arXiv:2301.09384v2 [math.FA] 2 Feb 2023

Segal 代数的量子调和分析方法

Eirik Berge、Stine Marie Berge 和 Robert Fulsche

摘要

本文研究空间 $L^1(\mathbb{R}^{2n})\oplus\mathcal{T}^1$ 上的一种交换 Banach 代数结构，其中 $\mathcal{T}^1$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的迹类算子。该空间的乘积由量子调和分析中的卷积给出。为此，我们研究该空间的闭理想，尤其是其盖尔范德理论。此外，我们还提出量子 Segal 代数这一概念，作为 Segal 代数的类比。我们证明，Segal 代数的许多性质也适用于量子 Segal 代数。不过需要注意的是，与 Segal 代数不同，量子 Segal 代数并非环境空间的理想。我们还给出了若干不同的构造示例，这些构造均可得到量子 Segal 代数。

1 Introduction

粒子在 $\mathbb{R}^n$ 上的经典力学，通常通过在其相空间 $\mathbb{R}^{2n}$上赋予辛结构来描述。给定一点（p，q）$\in\mathbb{R}^{2n}$，点 p 描述位置，而 q描述粒子的动量。在量子物理中，定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的函数通常称为经典可观测量，而定义在 $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的（不一定有界的）算子则称为量子可观测量。在 $\mathcal{H}$上的外尔正则对易关系，在经典力学中发挥着与辛相空间结构相同的作用。通常，经典可观测量和量子可观测量的理论分别在不同的空间上讨论，而量子化则充当连接经典可观测量与量子可观测量的途径。在他1984年的论文 [22], 中，R. Werner 提出了一套同时处理经典可观测量和量子可观测量的框架，并将其称为量子调和分析。在这一框架中，他将调和分析中针对经典可观测量的概念（例如卷积和傅里叶变换）推广到量子可观测量。由此，理论的经典侧与量子侧之间产生了有趣的相互作用。该框架不仅是数理物理学的研究对象，本身也颇具研究价值，还能在多个领域发挥重要作用，例如局部化算子、维格纳分布和 Toeplitz 算子。用量子调和分析的术语重新表述问题，为解决问题提供了一个新框架，而且往往能取得良好成效。更多信息请参见，例如， [1, 8, 9, 11, 16, 17, 21, 23]。

更精确地说，令 W_z 表示定义在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的韦尔算子

$$W_{(x,\xi)}\phi(y)=e^{i\xi y-ix\xi/2}\phi(y-x),\quad z=(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}.$$

按照惯例，我们将普朗克常数设为 $\hbar = 1$。韦尔算子是作用于 $\mathcal{H}$ 上的酉算子，并满足 Weyl 交换关系

$$W_z W_{z'} = e^{-i\sigma(z,z')/2} W_{z+z'} = e^{-i\sigma(z,z')} W_{z'} W_z, \quad z, z' \in \mathbb{R}^{2n},$$

其中 σ 表示 $\mathbb{R}^{2n}$上的标准辛形式。给定两个迹类算子 S 和T，它们的卷积定义为

$$S * T(z) \coloneqq \operatorname{tr}(S W_z P T P W_{-z}), \quad z \in \mathbb{R}^{2n},$$

其中 P 是作用于 $\mathcal{H}$ 上的奇偶算子，其作用方式为 $P\phi(x) = \phi(-x)$。表达式 $\alpha_z(A) \coloneqq W_z A W_{-z}$的作用是将算子 A平移 z，类似于函数卷积定义中使用的平移 $\alpha_z(f) = f(\cdot - z)$。将傅里叶-韦尔变换（也称为 Fourier-Wigner 变换）定义为

$$\mathcal{F}_W(S)(z) \coloneqq \operatorname{tr}(S W_z), \quad z \in \mathbb{R}^{2n},$$

我们有

$$\mathcal{F}_\sigma(S * T) = \mathcal{F}_W(S)\mathcal{F}_W(T),$$

其中 $\mathcal{F}_\sigma$ 是辛傅里叶变换。此外，给定函数 $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$和迹类算子 $A \in \mathcal{T}^1(\mathcal{H})$，算子 $f * A$ 定义为

$$(f * A)\phi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(z) W_z A W_{-z} \phi \, \mathrm{d}z, \quad z \in \mathbb{R}^{2n}.$$

同样，我们有如下傅里叶变换关系

$$\mathcal{F}_W(f * A) = \mathcal{F}_\sigma(f)\mathcal{F}_W(A).$$

利用卷积，可以在 $L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1(\mathcal{H})$上定义一个乘积，其定义为

$$(f, S) * (g, T) = (f * g + S * T, f * T + g * S),$$

使该空间成为一个交换 Banach 代数。因此，这个新空间同时包含经典可观测量和量子可观测量。

不难找到理由说明 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 与希尔伯特-施密特算子 $\mathcal{T}^2(\mathcal{H})$ 在经典可观测量和量子可观测量中扮演着相似的角色。例如，根据 Plancherel 定理，傅里叶-韦尔变换可以扩展为这两个空间之间的一个同构，参见例如 [7, 第 7 节。5]。对于 $\mathbb{R}^{2n}$上的其他函数空间，本文 [22] 给出了对应空间的定义。我们称经典可观测量空间 $\mathcal{D}_0$ 和量子可观测量空间 $\mathcal{D}_1$ 为对应空间，如果

$$(L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1(\mathcal{H})) * (\mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1) \subset \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1. \tag{1.1}$$

根据这个定义， $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 和 $\mathcal{T}^2(\mathcal{H})$ 是对应的空间；适当扩展卷积的定义后， $L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ 与有界算子空间 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 也同样如此。需要注意的是，这种对应只有在以下意义下才是唯一的：在

假设 $\mathcal{D}_0$ 和 $\mathcal{D}_1$具有额外的拓扑性质后，给定一个空间 $\mathcal{D}_0$，仅存在一个与之对应的空间 $\mathcal{D}_1$。注意，当 $\mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1 \subset L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1(\mathcal{H}$时，方程（1.1）表明 $\mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1$ 是一个理想。

本文有双重目的：一是进一步加深我们对空间$L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1(\mathcal{H})$作为交换 Banach 代数的理解，二是引入 Segal 代数的量子版本。为实现第一个目标，我们完整地分类了 $L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1(\mathcal{H})$的闭理想。众所周知，$L^1(\mathbb{R}^n)$的闭理想与闭移位不变子空间完全相同。对于 $L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1(\mathcal{H})$ 的闭理想，这种类比并不成立：平移不变性只是成为闭理想的必要条件，而非充分条件。尽管如此，平移不变子空间与闭理想之间仍存在丰富的联系，我们对此进行了研究。作为一个特例，我们描述了 $L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1(\mathcal{H})$的盖尔范德理论。根据 $L^1(\mathbb{R}^{2n})$的盖尔范德理论，这与傅里叶变换有关，也就不足为奇了。

本文的第二个目的是引入量子 Segal 代数的概念。量子 Segal 代数在量子调和分析中所起的作用，类似于 Segal 代数在经典调和分析中的作用。量子 Segal 代数的定义与 Segal 代数的定义理念相同：量子 Segal 代数是 $L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1(\mathcal{H})$ 的一个稠密子代数，并带有自身的巴拿赫代数范数，使得平移在其上作用为等距且连续。我们证明，量子 Segal 代数与 Segal 代数类似，等同于本质 L^1 模。此外，我们证明，在空间为分次的技术性假设下（即代数具有经典部分与量子部分的直和结构），它们的盖尔范德理论总是与 $L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1(\mathcal{H})$ 相同。作为关于量子 Segal 代数的最后一个一般性结果，我们描述了所有分次量子 Segal 代数的交集。

在讨论了量子 Segal 代数的一般理论后，我们转而考察这类代数的实例。我们介绍构造这类代数的两种不同方法：将一个 Segal 代数与一个正则迹类算子进行卷积，或使用 Weyl量子化。作为量子 Segal 代数的一个特例，我们讨论量子 Feichtinger 代数。它是 Feichtinger 代数 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$ 与 $\mathcal{T}^1(\mathcal{H})$ 的子空间的直和，后者由对 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$ 中符号进行 Weyl量子化得到。鉴于经典 Feichtinger 代数的重要性，我们认为有必要更详细地考察这一实例。具体而言，我们基于量子调和分析中的运算，给出算子归属于量子 Feichtinger 代数的一些条件。毫不意外，这与经典 Feichtinger 代数中函数归属的刻画完全类似。

本文结构如下：第2节将更详细地介绍本研究的基础。我们首先回顾 Segal 代数的基本知识，随后综述量子调和分析中的一些结果。特别是，我们引入算子的调制这一概念；应用傅里叶-魏尔变换后，它会转化为函数平移。迄今为止，文献中似乎尚未出现调制这一概念。第3节将研究 $(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1(\mathcal{H})$ 的闭理想以及盖尔范德理论。第4 节将介绍量子 Segal 代数及其基本性质。最后，第5 节将讨论上述量子 Segal 代数的构造，尤其是量子 Feichtinger 代数。

2 Preliminaries

2.1 经典 Segal 代数

在介绍 Segal 代数之前，我们先简要回顾可积函数空间 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的一些基本事实。我们将令 α_x: $L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ 表示平移算子

$$\alpha_x f(y) \coloneqq f(y-x), \qquad f \in L^1(\mathbb{R}^n),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

对于元素 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$，它们的卷积乘积为

$$(f * g)(x) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\alpha_y g(x)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

使 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 成为一个巴拿赫代数。我们要指出，因子 $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$ 是哈尔测度的适当归一化，因此使经典调和分析与量子调和分析之间的联系最为自然。

代数 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 配备了对合

$$f^*(x) \coloneqq \overline{f(-x)}.$$

我们用记号 $\mathcal{F}f$ 表示 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 的标准傅里叶变换，其定义为

$$\mathcal{F}f(\xi) \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-it\xi}\,\mathrm{d}t.$$

在此我们强调，上述标准傅里叶变换在本文后续内容中不会发挥作用。通常我们会用辛傅里叶变换来替代它，并且我们在此$\widehat{\ }$就强调， f 表示的不是如上所述的 f 标准傅里叶变换，而是其辛傅里叶变换 $\mathcal{F}_\sigma(f)$，见（2.9）。

我们来回顾一下 Segal 代数的定义，例如 [18] 中给出的定义。

定义 2.1（Segal 代数）。Segal 代数 S 是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的线性子空间，并满足以下四个性质：

(S1) 空间 S 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密。

(S2) 空间 S 关于范数 $\|\cdot\|_S$ 是一个巴拿赫代数，其乘法为卷积。

(S3) 空间 S 在平移下不变，即对于 $f \in S$，有 $\alpha_x(f) \in S$，对所有$x \in \mathbb{R}^n$均成立。

(S4) 平移 α_x 是连续的，并且满足 $\|\alpha_x(f)\|_S = \|f\|_S$，对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $f \in S$均成立。

要检验性质(S4) 中的连续性条件，只需检验：给定任意的 $f \in S$ 和 $\epsilon > 0$，存在原点的一个邻域 U，位于 $\mathbb{R}^n$ 中，使得

$$\|\alpha_x f - f\|_S < \epsilon \quad \text{for} \quad x \in U.$$

注 1. Segal 代数通常定义在局部紧群 G 上，是 $L^1(G)$ 的稠密子空间，并配备左 Haar 测度和左平移。在这一更一般的情形下，Segal 代数的存在与种类很大程度上取决于所讨论的群 G 。对于离散群，唯一的 Segal 代数就是整个空间 $l^1(G) = L^1(G)$。另一方面，对于紧致的 G ，对任意 $1 \le p \le \infty$，空间 $L^p(G)$ 都是一个 Segal 代数。特别是，Segal 代数 $L^2(G)$ 在 Peter–Weyl 理论中得到了广泛应用。

一个众所周知的结果是，Segal 代数是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的（双边）理想；也就是说，对于 Segal 代数 S，有 $f * g \in S$ 只要 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $g \in S$。此外，根据 [18,命题 4，Segal 代数总满足1] 以下估计

$$\|f * g\|_S \le C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_S, \tag{2.1}$$

对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，以及 $g \in S$对于一个 C，其仅依赖于 $\|\cdot\|_S$。通过将 S 上的范数缩放为一个等价范数，可以令常数 C 为 1。更一般地，若 $T \subset S$都是 Segal 代数，则有

$$\|f * g\|_T \le C\|f\|_S\|g\|_T \qquad f \in S\,, g \in T. \tag{2.2}$$

我们请读者参阅 以了解 [18, 命题 42] 中涉及有界测度的（2.1）的一般化 .

定义 2.2。若对合在 S-范数下是等距变换，则称 Segal 代数 S 为星对称；也就是说，对于 $f \in S$，有 $f^* \in S$且 $\|f^*\|_S = \|f\|_S$.

显然， $L^1(\mathbb{R}^n)$ 是一个星对称 Segal 代数。在下面的例子中，我们将回顾几个具有核心重要性的经典 Segal 代数例子。

例2.3。

(E1) 令 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 表示在 $\mathbb{R}^n$ 上趋于无穷远时消失的连续函数。则空间 $S_\infty := L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ 是一个星对称 Segal 代数，其范数为

$$\|f\|_{S_\infty} := \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

(E2) 对于 $1 < p < \infty$，空间 $S_p := L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ 是一个星对称 Segal 代数，其范数为

$$\|f\|_{S_p} := \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

(E3) 在 $\mathbb{R}^n$上取一个正的无界测度 μ，例如勒贝格测度 dx。对于 $1 \le p < \infty$，我们记

$$S_p^\mu := L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}^{-1}\left(L^p(\mathbb{R}^n, \mu)\right).$$

则 S_p^μ 是一个星对称 Segal 代数，其范数为

$$\|f\|_{S_p^\mu} := \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathcal{F}(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mu)}.$$

(E4) 回忆一下， W 上的 Wiener 代数 $\mathbb{R}^n$ 定义为由满足以下条件的连续函数组成的空间： $\mathbb{R}^n$

$$\|f\|'_W := \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m(f) < \infty, \quad \text{where } a_m(f) = \sup_{x\in[0,1]^n} |f(m+x)|.$$

显然， $W \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$。令 W 上的范数定义为

$$\|f\|_W := \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \|\alpha_y(f)\|'_W,$$

将 W 变为一个 Segal 代数。显然， W 也是一个模：它在 $C_0(\mathbb{R}^n)$中的函数的逐点乘法作用下保持不变。事实上， W 是具有这一性质的最小 Segal 代数：

定理 2.4 ([5])。 设 $S \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Segal 代数，并且是一个 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 模，在逐点乘法作用下保持不变。那么， S包含 W且 $\|f\|_W \le C\|f\|_S$对所有 $f \in W$均成立。

(E5) 时频分析中的 Feichtinger 代数 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ 通常通过短时傅里叶变换来定义：Feichtinger 代数可以定义为满足 $V_f f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 的函数 $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 的集合，其中

$$V_g f(x,\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-i\xi t}\,\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

通过这种描述，不难看出 Feichtinger 代数是一个星对称的 Segal 代数。不过，也可以将 Feichtinger 代数描述为在（强意义下）对调制封闭的最小 Segal 代数

$$M_\xi f(t) := e^{it\xi} f(t). \tag{2.4}$$

关于局部紧群上的 Feichtinger 代数的详细考察，请参阅 [14] 。

备注 2。所有 Segal 代数的交集恰好是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中傅里叶变换支集为紧集的连续函数全体；证明请参见 [18, (vii) 第 26] 页。因此，并非每个 Segal 代数都将施瓦茨函数 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 包含为子空间。

