, b_i)$，对于 $i = -1, 0, \ldots, m-1$。此外，当 $u_i \in \{(a,b) \in X^+(T) \mid a - b \leq p-1\}, i = 0, 1, \ldots, m.$ 时，$T(u)$ 是单模

4 生成元与关系。

现在我们考虑量子 $GL_2(k)$ 的扭曲倾斜模环 A。我们为这个环 A 给出一组生成元与关系。与第 3 节一样，我们按通常方式将 $X^+(T)_n$、$X^+(T)_\infty$、$X_s^+(T)_n$、$X_s^+(T)_\infty$ 视为 $X^+(T) \times X^+(T)_\infty$ 的子集。由 [[4], p.no 72 (5)] 和 [[4],3.4 (1), p. no. 75], $\{T(\lambda_1, \lambda_2)) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in X^+(T)\ \lambda_1 - \lambda_2 \leq 2l-2\}$ 是一组两两不同构的不可分解 G_1-模。

命题 4.1

(i) 对于 $a \in X_s^+(T)_n$，扭曲倾斜模 $T(a)$ 是不可分解的。(ii) 对于 a，$b \in X_s^+(T)_n$，扭曲倾斜模 $T(a)$ 和 $T(b)$ 同构，当且仅当 $a = b$。(iii) 任一高度不超过 n 的不可分解扭曲倾斜模都同构于 $T(a)$，其中某个 $a \in X_s^+(T)_n$。(iv) 环 A_n 是一个自由 $\mathbb{Z}$-模，其 $\mathbb{Z}$ 基为 $\{T(a) \mid a \in X_s^+(T)_n\}$。(v) $\mathbb{Z}$-模 A_n 作为 $\psi^{n+1}(\bar{A}_0)$ 上的模，是秩为 $(2l-2)(2p-2)^n$ 的自由模。(vi) 环 A 是一个自由 $\mathbb{Z}$-模，其 $\mathbb{Z}$-基为 $\{t(a) \mid a \in X_s^+(T)_\infty\}$。

证明. (i) 令 $a \in X_s^+(T)_n$。若 $n = -1$，则 $T(a)$ 是一个不可分解倾斜模。因此，假设 $n \geq 0$。令 $\bar{a} = (a(0)\ a(1) \ldots, a(n)) \in$

$X_s^+(\bar{T})_n$ 且 $a(i) = (a(i)_1, a(i)_2) \in \mathbb{Z}^2, i \geq -1$。根据第 2 节的 [[7],、命题],，我们有 $T(\bar{a})$ 是不可分解的。由于 $0 \leq a(-1)_1 - a(-1)_2 \leq 2(l-1)$，由 [[4], 第 72 页（5）], 可得 $T(a) = T(a(-1)) \otimes (\bar{T}(\bar{a}))^F$ 是不可分解的。

(ii) 设 $a, b \in X_s^+(T)_n$。假设 $T(a) \cong T(b)$。我们要证明 $a = b$。令 $a = (a(-1)\ a(0) \cdots, a(n))$ 和 $b = (b(-1)\ b(0) \cdots, b(n))$。作为 G_1-模，我们有 $T(a(-1)) = T(a)_{|G_1} \cong T(b)_{|G_1} = T(b(-1))$。$T(a(-1))$ 的最高权 $a(-1)$ 与 $T(b(-1))$ 的最高权 $b(-1)$ 相同。令 $L = \mathrm{soc}(T(a(-1)) = \mathrm{soc}(T(b(-1))$，它是单模。现在我们有

$$\mathrm{Hom}_{G_1}(L, T(a(-1)) \otimes \bar{T}(\bar{a})^F) \cong \mathrm{Hom}_{G_1}(L, T(b(-1)) \otimes \bar{T}(\bar{b})^F)$$

$$\mathrm{End}_{G_1}(L) \otimes \bar{T}(\bar{a})^F \cong \mathrm{End}_{G_1}(L) \otimes \bar{T}(\bar{b})^F$$

因此我们有

$$\bar{T}(\bar{a})) \cong \bar{T}(\bar{b})$$

再次根据 [[7], 第 2 节，命题], ，我们有 $\bar{a} = b$。因此 $a = b$。

[7]第1节的命题可推出 (iii)、(iv)、(v) 和 (vi)。 □

设 $J = \mathbb{Z}[d_q, d]$。对于 $r \in \mathbb{N}_0$，我们有洛朗多项式 $P_r(t) \in J[t, t^{-1}]$，其定义如下： $P_0(t) = 1$， $P_1(t) = t + t^{-1}$，并且

$$(t + t^{-1})P_r(t) = P_{r+1}(t) + d_q P_{r-1}(t)$$

类似地，我们还考虑以下多项式 $Q_r(s)$ $r \in \mathbb{N}_0$，在环 $J[s, s^{-1}]$ 中递归定义如下：令 $Q_0 = 1$、 $Q_1 = s + s^{-1}$，并且对于 $r \geq 2$,

$$(s + s^{-1})Q_r = Q_{r+1}(s) + dQ_{r-1}(s)$$

设 $\omega = t + t^{-1}$ 和 $\upsilon = s + s^{-1}$。若洛朗多项式 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i \in J[t, t^{-1}]$（分别为 $J[s, s^{-1}]$）满足：对于所有 i， t^i 的系数与 t^{-i} 的系数相同，则它可表示为 $J[\omega]$ 的多项式（分别表示为 $J[\upsilon]$ 的多项式）。

