arXiv:2301.09380v2 [math.PR] 3 Jul 2023

Szarek 与 Ball 不等式的分布稳定性

Alexandros Eskenazis、Piotr Nayar 和 Tomasz Tkocz

Abstract. 我们证明了 Szarek 最优 Khinchin 不等式（1976）的一种扩展，该扩展适用于接近拉德马赫分布的分布，且所有权重均不超过其总 ℓ_2-质量的一个 $1/\sqrt{2}$ 比例。我们还证明了 Ball 的立方体切片不等式（1986）的概率表述也有类似的扩展。这些结果确立了这些最优 Khinchin 型不等式的分布稳定性。这类估计的基础是可追溯至 Haagerup（1981）的傅里叶分析方法。

2010 Mathematics Subject Classification. 主要分类号 60E15；次要分类号 42A38、26D15、60G50。
Key words. Khinchin inequality、 *sums of independent random variables*、 *moment comparison*、 *cube slicing.*

1. Introduction

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ 是独立同分布（i.i.d.）的拉德马赫随机变量，也就是说，它们是对称的随机符号，满足 $\mathbb{P}(\varepsilon_j = \pm 1) = \frac{1}{2}$。Littlewood 在研究无穷多个变量上的双线性形式时受到启发，在 [26]（另见 [15]）中猜想了以下不等式：对于任意 $n \geq 1$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的任意单位向量 a，都有

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j \varepsilon_j\right| \geq \mathbb{E}\left|\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{1}$$

这显然是最佳可能结果。该猜想提出 46 年后，Szarek 才在 [34] 中证明了它。后来，Latała 和 Oleszkiewicz 在 [24] 中将这一结果以令人惊叹的方式推广到任意赋范空间中取向量值系数 a_j 的情形（另见 [30, 第 4.2] 节，其中以离散傅里叶分析给出了他们证明的现代阐述）。Szarek 最初的证明主要基于一个复杂的归纳方案（另见 [35]）。注意，如果 $\|a\|_\infty = \max_j |a_j| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$，则 (1) 显然成立；因为例如若有 $|a_1| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$，那么由独立性和凸性可得，

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j \varepsilon_j\right| \geq \mathbb{E}\left|a_1\varepsilon_1 + \mathbb{E}\sum_{j=2}^n a_j \varepsilon_j\right| = \mathbb{E}|a_1\varepsilon_1| = |a_1| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Haagerup 在其关于 Khinchin 不等式的开创性工作中 [14]，针对非平凡情形 $\|a\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$提出了一种截然不同的方法，运用经典的傅里叶分析积分表示，并结合对某个特殊函数的精妙估计。

本材料基于美国国家科学基金会（NSF）资助的 DMS-1929284 项目成果；当时 A. E. 正在 ICERM 参加调和分析与凸性项目。P.N. 的研究得到了波兰国家科学中心资助，项目编号为 2018/31/D/ST1/0135。T.T. 的研究得到了美国国家科学基金会（NSF）资助，项目编号为 DMS-1955175。

沿着这一路径，本文旨在展示 Haagerup 方法的稳健性，并将 (1) 推广到一列独立同分布的随机变量：其分布在瓦瑟斯坦距离 W_2-W_2 下接近拉德马赫分布。基于同一框架，我们还讨论了 [2] 中的 Ball 的立方体切片不等式。该不等式断言，立方体 $[-1,1]^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的最大体积超平面截面在 $(1,1,0,\dots,0)^\perp$ 处取得。这也可等价地用概率术语表述为一个类似于 (1) 的不等式，具体如下（例如参见 [6] 中的公式 (2)）。设 ξ_1、ξ_2、..... 为在 $\mathbb{R}^3$ 的单位欧几里得球面上均匀分布的独立同分布随机向量。对每个 $n \geq 1$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的每个单位向量 a，都有

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^n a_j \xi_j\right|^{-1}\right] \leq \mathbb{E}\left[\left|\frac{\xi_1+\xi_2}{\sqrt{2}}\right|^{-1}\right] = \sqrt{2}, \tag{2}$$

其中以及下文中，$|\cdot|$ 表示标准欧几里得范数。

Szarek 不等式 (1)、Ball 不等式 (2) 以及这些推广，均属于所谓的 Khinchin 型不等式。其典型代表是 Khinchin 的结果：所有 L_p 范数的拉德马赫和 $\sum a_j \varepsilon_j$ 都与其 L_2-范数相当。该结果由他在研究迭代对数律的工作 [22] 中确立（Littlewood 或许也在 [26] 中独立发现了这一结果）。由于相关方法错综复杂，目前只有少数几种分布的锐 Khinchin 不等式已为人所知，最值得一提的是随机符号（[14, 29]），此外还有均匀分布（[4, 5, 6, 8, 18, 21, 25]）、L 型（[17, 32]）、高斯混合分布（[1, 10]）、ℓ_p-球的边缘分布（[3, 11]），以及具有良好谱性质的分布（[23, 33]）。本研究首次尝试处理更一般的分布：它们只需满足某种接近性假设，而无需具备特定的结构性质。若将锐 Khinchin 型不等式视为球面上泛函的最大化问题，那么我们的结果表明，或许令人意外的是，这类不等式对于底层随机向量的分布律扰动具有稳定性。这些分布稳定性结果在最优概率不等式领域尚属首次。

2. Main results

对于 $p > 0$，设随机向量 X 属于 $\mathbb{R}^d$，我们用 $\|X\|_p = (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$ 表示其相对于 $\mathbb{R}^d$ 上标准欧几里得范数 $|\cdot|$ 的 L_p-范数；而对于（确定性）向量 a 属于 $\mathbb{R}^n$，$\|a\|_\infty = \max_{j\leq n} |a_j|$ 是其 ℓ_∞-范数。若随机向量X 属于 $\mathbb{R}^d$ 满足 $-X$ 与 X 同分布，我们就称其为对称的。我们还回顾一下，若对于 $\mathbb{R}^d$ 上的任意正交映射 U，UX 与 X 同分布，则称向量 X 为旋转不变的。等价地，X 与 $|X|\xi$ 同分布，其中 ξ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的单位球面 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上服从均匀分布，且与 $|X|$ 相互独立。回顾一下，两个属于 $\mathbb{R}^d$ 的随机向量 X 和 Y（的分布）之间的 W_2-瓦瑟斯坦距离 $W_2(X,Y)$ 定义为 $\inf_{(X',Y')} \|X'-Y'\|_2$，其中下确界取遍 X 和 Y 的所有耦合，即所有满足 X' 与 X 同分布且 Y' 与 Y 同分布的 $\mathbb{R}^{2d}$ 中的随机向量 (X',Y')。

我们的第一个结果是对 Szarek 不等式 (1) 的推广，表述如下。

定理 1. 存在一个正的普适常数 δ_0 ，使得若令 $X_1, X_2, \ldots$ 为满足下列条件的独立同分布的对称随机变量

$$\big\| |X_1| - 1 \big\|_2 \le \delta_0, \tag{3}$$

那么，对于每个 $n \ge 3$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $\|a\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ 的单位向量 a ，都有

$$\mathbb{E}\left| \sum_{j=1}^n a_j X_j \right| \ge \mathbb{E}\left| \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \right|. \tag{4}$$

此外，我们可以取 $\delta_0 = 10^{-4}$。

注意，(3) 的左边不过是 X_1 的分布与拉德马赫分布之间的 W_2-瓦瑟斯坦距离，因为对于 $x \in \mathbb{R}$，有 $|x \pm 1| \ge \big||x| - 1\big|$，因此这两个分布的最优耦合为 $\big(X_1, \mathrm{sign}(X_1)\big)$。

我们的第二个主要结果为 Ball 不等式 (2) 给出了类似的推广。

定理 2. 设 X_1、X_2、.....是 $\mathbb{R}^3$ 中独立同分布的对称随机向量。假设它们的共同特征函数 $\phi(t) = \mathbb{E}e^{i\langle t,\ X_1\rangle}$ 满足

$$|\phi(t)| \le \frac{C_0}{|t|}, \qquad t \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \tag{5}$$

对于某个常数 $C_0 > 0$。假设

$$\mathsf{W}_2(X_1, \xi) \le 10^{-38} C_1^{-9} \min\big\{ (\mathbb{E}|X_1|^3)^{-6}, 1 \big\}, \tag{6}$$

其中 $C_1 = \max\{C_0, 1\}$ ，且 ξ 是单位欧几里得球面 $\mathbb{S}^2$ 上服从均匀分布的随机向量，取值于 $\mathbb{R}^3$。那么，对每个 $n \ge 3$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量 a ，只要满足 $\|a\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{2}}$，就有

$$\mathbb{E}\left| \sum_{j=1}^n a_j X_j \right|^{-1} \le \mathbb{E}\left| \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}} \right|^{-1}. \tag{7}$$

显然，如果我们知道 X_1 和 ξ 在 W_3，中足够接近，那么（6）中的参数 $\mathbb{E}|X_1|^3$ 就是多余的。与定理 1 不同，这里的接近性假设（6）是根据分布的两个参数来表述的：其三阶矩以及其特征函数的多项式衰减。这一点是否不可或缺，目前尚不清楚。在证明的技术层面上，三阶矩是进行某种高斯近似所必需的，而衰减假设则与傅里叶分析表示中 L_{-1} 范数先验上缺乏可积性有关（与定理 1 中处理的 L_1-范数相对）。

