arXiv:2301.09392v2 [math.PR] 6 Feb 2023

H_1 中鞅的乘积与交换子及 BMO

AlineBonami*、Yong Jiao、Guangheng Xie、Dachun Yang 和 Dejian Zhou

摘要 设 $f:=(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 和 $g:=(g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是与概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 相关的两个鞅，该概率空间配备了滤过 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$。假设 f 属于鞅Hardy空间 H_1，而 g 属于其对偶空间，即鞅 BMO。那么，半鞅 $f\cdot g:=(f_ng_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 可以写成如下和式

$$f\cdot g=G(f,g)+L(f,g).$$

这里 $L(f,g):=(L(f,g)_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$，其中 $L(f,g)_n:=\sum_{k=0}^{n}(f_k-f_{k-1})(g_k-g_{k-1})$ 对任意 $n\in\mathbb{Z}_+$ 成立，且 $f_{-1}:=0=:g_{-1}$。作者证明了 $L(f,g)$ 是一个具有有界变差并且在 L^1，中有极限的过程，而 $G(f,g)$ 属于与 Orlicz 函数相关的鞅Hardy-Orlicz空间 $H^{\log}$

$$\Phi(t):=\frac{t}{\log(e+t)},\quad \forall\, t\in[0,\infty).$$

上述双线性分解 $L^1+H^{\log}$ 是尖锐的，即对于某些特定的鞅，空间 $L^1+H^{\log}$ 不能被其对偶更大的更小空间所替代。作为一项应用，作者刻画了 H_1，中最大的子空间，记为 H_1^b，其中 $b\in BMO$，使得经典次线性算子 T 的交换子 $[T,b]$ 从 H_1^b 到 L^1 有界。交换子的这一端点有界性使作者得以给出更多应用。一方面，在鞅框架下，作者得到了鞅变换和鞅分数阶积分的交换子端点估计。另一方面，在调和分析中，作者建立了超越倍增测度情形下二进Hilbert变换以及 Walsh–Fourier级数 Ces`aro 均值极大算子的交换子端点估计。

1 引言

受几何函数论和非线性弹性力学的发展启发，Bonami 等人在其开创性工作 [9] 中，研究了分别属于 Hardy 空间 $H_1(\mathbb{R}^n)$ 和有界平均振荡函数空间 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 的两个函数乘积的线性分解，并在 [9, 猜想 17] 中提出，该线性分解应当是双线性的。

2020年 数学主题分类。主要分类：60G42；次要分类：60G46、47B47、42B25、42B30。关键词和短语。 鞅Hardy空间、鞅 BMO、双线性分解、交换子、二进Hilbert变换。本项目得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12001541、12125109、12201647、11971058 和 12071197）、国家重点研发计划（项目编号：2020YFA0712900）以及湖南省自然科学基金（项目编号：2021JJ40711 和 2021JJ40714）的资助。* 通讯作者，电子邮箱： aline.bonami@univ-orleans.fr/2023年2月6日 /最终版本。

借助小波多分辨率分析，Bonami 等人 [8] 通过证明存在两个有界双线性算子，彻底解决了这一猜想。

$$L:\ H_1(\mathbb{R}^n)\times \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)\to L^1(\mathbb{R}^n)$$

and

$$G:\ H_1(\mathbb{R}^n)\times \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)\to H_\varphi(\mathbb{R}^n)$$

使得任意 $f\in H_1(\mathbb{R}^n)$ 和 $g\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 的乘积 fg 都可以表示为

$$fg = L(f,g)+G(f,g).$$

这里的乘积是按施瓦茨分布的意义定义的，而 $H_\varphi(\mathbb{R}^n)$ 是与 Musielak–Orlicz函数相关的 Musielak–Orlicz Hardy 空间

$$\varphi(x,t) := \frac{t}{\log(e+|x|)+\log(e+t)} \tag{1.1}$$

对任意 $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,\infty)$。本文提出了该结果是否最优的问题，即 $H_\varphi(\mathbb{R}^n)$ 能否被一个更小的向量空间取代。Nakai 和 Yabuta 的逐点乘子定理 [31]使作者得以在 [7] 中回答这一问题：包含 $H_\varphi(\mathbb{R}^n)$ 的最小巴拿赫空间，在某种意义上就是包含这些乘积的最小巴拿赫空间。在一维情形下，最优性由 [10] 中的精确分解推出；对于 $n\geq 2$，则由 [7] 中的弱分解推出。关于这一主题在 $\mathbb{R}^n$ 上的更多相关进展，见 [12, 6,45, 46]。近期也研究了 $\mathbb{R}^n$ 以外的其他情形。特别是，Fu 等人 [17] 和 Liu 等人 [23] 在齐性型度量测度空间上建立了双线性分解。