令 $P_r(\omega) = P_r(t)$，且对 $r \geq 0$有 $Q_r(\upsilon) = Q_r(s)$。于是有 $P_0(\omega) = 1$、$P_1(\omega) = \omega$ 以及 $\omega P_r(\omega) = P_{r+1}(\omega) + d_q P_{r-1}(\omega)$。类似地，有 $Q_0(\upsilon) = 1$、$Q_1(\upsilon) = \upsilon$，并且对 $r \geq 2$, 有 $\upsilon Q_r(\upsilon) = Q_{r+1}(\upsilon) + dQ_{r-1}(\upsilon)$。我们令$g(t) = t^l + t^{-l}$且 $h(s) = s^p + s^{-p}$。现在有 $g'(\omega) = lP_{l-1}(\omega)$ 和 $h'(\upsilon) = pQ_{p-1}(\upsilon)$，还有 $P_{2l-1}(\omega) = g(\omega)P_{l-1}(\omega)$ 和 $Q_{2p-1}(\upsilon) = h(\upsilon)Q_{p-1}(\upsilon)$。

对于任意洛朗多项式 $f(t) \in J[t, t^{-1}]$，我们简单地将 A 中的元素 $f([E])$ 记作 $f(E)$。现在，我们将整数群环 $\mathbb{Z}X(T)$ 与一个

由 $\epsilon_1 \mapsto t$ 和 $\epsilon_1 + \epsilon_2 \mapsto d_q$ 生成的 $J[t, t^{-1}]$ 的子环等同起来。现在，对于任意 $(r, 0) \in X^+(T)$，我们有 $\mathrm{ch}\nabla(r, 0) = P_r(t)$，$r \geq 0$。因此，元素 $P_r(E)$ 与 G-模 $\nabla(r, 0)$ 具有相同的特征。根据 [[4],(7)，第 73], 页，我们知道

$$T(2l-1, 0) \cong T((l-1, 0) \otimes \bar{E}^F$$

同理，由 [[4], 3.4(1)，p.no. 75], 可得 $T(2p-1, 0) \cong T(p-1, 0) \otimes \bar{E}^F$，因此我们有 (,) (,) ( )。

设 $J = \mathbb{Z}[d_q, d, d_q^{-1}, d^{-1}]$ 和 K 是它的分式域。这里我们考虑自由多项式环 $J[X_{-1}, X_0, X_1, \cdots]$。我们定义映射 $\Phi : \widetilde{J}[X_{-1}, X_0, \dots] \longrightarrow A$，使得 $\Phi(X_{-1}) = [E]$，其中 $i \geq 0$，$\Phi(X_i) = [(\bar{E}^{\bar{F}})^F]$且

$\Phi\ d_q = D_q\ \Phi\ d = D$ $D_q^l -$ ( ) , ( ) 。
$D^l\ P_{l-1}\ X_0 - g\ X_{-1}$ $Q_{p-1}\ X_i\ \ X_{i+1} - h\ X_i \in \Phi$ $i \geq 0$
根据上述讨论，对于所有 ，我们有 , (( )) 和 ( )(( )) 核。令 $\sim\Phi_n$ 为 Φ 在环 $J[X_{-1}, X_0, \dots, X_n]$上的限制，则由 [命题4.1 (iv)], 可得如下结论。

命题 4.2。对于 $n \geq -1$，限制 Φ_n: $J[X_{-1}, X_0, \dots, X_n] \longrightarrow A_n$ 是该环同态的限制。于是 Φ_n 是满射，且 $\mathrm{Ker}(\Phi_n)$ 由元素 $(P_{l-1}(X_{-1})(X_0 - g(X_{-1}))$ 和 $(Q_{p-1}(X_i)(X_{i+1} - h(X_i)))$ 生成，其中 $0 \leq i < n$。□