另一方面，这两个条件都不算严格。特别是，如果 X_1 在 $\mathbb{R}^3$ 上有一个在 ∞ 处为零且梯度可积的 f 密度，那么

$$\begin{aligned} |t||\phi(t)| \le \sum_{j=1}^3 |t_j \phi(t)| = \sum_{j=1}^3 \left| \int_{\mathbb{R}^3} t_j e^{i\langle t,x\rangle} f(x) \mathrm{d}x \right| &= \sum_{j=1}^3 \left| \int_{\mathbb{R}^3} i e^{i\langle t,x\rangle} \partial_j f(x) \mathrm{d}x \right| \\ &\le \sqrt{3} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f(x)| \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

因此，(5) 在 $C_0 = \sqrt{3}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f|$ 下成立。

另一个自然的充分条件是 X_1 的旋转不变性：例如，若 X_1 与 $R\xi$ 同分布，其中 R 是非负随机变量，ξ 是与其独立且在单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上均匀分布的随机向量，那么根据阿基米德帽盒定理可知，给定 R 的值后，$\langle t, R\xi\rangle$ 在 $[-R|t|, R|t|]$ 上均匀分布，因此

$$|\phi(t)| = |\mathbb{E}_R \mathbb{E}_\xi e^{i\langle t, R\xi\rangle}| = \left|\mathbb{E}_R \frac{\sin(R|t|)}{R|t|}\right| \le \frac{\mathbb{E}R^{-1}}{|t|} = \frac{\mathbb{E}|X_1|^{-1}}{|t|}.$$

此外，在这种情况下，$\mathsf{W}_2(X_1, \xi) = \|R-1\|_2$（因为对于 $\mathbb{R}^d$ 和 $R \ge 0$ 中的任意单位向量 θ、θ'，都有 $|R\theta - \theta'| \ge |R-1|$，平方后即可轻易验证）。从概率角度看，这是一个重要的特例，因为它能为 $\mathbb{R}$ 上的对称单峰分布给出结果。事实上，若 X 具有上述形式 $R\xi$，其中 $q > -1$，则有如下恒等式

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j X_j\right|^q = \mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j R_j \xi_j\right|^q = (1+q)\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j R_j U_j\right|^q, \tag{8}$$

其中 R_j 是 R 的独立同分布副本，U_j 是在 $[-1,1]$ 上均匀分布且彼此独立的随机变量，并且与 R_j 独立（见 [19] 中的命题4）。这个公式中出现的 $R_j U_j$ 可以服从任意对称单峰分布，其分布由 R_j 的分布唯一确定。因此，若 V_1、V_2、.....是独立同分布的对称单峰随机变量，那么定理 2 立即给出对于所有满足 $\|a\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ 的单位向量 a，$\lim_{q\downarrow -1}(1+q)\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j X_j\right|^q$ 的一个紧上界（参见 [6, 5, 11, 25]）。

与定理 2 思路相近的一个结果是，K¨onig 和科尔多布斯基将 Ball 的立方体切片不等式推广到了满足某些正则性和矩条件的乘积测度。该结果还特别适用于满足小系数条件 $\|a\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ 的权重向量。

从另一种角度来看，我们近期的工作 [12] 对 (1) 和 (2) 作出了完整推广（即不再对 a 施加小系数限制），但仅适用于一类非常特殊的分布；从几何上说，这类分布对应于 ℓ_p-Ball 的极值截面和投影。

致谢。我们衷心感谢一位匿名审稿人认真审阅稿件并提出宝贵建议，尤其是那条促成注5的建议。

3. Proof of Theorem 1

我们的方法建立在 Haagerup 于 [14] 给出的巧妙傅里叶分析证明之上。令

$$\phi(t) = \mathbb{E}e^{itX_1}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

be t的特征函数 X_1。利用初等的傅里叶积分表示 n

$$|x| = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} (1-\cos(tx))t^{-2}\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R},$$

以及 X_j 的对称性和独立性，我们得到，

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j X_j\right| = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \operatorname{Re}\,\mathbb{E}e^{it\sum a_j X_j}\right) t^{-2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \prod_{j=1}^n \phi(a_j t)\right) t^{-2}\mathrm{d}t \tag{10}$$

（另见 [14] 中的引理 1.2）。若 a 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个分量均非零的单位向量，利用算术几何平均不等式，我们得到 Haagerup 下界

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j X_j\right| \geq \sum_{j=1}^n a_j^2 \Psi(a_j^{-2}), \tag{11}$$

其中

$$\Psi(s) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{s}}\right)\right|^s\right) t^{-2}\mathrm{d}t, \qquad s > 0. \tag{12}$$

（见 [14] 中的引理 1.3）。关键引理如下。

引理 3。在定理 1 的假设下，对每个 $s \geq 2$，都有 $\Psi(s) \geq \Psi(2)$。

若暂且接受该引理，则定理 1 的证明即告完成，因为小系数假设 $\|a\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 给出对每个 j都有 $\Psi(a_j^{-2}) \geq \Psi(2)$，因此我们得到

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j X_j\right| \geq \Psi(2) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right|^2\right) t^{-2}\mathrm{d}t = \mathbb{E}\left|\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}\right|,$$

其中最后一个等式由 (10) 得到。

接下来需要证明引理 3。为此，我们回顾一下：如果 X_j 是拉德马赫随机变量，那么特殊函数 Ψ 就变为

$$\Psi_0(s) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \left|\cos\left(\frac{t}{\sqrt{s}}\right)\right|^s\right) t^{-2}\mathrm{d}t, \qquad s > 0. \tag{13}$$

Haagerup 证明了，对任意 $s > 0$,

$$\Psi_0(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi s}}\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - 1/(s+2k+1)^2\right)^{1/2} \tag{14}$$

并通过乘积表示得出，Ψ_0 严格递增。特别地，由于单调性，引理 3 在拉德马赫情形下成立。证明的其余部分正是基于这一观察：我们证明，分布足够接近，就能保证 Ψ 和 Ψ_0 足够接近（例如对 $s \geq 3$ 而言），并且它们的导数在 $2 \leq s \leq 3$ 上也足够接近。关键的是，我们不仅知道 Ψ_0 严格单调，而且还能在端点 $s = 2$ 附近得到其导数的良好界；现将此结果记录下来，以备后用。

引理 4。我们有

$$\inf_{2 \leq s \leq 3} \Psi_0'(s) \geq \frac{\zeta(3) - 1}{8\sqrt{2}} = 0.01785... \tag{15}$$

证明。逐项对 Haagerup 乘积表达式 (14) 求导可得

$$\begin{aligned}\Psi_0'(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-(s+2k+1)^{-2}\right)^{1/2}\\ &= \Psi_0(s)\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-(s+2k+1)^{-2}\right)^{-1}(s+2k+1)^{-3}\\ &\geq \Psi_0(2)\sum_{k=0}^{\infty}(2k+4)^{-3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\zeta(3)-1}{8}.\end{aligned}$$

□

本节余下部分将用于证明引理 3。我们将证明分为几个部分。

3.1. 特征函数的一个均匀上界。

引理 5. 设 X 是满足 (3) 的对称随机变量。则其特征函数 $\phi(t) = \mathbb{E}e^{itX}$ 满足：

$$|\phi(t)-\cos t| \leq \frac{\delta_0(\delta_0+2)}{2}t^2, \qquad t\in\mathbb{R}. \tag{16}$$

证明. 根据对称性、三角不等式以及界 $|\sin u| \leq |u|$，可得

$$\begin{aligned}|\phi(t)-\cos t| &= \left|\mathbb{E}\left[\cos(t|X|)-\cos t\right]\right| = 2\left|\mathbb{E}\left[\sin\left(t\frac{|X|-1}{2}\right)\sin\left(t\frac{|X|+1}{2}\right)\right]\right|\\ &\leq \frac{t^2}{2}\mathbb{E}\left[\left||X|-1\right|\cdot\left||X|+1\right|\right] \leq \frac{t^2}{2}\left\||X|-1\right\|_2\left\||X|+1\right\|_2,\end{aligned}$$

在最后一个估计中使用了柯西-施瓦茨不等式。此外，

$$\left\||X|+1\right\|_2 \leq \left\||X|-1\right\|_2 + 2.$$

代入假设 $\left\||X|-1\right\|_2 \leq \delta_0$ 即可完成证明。 □

3.2. 特殊函数及其导数的均匀界。

引理 6. 假设 (3) 成立，且 X_1 具有对称性，则分别由 (12) 和 (13) 定义的函数 Ψ 和 Ψ_0 满足

$$|\Psi(s)-\Psi_0(s)| \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{2\delta_0(\delta_0+2)}, \qquad s\geq 1. \tag{17}$$

证明。固定 $T>0$。将定义 Ψ 的积分拆分为 $\int_0^T+\int_T^\infty$，并利用对于 a、$b\in[0,1]$ 有 $|a-b|\leq 1$，可得

$$\begin{aligned}|\Psi(s)-\Psi_0(s)| &= \frac{2}{\pi}\left|\int_0^\infty\left[\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{s}}\right)\right|^s - \left|\cos\left(\frac{t}{\sqrt{s}}\right)\right|^s\right]t^{-2}\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \frac{2}{\pi}\int_0^T\left|\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{s}}\right)\right|^s - \left|\cos\left(\frac{t}{\sqrt{s}}\right)\right|^s\right|t^{-2}\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_T^\infty t^{-2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

对于 a、$b\in[-1,1]$、$s\geq 1$，我们还有 $\left||a|^s-|b|^s\right|\leq s|a-b|$，因此由引理 5 可得

$$|\Psi(s)-\Psi_0(s)| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^T s\frac{\delta_0(\delta_0+2)}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{s}}\right)^2 t^{-2}\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi T} = \frac{2}{\pi}\left(T\frac{\delta_0(\delta_0+2)}{2}+\frac{1}{T}\right).$$