考虑一般鞅的乘积是很自然的。事实证明，尽管会出现新的困难，双线性分解在鞅的背景下仍显得格外直观。在描述这一新情形之前，我们先约定一些符号。

设 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是一个完备概率空间，$(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是由 $\mathcal{F}$ 上的子 σ-代数构成的递增序列，满足 $\mathcal{F}=\sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{F}_n)$。为简单起见，我们假设 $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$。鞅Hardy空间和鞅 BMO 分别记为 H_1 和 BMO。属于 H_1 或 BMO 的鞅 $f=(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 可以用其极限 f_∞ 来表示，因此这些鞅空间可以视为 Ω 上的函数（或随机变量）空间；但对于我们所关注的乘积，情况并非如此：若 $f=(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 属于 H_1，而 $g=(g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 属于 BMO，则乘积 $f_\infty g_\infty$ 一般不可积，因此无法作这样的表示。回顾一下，在 $\mathbb{R}^n$ 的情形下，可以在分布意义上这样表示。这里自然地将 $f\cdot g$ 定义为离散过程 $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$。但它不是鞅。所幸它是一个半鞅，即一个鞅与一个有界变差过程之和。我们的主要结果给出了半鞅 $f\cdot g$ 的分解，将其分为两部分：一部分是 $H^{\log}$ 中的鞅，另一部分是有界变差过程。我们将此类过程的空间记作 $\mathcal{BV}$，也就是说，它是由随机变量组成的适应序列构成的空间，其中 $h=(h_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 满足

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|h_n-h_{n-1}|\right)<\infty,$$

其中 $\mathbb{E}$ 表示期望。另一方面，$H^{\log}$ 是与 Orlicz 函数相关联的鞅Orlicz Hardy空间

$$\Phi(t) := \frac{t}{\log(e+t)}, \ \forall\, t \in [0,\infty). \tag{1.2}$$

对于适应过程 $h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$，我们令 $d_0(h) := h_0$ 以及 $d_n(h) = d_n h := h_n - h_{n-1}$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 任意。第一部分的主要结果如下。

定理 1.1. 对任意 $(f, g) \in H_1 \times \mathrm{BMO}$，可以写成

$$f \cdot g = L(f,g) + G(f,g),$$

其中 L 和 G 是两个有界双线性算子，满足

$$L: \ H_1 \times \mathrm{BMO} \to \mathcal{B}V$$

and

$$G: \ H_1 \times \mathrm{BMO} \to H_{\log}.$$

此外，对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$L(f,g)_n := \sum_{k=0}^{n} d_k(f) d_k(g).$$

L 的双线性性质由其定义显然可知，G 的双线性性质也可立即得出。鞅 $G(f, g)$ 是两个抛物乘积 $\Pi_1(f, g)$ 和 $\Pi_2(f, g)$ 之和，它们分别满足：对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，$d_n(\Pi_1(f, g)) = f_{n-1} d_n(g)$，且 $d_n(\Pi_2(f, g)) = g_{n-1} d_n(f)$。

注 1.2. (i) 我们将说明，定理 1.1 在对偶性的意义下有一定的尖锐性。为此，我们将利用该定理的对偶形式，并使用 [28] 中给出的 BMO 逐点乘子的刻画。具体而言，若定理 1.1 对于 $\mathcal{Y}$ 且 $\mathcal{Y} \subset H^{\log}$ 成立，那么

$$\left(L^1 + \mathcal{Y}\right)^* = \left(L^1 + H_{\log}\right)^*.$$

(ii) 如上所述，对于 $\mathbb{R}^n$ 上的同一问题，定义 $H^{\log}$ 时，(1.2) 中出现的 Orlicz 函数 Φ 被 (1.1) 中的 Musielak–Orlicz函数 φ 所取代；参见 [8]。x 方向上的依赖是为了描述 $\mathbb{R}^n$ 中 ∞ 处的行为，在局部结果或周期情形中并不出现；例如参见欧氏空间中的 [9, 12, 45, 46] 。自然会想到，这里应当找到与 $\mathbb{R}$ 上的周期函数或 Bakas 等人研究的二进情形相同的 Orlicz 函数 [2]。