$\mathbb{R}^n$ 上的 Segal 代数不是含幺代数，因为 $(2\pi)^{n/2}\delta_0 \notin L^1(\mathbb{R}^n)$。然而，每个 Segal 代数都包含一个在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中归一化的近似单位，参见 [18, 命题 8.1]。因此，Cohen-Hewitt 分解定理表明，Segal 代数$g \in S$ 中的每个元素都可以分解为 $g = f * h$ ，其中 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $h \in S$。我们简洁地写作

$$L^1(\mathbb{R}^n) * S = S. \tag{2.5}$$

由 [3, 命题 3。1] 以及将（2.5）应用于 $S = L^1$（$\mathbb{R}^n$）可知，L^1（$\mathbb{R}^n$）的极大理想都不可能稠密。因此，Segal 代数永远不会是极大理想。注意， L^1（$\mathbb{R}^n$）有许多闭极大理想，例如，对于每个 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 空间

$$I_\xi := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}f(\xi) = 0 \right\},$$

是一个极大理想。对于 Segal 代数 $S \subset L^1$($\mathbb{R}^n$中的理想而言，每个闭理想 I_S 在 S 中都具有如下形式 $I_S = I \cap S$，其中 I 是 L^1($\mathbb{R}^n$的唯一闭理想，依据[18,定理 91]。

2.2 量子调和分析

本文中的算子始终作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ 上。回顾一下，作用在 $\mathcal{H}$ 上的 Weyl 算子定义为

$$W_{(x,\xi)}\phi(y) \coloneqq e^{i\xi y - ix\xi/2}\phi(y-x),$$

其中 $x, \xi \in \mathbb{R}^n$。通常使用简写记号 $W_z \coloneqq W_{(x,\xi)}$，其中 $z = (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$。Weyl 算子是酉算子，并满足 $W_z^* = W_{-z}$。Weyl 算子这一名称源于韦尔对易关系（常称为正则对易关系），其定义如下：

$$W_z W_{z'} = e^{-i\sigma(z,z')/2} W_{z+z'} = e^{-i\sigma(z,z')} W_{z'} W_z.$$

这里，σ 表示辛形式

$$\sigma(z,z') = \sigma((x,\xi),(x',\xi')) \coloneqq \xi x' - x\xi'.$$

现在我们将定义量子调和分析的基本运算，即卷积和傅里叶变换。除非另有说明，第2.2.1节和第2.2.2 节中各命题的证明见 [22]。

2.2.1 卷积

给定有界线性算子 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，我们将算子 A 按 $z \in \mathbb{R}^{2n}$ 平移定义为

$$\alpha_z(A) \coloneqq W_z A W_{-z}.$$

利用平移，可以将 $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 和 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 的函数-算子卷积定义为算子

$$f * A \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(z)\alpha_z(A)\,\mathrm{d}z =: A * f. \tag{2.6}$$

卷积 (2.6) 解释为弱积分，所得算子有界。若线性空间 $X \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 满足：对所有 $z \in \mathbb{R}^{2n}$，$\alpha_z(X) \subset X$，则称其为平移不变空间。若算子空间 $X \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上的巴拿赫空间 $(X, \|\cdot\|_X)$ 满足 $\|\alpha_z(A)\|_X = \|A\|_X$，且对所有 $z \in \mathbb{R}^{2n}$，$z \mapsto \alpha_z(A)$ 关于 $\|\cdot\|_X$ 连续，则称其范数为强平移不变范数。给定一个具有强平移不变范数的平移不变巴拿赫空间 $(X, \|\cdot\|_X)$，并且它连续嵌入 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$，则对所有 $A \in X$ 和 $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$，有 $f * A \in X$。此类空间的例子包括 $1 \le p \le \infty$ 时的 p-Schatten 类算子 $\mathcal{T}^p = \mathcal{T}^p(\mathcal{H})$。特殊情形 $p = 1$ 是迹类算子，而 $p = 2$ 是希尔伯特-施密特算子。我们采用标准约定：$\mathcal{T}^\infty$ 表示赋有算子范数的紧算子。

我们将用 $P\colon\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 表示由 $P\phi(x) = \phi(-x)$ 定义的奇偶算子。注意，奇偶算子满足

$$PW_z = W_{-z}P.$$

对于 A、$B \in \mathcal{T}^1$，我们将它们的算子-算子卷积定义为

$$A * B(z) \coloneqq \mathrm{tr}(A\alpha_z(PBP)) = B * A(z), \quad z \in \mathbb{R}^{2n}.$$

在量子调和分析中， $A*B \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 至关重要。此外，还有

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} A*B(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B).$$

卷积满足以下结合条件

$$f*(A*B) = (f*A)*B, \qquad f*(g*A) = (f*g)*A$$

对于 $f,g \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 和 $A,B \in \mathcal{T}^1$。

对于 $A \in \mathcal{T}^1$ ，我们定义算子对合为

$$A^{*\mathrm{QHA}} := PA^*P.$$

对合满足

$$(A*B)^* = (A^{*\mathrm{QHA}})*(B^{*\mathrm{QHA}}) \tag{2.7}$$

and

$$(f*A)^{*\mathrm{QHA}} = (f^*)*(A^{*\mathrm{QHA}}) \tag{2.8}$$

对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 和 $A,B \in \mathcal{T}^1$。

可以在 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 上定义交换乘积: $= L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1(\mathcal{H})$，其定义为

$$(f,A)*(g,B) = (f*g + A*B, f*B + g*A),$$

其中 (f,A)、(g,B) $\in L^1 \oplus \mathcal{T}^1$。定义 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 上的范数为

$$\|(f,A)\| = \|f\|_{L^1} + \|A\|_{\mathcal{T}^1}$$

从而使该空间成为交换 Banach 代数。我们还可以通过将对合定义为，使该空间成为 Banach $*$-代数

$$(f,A)^* = (f^*, A^{*\mathrm{QHA}}).$$

此外，对合在范数下是等距的:

$$\|(f,A)^*\| = \|(f,A)\|.$$

我们将 (f,A) 按元素 $z \in \mathbb{R}^{2n}$ 平移 $\in L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 定义为

$$\alpha_z(f,A) := (\alpha_z f, \alpha_z A).$$

利用平移，我们将集合 $X \subset L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 定义为平移不变的，当且仅当

$$\alpha_z(X) \subset X \text{ for all } z \in \mathbb{R}^{2n}.$$

2.2.2 傅里叶变换

量子调和分析有其自身的傅里叶变换概念。我们令 $\mathcal{F}_\sigma(f)$ 表示辛傅里叶变换，即，

$$\mathcal{F}_\sigma(f)(z') \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(z)e^{-i\sigma(z',z)}\,\mathrm{d}z, \quad z'\in\mathbb{R}^{2n},\ f\in L^1(\mathbb{R}^{2n}). \tag{2.9}$$

进一步地，我们定义傅里叶-韦尔变换如下：

$$\mathcal{F}_W(A)(z') \coloneqq \mathrm{tr}(AW_{z'}), \quad z'\in\mathbb{R}^{2n},\ A\in\mathcal{T}^1.$$

我们有时也将 f 的辛傅里叶变换记为 $\widehat{f}=\mathcal{F}_\sigma(f)$，将 $\widehat{\ }$ 的傅里叶-韦尔变换记为 $A=\mathcal{F}_W(A)$。傅里叶-韦尔变换和辛傅里叶变换满足

$$\mathcal{F}_\sigma(A*B)=\mathcal{F}_W(A)\cdot\mathcal{F}_W(B) \tag{2.10}$$

and

$$\mathcal{F}_W(f*A)=\mathcal{F}_\sigma(f)\cdot\mathcal{F}_W(A), \tag{2.11}$$

对于 A、$B\in\mathcal{T}^1$ 和 $f\in L^1(\mathbb{R}^{2n})$。注意，

$$\mathcal{F}_W(A^{*_{\mathrm{QHA}}})=\overline{\mathcal{F}_W(A)} \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_\sigma(f^*)=\overline{\mathcal{F}_\sigma(f)}. \tag{2.12}$$

映射 $\mathcal{T}^1\ni A\mapsto\mathcal{F}_W(A)$ 是单射，事实上是 $\mathcal{T}^2$ 与 $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 之间的同构。我们在 $L^1\oplus\mathcal{T}^1$ 上定义傅里叶变换如下：

$$\mathcal{F}(f,A)=(\mathcal{F}_\sigma(f),\mathcal{F}_W(A)), \quad (f,A)\in L^1\oplus\mathcal{T}^1.$$

傅里叶-韦尔变换的逆变换记为 $\mathcal{F}_W^{-1}$，其表达式为

$$\mathcal{F}_W^{-1}(f)=\int_{\mathbb{R}^{2n}} f(z)W_{-z}\,\mathrm{d}z,$$

对于 $f\in L^1(\mathbb{R}^{2n})$，可将其理解为强算子拓扑下的积分。利用插值，可以定义 L^p 上 $1\le p\le 2$的逆傅里叶-韦尔变换。需要指出的是，逆傅里叶-韦尔变换可以推广到温和分布，参见[15]。特别地，这意味着可以定义所有紧算子的傅里叶-韦尔变换。

傅里叶-韦尔变换满足黎曼-勒贝格引理和豪斯多夫-杨不等式的一个版本，参见 [22] 和 [16, 命题 6.5 和 6.6]。特别地，我们有

$$\mathcal{F}(f,A)\in C_0(\mathbb{R}^{2n})\oplus C_0(\mathbb{R}^{2n}). \tag{2.13}$$

对于 $\mathcal{F}_W^{-1}$，类似的结果也成立，下面将予以说明。

引理 2.5. 设 $1\le p\le 2$和 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。对于 $f\in L^p(\mathbb{R}^{2n})$，有 $\mathcal{F}_W^{-1}(f)\in\mathcal{T}^q(\mathcal{H})$，并且$\mathcal{F}_W^{-1}$ 满足豪斯多夫-杨不等式

$$\|\mathcal{F}_W^{-1}(f)\|_{\mathcal{T}^q}\le\|f\|_{L^p}.$$

特别地，对于 $p=1$，我们有黎曼-勒贝格引理：$\mathcal{F}_W^{-1}(f)\in\mathcal{T}^\infty$。

证明。为证明黎曼-勒贝格引理，注意到 $\mathcal{F}_W^{-1}(f) \in \mathcal{T}^2 \subset \mathcal{T}^\infty$ 对 $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n}) \cap L^2(\mathbb{R}^{2n})$ 成立。因此，对于任意的 $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$，算子 $\mathcal{F}_W^{-1}(f)$ 都可以在算子范数下由希尔伯特-施密特算子逼近，因此它是紧致的。

注意，对于紧算子，算子范数由 $\|\cdot\|_{\mathrm{Op}} = \|\cdot\|_{\mathcal{T}^\infty}$ 给出。由于 $\|W_{-z}\|_{\mathrm{Op}} = 1$和 $z \mapsto W_{-z}$ 在强算子拓扑下连续，显然$\|\mathcal{F}_W^{-1}(f)\|_{\mathrm{Op}} \leq \|f\|_{L^1}$。此外，我们知道 $\mathcal{F}_W^{-1}$: $L^2(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathcal{T}^2$是等距变换。因此，应用复插值即可得到该结果。 □

我们还可以考虑复拉东测度与算子的卷积。用 Meas($\mathbb{R}^{2n}$) 表示 $\mathbb{R}^{2n}$ 上所有复拉东测度的集合，即在紧集上有限且同时内正则和外正则的博雷尔测度集合。于是，对于$\mu \in$ Meas($\mathbb{R}^{2n}$) 和 $A \in \mathcal{T}^1$，我们定义

$$\mu * A \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \alpha_z(A)\, \mathrm{d}\mu(z).$$

上述表达式在 $\mathcal{T}^1$ 中作为博赫纳积分成立。特别地，$(2\pi)^n \delta_0 * A = A$。可以验证，乘积公式仍然成立

$$\mathcal{F}_W(\mu * A) = \mathcal{F}_\sigma(\mu)\mathcal{F}_W(A),$$

其中

$$\mathcal{F}_\sigma(\mu)(z') \coloneqq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-i\sigma(z',z)}\, \mathrm{d}\mu(z).$$

那么，如果 $A \in \mathcal{T}^1$ 满足：对于每个 $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$，$\mathcal{F}_W(A)(\xi) \neq 0$，显然可以得出该映射

$$\mathrm{Meas}(\mathbb{R}^{2n}) \ni \mu \mapsto \mu * A \in \mathcal{T}^1$$

是单射。

2.2.3 施瓦茨算子与 Weyl量子化

文章 [15] 定义了施瓦茨算子和温和算子，这与调和分析中的施瓦茨函数$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$和缓增分布 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$相对应。我们用 $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{T}^1(\mathcal{H})$ 表示施瓦茨算子空间；这是一个连续嵌入到 $\mathcal{T}^1(\mathcal{H})$ 中的 Frech´et 空间。其拓扑可用一族可数半范数来描述，见 [15, 第 3] 节。我们将用到这样一个事实：傅里叶-韦尔变换是一个拓扑同构$\mathcal{F}_W$: $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$。因此，迹类算子 A 是施瓦茨算子，当且仅当$\mathcal{F}_W(A)$ 是施瓦茨函数。类似地，希尔伯特-施密特算子 $A \in \mathcal{T}^2(\mathcal{H})$ 是施瓦茨算子，当且仅当其积分核是施瓦茨函数。

有了 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$，就可以转向温和算子的对偶空间 $\mathcal{S}'(\mathcal{H})$。有界算子 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 可通过以下方式连续嵌入 $\mathcal{S}'(\mathcal{H})$:

$$\varphi_A(S) = \mathrm{tr}(AS), \quad S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$$

对于 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$。傅里叶变换由对偶定义，因此可扩展为从 $\mathcal{S}'(\mathcal{H})$ 到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 的拓扑同构。特别地，对于每个 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$，我们都可以将 $\mathcal{F}_W(A)$ 视为 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的温和分布。傅里叶-韦尔变换在$\mathcal{S}(\mathcal{H})$ 与 $\mathcal{S}'(\mathcal{H})$ 之间满足 (2.10)，并在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ 与 $\mathcal{S}'(\mathcal{H})$ 之间满足 (2.11)。

将一个 $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 函数 f 的 Weyl量子化定义为算子

$$A_f \coloneqq P\mathcal{F}_W^{-1}(\mathcal{F}_\sigma(f))P = \mathcal{F}_W^{-1}(\mathcal{F}_\sigma(\widetilde{f})),$$

其中 $\widetilde{f}(z) = f(-z)$。注意，Weyl量子化对 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 同样有意义。因此，$f \mapsto A_f$ 将 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ 映射到 $\mathcal{S}'(\mathcal{H})$。由于量子化映射也是从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ 到 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ 的拓扑同构，我们有

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) \subset \{A \in \mathcal{T}^1(\mathcal{H}) : A = A_f,\ f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})\}.$$

对δ函数进行Weyl量子化

$$(2\pi)^n\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$$

得到 $A_{(2\pi)^n\delta_0} = 2^nP$，其中 P是奇偶算子。注意，量子化映射满足 $\alpha_z(A_f) = A_{\alpha_{-z}(f)}$。对于 $g \in L^p(\mathbb{R}^{2n})$，其中 $1 \le p \le \infty$ 且 $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$，我们有卷积公式

$$f * A_g = A_{\widetilde{f}*g}, \quad A_f * A_g = \widetilde{f * g}. \tag{2.14}$$