对参数 T 进行优化即可得到所需的界。 □

引理 7. 对于 $s \geq 2$ 和 $0 < u,\ v < 1$，有

$$|u^s \log u - v^s \log v| \leq |u - v|.$$

证明。令 $f(x) = x^s \log x$。只需证明在 (0, 1) 上有 $|f'(x)| \leq 1$，这等价于 $|\alpha t \log t + t| \leq 1$，其中 $t = x^{s-1} \in (0, 1)$ 且 $\alpha = \frac{s}{s-1} \in [1, 2]$。为证明这一点，注意对于 $t \in (0,1)$，有 $\alpha t \log t + t \leq t \leq 1$，并且

$$\alpha t \log t + t \geq \alpha t \log t \geq -\frac{\alpha}{e} \geq -\frac{2}{e} > -1. \qquad \square$$

引理 8. 假设 (3) 成立且 X_1 具有对称性，则在 (12) 和 (13) 中定义的函数 Ψ 和 Ψ_0 满足

$$|\Psi'(s) - \Psi_0'(s)| \leq 0.62\sqrt{\delta_0(\delta_0 + 2)}, \qquad s \geq 2. \tag{18}$$

证明。通过变量替换并求导可得

$$\begin{aligned}\Psi'(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{2}{\pi\sqrt{s}}\int_0^\infty \Big[1 - |\phi(t)|^s\Big] t^{-2}\mathrm{d}t\right) \\ &= -\frac{1}{2s}\Psi(s) - \frac{2}{\pi\sqrt{s}}\int_0^\infty |\phi(t)|^s \log|\phi(t)| t^{-2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}|\Psi'(s) - \Psi_0'(s)| \leq \frac{1}{2s}|\Psi(s) - \Psi_0(s)| \\ + \frac{2}{\pi\sqrt{s}}\int_0^\infty \Big||\phi(t)|^s \log|\phi(t)| - |\cos(t)|^s \log|\cos(t)|\Big| t^{-2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

为了估计积分，我们采用与引理 6 的证明相同的方法。固定 $T > 0$，令 $\int_0^\infty = \int_0^T + \int_T^\infty$，对于第二个积分，使用 $|u^s \log u| = \frac{1}{s}|u^s \log(u^s)| \leq \frac{1}{es}$, $0 < u < 1$，从而得到其上界 $\frac{2}{esT}$；对于第一个积分，先使用引理 7，再使用引理 5，可得

$$\begin{aligned}\int_0^T \Big||\phi(t)|^s \log|\phi(t)| - |\cos(t)|^s \log|\cos(t)|\Big| t^{-2}\mathrm{d}t &\leq \int_0^T |\phi(t) - \cos(t)| t^{-2}\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{\delta_0(\delta_0 + 2)}{2} T.\end{aligned}$$

总之，借助引理 6,

$$|\Psi'(s) - \Psi_0'(s)| \leq \frac{1}{2s}\frac{2}{\pi}\sqrt{2\delta_0(\delta_0 + 2)} + \frac{2}{\pi\sqrt{s}}\left(\frac{\delta_0(\delta_0 + 2)}{2} T + \frac{2}{esT}\right).$$

对 $T > 0$ 将第二项最小化，可得如下界

$$\frac{1}{\pi s}\sqrt{2\delta_0(\delta_0 + 2)} + \frac{4}{\pi s}\sqrt{\frac{\delta_0(\delta_0 + 2)}{e}} = \frac{\sqrt{\delta_0(\delta_0 + 2)}}{\pi s}\left(\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{e}}\right).$$

对于 $s \geq 2$，我们有 $\frac{1}{\pi s}\left(\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{e}}\right) < 0.61...$，由此完成证明。

$\square$

3.3. 引理 3 的证明。首先假设 $s \geq 3$。利用引理 6，并为简便起见令$\eta = \frac{2}{\pi}\sqrt{2\delta_0(\delta_0 + 2)}$，得到

$$\Psi(s) \geq \Psi_0(s) - \eta.$$

由于 Ψ_0 递增，因此 $\Psi_0(s) \geq \Psi_0(3) = \Psi_0(3) - \Psi_0(2) + \Psi_0(2)$ 且 $\Psi_0(2) \geq \Psi(2) - \eta$，再次利用引理 6。因此，

$$\Psi(s) \geq \Psi(2) + \big(\Psi_0(3) - \Psi_0(2) - 2\eta\big).$$

现在可以清楚地看出，只要 δ_0 足够小，即 $2\eta \leq \Psi_0(3) - \Psi_0(2)$，我们就得到$\Psi(s) \geq \Psi(2)$，这正是所需的。可以验证，$\Psi_0(3) - \Psi_0(2) = \frac{4}{\pi\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.027..$，并且选择 $\delta_0 \leq 10^{-4}$，即可使估计 $\Psi(s) \geq \Psi(2)$ 对 $s \geq 3$ 成立。

现在假设 $2 < s < 3$。我们有

$$\Psi(s) = \Psi(2) + (s-2)\Psi'(\theta)$$

对某个 $2 < \theta < s$ 成立。利用引理 8 和 4，我们得到

$$\Psi'(\theta) \geq \Psi_0'(\theta) - 0.62\sqrt{\delta_0(\delta_0+2)} \geq 0.017 - 0.62\sqrt{\delta_0(\delta_0+2)}$$

它对所有 $\delta_0 \leq 3.7 \cdot 10^{-4}$ 都为正。因此，在两种情况下，$\Psi(s) \geq \Psi(2)$ 都成立。 □

4. Proof of Theorem 2

其思路与定理 1 相同，但某些技术细节要复杂得多。我们首先介绍 Gorin 和 Favorov [13] 给出的负矩的傅里叶分析表示。

引理 9（ [13]中的引理 3）。对于随机向量 X in $\mathbb{R}^d$ and $-d < q < 0$，有

$$\mathbb{E}|X|^q = \beta_{q,d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} e^{i\langle t, X\rangle} \cdot |t|^{-q-d} \mathrm{d}t, \tag{19}$$

其中 $\beta_{q,\ d} = 2^q \pi^{-d/2} \frac{\Gamma((d+q)/2)}{\Gamma\ (-q/2)}$，前提是右侧的积分存在。

将其专门应用于 $d = 3$、$q = -1$（$\beta_{-1,\ 3} = \frac{1}{2\pi^2}$）和 $X = \sum_{j=1}^n a_j X_j$，其中 X_1，...，X_n为独立随机向量，可得

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j X_j\right|^{-1} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\prod_{j=1}^n \mathbb{E} e^{i\langle t, a_j X_j\rangle}\right) |t|^{-2} \mathrm{d}t. \tag{20}$$

注意，由于衰减假设（5），只要 $n \geq 2$，右侧的积分就收敛（假设 a_j 非零）。与 Ball 的证明一样，[2], H¨older 不等式给出

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j X_j\right|^{-1} \leq \prod_{j=1}^n \Phi\big(a_j^{-2}\big)^{a_j^2}, \tag{21}$$

其中

$$\Phi(s) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \left|\phi\left(s^{-1/2} t\right)\right|^s |t|^{-2} \mathrm{d}t, \qquad s > 1 \tag{22}$$

with

$$\phi(t) = \mathbb{E} e^{i\langle t, X_1\rangle}, \qquad t \in \mathbb{R}^3, \tag{23}$$

表示 X_1 的特征函数。与定理 1 的证明完全相同，下面的关键引理使我们能够完成证明。

Le理 10。在定理 2 的假设下，对于每个 $s \geq 2$，我们有 $\Phi(s) \leq \Phi(2)$.

如果 X_j 在 $\mathbb{R}^3$中的单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上均匀分布，则有 $\phi(t) = \text{正弦}_{|t|}^{|t|}$（因为 $\langle t, X_1\rangle$在 $[-|t|, |t|]$上均匀分布），此时式 (22) 中定义的特殊函数 Φ 变为

$$\Phi_0(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{\sin(s^{-1/2}t)}{s^{-1/2}t}\right|^s \mathrm{d}t, \qquad s > 1 \tag{24}$$

（对极坐标积分之后）。Ball 著名的积分不等式指出，对于所有 $s \geq 2$，都有 $\Phi_0(s) \leq \Phi_0(2)$（另见 [2], 中的引理 3，以及 [28, 31] 中的不同证明）。引理 10 的证明依赖于此不等式、导数 $\Phi_0'(s)$ 在 $s = 2$附近的额外界，以及至关重要的、用于量化 Φ 与 Φ_0有多接近的界。在接下来的小节中，我们将汇集这些结果，并以引理 10 的证明作结。

4.1. 特征函数的统一上界。在这些小节中，ξ 始终表示在 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上均匀分布的随机向量。

引理 11. 设 X 是 $\mathbb{R}^3$ 中满足 $\delta = \mathsf{W}_2(X, \xi)$ 的对称随机向量。那么，其特征函数 $\phi(t) = \mathbb{E}e^{i\langle t,\ X\rangle}$ 满足

$$\left|\phi(t) - \frac{\sin|t|}{|t|}\right| \leq \frac{\delta(\delta+2)}{2}|t|^2, \qquad t \in \mathbb{R}^3. \tag{25}$$