(iii) 我们想提及，Odysseas Bakas、Zhendong Xu、Yujia Zhai 和 Hao Zhang[3] 独立地得到了定理 1.1 的类似结果。随后，他们将其推广到任意 $p \in (0, 1)$ 的 H^p，以及与非概率测度相关的鞅，提出了非常有趣的推广，而我们的文章则采取了另一种方向。值得一提的是，在定理 1.1 中，我们特别强调乘积的含义。一般而言，似乎无法像经典情形那样将乘积定义为一个分布。因此，我们将乘积定义为一个半鞅，即一个鞅与一个有界变差过程之和。

下面的观察将在后续讨论中起核心作用，并为理解定理中涉及的乘积提供另一种方式。注意，L(f, g) 在 L^1 中收敛，且几乎处处收敛（简称 a.s.）。当 $n \to \infty$ 时，由于 f_n g_n 也几乎处处收敛，因此 $G(f, g)_n$ 也同样如此；但我们只知道它属于 $H^{\log}$，无法据其几乎处处极限还原这个鞅。不过，若 f 是一个 L^2-鞅，则情况有所不同；此时，分解也可以用 ∞ 处的极限值来表示。一般而言，乘积的 $H^{\log}$ 部分可以利用 L^2-鞅在 H_1 中的稠密性，通过取极限来恢复。

上述调和分析中的双线性分解的一个重要应用归功于 Ky [21, 22]。众所周知，由 Calder´on–Zygmund 算子和 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 函数生成的交换子，未必能将 $H_1(\mathbb{R}^n)$ 连续映射到 $L^1(\mathbb{R}^n)$。借助双线性分解，Ky [21] 刻画了 $H_1(\mathbb{R}^n)$ 的最大子空间 $\mathcal{Z}$，使得大多数经典交换子都能从该子空间 $\mathcal{Z}$有界映射到 $L^1(\mathbb{R}^n)$。本文的第二个目标是在鞅框架下推广这一刻画，并建立由鞅算子和 BMO 函数乘法算子生成的交换子的端点估计。

鞅变换的交换子最初由 Janson [20] 研究，随后 Chao 和 Peng [15] 研究了正则鞅的情形。Treil [39]最近研究了非正则鞅的鞅变换交换子。此外，Chao 和 Ombe [14] 以及最近的 Nakai 等人 [30, 1]对鞅分数阶积分交换子的有界性进行了研究。然而，迄今尚无关于鞅交换子的端点估计。

更准确地说，设 $b \in \mathrm{BMO}$，$q \in [1, \infty)$，且 T 属于一类 $\mathcal{K}_q$ 次线性算子，这类算子包含鞅框架中几乎所有重要算子（其定义见定义 4.1）。次线性算子 T 的交换子 [T, b] 定义如下：对任意 $f \in H_1$ 和 $x \in \Omega$，在有意义时，

$$[T, b](f)(x) := T(bf - b(x)f)(x).$$

此外，若 T 是线性的，则 $[T, b](f) = T(bf) - bT(f)$。现在，我们建立交换子 [T, b] 的（次）双线性分解如下。

Theo引理 1.3. 设 $q \in [1, \infty)$ 且 $T \in \mathcal{K}_q$。则存在一个有界次双线性算子

$$R : H_1 \times \mathrm{BMO} \to L^q$$

使得对任意 $(f, b) \in H_1 \times \mathrm{BMO}$,

$$|T(L(f, b))| - R(f, b) \le |[T, b](f)| \le R(f, b) + |T(L(f, b))|,$$

特别地，若 T 是线性的，则对任意 $(f, b) \in H_1 \times \mathrm{BMO}$，由下式定义的双线性算子 R(f, b)

$$R(f, b) := [T, b](f) - T(L(f, b))$$

是从 $H_1 \times \mathrm{BMO}$ 到 L^q 的有界映射。

这意味着，可以从 T(L(f, b)) 的连续性性质推导出交换子的连续性性质。对于任意 $b \in \mathrm{BMO}$，我们引入一个新的鞅Hardy空间 H_1^b（见下文定义 4.11），该空间与任意 $T \in \mathcal{K}_q$ 的交换子 [T, b] 的端点估计相关。