这给出了如下量子化恒等式

$$2^n f * P = A_{\widetilde{f}}, \qquad 2^n A_f * P = \widetilde{f}$$

对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$。

2.3 调制不变性

本节将为算子建立调制的概念。由此我们可以定义算子的调制不变空间。受经典傅里叶变换将平移映射为调制，反之亦然这一事实的启发，我们给出如下定义。

定义 2.6. 我们称子空间 $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}^1$ 为调制不变的，若

$$\mathcal{F}_W(\mathcal{A}) \coloneqq \{\mathcal{F}_W(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

是 $C_0(\mathbb{R}^{2n})$ 的平移不变子空间。

引理 2.7. 设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}^1$ 为一个子空间。那么 $\mathcal{A}$ 是调制不变的，当且仅当对于每个 $A \in \mathcal{A}$ 和 $z \in \mathbb{R}^{2n}$，都有 $W_zAW_z \in \mathcal{A}$。

证明. 对于 $z' \in \mathbb{R}^{2n}$，由计算可轻易得出结论

$$\begin{aligned}\alpha_z\left(\mathcal{F}_W(A)(z')\right) &= \operatorname{tr}(W_{z'-z}A)\\ &= \operatorname{tr}\left(W_{-\frac{z}{2}}AW_{-\frac{z}{2}}W_{z'}\right)\\ &= \mathcal{F}_W\left(W_{-\frac{z}{2}}AW_{-\frac{z}{2}}\right)(z').\end{aligned}$$

□

受引理证明的启发2.7 我们给出算子调制的如下定义。

定义 2.8。算子 $A \in \mathcal{T}^1$ 被 $z \in \mathbb{R}^{2n}$ 调制定义为

$$\gamma_z(A) := W_{-z/2} A W_{-z/2}.$$

对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$，我们将调制定义为

$$\gamma_z(f)(z') := e^{-i\sigma(z',z)} f(z').$$

不难验证以下公式

$$\begin{aligned}
\gamma_z(f * g) &= (\gamma_z f) * (\gamma_z g), \\
\gamma_z(f * A) &= (\gamma_z f) * (\gamma_z A), \\
\gamma_z(A * B) &= (\gamma_z A) * (\gamma_z B),
\end{aligned}$$

对于 f、$g \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 和 A、$B \in \mathcal{T}^1$。注意，对于 $A \in \mathcal{T}^1$ 和 $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$，我们可以写成

$$\mathcal{F}_W(A)(z) = \operatorname{tr}(\gamma_{-z} A) \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_\sigma(f)(z) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \gamma_{-z}(f)(z')\, \mathrm{d}z'.$$

引理 2.9。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{T}^1$的平移不变子空间。则以下条件等价:

1) $\mathcal{A}$是调制不变的,

2) 对每个 $A \in \mathcal{A}$ 和 $z \in \mathbb{R}^{2n}$, $W_z A \in \mathcal{A}$

3) 对每个 $AW_z \in \mathcal{A}$、 $A \in \mathcal{A}$ 和 $z \in \mathbb{R}^{2n}$,

4) 对每个 $W_{z'} A W_z \in \mathcal{A}$、 $A \in \mathcal{A}$ 和 z', $z \in \mathbb{R}^{2n}$,

5) 由所有积分核构成的空间 $A \in \mathcal{A}$ 是平移不变且调制不变的.

证明。该 1)–4) 等价性由平移不变性以及以下观察可得 n

$$\begin{aligned}
\gamma_z \alpha_{z'}(\widehat{A}) &= \mathcal{F}_W(\alpha_z \gamma_{z'} A) \\
&= \mathcal{F}_W(W_z W_{-z'/2} A W_{-z'/2} W_z) \\
&= e^{i\sigma(z',z)/2} \mathcal{F}_W(W_{z-z'/2} A W_{-z'/2-z}).
\end{aligned}$$

对于最后一个等价关系，回顾一下，迹类算子可以写成

$$A\phi(s) = \int_{\mathbb{R}^n} K_A(s,t)\phi(t)\, \mathrm{d}t, \quad \phi \in \mathcal{H}.$$

$W_{z'} A W_z$的积分核，其中 $z = (x,\xi)$ 和 $z' = (x',\xi')$ 为

$$(s,t) \mapsto e^{i\xi'\cdot s - \frac{i}{2}\xi'\cdot x'} e^{i\xi\cdot t + \frac{i}{2}\xi\cdot x} K_A(s-x', t+x) = e^{\frac{i}{2}\xi\cdot x - \frac{i}{2}\xi'\cdot x'} \gamma_{(\xi,-\xi')} \alpha_{(x',-x)} K_A(s,t). \qquad \square$$

A与平移作用 α_x 的情形类似，也可以证明以下事实 :

引理 2.10. γ_x 在 Schatten 类 $\mathcal{T}^p(\mathcal{H})$ 上强连续且为等距作用，对每个 $1 \le p \le \infty$ 均如此。它在 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上关于弱* 拓扑连续作用。

证明。证明过程与作用 α_x 的情形完全类似：利用 W_x 是强连续射影酉表示，先验证秩一算子的情形。然后，通过有限秩算子逼近，得出在所有 $\mathcal{T}^p(\mathcal{H})$ 上的结论。

$\square$

3 Structure Theory of $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$

在第 2.2.1 节中，我们为 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$定义了乘积结构，使其成为带 involution 的交换巴拿赫代数。因此，我们可以研究这个代数的闭理想。我们将从研究正则极大理想（即盖尔范德理论）开始，之后研究 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的闭分次理想。

3.1 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的盖尔范德理论

本节将研究 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的盖尔范德理论。我们称理想 I是正则的，如果商代数 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1/I$ 是含单位元的，参见 [20, 附录 D4]。众所周知，正则极大理想由乘法线性泛函的核给出。

命题 3.1。 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 上的非零乘法线性泛函集合由 $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{Z}_2$ 参数化如下：

$$\chi_{z,j}(f, A) = \begin{cases} \widehat{f}(z) + \widehat{A}(z), & j = 0, \\ \widehat{f}(z) - \widehat{A}(z), & j = 1. \end{cases}$$

我们将所有非零乘法线性泛函的集合，即盖尔范德谱，记为$\chi_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{Z}_2}$。$\chi_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{Z}_2}$ 的盖尔范德谱拓扑与指标集 $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{Z}_2$上的标准积拓扑一致。

证明。设 χ： $L^1 \oplus \mathcal{T}^1 \to \mathbb{C}$ 是一个非零乘法线性泛函。注意，利用线性性， χ 由其分别作用于函数和算子的方式决定。根据 L^1（$\mathbb{R}^{2n}$）的盖尔范德理论，乘法特征 χ 作用于 $L^1 \oplus \{0\}$ 上为

$$\chi(f, 0) = \widehat{f}(z) \quad \text{for some } z \in \mathbb{R}^{2n}.$$

对于 $A, B \in \mathcal{T}^1$，我们有

$$\chi(0, A) \cdot \chi(0, B) = \chi((0, A) * (0, B)) = \chi(A * B, 0) = \mathcal{F}_\sigma(A * B)(z) = \widehat{A}(z) \cdot \widehat{B}(z).$$

令 $A = B$，可知

$$\chi(0, A) = \pm\widehat{A}(z).$$

因此，我们得到

$$\chi(f, A) = \widehat{f}(z) \pm \widehat{A}(z).$$

容易验证，每个这样的 χ 都是一个乘法线性泛函。

现在证明这些拓扑的等价性。网 $(z_\gamma) \subset \mathbb{R}^{2n}$ 收敛到 $z \in \mathbb{R}^{2n}$，当且仅当 $\chi_{z_\gamma,\ j} \to \chi_{z,\ j}$ 在盖尔范德谱拓扑下成立。此外，绝不可能出现$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$使得 $\chi_{z_\gamma,\ j} \to \chi_{z,\ j+1}$。若果真如此，我们便有 $A(z) = -A(z)$，这意味着对每个 $A \in \mathcal{T}^1$，都有 $A(z) = 0$。这是不可能的，因为存在傅里叶-韦尔变换非零的算子，例如 $\phi \otimes \phi$，其中 $\phi(x) = e^{-x^2}$。 □

作为一个推论 代数， $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的极大理想空间由两个互不相交的副本组成，分别对应于 $\mathbb{R}^{2n}$.

注记 3. 根据（2.13），我们有

$$\mathcal{F}(L^1 \oplus \mathcal{T}^1) \subset C_0(\mathbb{R}^{2n}) \oplus C_0(\mathbb{R}^{2n}).$$

利用卷积定理，我们可以将傅里叶变换视为一个巴拿赫代数同态

$$\mathcal{F}\colon L^1 \oplus \mathcal{T}^1 \to \ell^1(\mathbb{Z}_2, C_0(\mathbb{R}^{2n})).$$

记

$$\Gamma\colon L^1 \oplus \mathcal{T}^1 \to (\chi_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{Z}_2} \to \mathbb{C}),$$

由下式定义的盖尔范德表示

$$\Gamma(f, A)\chi_{z,j} \coloneqq \chi_{z,j}(f, A) = \widehat{f}(z) + (-1)^j \widehat{A}(z).$$

我们将映射 $\Gamma(f, A)$ 称为 (f, A) 的盖尔范德变换。

备注 4。盖尔范德表示可视为一个映射 $\Gamma\colon L^1 \otimes \mathcal{T}^1 \to C_0(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{Z}_2)$，其定义如下

$$\Gamma(f, A)(z, j) = \widehat{f}(z) + (-1)^j \widehat{A}(z).$$

由于两个傅里叶变换的值域均为稠密值域，因此盖尔范德表示的像在 $C_0(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{Z}_2)$ 中稠密。

回顾一下，若一个环的雅各布森理想为零，即所有极大理想的交为零，则称该环为雅各布森半单（或半本原）。盖尔范德变换的一个性质是，$\ker(\Gamma)$ 恰好是雅各布森理想。由盖尔范德-奈马克定理可知，任何 C^*-代数都是雅各布森半单的。以下结果表明，$L^1 \oplus \mathcal{T}^1$也具有这一性质。

推论 3.2. 代数 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 是雅各布森半单的。

证明. 设 (f, A) 满足 $\Gamma(f, A) = 0$。那么对每个 $z \in \mathbb{R}^{2n}$，我们得到

$$\widehat{f}(z) + \widehat{A}(z) = 0 = \widehat{f}(z) - \widehat{A}(z).$$

因此 $\widehat{f} = \widehat{A} = 0$。由于辛傅里叶变换和傅里叶-韦尔变换都是单射，这便推出 $(f, A) = 0$。因此，雅各布森根是平凡的。 □

如果一个含幺对合巴拿赫代数 X 的盖尔范德表示满足以下条件，我们就称它是对称的

$$\Gamma(a^*) = \overline{\Gamma(a)} \quad \text{for all } a \in X.$$

利用（2.12），我们可知 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 是对称的，因为

$$\Gamma((f, A)^*)(z, j) = \overline{\mathcal{F}_\sigma(f)(z)} + (-1)^j \overline{\mathcal{F}_W(A)(z)} = \overline{\Gamma(f, A)(z, j)}.$$

利用 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 是对称的以及 [7, 命题 1.14c.]，我们得到备注 4 中稠密性结果的另一种证明。

$L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的闭理想

讨论了盖尔范德理论之后，我们现在转而研究一般情况下 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的闭理想。回顾一下， $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 的闭理想恰好是 $L^1(\mathbb{R}^{2n}$ 的闭平移不变子空间，参见例如 [7, 定理 2.45]。由于在 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 上定义了良好的平移算子，人们或许会希望这一结论也适用于此处的闭理想。然而，子空间 $\{0\} \oplus \mathcal{T}^1$ 是闭且平移不变的，但不是理想。

定义 3.3. 我们称子空间 $M \subset L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 是一个 L^1 模，若对所有的 $(f, A) \in M$ 和 $g \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$，都有

$$g * (f, A) := (g, 0) * (f, A) = (g * f, g * A) \in M.$$

注意， $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的所有理想都是 L^1 模。

命题 3.4. 设 $M \subset L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 是一个闭子空间。那么， M 是平移不变的，当且仅当 M 是一个 L^1 模。

证明. 若 M 是平移不变的，那么对每个 $(f, A) \in M$ 和 $g \in L^1$，卷积满足

$$g * (f, A) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} g(z) \alpha_z(f, A) \, \mathrm{d}z \in M.$$

另一方面，若 M 是一个 L^1 模，令 $\{g_t\}_{t>0}$ 为 $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 的归一化近似单位，则有

$$\alpha_z(f, A) = \lim_{t \to 0} g_t * \alpha_z(f, A) = \lim_{t \to 0} \alpha_z(g_t) * (f, A) \in M. \qquad \square$$

因此，对于作为 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的 I闭理想而言，平移不变是必要条件。我们将继续讨论以下这类性质良好的理想：

定义 3.5. 如果理想 $I \subset L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 满足 $I = I_{L^1} \oplus I_{\mathcal{T}^1}$，其中 $I_{L^1} = I \cap (L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \{0\})$ 且 $I_{\mathcal{T}^1} = I \cap (\{0\} \oplus \mathcal{T}^1)$，则称其为分次理想。

我们注意到，根据 Werner [22]的观点，上述定义中的 I_{L^1} 和 $I_{\mathcal{T}^1}$ 是对应的空间。

注意，闭理想 I是分次理想，当且仅当只要 $(f, A) \in I$，就有 $(f,0) \in I$。由此可知，正则极大理想

$$I_{(z,j)} := \{(f, A) \in L^1 \oplus \mathcal{T}^1 : \widehat{f}(z) + (-1)^j \widehat{A}(z) = 0\}$$

从来都不是分次理想。

引理 3.6. 闭子空间 $I \subset L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 是分次理想，当且仅当对于某个 L^1中的闭理想 I_{L^1}，有 $I = I_{L^1} \oplus (\mathcal{T}^1 * I_{L^1})$。

证明。我们先快速验证一下， $I = I_{L^1} \oplus (\mathcal{T}^1 * I_{L^1})$ 确实是一个闭理想。若 $(f, A*g) \in I$ 且 $(h, B) \in L^1 \oplus \mathcal{T}^1$，则

$$(h, B) * (f, A * g) = (h * f + B * A * g, A * g * h + f * B).$$

由于 $f, g \in I_{L^1}$ 和 I_{L^1} 是理想，因此有 $h * f \in I_{L^1}$ 和 $B * A * g \in I_{L^1}$，这里我们用到了 $B * A \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$。此外， $A * g * h$ 和 $f * B$ 显然都包含于 $\mathcal{T}^1 * I_{L^1}$，从而使 I 成为一个理想。 I 是闭的这一事实是由 I_{L^1} 为闭集继承而来的。

另一方面，假设 $I = I_{L^1} \oplus I_{\mathcal{T}^1}$ 是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的分次闭理想。注意， I_{L^1} 是 $L^1(\mathbb{R}^{2n}$的闭理想。利用乘法可得 $(\{0\} \oplus \mathcal{T}^1) * I_{L^1} \subset I_{\mathcal{T}^1}$以及 $(\{0\} \oplus \mathcal{T}^1) * I_{\mathcal{T}^1} \subset I_{L^1}$。此外，由于 I 根据命题 3.4是一个 L^1 模， I_{L^1} 和$I_{\mathcal{T}^1}$ 都是平移不变的。因此，利用[22, 定理 4。1] 可得 $I_{\mathcal{T}^1} = \overline{\mathcal{T}^1 * I_{L^1}}$, 证明完毕。 □