证明。设 ξ 在 $\mathbb{S}^2$ 上均匀分布，使得 (X, ξ) 的联合分布满足$\|X - \xi\|_2 = \mathsf{W}_2(X, \xi) = \delta$。由对称性、界 $|\sin u| \leq |u|$ 以及柯西-施瓦茨不等式（使用两次），可得

$$\begin{aligned}
\left|\phi(t) - \frac{\sin|t|}{|t|}\right| &= \left|\mathbb{E}\left[\cos\langle t, X\rangle - \cos\langle t, \xi\rangle\right]\right| \\
&= 2\left|\mathbb{E}\left[\sin\left(\tfrac{1}{2}\langle t, X-\xi\rangle\right)\sin\left(\tfrac{1}{2}\langle t, X+\xi\rangle\right)\right]\right| \\
&\leq \frac{|t|^2}{2}\mathbb{E}\left[\left|X-\xi\right|\cdot\left|X+\xi\right|\right] \\
&\leq \frac{|t|^2}{2}\left\|X-\xi\right\|_2\left\|X+\xi\right\|_2.
\end{aligned}$$

最后，我们使用三角不等式

$$\left\|X+\xi\right\|_2 \leq \left\|X-\xi\right\|_2 + 2\|\xi\|_2 = \left\|X-\xi\right\|_2 + 2. \qquad \square$$

4.2. 特殊函数的界。我们先利用特征函数的一致界（上文的引理 11），对差值 $\Phi(s) - \Phi_0(s)$ 作出界估计。与引理 6 不同，这个界关于 s 并非一致的。对于 s 不太大的情况（主体部分），我们会多出因子 $s^{3/4}$。为消除 s取较大值时这一因子的影响，我们将采用高斯近似。要使这一部分成立，$\Phi_0(2) - \Phi_0(\infty) = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{6}{\pi}} > 0$ 至关重要。

4.2.1. 主体部分。

引理 12。设 X 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个对称随机向量，满足 $\delta = \mathsf{W}_2(X, \xi)$，且特征函数 ϕ 满足某个 $C_0 > 0$ 对应的条件 (5)。设 Φ 和 Φ_0 分别由 (22) 和 (24) 定义。对任意 $s \geq 2$，有

$$|\Phi(s) - \Phi_0(s)| \leq \frac{2^{11/4}}{3\pi} s^{3/4} \big(\delta(\delta+2)\big)^{1/4} \big(C_0^2 + 1\big)^{3/4}. \tag{26}$$

证明。根据定义，我们有

$$\Phi(s) - \Phi_0(s) = \frac{\sqrt{s}}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\phi(t)|^s - \left| \frac{\sin|t|}{|t|} \right|^s \right) |t|^{-2} \mathrm{d}t.$$

固定 $T > 0$，并将积分分成两个区域。

t 较小时。利用引理 11 以及当 $|a|$ 时的 $||a|^s - |b|^s| \leq s|a-b|$，$|b| \leq 1$，可得

$$\left| \int_{|t| \leq T} \left(|\phi(t)|^s - \left| \frac{\sin|t|}{|t|} \right|^s \right) |t|^{-2} \mathrm{d}t \right| \leq s \frac{\delta(\delta+2)}{2} \int_{|t| \leq T} \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3} s\delta(\delta+2) T^3.$$

t 较大时。由于 $s \geq 2$，我们有

$$\left| \int_{|t| \geq T} \left(|\phi(t)|^s - \left| \frac{\sin|t|}{|t|} \right|^s \right) |t|^{-2} \mathrm{d}t \right| \leq \int_{|t| \geq T} \left(|\phi(t)|^2 + \left| \frac{\sin|t|}{|t|} \right|^2 \right) |t|^{-2} \mathrm{d}t.$$

根据衰减假设 (5)，这至多为

$$\int_{|t| \geq T} \frac{C_0^2 + 1}{|t|^4} \mathrm{d}t = 4\pi \frac{C_0^2 + 1}{T}.$$

将这两个界相加，并对 T 取最优值，可得

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} \left(|\phi(t)|^s - \left| \frac{\sin|t|}{|t|} \right|^s \right) |t|^{-2} \mathrm{d}t \right| \leq \frac{2^{15/4}\pi}{3} s^{1/4} \big(\delta(\delta+2)\big)^{1/4} \big(C_0^2 + 1\big)^{3/4}.$$

代回即可得到所述结论。 □

4.2.2. 高斯近似。现在我们给出一个关于 $\Phi(s)$ 的界，该界不会随 $s \to \infty$ 增长，从而可以证明当 s 足够大时，引理 10 成立。

引理 13. 设 X 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个对称随机向量，满足 $\delta = \mathsf{W}_2(X, \xi)$，其特征函数 ϕ 满足 (5)，其中 $C_0 > 0$ 为某个常数。设 Φ 由 (22) 定义。假设 $\delta \leq \min\{\frac{1}{\sqrt{3}}, (15C_0)^{-2}\}$，则有

$$\begin{aligned} \Phi(s) \leq & \sqrt{\frac{6}{\pi}} \Big((1 - \delta\sqrt{3})^2 - \theta \mathbb{E}|X|^3 \Big)^{-1/2} \\ & + \sqrt{\frac{6}{\pi}} \exp\left\{ -s \left(\frac{\theta^2}{6} - 26\delta(\delta+2) \right) \right\} + 2C_0 \left(\sqrt{s} + \frac{2}{\sqrt{s}} \right) e^{-s}, \quad s \geq 2, \end{aligned} \tag{27}$$

其中 $0 < \theta < \frac{(1-\delta\sqrt{3})^2}{3\mathbb{E}|X|^3}$ 任意。

证明。我们将定义 $\Phi(s) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\phi(s^{-1/2}t)|^s |t|^{-2} \mathrm{d}t$ 的积分划分为若干区域。对于较大的 t，利用衰减条件 (5)，可得

$$\int_{|t| \geq eC_0\sqrt{s}} \left| \phi\left(s^{-1/2} t \right) \right|^s |t|^{-2} \mathrm{d}t \leq \int_{|t| \geq eC_0\sqrt{s}} C_0^s |s^{-1/2}t|^{-s} |t|^{-2} \mathrm{d}t = \frac{4\pi e\sqrt{s}}{s-1} C_0 e^{-s}.$$

因此，对于 $s \geq 2$,

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_{|t|\geq eC_0\sqrt{s}}\left|\phi\left(s^{-1/2}t\right)\right|^s|t|^{-2}\mathrm{d}t \leq \frac{2e\sqrt{s}}{\pi(s-1)}C_0e^{-s} < \frac{4C_0}{\sqrt{s}}e^{-s},$$

当 $\frac{2e\sqrt{s}}{\pi\ s-1}() < \frac{4}{\sqrt{s}}$ 时，对于 $s \geq 2$。

中等 t。除非 $C_0 > \pi/e$，否则此情形为空。利用引理 11 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi\sqrt{s}\leq|t|\leq eC_0\sqrt{s}}\left|\phi\left(s^{-1/2}t\right)\right|^s|t|^{-2}\mathrm{d}t\\
&\leq \int_{\pi\sqrt{s}\leq|t|\leq eC_0\sqrt{s}}\left(\left|\frac{\sin(s^{-1/2}|t|)}{s^{-1/2}|t|}\right| + \frac{\delta(\delta+2)}{2}\left(s^{-1/2}|t|\right)^2\right)^s|t|^{-2}\mathrm{d}t\\
&\leq \int_{\pi\sqrt{s}\leq|t|\leq eC_0\sqrt{s}}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{\delta(\delta+2)}{2}\left(eC_0\right)^2\right)^s|t|^{-2}\mathrm{d}t\\
&= 4\pi\sqrt{s}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{\delta(\delta+2)}{2}\left(eC_0\right)^2\right)^s(eC_0-\pi)_+.
\end{aligned}$$

在此情形下，条件 $\delta < (15C_0)^{-2}$ 足以保证 $\frac{1}{\pi} + \frac{\delta}{(\delta+2)\ 2}(eC_0)^2 < \frac{1}{e}$（还可以使用，例如 $\delta + 2 < 3$）。于是得到

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_{\pi\sqrt{s}\leq|t|\leq eC_0\sqrt{s}}\left|\phi\left(s^{-1/2}t\right)\right|^s|t|^{-2}\mathrm{d}t \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{s}e^{-s}(eC_0-\pi)_+ < 2C_0\sqrt{s}e^{-s}.$$

小 t。对于 $0 < u < \pi$，有

$$\frac{\sin u}{u} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{u^2}{(k\pi)^2}\right) \leq \exp\Big(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^2}{(k\pi)^2}\Big) = e^{-u^2/6}. \tag{28}$$

固定 $0 < \theta < \pi$。然后，先使用引理 11，再使用 (28)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\theta\sqrt{s}\leq|t|\leq\pi\sqrt{s}}\left|\phi\left(s^{-1/2}t\right)\right|^s|t|^{-2}\mathrm{d}t\\
&\leq \int_{\theta\sqrt{s}\leq|t|\leq\pi\sqrt{s}}\left(\left|\frac{\sin(s^{-1/2}|t|)}{s^{-1/2}|t|}\right| + \frac{\delta(\delta+2)}{2}\left(s^{-1/2}|t|\right)^2\right)^s|t|^{-2}\mathrm{d}t\\
&\leq \int_{\theta\sqrt{s}\leq|t|\leq\pi\sqrt{s}}\left(e^{-|t|^2/(6s)} + \frac{\delta(\delta+2)}{2}\pi^2\right)^s|t|^{-2}\mathrm{d}t\\
&\leq \int_{|t|\geq\theta\sqrt{s}}e^{-|t|^2/6}\left(1 + \frac{\delta(\delta+2)}{2}\pi^2e^{\pi^2/6}\right)^s|t|^{-2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

利用极坐标积分，并应用标准尾界

$$\int_u^{\infty}e^{-y^2/2}\mathrm{d}y \leq \sqrt{\pi/2}e^{-u^2/2}, \qquad u > 0,$$