现在我们证明该环是约化的。设 $\Phi(X_i) = x_i$, $i \geq -1$。令 $\mathbb{C}$为复数域。我们令 $A_{\mathbb{C}}(n) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} A_n$。由 [7], 可知，多项式 $Q_{p-1}(X_{i+1} - h(X_i)))$、 $i \geq 0$ 没有重根。因此，为了证明环 $A_{\mathbb{C}}(n)$ 是约化的，只需证明 $(P_{l-1}(X_{-1})(X_0 - g(X_{-1}))$ 没有重根。

首先注意到，环 $A_{-1} = J[x_{-1}]$ $F \in$ 是一个约化环。任意元素 ( ) 都可以唯一地表示为 , 。 $A_{\mathbb{C}}\ 0$ $F = \sum_{i=0}^{2l-2} a_i P_i\ \ a_i \in J[x_0, x_1, \cdots, x_n]$

定理 4.3 环 A 是约化的。

该定理由以下引理得出。

引理 4.4 对任意 $b \in \mathbb{Z}$，$(x_{-1} - b)$ 在 $A_K(0)$ 中不是零因子。

证明。假设 $b \in \mathbb{Z}$ and $(x_{-1} - b)F = 0$。那么我们有

$$x_{-1}(\sum_{i=0}^{2l-2} a_i P_i) = bF$$

因此

$$\sum_{i=0}^{2l-2} a_i x_{-1} P_i = bF$$

我们知道， $x_{-1}P_i = D_q P_{i-1} + P_{i+1}$，对于 $i \geq 2$，因此
我们有

$$a_0 x_{-1} P_0 + \sum_{i=1}^{2l-3} a_i x_{-1} P_i + a_{2l-2} x_{-1} P_{2l-2} = bF$$

由此可得

$$a_0 P_1 + \sum_{i=1}^{2l-3} a_i (P_{i+1} + dP_{i-1}) + a_{2l-2}(P_{2l-1} + dP_{2l-3}) = bF$$

因此我们有

$$a_0 P_1 + \sum_{i=2}^{2l-2} a_{i-1} P_i + d \sum_{i=0}^{2l-4} a_{i+1} dP_i + a_{2l-2}(P_{2l-1} + dP_{2l-3}) = bF$$

由此我们有

$$a_0 P_1 + \sum_{i=2}^{2l-2} a_{i-1} P_i + d \sum_{i=0}^{2l-4} a_{i+1} dP_i + a_{2l-2} x_0 P_{l-1} + d a_{2l-2} P_{2l-3} = bF$$

通过比较系数，我们有

$$d^i a_i = P_i(b) a_0 \qquad \text{for} \quad 0 \leq i \leq l-1 \qquad (\star)$$
$$a_{2l-2-i} = P_i(b) a_{2l-2} \quad \text{for} \quad 0 \leq i \leq l-1 \qquad (\star\star)$$

$$a_{l-2} + d a_l + a_{2l-2} x_0 = b a_{l-1}$$

现在由（$\star$）和（$\star\star$），我们有

$$P_{l-2}(b) a_{2l-2} + x_0 a_{2l-2} = b P_i(b) a_{2l-2}.$$

因此我们有

$$(x_0 - (P_l(b) - P_{l-2}(b)) \frac{a_0}{d^{l-1}} = 0.$$

因此

$$(x_0 - (P_l(b) - P_{l-2}(b)) a_0 = 0.$$

若 $a_0 = 0$，则 $a_{2l-2} = 0$，从而 $F = 0$。若 $a_0 \neq 0$，则 $(x_0 - (P_l(b) - P_{l-2}(b))$ 是 $A_K(0)$ 中的零因子。现在根据 [[7], 第 3 节，命题], ，对于 $d = 1$ 和 $q = 1$ 及 $b = 2$，我们有 $(x_0 - 2)$ 是一个零因子，但这并不成立。因此 $x_0 \pm 2d$ 不是 $A_K(0)$ 中的零因子。□

利益冲突声明

作者与本文的任何内容均不存在利益冲突。

参考文献

[1] R. Dipper 和 S. Donkin，量子 GL_n，伦敦数学会会刊，s3-63，165-211（1991）。[2]S. Donkin，关于代数群的倾斜模，数学杂志，212，39-60（1993）。[3] S. Donkin，量子 GL_n 的标准同调性质，代数学报，181，235-266（1996）。[4] S. Donkin，《q-Schur 代数》，伦敦数学会讲义丛书，剑桥大学出版社（1998）。[5] J.C. Jantzen，《代数群的表示》，第二版，数学调查专著，107，美国数学会（2003）。[6] S.R. Doty、A. Henke，SL_2 的模不可约表示的张量积分解，季刊数学杂志，56，189-207（2005）。[7] M. Sumanth Datt、S. Donkin，关于代数群扭曲倾斜模环的几点说明，代数学报，321(11)，3128-3144（2009）。[8] M. Sumanth Datt，两个量子 GL_2 单模张量积的结构，arXiv:2105.06615（2021）。