注 5. (1) 对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$，我们用 $Z(f)$ 表示闭集

$$Z(f) \coloneqq \{z \in \mathbb{R}^{2n} : \widehat{f}(z) = 0\}.$$

于是，对于 $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 的闭理想 I_{L^1} ，我们定义

$$Z(I_{L^1}) \coloneqq \bigcap_{f \in I_{L^1}} Z(f),$$

它是闭的。马利亚万定理 [20, 第 7 节6] 指出，$L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 不满足谱综合，也就是说：并非每个闭理想 I_{L^1} 都由 $Z(I_{L^1})$ 唯一确定。

类比地，对于 $(f, A) \in L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ ，令

$$Z(f, A) \coloneqq \{(z, j) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{Z}_2 : \widehat{f}(z) + (-1)^j \widehat{A}(z) = 0\}.$$

若 I 是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的闭理想，我们记为

$$Z(I) \coloneqq \bigcap_{(f,A) \in I} Z(f, A).$$

当 I 是分次的，由引理 3.6 可得 $Z(I) = Z(I_{L^1}) \times \mathbb{Z}_2$。这意味着，对于分次理想，谱综合再次失效，即 I 不能由该集合唯一确定 $Z(I)$。

(2) 每个真闭分次理想 $I = I_{L^1} \oplus (\mathcal{T}^1 * I_{L^1})$ 都包含于某个正则极大理想中。若 $Z(I) \neq \emptyset$, 则对于 $(z, j) \in Z(I)$，包含关系 $I \subset I_{(z,j)}$ 成立。在 $Z(I) = \emptyset$ 的情形下，尚需证明 $I = L^1 \oplus \mathcal{T}^1$。当 $Z(I) = \emptyset$ 时，有$Z(I_{L^1}) = \emptyset$。由关于 $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 的陶伯定理可得 $I_{L^1} = L^1(\mathbb{R}^{2n})$。该结论由以下事实得出:~~$\mathcal{T}^1 * L^1(\mathbb{R}^{2n}) = \mathcal{T}^1$~~。

每个闭理想都包含一个极大分次理想。为了说明这一点，我们来考察正则极大理想。

例3.7. 对于 $(z, j) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{Z}_2$，我们有

$$I_0 = I_{(z,j)} \cap (L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \{0\}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^{2n}) : \widehat{f}(z) = 0\}$$
$$I_1 = I_{(z,j)} \cap (\{0\} \oplus \mathcal{T}^1) = \{A \in \mathcal{T}^1 : \widehat{A}(z) = 0\}.$$

在这种情况下， $I_0 \oplus I_1$ 是一个分次闭理想，定义为

$$I_0 \oplus I_1 = I_{(z,0)} \cap I_{(z,1)}.$$

分次子理想的构造具有更一般的适用性。用 J 表示映射 $J(f,A) \coloneqq (f,-A)$。

引理 3.8. 设 I 是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的闭理想。那么

1) $J(I)$ 是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的闭理想。

2) I 是分次的，当且仅当 $J(I) = I$。

3) $I \cap J(I)$ 是闭分次理想。

4) $Z(J(I)) = \{(z, j+1) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{Z}_2 : \ (z,j) \in Z(I)\}.$

5) $Z(I \cap J(I)) = Z(I) \cup Z(J(I)) = \{z \in \mathbb{R}^{2n} : \ (z,0) \in Z(I) \ or \ (z,1) \in Z(I)\} \times \mathbb{Z}_2.$

这个引理的证明很直接，留给读者完成。请注意，分次理想 $I \cap J(I)$ 可能是平凡的，如下面的例子所示:

例 3.9. 我们只考虑 $n = 1$，但也可以类似地对$n > 1$进行讨论。我们设

$$\Omega_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (-1)^j y \geq 0\}, \quad j \in \mathbb{Z}_2.$$

定义闭理想

$$I \coloneqq \{(f,A) \in L^1 \oplus \mathcal{T}^1 : \ \widehat{f}(z) + (-1)^j \widehat{A}(z) = 0 \text{ for } z \in \Omega_j, \, j \in \mathbb{Z}_2\}.$$

根据定义，我们有 $Z(I) = (\Omega_0 \times \{0\}) \cup (\Omega_1 \times \{1\})$。因此，显然有

$$Z(I \cap J(I)) = Z(\{(0,0)\}) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_2.$$

命题 3.10. 设 I 是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的一个闭理想。若 $Z(I) = \emptyset$，则 $I = L^1 \oplus \mathcal{T}^1$。

证明。 显然有 $I \cap J(I) \subset I$。根据引理 3.8 3)， $I \cap J(I)$ 是一个闭分次理想，且$Z(I \cap J(I)) = \emptyset$。因此， $I \cap J(I) = L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 根据备注 5 (2)。 □

推论 3.11. $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的每个真闭理想都包含在一个正则极大理想中。

证明。 由命题 3.10，若 I 是真 $Z(I) \neq \emptyset$。因此，对于 $(z, \ j) \in Z(I)$，我们有$I \subset I_{(z,j)}$。 □

推论 3.12. $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的每个极大闭理想都是正则的。

证明. 若 I 是一个（真）极大闭理想，则根据前一个结果，它包含于某个正则极大理想中。由极大性可知，这两个理想必相等。 □

考察了 I 的极大闭分次子理想之后，现在我们转而讨论包含 I 的极小闭分次理想。

引理 3.13. 设 $I \subset L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 是一个闭理想。

1. $\overline{I + J(I)}$是一个分次理想。

2. $Z(\overline{I + J(I)}) = Z(I) \cap Z(J(I)) = \{z \in \mathbb{R}^{2n} : \ (z,0) \in Z(I) \ and \ (z,1) \in Z(I)\} \times \mathbb{Z}_2.$

同样，引理的证明留给读者完成。

例 3.14. 对于极大理想 $I_{(z,j)}$，我们有

$$\overline{I_{(z,j)} + J(I_{(z,j)})} = L^1 \oplus \mathcal{T}^1.$$

这是命题 3.10 与 $J(I_{(z,j)}) = I_{(z,j+1)}$的简单推论。

现在我们继续证明闭理想的一些一般性质。设 $V \subset L^1 \oplus \mathcal{T}^1$，则

$$V' := \overline{(\{0\} \oplus \mathcal{T}^1) * V}.$$

命题 3.15. 设 $V \subset L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 为一个闭平移不变子空间。

1. V' 是一个闭平移不变子空间。2. $Z(V') = Z(V)$。3. $V = V''$。4. $\overline{V + V'}$ 是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的一个闭理想。5. $Z(\overline{V + V'}) = Z(V)$。

特别地，如果 $I \subset L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 是一个闭理想，则 $I = \overline{I + I'}$。

证明。1. 根据定义，V' 是闭的。此外，根据卷积的定义，$(\{0\} \oplus \mathcal{T}^1) * V$是平移不变的。取闭包仍保持平移不变性。

2. 设 B 是一个正则算子，即 $\mathcal{F}_W(B)(z)$ 对所有 $z \in \mathbb{R}^{2n}$均非零。于是，由 (2.10) 和 (2.11) 可得

$$\widehat{A * B}(z) + (-1)^j \widehat{f * B}(z) = -\widehat{B}(z)(\widehat{f}(z) + (-1)^j \widehat{A}(z)), \quad (f, A) \in V.$$

因此，根据 $Z(V')$ 的定义即可得出结论。

3. 这源于以下事实：$\mathcal{T}^1 * \mathcal{T}^1 \subset L^1$ 是稠密的、关于 V的假设，以及卷积的结合律。

4. 显然，$\overline{V + V'}$ 是一个 L^1 模。V' 的定义使得 V' 在 $\mathcal{T}^1$的卷积作用下也保持不变。

5. 最后一条性质可直接由 2 得出。 □

上述结果告诉我们如何构造 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的理想：任取一个 V的闭平移不变子空间 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$，并构造$\overline{V + V'}$。那么，若 $Z(V) \neq \emptyset$，我们便能得到 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的真闭理想。此外，任意闭理想都具有这种形式。最后，若令$V \subset L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \{0\}$ 为一个闭平移不变子空间，则可得到一个分次理想。此外，根据引理3.6，任意闭分次理想都具有这种形式。

4 Quantum Segal Algebras

接下来，我们将从闭理想和 L^1 模转向本节的研究对象：赋予平移不变范数的稠密 L^1模。为此，我们将在 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$中定义一种 Segal 代数。

定义 4.1. 量子 Segal 代数（QSA）是一个有序对 $(QS, \|\cdot\|_{QS})$，满足：

(QS1) QS 是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的稠密子空间。

(QS2) 空间 $(QS, \|\cdot\|_{QS})$ 是一个巴拿赫代数，其乘法继承自 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$。

(QS3) 空间 QS 是平移不变的。

(QS4) 这些 平移 α_z 对每个 $z \in \mathbb{R}^{2n}$而言，在 $(QS, \|\cdot\|_{QS})$ 上都是范数等距且连续的。

此外，若对合满足 $QS^* = QS$ 且对所有 $(f, A) \in QS$，均有 $\|(f, A)^*\|_{QS} = \|(f, A)\|_{QS}$，则称 $(QS, \|\cdot\|_{QS})$ 为星对称的。

根据定义，我们首先得到如下推论：每个量子 Segal 代数都连续嵌入环境空间：

命题 4.2. 设 $(QS, \|\cdot\|_{QS})$ 是一个量子 Segal 代数。那么存在常数 $C > 0$，使得对每个 $(f, A) \in QS$，都有

$$\|(f, A)\|_{L^1 \oplus \mathcal{T}^1} \leq C\|(f, A)\|_{QS}.$$

该命题直接应用了以下关于巴拿赫代数同态连续性的著名结果。根据推论 3.2 可知 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 是雅各布森半单的。

引理 4.3. 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是交换巴拿赫代数，其中 $\mathcal{B}$ 还假设为雅各布森半单。那么，任意代数同态 φ: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 都是连续的。

由于证明非常简短，为方便读者，现将其列出。

证明。设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{A}$ 中收敛到 $0 \in \mathcal{A}$ 且满足 $y = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$ 的一个序列。记 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ 分别为 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$上的乘法线性泛函空间。那么，对于每个 $\chi \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$，我们有 $\chi \circ \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$，因此 $\chi \circ \varphi$ 是连续的。于是，

$$\chi(y) = \chi(\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \chi(\varphi(x_n)) = \chi(\varphi(0)) = 0.$$

因此，对于每个 $\psi \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$，都有 $\chi(y) = 0$。由于假设 $\mathcal{B}$ 是雅各布森半单的，它是$y = 0$。于是，由闭图定理可知，φ 是连续的。 □

回忆一下，根据（ L^1 2.1），每个 Segal 代数都是一个模。令 $\{g_t\}_{t>0}$ 为 L^1的归一化近似单位（$\mathbb{R}^{2n}$），则（g_t，0）是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的近似单位。因此，每个量子 Segal 代数 QS 都是一个本性Banach 模，而 Cohen-Hewitt 分解定理意味着

$$QS = \{g * (f, A) : \ g \in L^1(\mathbb{R}^{2n}), (f, A) \in QS\}.$$

与 Segal 代数的情形类似，例如，参见 [4], 作为本质 L^1 模这一性质，在以下意义下，唯一确定了 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的稠密子代数中的量子 Segal 代数。

命题 4.4. 设 $\mathcal{A} \subset L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 是一个稠密子代数，使得 $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ 是一个巴拿赫代数。那么 $\mathcal{A}$ 是一个本质 L^1 巴拿赫模，当且仅当它是一个量子 Segal 代数。

证明。由于 $\mathcal{A}$ 是本质的，我们有，对于 $h \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$，每个 $(f, A) = h * (g, B)$ 的元素都满足 $(g, B) \in \mathcal{A}$。因此 $\mathcal{A}$ 是平移不变的，因为

$$\alpha_z(f, A) = \alpha_z(h * (g, B)) = \alpha_z(h) * (g, B) \in \mathcal{A} \text{ for all } z \in \mathbb{R}^{2n}.$$

此外，对于 $z \to 0$，我们有

$$\|\alpha_z(f, A) - (f, A)\|_{\mathcal{A}} = \|\alpha_z(h) * (g, B) - h * (g, B)\|_{\mathcal{A}} \leq \|\alpha_z(h) - h\|_{L^1} \|(g, B)\|_{\mathcal{A}} \to 0.$$

剩下唯一要证明的是，平移相对于 $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$是等距作用。一方面，对于作为归一化近似单位的 $\{g_t\}_{t>0} \subset L^1(\mathbb{R}^{2n})$，以及 $(f, A) \in \mathcal{A}$，我们有

$$\|\alpha_z(f, A)\|_{\mathcal{A}} = \lim_{t \to 0} \|\alpha_z(g_t) * (f, A)\|_{\mathcal{A}} \leq \limsup_{t \to 0} \|\alpha_z(g_t)\|_{L^1} \|(f, A)\|_{\mathcal{A}} = \|(f, A)\|_{\mathcal{A}}.$$

另一个方向可将相同的论证应用于 $\alpha_{-z}(\alpha_z(f, A)) = (f, A)$ 得出。 □

我们已经看到，量子 Segal 代数是 L^1 模，然而，它们通常不是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 理想。下面的注释 8 给出了一个例子。特别是，这意味着量子 Segal 代数并非 Burnham 意义下的抽象 Segal 代数[2]。因此，我们不应期待它们满足 Segal 代数所具有的完整理想定理。尽管如此，仍有一个较弱的版本：

命题 4.5. 设 QS 是一个量子 Segal 代数。

(1) 对于 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的每个闭理想 I，集合 $I \cap QS$ 是 QS 的一个闭理想。

(2) 若 I 是 QS 的一个闭理想，则 I 的 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$-闭包是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的一个闭理想。此外，$I \subseteq \overline{I} \cap QS$。

当 QS 是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的一个理想时，我们便有 (2) 中的 $I = \overline{I} \cap QS$。

证明。证明与 [2, Thm. 1.1], 中给出的证明几乎完全相同，因此略去。 □

我们已在引理 3.6 中看到，$L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的分次闭理想具有特别简单的结构。量子 Segal 代数也有同样的性质。为确保完整性，我们重述其定义，该定义与闭理想的定义相同：若量子 Segal 代数 QS 满足 $QS \cong (QS \cap (L^1 \oplus \{0\})) \oplus (QS \cap (\{0\} \oplus \mathcal{T}^1))$，则称其为分次的。需要注意的是，并非每个量子 Segal 代数都是分次的，参见例 5.20。注意，对于分次量子 Segal 代数 $(QS, \|\cdot\|_{QS})$，由开映射定理可直接得出，其范数等价于各子空间范数之和：

$$c_1(\|(f, 0)\|_{QS} + \|(0, A)\|_{QS}) \leq \|(f, A)\|_{QS} \leq c_2(\|(f, 0)\|_{QS} + \|(0, A)\|_{QS}), \quad (f, A) \in QS.$$

尽管我们尚不清楚 Segal 代数的完全理想定理是否仍然成立，但对于分次量子塞加尔代数，在正则极大理想这一层面上确实如此。

命题4.6. 设 $(QS, \|\cdot\|_{QS})$ 是一个分次量子 Segal 代数。

(1) 每个 $\chi \in \chi_{\mathbb{R}^{2n}\oplus\mathbb{Z}_2}$ 都是 QS 上的乘法线性泛函。

(2) 对于每个 $\chi \in \mathcal{M}(QS)$，都存在某个 $(z, j) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{Z}_2$ 使得 $\chi = \chi_{z,\ j}|_{QS}$。

(3) 若 (z_1, j_1)、$(z_2, j_2) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{Z}_2$ 使得 $\chi_{z_1,\ j_1}|_{QS} = \chi_{z_2,\ j_2}|_{QS}$ 则 $(z_1, j_1) = (z_2, j_2)$。

因此，QS 的盖尔范德变换 Γ_{QS} 只不过是限制 $\Gamma_{L^1\oplus\mathcal{T}^1}|_{QS}$。

*Pr*证明。(1) 这是显然的，因为 QS 和 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 具有相同的代数运算 .