最后一个积分的上界为

$$4\pi^{3/2}\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\theta^2s/6}\left(1 + \frac{\delta(\delta+2)}{2}\pi^2e^{\pi^2/6}\right)^s < 4\pi^{3/2}\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\theta^2s/6}\big(1 + 26\delta(\delta+2)\big)^s.$$

综上所述，我们证明了

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_{\theta\sqrt{s}\le|t|\le\pi\sqrt{s}}\left|\phi\left(s^{-1/2}t\right)\right|^s|t|^{-2}\mathrm{d}t \le \sqrt{\frac{6}{\pi}}\big(1+26\delta(\delta+2)\big)^s e^{-s\theta^2/6}$$
$$\le \sqrt{\frac{6}{\pi}}\exp\left\{-s\left(\frac{\theta^2}{6}-26\delta(\delta+2)\right)\right\}.$$

非常小的 t。在 0 处对 ϕ 作泰勒展开，并采用拉格朗日余项，

$$\int_{|t|\le\theta\sqrt{s}}\left|\phi\left(s^{-1/2}t\right)\right|^s|t|^{-2}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{|t|\le\theta\sqrt{s}}\left|1-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\langle X,s^{-1/2}t\right\rangle^2+\frac{s^{-3/2}}{6}\sum_{j,k,l=1}^{3}\frac{\partial^3\phi}{\partial t_j\partial t_k\partial t_l}(\eta)t_jt_kt_l\right|^s\mathrm{d}t,$$

其中某点 η 位于线段 $[0,s^{-1/2}t]$ 上。为了估计误差项，我们注意到 at

$$\left|\frac{\partial^3\phi}{\partial t_j\partial t_k\partial t_l}(\eta)\right|\le\mathbb{E}|X_jX_kX_l|,$$

thus

$$\left|\sum_{j,k,l=1}^{3}\frac{\partial^3\phi}{\partial t_j\partial t_k\partial t_l}(\eta)t_jt_kt_l\right|\le\mathbb{E}\left(|t_1||X_1|+|t_2||X_2|+|t_3||X_3|\right)^3\le|t|^3\mathbb{E}|X|^3.$$

我们还注意到，在定义域 $\{|t|\le\theta\sqrt{s}\}$ 中，首项 $1-\frac{1}{2}\mathbb{E}\langle X,s^{-1/2}t\rangle^2$ 非负，前提是 $\frac{1}{2}\theta^2\mathbb{E}|X|^2\le1$。由于在假设 (6) 下 $\|X\|_2\le\delta+1$，只需满足 $\theta<\frac{\sqrt{2}}{1+\delta}$。假设这一点成立，于是得到

$$\int_{|t|\le\theta\sqrt{s}}\left|\phi\left(s^{-1/2}t\right)\right|^s|t|^{-2}\mathrm{d}t\le\int_{|t|\le\theta\sqrt{s}}\left(1-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left\langle X,s^{-1/2}t\right\rangle^2+\frac{1}{6}|s^{-1/2}t|^3\mathbb{E}|X|^3\right)^s|t|^{-2}\mathrm{d}t.$$

借助 (6)，令 ξ 在 $\mathbb{S}^2$ 上均匀分布，使得相对于某种耦合，$\|X-\xi\|_2\le\delta$。于是，对于 $\mathbb{R}^3$ 中的固定向量 v，我们得到如下界

$$\|\langle X,v\rangle\|_2\ge\|\langle\xi,v\rangle\|_2-\|\langle X-\xi,v\rangle\|_2=\tfrac{1}{\sqrt{3}}|v|-\|\langle X-\xi,v\rangle\|_2\ge\tfrac{1}{\sqrt{3}}|v|-\delta|v|.$$

因此，若 $\delta<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 成立，则得到

$$\int_{|t|\le\theta\sqrt{s}}\left|\phi\left(s^{-1/2}t\right)\right|^s|t|^{-2}\mathrm{d}t\le\int_{|t|\le\theta\sqrt{s}}\left(1-\frac{(1/\sqrt{3}-\delta)^2}{2s}|t|^2+\frac{\theta\mathbb{E}|X|^3}{6s}|t|^2\right)^s|t|^{-2}\mathrm{d}t$$
$$\le\int_{\mathbb{R}^3}\exp\left(-\alpha|t|^2/2\right)|t|^{-2}\mathrm{d}t=\frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\alpha}},$$

其中我们令 $\alpha=(\frac{1}{\sqrt{3}}-\delta)^2-\frac{1}{3}\theta\mathbb{E}|X|^3$，并在最后一个等式中假设 α 为正（只需将 θ 取足够小即可保证这一点）。最终得到

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_{|t|\le\theta\sqrt{s}}\left|\phi\left(s^{-1/2}t\right)\right|^s|t|^{-2}\mathrm{d}t\le\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}.$$

将这三个界合并即可得到所述结论。注意，当 $C_0>\frac{\pi}{e}$ 时，我们施加了条件 $\delta<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 和 $\delta<(15C_0)^{-2}$，以及 $\theta<\pi$, $\theta<\frac{\sqrt{2}}{1+\delta}$ 和

$\theta < \frac{(1-\delta\sqrt{3}^{\,2})}{3\mathbb{E}|X|^3}$）。由于 $\|X\|_3 \geq \|X\|_2 \geq 1-\delta$ 和 $\delta < \frac{1}{\sqrt{3}}$，我们有$\frac{(1-\delta\sqrt{3}^{\,2}}{3\mathbb{E}|X|^3} <$）（$\frac{1-\delta\sqrt{3}^{\,2})^{\,3}}{3\,1-\delta} =_{1\,3}{}^{(1-\delta)} \left(\frac{1-\delta\sqrt{3}}{1-\delta}\right)^2 < \frac{1}{3-\sqrt{3}} < 0.79$。此外，$\frac{\sqrt{2}}{1+\delta} > \frac{\sqrt{2}}{1+1/\sqrt{3}} > 0.89$，因此条件$\theta \leq \frac{(1-\delta\sqrt{3}^{\,2})}{3\mathbb{E}|X|^3}$蕴含关于 θ 的另外两个条件。□

4.3. 特殊函数导数的界。

引理14. 设 X 是 $\mathbb{R}^3$ 中的对称随机向量，满足 $\delta = \mathsf{W}_2(X,\xi)$，且特征函数 ϕ 对某个 $C_0 > 0$ 满足 (5)。设 Φ 和 Φ_0 分别由 (22) 和 (24) 定义。对于每个 $s \geq 2$，有

$$|\Phi'(s) - \Phi_0'(s)| \leq \frac{2^{7/4}}{3\pi}\big(\delta(\delta+2)\big)^{1/4}\big(C_0^2+1\big)^{3/4}s^{-1/4} + 1.04\big(\delta(\delta+2)\big)^{1/7}\big(C_0^{3/2}+1\big)^{6/7}s^{1/2}.$$

证明. 首先求导，

$$\Phi'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\sqrt{s}}{2\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3}|\phi(t)|^s\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2s}\Phi(s) + \frac{\sqrt{s}}{2\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3}|\phi(t)|^s\log|\phi(t)|\mathrm{d}t.$$

对于得到的 $\Phi - \Phi_0$ 项，我们使用引理 12。为了界定由第二项产生的积分之差，我们固定 $T > 0$，并将积分区域分为两部分。t 较小时，利用引理7和引理11，可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_{|t|\leq T}\left(|\phi(t)|^s\log|\phi(t)| - \left|\frac{\sin|t|}{|t|}\right|^s\log\left|\frac{\sin|t|}{|t|}\right|\right)|t|^{-2}\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \int_{|t|\leq T}\frac{\delta(\delta+2)}{2}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3}\delta(\delta+2)T^3.\end{aligned}$$

t 较大时，注意到对于 $s \geq 2$，以及 $0 < u < 1$，有，

$$|u^s\log u| = |2u^{s-1/2}u^{1/2}\log(u^{1/2})| \leq \frac{2}{e}u^{3/2}.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\left|\int_{|t|\geq T}\left(|\phi(t)|^s\log|\phi(t)| - \left|\frac{\sin|t|}{|t|}\right|^s\log\left|\frac{\sin|t|}{|t|}\right|\right)|t|^{-2}\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \frac{2}{e}\left|\int_{|t|\geq T}\left(|\phi(t)|^{3/2} + \left|\frac{\sin|t|}{|t|}\right|^{3/2}\right)|t|^{-2}\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

应用衰减条件 (5) 后，其上界为

$$\frac{8\pi}{e}\int_T^\infty\frac{C_0^{3/2}+1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t = \frac{16\pi}{e}(C_0^{3/2}+1)T^{-1/2}.$$

将这两个界相加，并对 T 进行优化，可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\phi(t)|^s\log|\phi(t)| - \left|\frac{\sin|t|}{|t|}\right|^s\log\left|\frac{\sin|t|}{|t|}\right|\right)|t|^{-2}\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \frac{7\cdot 2^{19/7}\pi}{3e^{6/7}}\big(\delta(\delta+2)\big)^{1/7}\big(C_0^{3/2}+1\big)^{6/7}.\end{aligned}$$

回到导数之差，我们利用以下结果得到所需的界

$$\frac{7\cdot 2^{12/7}}{3e^{6/7}\pi} < 1.04. \qquad \square$$

4.4. Ball 特殊函数的界。我们需要关于 (24) 中定义的 Φ_0 的两个估计，即

$$\Phi_0(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{\sin(s^{-1/2}t)}{s^{-1/2}t}\right|^s \mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{s}}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right|^s \mathrm{d}t, \qquad s>1. \tag{29}$$

首先，我们给出 $s=2$ 附近导数的一个界。

引理 15. 对于 $2\le s\le 2.01$，有 $\Phi_0'(s) \le -0.02$。

S其次，在互补范围内， $\Phi_0(s)$ 与其上确界值 $\Phi_0(2$ 相距一定距离).

引理 16. 对于 $s\ge 2.01$，有 $\Phi_0(s) \le \Phi_0(2) - 2\cdot 10^{-4}$.

我们先给出一个数值界，后续证明这些断言时将会用到它 .

引理 17。我们有

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \log\left|\frac{\sin u}{u}\right| \mathrm{d}u \le -0.48.$$

证明。利用（28），我们得到

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \log\left|\frac{\sin u}{u}\right| \mathrm{d}u \le -\frac{1}{6}\int_0^\pi (\sin u)^2 \mathrm{d}u = -\frac{\pi}{12}.$$

此外，

$$\begin{aligned}\int_\pi^\infty \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \log\left|\frac{\sin u}{u}\right| \mathrm{d}u &= \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \log\left|\frac{\sin u}{u}\right| \\ &\le \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left(\frac{\sin u}{(k+1)\pi}\right)^2 \log\left|\frac{1}{k\pi}\right| = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\log(k\pi)}{(k+1)^2}.\end{aligned}$$

因此，我们的积分上界为

$$-\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\log(k\pi)}{(k+1)^2} = -0.4867.. < -0.48. \qquad \square$$

令

$$I(s) = \int_0^\infty \left|\frac{\sin u}{u}\right|^s \mathrm{d}u, \qquad s>1. \tag{30}$$

引理 15 的证明。首先我们注意到

$$I'(s) = \int_0^\infty \left|\frac{\sin u}{u}\right|^s \log\left|\frac{\sin u}{u}\right| \mathrm{d}u.$$

注意， I 是递减的。我们有，

$$\Phi_0'(s) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{I(s)}{2\sqrt{s}} + \sqrt{s}I'(s)\right) \le \frac{2}{\pi}\left(\frac{I(2)}{2\sqrt{s}} + \sqrt{s}I'(s)\right) = \frac{1}{2\sqrt{s}} + \frac{2\sqrt{s}}{\pi}I'(s),$$

因为 $I(2)=\frac{\pi}{2}$。此外,

$$\begin{aligned}|I''(s)| &= \int_0^\infty \left|\frac{\sin u}{u}\right|^s \log^2\left|\frac{\sin u}{u}\right| \mathrm{d}u \le \int_0^\infty \left|\frac{\sin u}{u}\right|^2 \log^2\left|\frac{\sin u}{u}\right| \mathrm{d}u \\ &\le \sup_{t\in(0,1)} (\sqrt{t}\log^2 t) \int_0^\infty \left|\frac{\sin u}{u}\right|^{3/2} \mathrm{d}u = 16e^{-2}\int_0^\infty \left|\frac{\sin u}{u}\right|^{3/2} \mathrm{d}u \\ &\le 16e^{-2}\left(1+\int_1^\infty \frac{1}{u^{3/2}}\mathrm{d}u\right) = 48e^{-2}.\end{aligned}$$

因此，借助引理 17，我们得到

$$I'(s) \le I'(2) + 48e^{-2}(s-2) < -0.48 + 48e^{-2}(s-2).$$

因此，对于 $2\le s\le 2.01$，我们有

$$\begin{aligned}\Phi_0'(s) &\le \frac{1}{2\sqrt{s}} + \frac{2\sqrt{s}}{\pi} I'(s) < \frac{1}{2\sqrt{s}} + \frac{2\sqrt{s}}{\pi}\big(-0.48 + 48e^{-2}(s-2)\big) \\ &< \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(-0.48 + 48e^{-2}(s-2)) \\ &\le \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(-0.48 + 48e^{-2}0.01) < -0.02,\end{aligned}$$

其中，在第一个不等式中，我们用到了括号中的项为负这一事实。 □

为了证明引理 16，我们还需要一些估计。首先，我们记录 $\Phi_0(s)$ 在任意 s 下的导数下界。

引理 18。对于 $s\ge 2$，我们有 $\Phi_0'(s) \ge -\frac{12\sqrt{s}}{\pi e}$。

证明。我们有:

$$\Phi_0'(s) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{I(s)}{2\sqrt{s}} + \sqrt{s} I'(s)\right) \ge \frac{2\sqrt{s}}{\pi} I'(s),$$

因此，只需给 $|I'(s)|$一个上界。注意,

$$\begin{aligned}|I'(s)| &= \int_0^\infty \left|\frac{\sin u}{u}\right|^s \left(-\log\left|\frac{\sin u}{u}\right|\right) \mathrm{d}u \\ &\le \int_0^\infty \left|\frac{\sin u}{u}\right|^2 \left(-\log\left|\frac{\sin u}{u}\right|\right) \mathrm{d}u \\ &\le \sup_{t\in(0,1)} (-\sqrt{t}\log t) \int_0^\infty \left|\frac{\sin u}{u}\right|^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}u \\ &\le 2e^{-1}\left(1+\int_1^\infty \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\right) = 6e^{-1}.\end{aligned}$$

□

其次，我们定量地证明了 Φ_0的取值会下降。

引理 19. 设 $a\in[1,\frac{\pi}{3}]$，并假设对某个 $s_0\ge 2$，有 $\Phi_0(s_0) = \sqrt{\frac{2}{a}}$。那么

$$\Phi_0(s) \le \sqrt{\frac{2}{a}}, \qquad s\ge s_0. \tag{31}$$

为证明这一点，我们以 Nazarov 和 Podkorytov 在 [31] 中的论证为基础。关于一个较为相似的界，我们请读者参阅 K¨onig 和科尔多布斯基关于立方体的最大周长截面的工作 [20] 中的命题 7。为方便起见并确保论证完整，我们将所有论证细节一并列出。我们考虑函数

$$f_a(x) = e^{-\frac{\pi}{2}x^2 a}, \quad g(x) = \left|\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right|, \qquad x > 0, \tag{32}$$

及其分布函数

$$F_a(y) = |\{x > 0 : f_a(x) > y\}|, \quad G(y) = |\{x > 0 : g(x) > y\}|, \qquad y > 0. \tag{33}$$

引理 20. 对于 $a \in [1, \frac{\pi}{3}]$，函数 $F_a - G$ 恰有一个变号点 y_0，并且在该点由 ”$-$” 变为 ”$+$”。

证明。注意，对于 $y \geq 1$，$F_a(y) = G(y) = 0$，因此我们只需考虑 $y \in (0, 1)$。我们有$F_a(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi a}\ln(\frac{1}{y})}$。

函数 $g(x)$ 在 $x \in \mathbb{Z}$ 时为零。对于 $m \in \mathbb{N}$，令 $y_m = \max_{[m,m+1]} g$。显然，我们有 $y_m < \frac{1}{\pi m}$，且 $y_m > g(m + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi (m+\frac{1}{2})}$。因此 $y_m \in (\frac{1}{\pi (m+\frac{1}{2})}, \frac{1}{\pi m})$，这表明数列 y_m 递减。我们有以下断言。

断言 1. 函数 $F_a - G$ 在 $(y_1, 1)$ 上为正。

注意，若 $g(x) > y_1$，则 $x \in (0,1)$。此外，对于 $x \in [0, 1]$，有 $g(x) \leq f_a(x)$，因为

$$g(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \leq \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{k^2}} = e^{-\frac{\pi^2}{6}x^2} \leq e^{-\frac{\pi}{2}ax^2} = f_a(x).$$

因此，对于 $y \in (y_1, 1)$，我们有

$$G(y) = |\{x \in (0, 1) : \ g(x) > y\}| < |\{x \in (0, 1) : \ f_a(x) > y\}| \leq F_a(y).$$

断言 2。函数 $F_a - G$ 在 $(0, 1)$ 中至少改变一次符号。

由断言 1 可知，只需证明 $F_a - G$ 有时为负。我们有$F_a - G \leq F_1 - G$，并且$\int_0^\infty 2y(F_1(y) - G(y))\mathrm{d}y = \int(f_1^2 - g^2) = 0$，因此 $F_1 - G$ 可能为负。

断言 3。函数 $F_a - G$ 在 $(0, y_1)$ 上递增。

显然 $F_a' > F_1'$，因此该断言由 $F_1 - G$ 在 $(0, y_1)$ 上递增这一事实即可推出，而这已在 [31]（第一章，步骤 5）中证明。□

引理 19 的证明。假设 $\Phi_0(s_0) = \sqrt{\frac{2}{a}}$ 等价于

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right|^{s_0} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left|e^{-\frac{\pi}{2}x^2 a}\right|^{s_0} \mathrm{d}x.$$

换元并利用引理 20 后，根据 Nazarov–Podkorytov 引理（ [31] 中第一章的步骤 4），我们得到对于 $s \geq s_0$

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|^{s} \mathrm{d}x \leq \int_0^\infty \left|e^{-\frac{1}{2\pi}x^2 a}\right|^{s} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2as}}. \qquad \square$$

引理 16 的证明。取引理 19 中的 $s_0 = 2.01$ 和 $a = 2\Phi_0(s_0)^{-2}$。由于 $\Phi_0(2) = \sqrt{2}$，由 Ball 不等式可得 $a \geq 1$。我们需要验证 $a \leq \frac{\pi}{3}$。由引理 18，我们