(2) 注意，$S = QS \cap L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \{0\}$ 是一个 Segal 代数。令 $\chi \in \mathcal{M}(QS)$。于是，$\chi|_S$ 是 S 上的一个非零乘法线性泛函。由于 Segal 代数与 $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 具有相同的盖尔范德理论，存在某个 $z \in \mathbb{R}^{2n}$ 使得

$$\chi|_S(f) = \widehat{f}(z), \quad f \in S.$$

由此可知，与命题 3.1 的证明类似，

$$\chi(f, A) = \widehat{f}(z) + (-1)^j \widehat{A}(z) = \chi_{z,j}(f, A).$$

(3) 由假设可得

$$\widehat{f}(z_1) = \chi_{z_1,j_1}(f, 0) = \chi_{z_2,j_2}(f, 0) = \widehat{f}(z_2).$$

若 $z_1 \neq z_2$，则存在 $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$，使得 $\widehat{f}(z_1) \neq \widehat{f}(z_2)$，并且存在一个序列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$，满足 $f_n \to f$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^{2n})$。由于傅里叶变换的点求值在 $L^1(\mathbb{R}^{2n})$上连续，因此可得

$$\widehat{f}(z_1) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(z_1) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(z_2) = \widehat{f}(z_2),$$

$\widehat{\ }$，这就产生了矛盾。因此 $z_1 = z_2$。此外，若 $j_1 \neq j_2$，则对每个 $A \in QS \cap \{0\} \oplus \mathcal{T}^1$，都有 $A(z_1) = 0$。由于存在 $B \in \mathcal{T}^1$，使得 $\widehat{B}(z_1) \neq 0$，我们便得到 $j_1 = j_2$。 □

推论 4.7. 设 QS 是一个分次量子 Segal 代数。则 QS 是雅各布森半单的。

5 Examples of Quantum Segal Algebras

虽然我们知道 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 是量子 Segal 代数，但目前还没有任何非平凡的例子。本节将介绍几个量子塞加尔代数的例子。

5.1 诱导的量子 Segal 代数

如果 $A \in \mathcal{T}^1$ 满足 $\mathcal{F}_W(A)(z) \neq 0$ 对所有 $z \in \mathbb{R}^{2n}$ 都成立，我们就称 $A \in \mathcal{T}^1$ 为正则算子。利用这一点，我们可以作如下构造。

定义 5.1. 设 $(S, \|\cdot\|_S)$ 表示一个 Segal 代数，并固定一个正则算子 $A \in \mathcal{T}^1$。定义子空间 $S^A \subset L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 如下：

$$S^A := \{(f, g * A) : f, g \in S\},$$

并在 S^A 上定义范数如下：

$$\|(f, g * A)\|_{S^A} := \|f\|_S + \|A\|_{\mathcal{T}^1}\|g\|_S. \tag{5.1}$$

我们称 $(S^A, \|\cdot\|_{S^A})$ 为 $(S, \|\cdot\|_S)$ 和 A 的诱导量子 Segal 代数。

我们要求 $A \in \mathcal{T}^1$ 正则的原因，将从以下结果的证明中显而易见。

定理 5.2. $(S^A, \|\cdot\|_{S^A})$ 和 A 的 $(S, \|\cdot\|_S)$ 诱导量子 Segal 代数是一个量子 Segal 代数。此外，如果 $(S, \|\cdot\|_S)$ 是星对称的，且 $A^{*_{QHA}} = A$，那么 $(S^A, \|\cdot\|_{S^A})$ 是星对称的。

关于星对称性的最后一项结论可直接由（2.7）和（2.8）得出。不过，对于何时 S^A 是星对称的，我们可以给出精确的判据。在转向定理 5.2 的证明之前，我们先简要讨论这一点：

命题 5.3. 设 $(S^A, \|\cdot\|_{S^A})$ 是一个诱导量子 Segal 代数。那么，它是星对称的，当且仅当 Segal 代数 S 是星对称的，并且在由温和分布 ϕ 定义的卷积下封闭：

$$\varphi = \mathcal{F}_\sigma(\overline{\mathcal{F}_W(A)}/\mathcal{F}_W(A)).$$

证明. 我们需要能够求解方程

$$(f_1, g_1 * A)^* = (f_2, g_2 * A)$$

对于 f_2, $g_2 \in S$，只要给定 f_1, $g_1 \in S$ 即可。显然， $f_2 = f_1^*$使 S 星对称。将 $\mathcal{F}_W$ 应用于第二个分量，得到

$$\mathcal{F}_\sigma(g_1^*)\mathcal{F}_W(A^{*_{\mathrm{QHA}}}) = \mathcal{F}_\sigma(g_1^*)\overline{\mathcal{F}_W(A)} = \mathcal{F}_\sigma(g_2)\mathcal{F}_W(A).$$

由于 $\mathcal{F}_W(A)$ 处处非零，我们可以对此求解，得到

$$\mathcal{F}_\sigma(g_2) = \mathcal{F}_\sigma(g_1^*)\overline{\mathcal{F}_W(A)}/\mathcal{F}_W(A),$$

或者等价地

$$g_2 = g_1^* * \mathcal{F}_\sigma^{-1}(\overline{\mathcal{F}_W(A)}/\mathcal{F}_W(A))$$

在缓增分布的意义下。 □

*Rema*rk 6. 当 $A = A^{*_{\mathrm{QHA}}}$ 时，我们有 $\overline{\mathcal{F}_W(A)}/\mathcal{F}_W(A) = 1$，这意味着 $\varphi = (2\pi)^n\delta_0$.

我们将定理 5.2 的验证分解为以下三个引理：

引理 5.4. 空间 $(S^A, \|\cdot\|_{S^A})$ 是一个巴拿赫空间。

证明。 范数的齐次性和三角不等式显而易见。对于正定性，由 (5.1) 可知， $\|(f, g * A)\|_{S^A} = 0$ 意味着 $(f, g * A) = (0,0)$。反过来，假设 $(f, g * A) = (0,0)$。那么 $f = 0$ 且 $g * A = 0$。利用 (2.11) 可得

$$\mathcal{F}_W(g * A) = \mathcal{F}_\sigma(g) \cdot \mathcal{F}_W(A) = 0.$$

由于 A 是正则的，这迫使 $\mathcal{F}_\sigma(g) = 0$。因此 $g = 0$ 且 $\|\cdot\|_{S^A}$ 是 S^A上的一个范数。 S^A 的完备性可直接由 S的完备性推出。 □

引理 5.5. 诱导塞伽尔代数 $(S^A, \|\cdot\|_{S^A})$ 满足 *(QS1)* 和 *(QS2)*.

证明. 为证明 (QS1)，注意到 $L^1(\mathbb{R}^{2n}) * A$ 在 $\mathcal{T}^1$ 中稠密，只要 A 根据 [22]是正则的。根据 (S1) 诱导塞伽尔代数 $(S^A, \|\cdot\|_{S^1}$是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的稠密子空间。

对于(QS2)，我们先证明 $*$ 是定义在 S^A上的良定义算子。对于两个元素（f_1， $g_1 * A$）和（f_2， $g_2 * A$），我们有

$$(f_1, g_1 * A) * (f_2, g_2 * A) = (f_1 * f_2 + (g_1 * g_2) * (A * A), (f_1 * g_2 + f_2 * g_1) * A).$$

由于 S 在卷积下封闭，我们知道

$$f_1 * f_2,\ g_1 * g_2,\ f_1 * g_2 + f_2 * g_1 \in S.$$

此外，我们知道 $A * A \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$。由于 Segal 代数是 $L^1(\mathbb{R}^{2n})$的理想，因此该乘积是良定义的。为证明$(S^A, \|\cdot\|_{S^A})$是一个巴拿赫代数，我们计算

$$\begin{aligned}
&\|(f_1, g_1 * A) * (f_2, g_2 * A)\|_{S^A} \\
&\leq \|f_1 * f_2\|_S + \|g_1 * g_2\|_S \|A * A\|_{L^1} + \|A\|_{\mathcal{T}^1} \|f_1 * g_2 + f_2 * g_1\|_S \\
&\leq \|f_1\|_S \|f_2\|_S + \|g_1\|_S \|g_2\|_S \|A\|_{\mathcal{T}^1}^2 + \|A\|_{\mathcal{T}^1} (\|f_1\|_S \|g_2\|_S + \|f_2\|_S \|g_1\|_S) \\
&= \|(f_1, g_1 * A)\|_{S^A} \cdot \|(f_2, g_2 * A)\|_{S^A}.
\end{aligned}$$

□

引理 5.6。诱导塞伽尔代数（S^A， $\|\cdot\|_{S^A}$）满足*(QS3)*和*(QS4)*。

证明。对于任意 $z \in \mathbb{R}^{2n}$，我们有

$$\alpha_z(f, g * A) = (\alpha_z(f), \alpha_z(g) * A).$$

由于 Segal 代数 S 在平移下不变，且平移是范数等距的，因此$(S^A, \|\cdot\|_{S^A})$在平移下不变，且平移是范数等距的。最后，平移连续作用，因为

$$\lim_{z\to 0} \|\alpha_z(f, g * A) - (f, g * A)\|_{S^A} = \lim_{z\to 0} \|\alpha_z(f) - f\|_S + \|A\|_{\mathcal{T}^1} \lim_{z\to 0} \|\alpha_z(g) - g\|_S = 0.$$

□

例 5.7. 假设 $A = \phi \otimes \psi$ 是一个秩一算子，且 $g \in S \subset L^1(\mathbb{R}^{2n})$，其中 S 是一个 Segal 代数。定义局部化算子如下:

$$\mathcal{A}_g^{\phi,\psi} \eta := \int_{\mathbb{R}^{2n}} g(z) \langle \eta, W_z \psi \rangle W_z \phi \, \mathrm{d}z.$$

局部化算子可以改写为

$$g * (\phi \otimes \psi) = \mathcal{A}_g^{\phi,\psi}.$$

Henc关于 $\phi \otimes \psi$ 和 S 的诱导量子 Segal 代数的形式为 m

$$(f, \mathcal{A}_g^{\phi,\psi}), \qquad f, g \in S.$$

要得到一个量子 Segal 代数，需要对所有 $z \in \mathbb{R}^{2n}$ 都有 $\mathcal{F}_W(\phi \otimes \psi)(z) \neq 0$。计算 $\phi \otimes \psi$ 的傅里叶-韦尔变换，可得

$$\mathcal{F}_W(\phi \otimes \psi)(z) = e^{ix\xi/2} V_\psi \phi(-z) \neq 0, \qquad z = (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n},$$

其中 $V_\psi \phi$ 由（2.3）给出。满足 $V_\psi \phi$（z） $\neq 0$ 的函数示例见 [10]。

注记 7。并非每个量子 Segal 代数都是诱导塞伽尔代数。例如，设 $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$ 表示例 2.3 (E5)中定义的 Feichtinger 代数。那么，对于任意正则算子 A，集合 $L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus (\mathcal{S}_0 * A)$ 是一个量子 Segal 代数，其范数为

$$\|(f, g*A)\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})\oplus(\mathcal{S}_0*A)} = \|f\|_{L^1} + \|g\|_{\mathcal{S}_0}\|A\|_{\mathcal{T}^1}.$$

注 8. 诱导塞伽尔代数通常不是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的理想。例如，设$n = 1$，并考虑诱导塞伽尔代数 $L^1(\mathbb{R}^2)^A$，其中 $A \in \mathcal{T}^1$ 是一个正则算子。那么集合

$$X = \{f * A : f \in L^1(\mathbb{R}^2)\} = \{B \in \mathcal{T}^1 : (0, B) \in L^1(\mathbb{R}^2)^A\}$$

在 $\mathcal{T}^1$ 中稠密。此外， X 是 $\mathcal{T}^1$ 的真子集，因为 $A \notin X$。这由$A = 2\pi\delta_0 * A$ 以及映射 $\mu \mapsto \mu * A$ 对所有 $\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ 都是单射这一点可知。不过，由于 $\mathcal{T}^1$ 是一个本质 L^1 模，我们有

$$f * B = A, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^2), B \in \mathcal{T}^1.$$

因 此得出结论： $L^1(\mathbb{R}^2)^A$ 不是一个 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 理想，因为 $(f, 0) \in L^1(\mathbb{R}^2)^A$ 是一个 d

$$(0, B) * (f, 0) = (0, A) \notin L^1(\mathbb{R}^2)^A.$$

注9. 人们起初可能会认为，如果 S 是一个调制不变塞加尔代数，那么诱导量子 Segal 代数 S^A 也会是调制不变的。然而，事实并非如此。作为一个简单的反例，设 $S = \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2) = \mathcal{S}_0$ 是 Feichtinger 代数，并设 A 是由下式给出的正则算子

$$\mathcal{F}_W(A)(z) = e^{-z^2}, \qquad z \in \mathbb{R}^2.$$

反设 S^A 是调制不变的。那么对于任意 $g_1 \in \mathcal{S}_0$ 和任意 $z' \in \mathbb{R}^2$，都应存在 $g_2 \in \mathcal{S}_0$，使得

$$\gamma_{z'}(g_1 * A) = \gamma_{z'}(g_1) * \gamma_{z'}(A) = g_2 * A.$$

对等式两边取傅里叶-韦尔变换，得到

$$\mathcal{F}_\sigma(g_1)(z - z')e^{-(z-z')^2} = \mathcal{F}_\sigma(g_2)(z)e^{-z^2}.$$

由于 $\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{S}_0) = \mathcal{S}_0$，我们有 $h_1 = e^{-z'^2}\mathcal{F}_\sigma(g_1) \in \mathcal{S}_0$ 且 $h_2 = \mathcal{F}_\sigma(g_2) \in \mathcal{S}_0$。取 $z' = -\frac{1}{2}$，得到

$$h_1\left(z + \frac{1}{2}\right)e^z = h_2(z).$$

由于 h_1 是任意的，且 $e^z\mathcal{S}_0 \neq \mathcal{S}_0$，我们得到矛盾。例如，对于 $h_1(z) = (1 + |z|^2)^{-1}$，我们没有解 $h_2 \in \mathcal{S}_0$。

5.2 通过量子化构造量子 Segal 代数

本节将使用Weyl量子化构造量子塞加尔代数。回顾一下，$\widetilde{f}(z) = f(-z)$，这自然地推广到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$。给定一组函数或分布 M，我们将使用以下记号

$$\widetilde{M} = \{\widetilde{f} : f \in M\}.$$

~注意，若 S 是一个 Segal 代数，则 S也同样如此。给定一组温和算子$\mathcal{A} \subset \mathcal{S}'(\mathcal{H})$，我们将符号集记为 Sym($\mathcal{A}$) $\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$，即

$$\widetilde{\mathrm{Sym}(\mathcal{A})} = \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{F}_W(\mathcal{A})).$$