有对于 $s \in [2, 2.01]$, $\Phi_0'(s) \geq -\frac{12\sqrt{2.01}}{\pi e} > -2$。因此, $\Phi_0(s_0) \geq \Phi_0(2) - 2(s_0 - 2) = \sqrt{2} - 0.02$。因此, 所需的 $a < 2 \cdot (\sqrt{2} - 0.02)^{-2} < 1.03 < \frac{\pi}{3}$ 成立。由引理19和引理15, 我们进而得到对于 $s \geq s_0 = 2.01$,

$$\Phi_0(s) \leq \sqrt{\frac{2}{a}} = \Phi_0(s_0) \leq \Phi_0(2) + \sup_{[2,2.01]} \Phi_0' \cdot 0.01 \leq \Phi_0(2) - 0.02 \cdot 0.01. \qquad \square$$

4.5. 引理 10 的证明。回顾一下, 我们假设 X 是 $\mathbb{R}^3$ 中的对称随机向量, 满足 $\delta = \mathsf{W}_2(X, \xi)$, 其特征函数 ϕ 满足 (5), 即对所有 $t \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, 都有 $|\phi(t)| \leq C_0/|t|$。令 $C_1 = \max\{C_0, 1\}$。我们的目标是证明, 若 (6) 成立, 即

$$\delta \leq 10^{-38} C_1^{-9} \min\left\{(\mathbb{E}|X|^3)^{-6}, 1\right\},$$

则对所有 $s \geq 2$, 都有 $\Phi(s) \leq \Phi(2)$, 其中 Φ 在 (22) 中定义。为清楚起见, 我们在选取常数时会相当宽松。由于 $C_1 \geq 1$, 上述假设特别意味着 $\delta \leq 10^{-38}$。鉴于此, 我们注意到引理12和引理14分别推出以下结论: 对于 $s \geq 2$,

$$|\Phi(s) - \Phi_0(s)| \leq \frac{2^{11/4}}{3\pi} s^{3/4} \big(\delta(\delta+2)\big)^{1/4} \big(C_0^2 + 1\big)^{3/4} < 2 s^{3/4} \delta^{1/4} C_1^{3/2} \tag{34}$$

类似地,

$$|\Phi'(s) - \Phi_0'(s)| < s^{-1/4} \delta^{1/4} C_1^{3/2} + 2.1 \cdot s^{1/2} \delta^{1/7} C_1^{9/7}. \tag{35}$$

我们还指出, $\|X\|_3 \geq \|X\|_2 \geq \|\xi\|_2 - \|X - \xi\|_2 = 1 - \delta \geq 1 - 10^{-38}$。

我们将关于参数 s 的论证分为若干种情形。

较大的 s。事后看来, 我们令

$$s_0 = \max\left\{10^6 (\mathbb{E}|X|^3)^2, 2 \log C_1\right\} \tag{36}$$

特别地, $s_0 \geq 10^5$。根据引理 13, 即

$$\begin{aligned}\Phi(s) \leq & \sqrt{\frac{6}{\pi}} \Big((1 - \delta\sqrt{3})^2 - \theta \mathbb{E}|X|^3\Big)^{-1/2} \\ & + \sqrt{\frac{6}{\pi}} \exp\left\{-s\left(\frac{\theta^2}{6} - 26\delta(\delta+2)\right)\right\} + 2C_0 \left(\sqrt{s} + \frac{2}{\sqrt{s}}\right) e^{-s} = A_1 + A_2 + A_3,\end{aligned}$$

我们将证明, 对于所有 $s \geq s_0$, $\Phi(s) \leq \Phi(2)$ 都成立。我们取满足引理条件的 $\theta = \frac{1}{100 \mathbb{E}|X|^3}$, 然后对第一项 A_1, 使用

$$A_1 = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \Big((1 - \delta\sqrt{3})^2 - \theta \mathbb{E}|X|^3\Big)^{-1/2} \leq \sqrt{\frac{6}{\pi}} \big(1 - 0.01\big)^{-1/2} < \sqrt{2} - \frac{1}{50}.$$

由 (34), 我们还可得

$$\sqrt{2} = \Phi_0(2) \leq \Phi(2) + 2^{7/4} \delta^{1/4} C_1^{3/2} = \Phi(2) + A_4,$$

因此, 只需证明第二项和第三项 A_2, A_3 以及这个额外误差 A_4 均不超过 $1\ 150$。利用 $\delta < 10^{-38} C_1^{-9}$, 可得

$$A_4 \leq 2^{7/4} \cdot 10^{-19/2} C_1^{-3/4} < \frac{1}{150}.$$

对于第二项 A_2 中的指数，注意到

$$26\delta(\delta+2) < 53\delta < 53\cdot 10^{-38} C_1^{-9}(\mathbb{E}|X|^3)^{-6} \le 10^{-36}(\mathbb{E}|X|^3)^{-2},$$

并且，因此，

$$\frac{\theta^2}{6} - 26\delta(\delta+2) \ge \frac{1}{6\cdot 10^4(\mathbb{E}|X|^3)^2} - \frac{1}{10^{36}(\mathbb{E}|X|^3)^2} \ge \frac{1}{10^5(\mathbb{E}|X|^3)^2}.$$

因此，利用 $s \ge s_0 \ge 10^6(\mathbb{E}|X|^3)^2,$，我们得到

$$A_2 \le \sqrt{\frac{6}{\pi}} \exp\left\{-\frac{s_0}{10^5(\mathbb{E}|X|^3)^2}\right\} \le \sqrt{\frac{6}{\pi}} \exp\{-10\} < \frac{1}{150}.$$

最后，对于第三项，由于 $s \ge s_0 \ge 10^5$,

$$\left(\sqrt{s} + \frac{2}{\sqrt{s}}\right) e^{-s} \le (\sqrt{s}+1)e^{-s} \le e^{\sqrt{s}-s} \le \frac{1}{300} e^{-s/2},$$

因此，由于 $s \ge s_0 \ge 2\log\ C_1$,

$$A_3 \le 2C_1 \left(\sqrt{s} + \frac{2}{\sqrt{s}}\right) e^{-s} \le \frac{C_1}{150} e^{-s/2} \le \frac{1}{150}.$$

取适中的 $s_\circ$。现在假设 $2.01 \le s \le s_{0\circ}$ 将 (34) 使用两次，并利用引理 16 ，

$$\begin{aligned}\Phi(s) \le \Phi_0(s) + 2s_0^{3/4}\delta^{1/4}C_1^{3/2} &\le \Phi_0(2) - 2\cdot 10^{-4} + 2s_0^{3/4}\delta^{1/4}C_1^{3/2} \\ &\le \Phi(2) - 2\cdot 10^{-4} + 2\cdot 2^{3/4}\delta^{1/4}C_1^{3/2} + 2s_0^{3/4}\delta^{1/4}C_1^{3/2} \\ &\le \Phi(2) - 2\cdot 10^{-4} + 3s_0^{3/4}\delta^{1/4}C_1^{3/2}.\end{aligned}$$

代入关于 δ 的上界，

$$3s_0^{3/4}\delta^{1/4}C_1^{3/2} \le 3\cdot 10^{-19/2} C_1^{-3/4} s_0^{3/4} \cdot \min\left\{(\mathbb{E}|X|^3)^{-3/2}, 1\right\}$$

若 $s_0 = 10^6(\mathbb{E}|X|^3)^2,$，则在最小值中取 $(\mathbb{E}|X|^3)^{-3/2}$ 项，并利用 $C_1^{-3/4} \le 1$，可得上述量不超过 $3\cdot 10^{-19/2+9/2} = 3\cdot 10^{-5}$。若 $s_0 = 2\log\ C_1$，则取最小值中的另一项，可得上界为 $3\cdot 2^{3/4}10^{-19/2}C_1^{-3/4}\,(\log C_1)^{3/4} < 3(2/e)^{3/4}10^{-19/2} < 10^{-4}$，因为对 $u > 1$ 有 $u^{-1}\log u \le e^{-1}$。无论哪种情况，均可得出结论 $\Phi(s) \le \Phi(2)$。

较小的 $s_\circ$。最后假设 $2 \le s \le 2.01_\circ$ 为了证明 $\Phi(s) \le \Phi(2)$，我们将证明 $\Phi'(s) < 0_\circ$ 由 (35) 和引理 15 可得，

$$\begin{aligned}\Phi'(s) &\le \Phi_0'(s) + s^{-1/4}\delta^{1/4}C_1^{3/2} + 2.1\cdot s^{1/2}\delta^{1/7}C_1^{9/7} \\ &< -0.02 + (\delta C_1^6)^{1/4} + 3\big(\delta C_1^9\big)^{1/7}.\end{aligned}$$

由于 $\delta C_1^6 \le \delta C_1^9 \le 10^{-38}$，这显然是负数，证明至此完成。 □

5. Concluding remarks

注 1. 假设 (3) 看起来很自然：显然，存在一些与拉德马赫分布相差甚远的分布，使得达到 $\inf \mathbb{E}|\sum a_j X_j|$ 的单位向量不同于 $a = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0)$；例如，对于高斯混合，该向量是 $a = (1, 0, \ldots, 0)$（参见

[1, 10]），或者对于在 0 处有较大原子质量的 Rademacher 分布（参见 [16] 中的定理 4 和注 14）。

注 2. 处理 $\|a\|_\infty > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 这一未被定理 1 和定理 2 涵盖的互补情形是另一回事。引言中介绍的平凡凸性论证实际上仅适用于拉德马赫情形，因为它要求 $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}|X_1| \geq \mathbb{E}\left|\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right|$，并且只适用于 L_1-范数（见 [6]中的注 21）。为规避这一问题，人们采用了几种不同的方法：Haagerup 的特设逼近法（见 [14]中的 §3）、Nazarov 和 Podkorytov 在加强假设下进行的归纳（见 [31]中的第二章、步骤 5），该方法也已被推广到其他分布（见 [6, 5, 8]）；以及最近在极值元附近采用的另一种归纳方案（无需加强假设），这一方法是在几何背景下所需要的（见 [12]）。对于本文所处理的一般分布这一广泛设定，上述技术似乎都难以适用。

注 3. De、Diakonikolas 和 Servedio 在 [9] 中获得了关于单位向量 a 的 Szarek 不等式 (1) 的一个稳定版本，即

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\varepsilon_j\right| \geq \mathbb{E}\left|\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\sqrt{2}}\right| + \kappa\sqrt{\delta(a)} \tag{37}$$

其中 κ 为一个普适正常数，亏损由 $\delta(a) = |a-(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0)|^2$ 给出，假设 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$。注意，在定理 1 的情形下，我们有

$$\left|\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j X_j\right| - \mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\varepsilon_j\right|\right| \leq \delta_0,$$

通过简单应用三角不等式和 $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$ 可得。因此，应用该结果两次，并结合 De、Diakonikolas 和 Servedio 的界 (37)，我们得出定理 1 对满足 a with $\delta(a) \geq (2\delta_0/\kappa)^2$ 的单位向量同样成立。借助 [7]，中关于 Ball 不等式 (2) 的强化结果（另见 [27]），定理 2 也可同理由定理 1 得出。关于常数 κ 的数值，参见 [12] 。

注 4。为明确起见并方便表述，我们在定理 1 和 2 中使用了 W_2-距离。当然，对于每个 $p \geq 1$，如果我们在 (3) 中使用 W_p-距离，并假设 X_1 属于 $L_{\frac{p}{p-1}}$，那么只需将柯西–施瓦茨不等式替换为 Hölder 不等式，引理 5 和 11 的证明即可继续成立，证明的其余部分保持不变。研究此类论述中更弱的距离或许会很有意义。

注5. Szarek 的锐利 L_1-L_2 不等式 (1) 被 Haagerup 于 [14]，利用 $|x|^p$ 的傅里叶积分表示推广为对所有 $p > 0$ 的锐利 L_p-L_2 界。因此，我们的技术似乎有望将定理 1 推广到 L_p 范数的锐利界，但要处理与 Haagerup 的 L_p 界相关的特殊函数 Ψ_0、(13) 的类似形式，还需要额外的（非平凡且技术性较强的）工作。同样，[6] 中将 (2) 推广为对所有 $-1 < p < 0$ 的锐利 $L_p - L_2$ 界的主要结果，或可成为将定理 2 推广到具有 $-1 < p < 0$ 的 L_p 范数的起点。

声明。作者声明不存在利益冲突。本稿没有相关数据。

References

[1] Roland Averkamp 和 Christian Houdr´e. 非必然高斯噪声下的小波阈值处理：理想情况。Ann. Statist. 31 (2003), 110–151.[2] Keith Ball. R^n中的立方体切片。Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), no. 3, 465–473.[3] Franck Barthe 和 Assaf Naor. ℓ_p^n单位球的超平面投影。Discrete Comput. Geom. 27 (2002), no. 2, 215–226.[4] Albert Baernstein II 和 Robert Culverhouse. 序列主序、尖锐向量欣钦不等式与双次调和函数。Studia Math. 152 (2002), no. 3, 231–248.[5] Giorgos Chasapis、Keerthana Gurushankar 和 Tomasz Tkocz. 独立均匀随机变量之和的 p-范数的尖锐界，$0 < p < 1$。即将发表于 J. Anal. Math.，预印本 (2021)，arXiv:2105.14079.[6] Giorgos Chasapis、Hermann K¨onig 和 Tomasz Tkocz. 从 Ball 的立方体切片不等式到负矩的欣钦型不等式。J. Funct. Anal. 281 (2021), no. 9, Paper No. 109185, 23 pp.[7] Giorgos Chasapis、Piotr Nayar 和 Tomasz Tkocz. ℓ_p-球切片再探：ℓ_1中的稳定性与平面截面。Ann. Probab. 50 (2022), no. 6, 2344–2372.[8] Giorgos Chasapis、Salil Singh 和 Tomasz Tkocz. 多圆盘切片中的 Haagerup相变。预印本 (2022)，arXiv:2206.01026.[9] Anindya De、Ilias Diakonikolas 和 Rocco A. Servedio. 稳健欣钦不等式，以及用于计算傅里叶分析和高维几何中最优常数的算法。SIAM J. Discrete Math. 30 (2016), no. 2, 1058–1094.[10] Alexandros Eskenazis、Piotr Nayar 和 Tomasz Tkocz. 高斯混合：熵与几何不等式。Ann. of Prob. 46(5) 2018, 2908–2945.[11] Alexandros Eskenazis、Piotr Nayar 和 Tomasz Tkocz. 矩的尖锐比较与对数凹矩问题。Adv. Math. 334 (2018), 389–416.[12] Alexandros Eskenazis、Piotr Nayar 和 Tomasz Tkocz. ℓ_p中的立方体切片韧性。预印本见 arXiv:2211.01986 (2022).[13] Evgeni˘i A. Gorin 和 Sergey Yu. Favorov. 欣钦不等式的推广。（俄文）Teor. Veroyatnost. i Primenen. 35 (1990), no. 4, 762–767；译文见 Theory Probab. Appl. 35 (1990), no. 4, 766–771 (1991).[14] Uffe Haagerup. 欣钦不等式的最佳常数。Studia Math. 70 (1981), no. 3, 231–283.[15] Richard R. Hall. 关于 Littlewood 的一个猜想。Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 78 (1975), no. 3, 443–445.[16] Alex Havrilla 和 Tomasz Tkocz. 对称离散均匀随机变量的尖锐欣钦型不等式。Isr ael J. Math. 246 (2021), no. 1, 281–297.[17] Alex Havrilla、Piotr Nayar 和 Tomasz Tkocz. 通过 Hadamard 分解得到的欣钦型不等式。即将发表于 Int. Math. Res. Not. IMRN，预印本 (2021), arXiv:2102.09500.[18] Hermann K¨onig. Steinhaus变量欣钦不等式的最佳常数。Israel J. Math. 203 (2014), no. 1, 23–57.[19] Hermann K¨onig 和 Alexander Koldobsky. 关于 n立方体截面的最大测度。几何分析、数学相对论与非线性偏微分方程，123–155，Contemp. Math., 599, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.[20] Hermann K¨onig 和 Alexander Koldobsky. 关于立方体截面的最大周长。Adv. Math. 346 (2019), 773–804.

[21] Hermann K¨onig 和 Stanis law Kwapie´n. 独立旋转不变随机向量之和的最佳欣钦型不等式。Positivity 5 (2001), no. 2, 115–152.[22] Aleksandr Khintchine. ¨关于二进分数。Math. Z. 18 (1923), no. 1, 109–116.¨Stanis law Kwapie[23] n、Rafa l Lata la 和 Krzysztof Oleszkiewicz. 独立随机变量之和的矩比较与微分不等式。J. Funct. Anal. 136 (1996), no. 1, 258–268.´Rafa l Lata la 和 Krzysztof Oleszkiewicz. 关于 Khinchin-Kahane不等式的最佳常数。Studia Math. 109 (1994), no. 1, 101–104.[24] Rafa l Lata la 和 Krzysztof Oleszkiewicz. 关于独立均匀分布随机变量之和的一则注记。Colloq. Math. 68 (1995), no. 2, 197–206.[25] John E. Littlewood. 关于无穷多个变量上的有界双线性形式。Quart. J. Math. Oxford Ser. 1 (1930), 164–174.[26] James Melbourne 和 Cyril Roberto.[27] 中 Ball 立方体切片不等式的定量形式及最小熵功率不等式的等号情形。Proc. Amer. Math. Soc. 150 (2022), no. 8, 3595–3611. $\mathbb{R}^n$ James Melbourne 和 Cyril Roberto. 从输运主序到解析与几何不等式。J. Funct. Anal. 284 (2023), no. 1, Paper No. 109717.[28] Piotr Nayar 和 Krzysztof Oleszkiewicz. 通过超对数凹性得到具有最优常数的欣钦型不等式。Positivity 16 (2012), no. 2, 359–371.[29] Piotr Nayar 和 Tomasz Tkocz. 某些凸体的极值截面与投影：综述。预印本 (2022)，arXiv:2210.00885.[30] Fedor L. Nazarov 和 Anatoliy N. Podkorytov. Ball、Haagerup 与分布函数。复分析、算子及相关主题，247–267，Oper. Theory Adv. Appl., 113, Birkh[31] auser, Basel, 2000.¨Charles M. Newman. 欣钦不等式的一个推广。Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), no. 5, 913–915.[32] Krzysztof Oleszkiewicz. 通过 Poincar[33] e 型不等式比较矩。随机不等式进展（亚特兰大，GA，1997），135–148，Contemp. Math., 234, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.´Stanis law Szarek. 关于欣钦不等式的最佳常数。Stud. Math. 58, 197–208 (1976).[34] Bogus law Tomaszewski. 以简单初等方法证明具有最佳常数的 Kchintchine 不等式。Bull. Sci. Math. (2) 111 (1987), no. 1, 103–109.[35] ,(A. E.) CNRS,
Institut de Mathématiques de Jussieu, Sorbonne Université France and,Trinity College, University of Cambridge UK.: alexandros.eskenazis@imj-prg.fr, ae466@cam.ac.uk*Email address*,
(P. N.) University of Warsaw, 02-097 Warsaw Poland.: nayar@mimuw@edu.pl*Email address*,
(T. T.) Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213 USA.: ttkocz@andrew.cmu.edu