反过来，给定一组温和分布 $S \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$，我们将其量子化算子集记为 $\mathrm{Sym}^{-1}(S)$，它是 $\mathcal{S}'(\mathcal{H})$ 的子集，即

$$\mathrm{Sym}^{-1}(S) = P\mathcal{F}_W(\mathcal{F}_\sigma(\widetilde{S}))P.$$

在下面的结果中，我们给出一个 Segal 代数，它在讨论量子 Segal 代数时发挥着重要作用。

引理5.8. 记

$$\mathcal{T} := \{f \in L^1(\mathbb{R}^{2n}) : \ A_f \in \mathcal{T}^1\}.$$

赋予范数

$$\|f\|_{\mathcal{T}} := \|f\|_{L^1} + \|A_f\|_{\mathcal{T}^1},$$

空间 $\mathcal{T}$ 是星对称且强调制不变的 Segal 代数。

证明。首先，注意到 $\mathcal{T}$ 包含 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$，因此它在 $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 中稠密。我们有

$$\|\alpha_z(f)\|_{\mathcal{T}} = \|\alpha_z(f)\|_{L^1} + \|A_{\alpha_z(f)}\|_{\mathcal{T}^1} = \|\alpha_z(f)\|_{L^1} + \|\alpha_{-z}(A_f)\|_{\mathcal{T}^1} = \|f\|_{\mathcal{T}}.$$

类似地，平移在 $\mathcal{T}$ 上强连续作用。此外，它是

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{\mathcal{T}} &= \|f * g\|_{L^1} + \|A_{f*g}\|_{\mathcal{T}^1} = \|f * g\|_{L^1} + \|\widetilde{f} * A_g\|_{\mathcal{T}^1} \\ &\le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} + \|f\|_{L^1}\|A_g\|_{\mathcal{T}^1} \le \|f\|_{\mathcal{T}}\|g\|_{\mathcal{T}}\end{aligned}$$

对于 f、$g \in \mathcal{T}$。因此， $\mathcal{T}$ 是一个 Segal 代数。关于星对称性，注意到

$$A_{f^*} = A_{\overline{\widetilde{f}}} = P(A_{\overline{f}})P = PA_f^*P = A_f^{*\mathrm{QHA}}.$$

由于 $\|A_f\|_{\mathcal{T}^1} = \|A_f^{*\mathrm{QHA}}\|_{\mathcal{T}^1}$，并且显然 $\|f\|_{L^1} = \|f^*\|_{L^1}$，我们有 $\|f\|_{\mathcal{T}} = \|f^*\|_{\mathcal{T}}$。强调制不变性由引理2.10立即得到。 □

命题 5.9。设 $QS = S_1 \oplus S_2 \subset L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1$ 是一个分次量子 Segal 代数。那么 S_1 和 Sym(S_2) $\cap\, L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 都是 Segal 代数。此外，

$$\widetilde{\mathrm{Sym}(S_2)} * \widetilde{\mathrm{Sym}(S_2)} \subset S_1.$$

特别地，当 Sym(S_2) $\subset L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 时，集合 Sym(S_2) 是一个 Segal 代数。

证明。显然， S_1 是一个 Segal 代数。 $S = \mathrm{Sym}(S_2) \cap L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 是一个配备平移不变范数的巴拿赫空间

$$\|f\|_S = \|(0, A_f)\|_{QS} + \|f\|_{L^1}, \qquad f \in S.$$

集合 S 是一个巴拿赫代数，因为由命题 3.4 和（2.14）可得

$$\widetilde{S} * \widetilde{S} \subset \widetilde{S}.$$

还需证明 S 在 $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 中稠密。为此，注意到

$$\mathcal{T} * S_2 \subset L^1(\mathbb{R}^{2n}) * S_2 = S_2.$$

此外，我们有

$$\mathcal{T} * S_2 = \mathrm{Sym}^{-1}(\mathrm{Sym}^{-1}(\mathcal{T}) * \tilde{S}_2) \subset \mathrm{Sym}^{-1}(\mathcal{T}^1 * \tilde{S}_2) \subset \mathrm{Sym}^{-1}(\mathcal{T}^1 * \mathcal{T}^1) \subset \mathrm{Sym}^{-1}(L^1(\mathbb{R}^{2n})),$$

其中 $\tilde{S}_2 =$ 对称群$^{-1}$(对称群(S_2))。综上可得 $\mathcal{T} * S_2 \subset S$。注意，由于 S_2 在 $\mathcal{T}^1$ 中稠密，由命题 4.6 (3) 或关于 $\mathcal{T}^1$的维纳逼近定理（参见 [22],），我们有

$$\{z \in \mathbb{R}^{2n} : \mathcal{F}_W(A)(z) = 0 \text{ for every } A \in S_2\} = \emptyset.$$

现在利用（2.11），并结合以下事实：对每个 $z \in \mathbb{R}^{2n}$，存在 $f \in \mathcal{T}$和 $A \in S_2$使得 $\mathcal{F}_\sigma(f) \neq 0$且 $\mathcal{F}_W(A) \neq 0$，可得

$$\{z \in \mathbb{R}^{2n} : \mathcal{F}_W(A)(z) = 0 \text{ for every } A \in S\} = \emptyset.$$

集合 $\mathcal{F}_W(S)$ 是 $\mathcal{F}_W$(对称群$^{-1}(\mathcal{T})) \subset C_0(\mathbb{R}^{2n})$ 的一个理想，配备逐点乘法。由于$\mathcal{T}$是一个 Segal 代数，集合 $\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{T})$ 根据 [19, 注 2.1。15]是一个标准代数。因此由 [19,命题 2.1。14] 可得

$$C_c(\mathbb{R}^{2n}) \cap \mathcal{F}_\sigma(L^1(\mathbb{R}^{2n})) \subset \mathcal{F}_W(S_2).$$

由于 $\mathcal{F}_\sigma(C_c(\mathbb{R}^{2n}) \cap \mathcal{F}_\sigma(L^1(\mathbb{R}^{2n})))$ 在 $L^1(\mathbb{R}^{2n})$ 中稠密，因此空间 S 是一个 Segal 代数。上的乘积结构结合（2.14）可得

$$\widetilde{\mathrm{Sym}(S_2)} * \widetilde{\mathrm{Sym}(S_2)} \subset S_1. \qquad \square$$

下面的结果展示了如何构造大量分次量子 Segal 代数的例子。

命题 5.10。设 S_1 和 S_2 是两个 Segal 代数，且 $S_2 \subset S_1$。那么

$$QS = S_1 \oplus (\mathrm{Sym}^{-1}(S_2) \cap \mathcal{T}^1)$$

是一个量子 Segal 代数，其范数为

$$\|(f, A_g)\|_{QS} = \|f\|_{S_1} + C\|\widetilde{g}\|_{S_2} + C'\|A_g\|_{\mathcal{T}^1},$$

对于正数常量 C, C'。

证明。对于性质 (QS1)，注意到集合 $A_0 := L^1(\mathbb{R}^{2n}) \cap \mathcal{F}_\sigma(C_c(\mathbb{R}^{2n}))$ 包含于 $\mathcal{T}$ 中，因为 $\mathcal{T}$是一个 Segal 代数，参见 [19, 命题 6.2.5]。此外，该集合在 $\mathcal{T}$ 中稠密。由于 $\mathrm{Sym}^{-1}(\mathcal{T})$ 在 $\mathcal{T}^1$ 中稠密，我们得到 $\mathrm{Sym}^{-1}(A_0)$ 在 $\mathcal{T}^1$ 中稠密。但 A_0 也包含于 S_2 中。因此，$\mathrm{Sym}^{-1}(S_2) \cap \mathcal{T}^1$ 在 $\mathcal{T}^1$ 中稠密。

条件 (QS3) 和(QS4) 很容易验证。对于 (QS2)， QS 显然是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的完备子空间。根据（2.14），乘积定义良好。因此，我们只需证明巴拿赫代数性质成立，即对于（f_1， A_{g_1}）、（f_2， A_{g_2}）$\in QS$，有

$$\|(f_1, A_{g_1}) * (f_2, A_{g_2})\|_{QS} \leq \|(f_1, A_{g_1})\|_{QS} \cdot \|(f_2, A_{g_2})\|_{QS}.$$

我们知 道根据（2.2）和引理 4.3 ，存在正常数 c_1 和 c_2 ，使得 at

$$\begin{aligned} \|g\|_{S_1} &\leq c_1 \cdot \|\widetilde{g}\|_{S_2} \\ \|f * \widetilde{g}\|_{S_2} &\leq c_2 \cdot \|f\|_{S_1} \|\widetilde{g}\|_{S_2} \end{aligned}$$

对所有 $f \in S_1$ 和 $g \in S_2$均成立。记 $C = \max\{c_1, c_2\}$。此外，根据引理 4.3，存在$C' > 0$ ，满足 $\|f\|_{L^1} \leq C'\|f\|_{S_1}$ 对 $f \in S_1$成立。于是得到

$$\begin{aligned} \|(f_1, A_{g_1}) * (f_2, A_{g_2})\|_{QS} &= \|f_1 * f_2 + \widetilde{g_1} * \widetilde{g_2}\|_{S_1} + \|f_1 * \widetilde{g_2} + f_2 * \widetilde{g_1}\|_{S_2} \\ &\quad + \|f_1 * A_{g_2} + f_2 * A_{g_1}\|_{\mathcal{T}^1} \\ &\leq \|f_1\|_{S_1}\|f_2\|_{S_1} + C^2\|\widetilde{g_1}\|_{S_2}\|\widetilde{g_2}\|_{S_2} + C\|f_1\|_{S_1}\|\widetilde{g_2}\|_{S_2} \\ &\quad + C\|f_2\|_{S_1}\|\widetilde{g_1}\|_{S_2} + \|f_1\|_{L^1}\|A_{g_2}\|_{\mathcal{T}^1} + \|f_2\|_{L^1}\|A_{g_1}\|_{\mathcal{T}^1} \\ &\leq \|(f_1, A_{g_1})\|_{QS} \cdot \|(f_2, A_{g_2})\|_{QS}. \end{aligned}$$

□

注 10。

1. 如果在前一个命题的假设下，进一步有 $\mathrm{Sym}^{-1}(S_2) \subset \mathcal{T}^1$，那么也可以令 $C' = 0$，即范数变为 $\|(f, A_g)\|_{QS} = \|f\|_{S_1} + C\|\widetilde{g}\|_{S_2}$。这可由基本相同的证明得到，只需省略附加项即可。

2. 根据前面的结果，我们可以考虑

$$\mathcal{T}^Q := \mathcal{T} \oplus \mathrm{Sym}^{-1}(\mathcal{T}),$$

它是一个星对称、强调制不变的量子 Segal 代数，赋予范数

$$\|(f, A_g)\|_{\mathcal{T}^Q} = \|f\|_{\mathcal{T}} + \|g\|_{\mathcal{T}}.$$

虽然接下来我们不会使用这个特定的量子 Segal 代数，但它似乎是一个便于开展工作的框架。

3. 在上述命题中令 $S_2 = S_1$ ，经过简单计算可知，所得的量子 Segal 代数 $QS = S_1 \oplus \mathrm{Sym}^{-1}(\widetilde{S_1})$ 是 $\mathcal{T}^Q$ 上的一个模。

Co推论 5.11. 令 G 表示所有分次量子 Segal 代数的集合。那么

$$\mathcal{F}\Big(\bigcap_{S_1 \oplus S_2 \in G} S_1 \oplus S_2\Big) = (C_c(\mathbb{R}^{2n}) \cap \mathcal{F}_\sigma(L^1(\mathbb{R}^{2n}))) \oplus (C_c(\mathbb{R}^{2n}) \cap \mathcal{F}_\sigma(L^1(\mathbb{R}^{2n}))).$$

证明. 我们知道，所有 Segal 代数的交满足

$$\mathcal{F}_\sigma\Big(\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S\Big) = C_c(\mathbb{R}^{2n}) \cap \mathcal{F}_\sigma(L^1(\mathbb{R}^{2n})),$$

其中 $\mathcal{S}$ 表示 所有 Segal 代数的集合。根据命题 5.9 的证明，我们知道

$$\mathcal{F}\Big(\bigcap_{S_1\oplus S_2\in G} S_1\oplus S_2\Big) \supseteq (C_c(\mathbb{R}^{2n}) \cap \mathcal{F}_\sigma(L^1(\mathbb{R}^{2n}))) \oplus (C_c(\mathbb{R}^{2n}) \cap \mathcal{F}_\sigma(L^1(\mathbb{R}^{2n}))).$$

剩余的包含关系由命题 5.10得出。注意，通过将 $^{-1}(S_2) \subset \mathcal{T}^1$与满足 Sym S_2 的 Feichtinger 代数 $\mathcal{S}_0$ 相交，总可以强制得到 $\mathrm{Sym}^{-1}(\mathcal{S}_0) \subset \mathcal{T}^1$，参见 [13, 定理 3。5]。 □

5.3 量子 Feichtinger 代数

本节将介绍一种量子 Segal 代数，我们称之为 量子 Feichtinger 代数。它是通过对 Feichtinger 代数量子化得到的量子 Segal 代数的一个特例。我们将证明，该代数并非诱导塞伽尔代数的形式。回顾 $\mathcal{S}_0 := \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$ 表示例 (E5)中定义的 Feichtinger 代数。

定义 5.12。若有界线性算子 A 在 $\mathcal{H}$ 上满足$A = A_g$ 对于 $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$，则称其为 Feichtinger 算子。我们将 Feichtinger 算子的空间记为 $\mathcal{S}_0(\mathcal{H})$。

由于 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n}) \subset L^2(\mathbb{R}^{2n})$，讨论 Feichtinger 算子的积分核并无困难。正如 [12, 第 7 节4] 中的讨论所示，积分核属于 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n}$，当且仅当 Weyl 符号属于 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n}$；在这种情况下，它们在 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n}$中的范数等价。因此， $A_g \in \mathcal{T}^1$ 只要 $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n}$，这由 [13, 定理 35]可得。显然，空间 $\mathcal{S}_0(\mathcal{H}$在范数下是一个巴拿赫空间

$$\|A_g\|_{\mathcal{S}_0(\mathcal{H})} := \|g\|_{\mathcal{S}_0}, \qquad A_g \in \mathcal{S}_0(\mathcal{H}).$$

我们用 Fin($\mathcal{S}_0$) 表示所有满足 $\|F\|_{\mathrm{Fin}(\mathcal{S}_0)} < \infty$ 的有限秩算子 F，其中

$$\|F\|_{\mathrm{Fin}(\mathcal{S}_0)} := \inf\left\{\sum_{i=1}^m |\alpha_i| \|\phi_i\|_{\mathcal{S}_0} \|\psi_i\|_{\mathcal{S}_0} : F = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \phi_i \otimes \psi_i\right\}.$$

Feichtinger 算子继承了 Feichtinger 代数的若干等价刻画。

Th定理 5.13。设 $A \in \mathcal{T}^1$。则以下刻画等价 :

1) 算子 A 是 Feichtinger 算子。2) A 的积分核 K_A 属于 Feichtinger 代数。

3) 算子 A 属于 Fin($\mathcal{S}_0$) 在范数 $\|\cdot\|_{Fin(\mathcal{S}_0)}$ 下的闭包。

4) 算子 A 满足 $\mathcal{F}_W(A) \in \mathcal{S}_0$。

5) A 的调制满足 $\int_{\mathbb{R}^{2n}} \|(\gamma_z A) * A\|_{L^1} \, \mathrm{d}z < \infty$。

6) As a function of $(z,z')\in\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}$, *it is* $\operatorname{tr}(A(\alpha_z\gamma_{z'}A)^*)\in L^1(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n})$.

引入以下记号

$$\|A\|_{B,\gamma}:=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\|(\gamma_zA)*B\|_{L^1}\,\mathrm{d}z,\quad \|A\|_{B,\alpha\gamma}:=\|\operatorname{tr}(A(\gamma_{z'}\alpha_zB)^*)\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n})},$$

其中 $B\in\mathcal{S}_0(\mathcal{H})\setminus\{0\}$ 是一个固定算子。那么， $\mathcal{S}_0(\mathcal{H})$ 可以赋予以下等价范数

$$\|A\|_{\mathcal{S}_0(\mathcal{H})}\cong\|\mathcal{F}_W(A)\|_{\mathcal{S}_0}\cong\|K_A\|_{\mathcal{S}_0}\cong\|A\|_{Fin(\mathcal{S}_0)}\cong\|A\|_{B,\gamma}\cong\|A\|_{B,\alpha\gamma}.$$

注释 11. 注意， $V_B(A)(z,z'):=\operatorname{tr}(A\alpha_z\gamma_{z'}(B))$ 作为短时傅里叶变换的算子类比。就作者所知，文献中尚未出现算子短时傅里叶变换。它或可成为一个值得进一步研究的有趣对象。

证明。 1) 与 之间的等价性已在上文讨论。 2) 与 3) 之间的等价性是 Feichtinger 代数张量分解性质的另一种表述，参见例如 [14, 定理 7。4]。由于对于 $A=A_g$ 我们有 $\mathcal{F}_\sigma(\widetilde{g})=\mathcal{F}_W(A_g)$ 且 $\mathcal{F}_\sigma$ 是 $\mathcal{S}_0$ 上的一个双射等距变换， 1) 与 4) 之间的等价性随之成立。对于 1) 与5) 之间的等价性，我们有

$$(\gamma_zA_g)*A_g=A_{\gamma_{-z}g}*A_g=\widetilde{(\gamma_{-z}g)}*g.$$

因此， 5) 当且仅当

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}}\|\gamma_zg*g\|_{L^1}\,\mathrm{d}z<\infty.$$

这是对 g 属于 $\mathcal{S}_0$的重新表述，参见[14, 定理 4。7]。最后，要证明4) 与6) 等价，令 $f_1=\mathcal{F}_W(A)$，并令 $f_2=\mathcal{F}_W(B)$。那么

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A(\alpha_z\gamma_{z'}B)^*)&=\langle A,\alpha_z\gamma_{z'}B\rangle_{\mathcal{T}^2}=\langle\mathcal{F}_W(A),\mathcal{F}_W(\alpha_z\gamma_{z'}B)\rangle_{L^2}=\langle f,\gamma_z\alpha_{z'}g\rangle_{L^2}\\&=\int_{\mathbb{R}^{2n}}f(v)e^{-i\sigma(z,v)}\overline{g}(v-z')\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

不难看出

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\left|\int_{\mathbb{R}^{2n}}f(v)e^{-i\sigma(z,v)}\overline{f}(v-z')\,\mathrm{d}v\right|\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{\mathbb{R}^{2n}}|V_f(f)(z',z)|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w,$$

其中 $V_f(f)$ 表示短时傅里叶变换。

这些范数之间的等价性显而易见，可由 Feichtinger 代数的类似结果得出。 □

现在，我们可以将空间 $\mathcal{S}_0$ 和 $\mathcal{S}_0(\mathcal{H})$ 结合起来，构成如下代数。

定义 5.14. 量子 Feichtinger 代数 $\mathcal{S}_0^Q\subset L^1\oplus\mathcal{T}^1$ 定义如下：

$$\mathcal{S}_0^Q:=\mathcal{S}_0\oplus\mathcal{S}_0(\mathcal{H})=\{(f,A_g)\in L^1\oplus\mathcal{T}^1:f,g\in\mathcal{S}_0\}$$

配备范数

$$\|(f,A_g)\|_{\mathcal{S}_0^Q}=\|f\|_{\mathcal{S}_0}+\|g\|_{\mathcal{S}_0}.$$

如果 $\|\gamma_z(f,A)\|_{QS} = \|(f,A)\|_{QS}$ 和 $z \mapsto \gamma_z$ 在 $(QS, \|\cdot\|_{QS})$ 上以强意义连续，则称 Segal 代数 $(QS, \|\cdot\|_{QS})$ 具有强调制不变性。

命题 5.15. 量子 Feichtinger 代数 $\mathcal{S}_0^Q$ 是一个星对称且强调制不变的量子 Segal 代数。

证明。这是因为 $\mathcal{S}_0^Q$ 是量子 Segal 代数，可由命题 5.10得出。星对称性则由性质

$$(f, A_g)^* = (f^*, PA_g^*P) = (f^*, A_{g^*}).$$

最后，强调制不变性是显然的，因为对于 $z \in \mathbb{R}^{2n}$ 和 f， $g \in \mathcal{S}_0$ ，我们有

$$\gamma_z(f, A_g) = (\gamma_z(f), \gamma_z(A_g)) = (\gamma_z(f), A_{\gamma_{-z}g}).$$ □

Feichtinger 代数是量子 Segal 代数的另一个例子，但它不是诱导型的：

命题 5.16. 量子 Feichtinger 代数不是诱导量子 Segal 代数。

证明。若 $\mathcal{S}_0^Q$ 是诱导量子 Segal 代数，则存在一个正则迹类算子 A ，使得每个 Feichtinger 算子 B 都可以写成

$$B = f * A,$$

对于某个 $f \in \mathcal{S}_0$。根据定理 5.13 4) 结合以下事实： $\mathcal{F}_\sigma(\mathcal{S}_0) = \mathcal{S}_0$ 这等价于每个函数 $g \in \mathcal{S}_0$ 都能唯一地表示为

$$g = f \cdot \mathcal{F}_W(A),$$

对于某个 $f \in \mathcal{S}_0$。或者等价地，映射 $\phi(f) = f/\mathcal{F}_W(A)$ 是从 $\mathcal{S}_0$到其自身的双射。我们将证明，ϕ 的满射性与以下事实矛盾： $\mathcal{F}_W(A) \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$。

记

$$h(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1+|x_j|^2} \frac{1}{1+|\xi_j|^2} \in \mathcal{S}_0, \qquad z = (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

然后考虑 $\phi^4(h) = h/(\mathcal{F}_W(A))^4 \in \mathcal{S}_0$。由于 $\mathcal{S}_0 \subset C_0(\mathbb{R}^{2n})$，存在一个 $C > 0$ ，使得对于所有 $z \in \mathbb{R}^{2n}$ ，都有

$$|h(z)|/|\mathcal{F}_W(A)(z)|^4 \leq C,$$

或者等价地

$$\sqrt{|h(z)|} \leq C^{1/4} |\mathcal{F}_W(A)(z)|^2.$$

然而， $\sqrt{|h(z)|} \notin L^1(\mathbb{R}^{2n})$，这意味着 $\mathcal{F}_W(A) \notin L^2(\mathbb{R}^{2n})$。 □

注记12. Feichtinger 代数 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ 以作为最小的强调制不变 Segal 代数而闻名。对于分次量子 Segal 代数，情况确实相同：设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 是一个巴拿赫空间，其中 $X \subset L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 是一个分次子空间，且同时具有强平移不变性和强调制不变性。进一步，假设至少存在一个元素 $(f, A) \in X$ 同时满足 $f \neq 0$ 和 $A \neq 0$，且 $(f, A) \in \mathcal{S}_0^Q$。根据推论 5.11 ，对于分次量子 Segal 代数，这类元素总是存在。于是，我们 X

赋予 $\mathcal{F}(X) \subset C_0(\mathbb{R}^{2n}) \oplus C_0(\mathbb{R}^{2n})$ 范数 $\|(\mathcal{F}_\sigma(f)\ \mathcal{F}_W(A))\| = \|(f, A)\|_X$。这样一来， $\mathcal{F}(X)$ 的两个分量都成为具有强平移不变性和强调制不变性的空间，并且至少包含 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$ 中的一个非平凡元素。由 [14, 定理 7.3] ，我们便有$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n}) \subset \mathcal{F}(X)$。

Feichtinger 代数的一个实用应用是作为检验函数空间。其对偶空间 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n})$ 有时称为温和分布空间。除了包含所有 L^p 空间外，它还包含点测度 δ_x 和狄拉克梳$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta_k$等分布。定义了 Feichtinger 算子后，我们还可以考虑 $\mathcal{S}_0(\mathcal{H})$ 的巴拿赫空间对偶，记作 $\mathcal{S}_0'(\mathcal{H})$。由于施瓦茨算子 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ 连续嵌入 $\mathcal{S}_0(\mathcal{H})$，其对偶 $\mathcal{S}_0'(\mathcal{H})$ 连续嵌入 $\mathcal{S}'(\mathcal{H})$。与 Feichtinger 算子一样，空间 $\mathcal{S}_0'(\mathcal{H})$ 可以赋予许多等价范数。例如，定义范数

$$\|A_g\|_{\mathcal{S}_0'} \coloneqq \|g\|_{\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n})}.$$

此处，$\|\cdot\|_{\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n})}$ 是 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n})$ 的任意一个等价范数。我们将 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{S}_0',\mathcal{S}_0}$ 记作 $\mathcal{S}_0'(\mathcal{H})$ 中的元素与 $\mathcal{S}_0(\mathcal{H})$ 中的元素之间的半双线性配对。原则上，以下陈述是定理5.13的对偶陈述。

定理 5.17. 设 $A \in \mathcal{S}'(\mathcal{H})$，并设 $B \in \mathcal{S}_0(\mathcal{H}) \setminus \{0\}$ 为任意固定的 Feichtinger 算子。记

$$\|A\|_{\infty,B,\gamma} \coloneqq \sup_{z\in\mathbb{R}^{2n}} \|(\gamma_z A) * B\|_{L^1}, \quad \|A\|_{\infty,B,\gamma\alpha} \coloneqq \sup_{z,z'\in\mathbb{R}^{2n}} |\langle A, \gamma_{z'}\alpha_z(B)\rangle_{\mathcal{S}_0',\mathcal{S}_0}|.$$

那么，以下刻画等价:

1) 算子 A 可写为 $A = A_g$，其中 $g \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n})$。

2) 存在一个元素 $K_A \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n})$，使得 $\langle Af_2, f_1\rangle_{\mathcal{S}_0',\mathcal{S}_0} = \langle K_A, f_1 \otimes f_2\rangle_{\mathcal{S}_0',\mathcal{S}_0}$ 对所有 $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ 均成立。

A 的傅里叶-韦尔变换满足 $\mathcal{F}_W(A) \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n})$。

4) A 满足$\|A\|_{\infty,B,\gamma} < \infty$。

5) A 满足 $\sup_{z,z'\in\mathbb{R}^{2n}} \|A\|_{\infty,B,\gamma\alpha} < \infty$。

此外，以下是 $\mathcal{S}_0'(\mathcal{H})$ 上的等价范数:

$$\|A\|_{\mathcal{S}_0'} \cong \|\mathcal{F}_W(A)\|_{\mathcal{S}_0'} \cong \|K_A\|_{\mathcal{S}_0'} \cong \|A\|_{\infty,B,\gamma} \cong \|A\|_{\infty,B,\gamma\alpha}.$$

证明从略，因为这与定理 5.13 的证明非常相似，只需将 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$ 的刻画替换为 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n})$ 的刻画，参见 [14]。注意， $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 连续嵌入到 $\mathcal{S}_0'(\mathcal{H})$ 中。此外，根据 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ 的核定理（参见 [14, 定理 9.3] 及刻画 2)）， $\mathcal{S}_0'(\mathcal{H})$ 恰好与 $\mathcal{S}'(\mathcal{H})$ 中那些可延拓为从 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子的元素一致。因此，在 $\mathcal{S}'$ 中由核/符号给出的所有算子中，该命题的刻画 4) 和 5) 通过量子调和分析方法刻画了那些在 Feichtinger 框架下表现良好的算子。

注13。现在我们简要讨论温和分布的关键性质如何延续到 $\mathcal{S}_0'(\mathcal{H})$ 和 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{S}_0'(\mathcal{H})$。首先注意， $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{S}_0'(\mathcal{H})$ 不是代数，但它是 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{S}_0(\mathcal{H})$ 上的一个模。

1) 通过Weyl量子化，空间 $\mathcal{S}_0^Q$ 可与 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$ 识别为一个巴拿赫空间。因此， $\mathcal{S}_0^Q$ 的巴拿赫空间对偶 $\mathcal{S}_0^{Q\prime} := (\mathcal{S}_0^Q)'$ 可与 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n})$ 识别。因此，有界线性算子

$$A\colon \mathcal{S}_0^Q \to \mathcal{S}_0^{Q\prime}$$

可分解为四个算子 $A_{ij}\colon \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n}) \to \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2n})$，其中 $i,\ j = 1,\ 2$。这些算子中的每一个都可以根据 $K_{ij} \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{4n}$，用积分核 [14,定理93]表示。因此，对于 $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2 \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n})$，我们可以将 A 写作

$$\begin{aligned}\langle A(f_1, A_{g_1}), (f_2, A_{g_2})\rangle_{\mathcal{S}_0^{Q\prime},\mathcal{S}_0^Q} = \langle K_{11}, f_2 \otimes f_1\rangle_{\mathcal{S}_0',\mathcal{S}_0} + \langle K_{21}, f_2 \otimes g_1\rangle_{\mathcal{S}_0',\mathcal{S}_0} \\ + \langle K_{12}, g_2 \otimes f_1\rangle_{\mathcal{S}_0',\mathcal{S}_0} + \langle K_{22}, g_2 \otimes g_1\rangle_{\mathcal{S}_0',\mathcal{S}_0}.\end{aligned}$$

由此不难为从$\mathcal{S}_0^Q$ 到 $\mathcal{S}_0^{Q\prime}$的有界线性映射表述一个核定理。具体细节留给感兴趣的读者。

2）回想一下，来自 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$的元素满足泊松求和公式。事实上，还有一种更一般的形式，其求和遍历不同的格；但为简单起见，我们采用以下基本表述：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k) = (2\pi)^{n/2} \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}(f)(k).$$

在偶数维空间中，当然可以用辛傅里叶变换替换右端。对于 $A = A_g \in \mathcal{S}_0(\mathcal{H})$，因此我们有

$$\sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \mathcal{F}_W(A_g)(k) = \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \mathcal{F}_\sigma(g)(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^{2n}} g(k),$$

这可以解释为量子调和分析中的泊松求和公式。根据定理 5.13 2），我们知道每个 $A \in \mathcal{S}_0(\mathcal{H})$ 都具有如下形式

$$Af(s) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)K_A(s,t)\,\mathrm{d}y$$

对于 $K_A \in \mathcal{S}_0$。对于$(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$，不难验证， $AW_{(x,\xi)}$的积分核现在为

$$K_{AW_{(x,\xi)}}(s,t) = e^{i\xi\cdot t + i\xi\cdot x/2} K_A(s, t+x).$$

根据[6, 推论 3。15]，我们有

$$\mathcal{F}_W(A)(x,\xi) = \mathrm{tr}(AW_{(x,\xi)}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot s + i\xi\cdot x/2} K_A(s, s+x)\,\mathrm{d}s.$$

另一方面，如果 $A = A_g$，那么 g 可以通过以下方式计算：

$$g(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} K_A\left(x + \frac{y}{2}, x - \frac{y}{2}\right) e^{-i\xi\cdot y}\,\mathrm{d}y \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n}).$$

因此，上述泊松求和公式表明

$$\sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \mathcal{F}_W(A_g)(k) = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i k_2\cdot s + 2\pi^2 i k_1 k_2} K_A(s, s+2\pi k_1)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^{2n}} g(k)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^{2n}} \int_{\mathbb{R}^n} K_A(k_1+\frac{y}{2}, k_1-\frac{y}{2}) e^{-ik_2\cdot y}\,\mathrm{d}y.$$

通过用符号表示积分核，可以得到类似的公式。

3) A关于泊松求和公式的另一种观点如下：它 s

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^{2n}} \langle \delta_k, f\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^{2n}} f(k) = \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \widehat{f}(k) = \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \langle \delta_k, \widehat{f}\rangle,$$

其中 $\sum_{k\in\mathbb{Z}^{2n}}\delta_k$、 $\sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}}\widehat{\delta_k}$ 属于 $S_0'(\mathbb{R}^{2n})$。因此

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^{2n}} \alpha_k(\delta_0) = \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \mathcal{F}_\sigma(\alpha_k(\delta_0)) = \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \gamma_k \mathcal{F}_\sigma(\delta_0) = \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \frac{1}{(2\pi)^n}\gamma_k(1).$$

应用傅里叶-韦尔逆变换，并利用 $\mathcal{F}_W^{-1}(\delta_0) = \mathrm{Id}$ 以及 $\mathcal{F}_W^{-1}(1) = 2^n P$，得到

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^{2n}} \mathcal{F}_W^{-1}(\alpha_k(\delta_0)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^{2n}} \gamma_k \mathcal{F}_W^{-1}(\delta_0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^{2n}} \gamma_k(\mathrm{Id}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^{2n}} W_k,$$
$$\sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \mathcal{F}_W^{-1}(\gamma_k(1)) = \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \alpha_k \mathcal{F}_W^{-1}(1) = 2^n \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \alpha_k(P) = 2^n \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} W_{2k}P.$$

因此，我们在 $\mathcal{S}_0'(\mathcal{H})$中得到：

$$2^n \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} W_{2k}P = \sum_{k\in\mathbb{Z}^{2n}} W_k.$$

将此应用于某些 $A\in\mathcal{S}_0(\mathcal{H})$，得到一个颇为不祥的结果：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^{2n}} \mathcal{F}_W(A)(k) = 2^n \sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \mathcal{F}_W(AP)(2k).$$

通过以下方式，可以更清楚地从概念上解释这个等式：回想一下，奇偶算子既是对称算子又是酉算子，因此 P的谱包含于 $\{-1,1\}$中。 $\mathcal{H}$ 的谱分解为 $\mathcal{H} = L^2_{\mathrm{even}}\oplus L^2_{\mathrm{odd}}$，即分解为偶函数和奇函数。现在， $P|_{L^2_{\mathrm{even}}} = \mathrm{Id}$ 且 $P|_{L^2_{\mathrm{odd}}} = -\mathrm{Id}$。我们通过令 $V|_{L^2_{\mathrm{even}}} = \mathrm{Id}$ 且 $V|_{L^2_{\mathrm{odd}}} = i\mathrm{Id}$，定义 P的酉平方根 V。于是$VW_{(x,\xi)} = W_{(\xi,-x)}V$且 $W_zV = VW_{(-\xi,x)}$。因此，我们得到

$$\sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}^{2n}} \mathcal{F}_W(AP)(2k) = \sum_{k_1,k_2\in 2\pi\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}_W(VAV)(2k_1,-2k_1) = \sum_{k\in 4\pi\mathbb{Z}^{2n}} \mathcal{F}_W(VAV)(k).$$

由于从 A 到 PAP 起到反射的作用（类似于从 $f(z)$ 到 $f(-z)$， $z\in\mathbb{C}$），从 A 到 VAV 可以看作是将论证旋转 $\frac{\pi}{2}$ （类似于从 $f(z)$ 到 $f(iz)$ ）。现在回想一下，傅里叶变换可以看作是将相空间旋转 $\frac{\pi}{2}$，那么泊松求和公式联系 A 和 VAV 就显得更为合理了。

5.4 其他示例

到目前为止，我们已经看到了并非 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的理想的量子 Segal 代数实例，下面将介绍一类理想实例。它们是例 2.3 (E3) 中 Segal 代数的自然类比。

例 5.18. 设 μ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 上任意一个 Radon 测度。定义集合 S^μ_p 如下

$$S^\mu_p = \{(f, A) \in L^1 \oplus \mathcal{T}^1 : \ \|\widehat{f}\|_{L^p(\mu)} + \|\widehat{A}\|_{L^p(\mathbb{R}^{2n},\mu)} < \infty\},$$

其范数为

$$\|(f, A)\|_{S^\mu_p} = \|f\|_{L^1} + \|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^{2n},\mu)} + \|A\|_{\mathcal{T}^1} + \|\widehat{A}\|_{L^p(\mathbb{R}^{2n},\mu)}.$$

由于 S^μ_p 包含任意满足 $\widehat{f}$ 和 $\widehat{A}$ 均具有紧支撑的 $(f, A) \in L^1 \oplus \mathcal{T}^1$，因此它是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的稠密子空间。此外，不难验证，S^μ_p 既是分次量子 Segal 代数，也是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的理想。当 μ 是有限测度时，我们有 $S^\mu_p = L^1 \oplus \mathcal{T}^1$；但对于适当的无限测度，$S^\mu_p$ 是一个真子集。

注意，与 [18, (vii), 第 26], 这些 S^μ_p 也具有以下理论价值：给定$A \in \mathcal{T}^1$ 使得 $\widehat{A}$ 不具有紧支撑，那么可以显式写出一个 μ 使得分次量子 Segal 代数 S^μ_1 不包含 A。

我们注意到，量子 Segal 代数是 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$的理想，并且是 Burnham [2, 定义 11]意义下的抽象 Segal 代数。特别地，这类量子 Segal 代数与 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$具有相同的闭理想。这里不赘述精确结果，仅请参见 [2, 定理 11]。我们想要给出关于这类量子 Segal 代数的另一个结果，它与推论 5.11密切相关。

命题 5.19. 设 G表示所有作为 $L^1(\mathbb{R}^{2n}) \oplus \mathcal{T}^1(\mathcal{H})$ 的理想的分次量子 Segal 代数的集合。那么

$$\mathcal{F}\Big(\bigcap_{S_1 \oplus S_2 \in G} S_1 \oplus S_2\Big) = (C_c(\mathbb{R}^{2n}) \cap \mathcal{F}_\sigma(L^1(\mathbb{R}^{2n}))) \oplus (C_c(\mathbb{R}^{2n}) \cap \mathcal{F}_W(\mathcal{T}^1(\mathcal{H}))).$$

证明. 如上所述，代数 S^μ_1 可用于证明包含关系“$\subseteq$”。对于反向包含，注意到对于任意满足 $\widehat{f} \in C_c(\mathbb{R}^{2n})$ 的 $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$，根据推论 5.11，$(f, 0)$ 属于该交集。设 $A \in \mathcal{T}^1$ 满足 $\widehat{A}$ 具有紧支撑。那么，存在 $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$，使得 $\widehat{g}$ 具有紧支撑，并且 $\widehat{g} \equiv 1$ 在 $\widehat{\ }\ A$的支撑上成立。特别地，$(g, 0)$ 属于每个分次量子 Segal 代数。因此，卷积 $(g, 0) * (0, A)$ 属于每个作为 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的理想的分次量子 Segal 代数。比较傅里叶变换可得，$(g, 0) * (0, A) = (0, A)$。因此，元素 $(0, A)$ 属于每个作为 $L^1 \oplus \mathcal{T}^1$ 的理想的分次量子 Segal 代数。

□

我们还欠读者一个例子，以说明为何要对分次量子 Segal 代数作特殊处理，也就是说，证明并非每个量子 Segal 代数都是分次的。例子如下：

例 5.20. 假设 S_1 和 S_2 是包含在 Feichtinger 代数 $\mathcal{S}_0$ 中的两个 Segal 代数，其中存在 $f_1 \in S_1$ 和 $g_1 \in S_2$，使得 $f_1 \notin S_2$ 和 $g_1 \notin S_1$。令

$$S_T = \{(f, A_{\tilde{g}}) : f + g \in S_1,\ f - g \in S_2\}$$

配备范数

$$\|(f, A_{\tilde{g}})\|_{S_T} := \|f + g\|_{S_1} + \|f - g\|_{S_2}.$$

Then

$$\begin{aligned}\|(f, A_{\tilde{g}}) * (h, A_{\tilde{j}})\|_{S_T} &= \|(f + g) * (h + j)\|_{S_1} + \|(f - g) * (h - j)\|_{S_2} \\ &\leq \|(f + g)\|_{S_1}\|(h + j)\|_{S_1} + \|(f - g)\|_{S_2}\|(h - j)\|_{S_2} \\ &\leq \|(f, A_{\tilde{g}})\|_{S_T}\|(h, A_{\tilde{j}})\|_{S_T},\end{aligned}$$

这表明 S_T 是一个赋范代数。此外，不难看出它是完备的，并满足(QS3)和(QS4)。性质(QS1)由以下事实可得：$C_0(\mathbb{R}^{2n}) \oplus C_0(\mathbb{R}^{2n}) \subset \mathcal{F}(S_T)$。若令 $f + g = f_1$ 且 $f - g = g_1$，则得到一个例子（f，A_g）$\in S_T$，其中（f，0）不能属于 S_T。

我们给出这样一个例子，其中有两个 Segal 代数 S_1，S_2 考虑 $n = 1$的情形；而要构造 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2n}$的这类子代数，所需的调整留给读者完成。令 $S_1 = \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{F}^{-1}(L^2(\mathbb{R}^2,\ (1+x^2)^{10}))$，并令 $S_2 = \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2) \cap \mathcal{F}^{-1}(L^2(\mathbb{R}^2,\ e^{2x}))$。根据例2.3，它们是 Segal 代数的交，因此本身也是 Segal 代数。考虑函数

$$f_a(x, \xi) = \frac{1}{x^2 + a^2}\frac{1}{\xi^2 + a^2}$$

其傅里叶变换为

$$\mathcal{F}(f_a)(x, \xi) = \frac{\pi}{2a^2}e^{-a(|x|+|\xi|)}.$$

利用对所有 a 都有 $f_a \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$，我们注意到 $f_1 \in S_1$ 但 $f \notin S_2$。另一方面，函数

$$g(x, \xi) = \frac{1 - e^{-x^2}}{1 + x^2}\frac{1 - e^{-\xi^2}}{1 + \xi^2}H(-x)H(-\xi),$$

其为 H Heaviside函数，是光滑的，且属于 $L^1(\mathbb{R}^2)$，其前两阶导数属于$L^1(\mathbb{R}^2)$。因此，其傅里叶变换也属于 $L^1(\mathbb{R}^2)$。我们知道 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2) * L^1(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2)$，因此

$$g_1 = \mathcal{F}^{-1}(f_1) * \mathcal{F}^{-1}(g) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^2).$$

那么 $g_1 \in S_2$，而 $g_1 \notin S_1$。

References

[1] E. Berge、S. M. Berge、F. Luef 和 E. Skrettingland。仿射量子调和分析。《泛函分析杂志》，282，2022。109327。

[2] J. T. Burnham。《巴拿赫代数子代数中的闭理想 I》。《美国数学会会刊》，32:551–555，1972。

[3] H. G. Dales。《交换巴拿赫代数中的极大理想》。arXiv 预印本 1408.3815，2014。[4] D. Dunford。《Segal 代数与左赋范理想》。《伦敦数学学会杂志》，2:514–516，1974。[5] H. G. Feichtinger。《局部紧群上 Wiener 代数的一个刻画》。《数学文献》，29:136–140，1977。[6] H. G. Feichtinger 和 M. S. Jakobsen。《某个 Segal 代数的内核定理》。《数学月刊》，198:675–715，2022。[7] G. B. Folland。《抽象调和分析教程》。Chapman and Hall/CRC，第二版，2015。[8] R. Fulsche。《 p-Fock 空间上的对应理论及其在 Toeplitz 代数中的应用》。《泛函分析杂志》，279:108661，2020。[9] R. Fulsche。《非自反 Fock 空间上的 Toeplitz 算子》。arXiv 预印本 arXiv:2202.11440，2022。[10] K. Gr¨ochenig、P. Jaming 和 E. Malinnikova。《Wigner 分布与短时傅里叶变换的零点》。《马德里康普顿斯数学评论》，33:723–744，2020。[11] S. Halvdansson。《局部紧群上的量子调和分析》。arXiv 预印本 arXiv:2210.08314，2022。[12] C. Heil。《积分算子、伪微分算子与 Gabor 框架》。载于 H. G. Feichtinger 和 T. Strohmer 编，《Gabor 分析进展》，《应用与数值调和分析》。Springer 出版社，2003。[13] C. Heil 和 D. Larson。《算子理论与调制空间》。《当代数学》，451:137–150，2008。[14] M. S. Jakobsen。《论一个（不再）新的 Segal 代数：Feichtinger 代数综述》。《傅里叶分析与应用杂志》，24:1579–1660，2018。[15] M. Keyl、J. Kiukas 和 R. Werner。《施瓦茨算子》。《数学物理评论》，28，2016。[16] F. Luef 和 E. Skrettingland。《局部化算子的卷积》。《纯粹与应用数学杂志》，118:288–316，2018。[17] F. Luef 和 E. Skrettingland。《算子与函数的 Wiener–Tauberian 定理》。《泛函分析杂志》，280，2021。108883。[18] H. Reiter。《 L^1-代数与 Segal 代数》，《数学讲义》第231卷。Springer 出版社，1971。[19] H. Reiter 和 J. D. Stegeman。《经典调和分析与局部紧群》，《伦敦数学学会通报》第34卷。克拉伦登出版社，牛津，2000。

[20] W. Rudin. 群上的傅里叶分析。Wiley，1990年。[21] E. Skrettingland. 格上的量子调和分析与 Gabor 乘子。《傅里叶分析与应用杂志》，26(48)，2020。[22] R. Werner. 相空间上的量子调和分析。《数学物理杂志》，25:1404–1411，1984年。[23] R. F. Werner. 非相对论量子力学状态空间上的物理一致性。《基础物理学》，13:859–881，1983年。

Eirik Berge

✉ ebbeberge94@gmail.com

StineMarie Berge✉

stine.berge@math.uni-hannover.de 分析研究所¨莱布尼茨汉诺威大学¨汉诺威 Welfengarten 1号 30167 德国

Robert Fulsche✉

fulsche@math.uni-hannover.de 分析研究所¨莱布尼茨汉诺威大学¨汉诺威 Welfengarten 1号 30167 德国