定理 1.4. 设 $q \in [1,\infty)$、$T \in \mathcal{K}_q$，且 $b \in \mathrm{BMO}$。那么存在一个正常数 C，使得对于任意 $f \in H_1^b$，

$$\|[T,b](f)\|_{L^q} \le C\|f\|_{H_1^b}.$$

注 1.5. 设 $b \in \mathrm{BMO}$。值得一提的是，定理 1.4 中的空间 H_1^b 是尖锐的，具体而言，$\mathcal{Y} := H_1^b$ 是 H_1 的最大子空间，使得对任意 $T \in \mathcal{K}_1$，交换子 [T, b] 都是从 $\mathcal{Y}$ 到 L^1的有界算子；见下文注 4.13。

注 1.6. 类比于 $\mathbb{R}^n$ 上的经典情形（见 [32, 21]），H_1^b中的函数示例包括与整数 $n \in \mathbb{Z}_+$ 相关、满足 $\mathbb{E}_n(ab) = 0$ 的原子 a，以及此类原子的和。

我们指出，我们的结果在鞅理论和调和分析中有广泛应用。一方面，我们得到了鞅变换和鞅分数阶积分的交换子的端点有界性（见下文第4.4节）。请注意，此前尚未研究这些端点估计。因此，这些估计完善了 Janson [20], 、Chao等人 [14, 15], 、Nakai 等人 [30, 1], 和 Treil [39] 所研究的鞅交换子理论。

另一方面，我们给出了调和分析中的一些应用。近年来，与调和分析中所谓的 A_2 猜想相关的二进算子受到了广泛关注。特别是，L´opez-S´anchez 等人 [25] 首次刻画了倍增测度之外的二进 Hilbert 变换（也称为二进移位；例如参见 [35]）的有界性。受此启发，我们建立了倍增测度之外二进 Hilbert 变换的交换子端点估计。此外，我们还建立了 Walsh–Fourier 级数 Ces`aro 均值极大算子交换子的端点估计。据我们所知，此前尚未有人研究过 Walsh–Fourier 级数 Ces`aro 均值极大算子的交换子。

请注意，Vilenkin系统是 Walsh系统的一种自然推广（例如参见 [33, 34]）。值得探讨的是，我们的方法是否仍适用于 Vilenkin系统。

本文余下部分安排如下。

第 2 节介绍一些记号，以及关于鞅Hardy空间、鞅BMO空间和原子分解的预备知识，这些内容将用于证明我们的主要结果。

第 3 节致力于证明定理 1.1。将鞅的乘积写成鞅抛物乘积之和后，写作

$$f \cdot g = \Pi_1(f,g) + \Pi_2(f,g) + L(f,g),\ \forall\,(f,g) \in H_1 \times \mathrm{BMO},$$

问题归结为研究这三个双线性算子。主要困难在于，如何对来自鞅Hardy空间 H_1的鞅作适当分解。回顾一下，在 $\mathbb{R}^n$ 中使用小波或原子分解（见 [5, 8]）。然而，当底层滤过不正则时，与鞅平方函数相联系的鞅Hardy空间 H_1不允许经典原子分解。为克服这一困难，我们使用 Davis 分解（见下文引理 2.4），并将鞅 $f \in H_1$ 分解为两部分。第一部分属于由鞅条件平方算子定义的鞅Hardy空间 h_1，且具有原子分解。第二部分属于 h_1^d，因此它是可积

跳跃的 l 和。因此，只需估计 $\{\Pi_i(a, g)\}_{i=1}^2$，其中 a 是一个原子（或一个跳跃鞅，即一个鞅 h，使得 $d_k h$ 除 k 的某一个取值外均为 0）。

在第 4 节中，我们建立交换子的（次）双线性分解以及交换子的端点估计。我们首先引入一类 $\mathcal{K}_q$，满足 $q \in [1, \infty)$ 的次线性算子。与 [21], 相比，我们不将范围局限于 $q = 1$ 的情形，这使我们能够处理鞅分数阶积分算子。应用定理 1.1，我们首先建立次线性交换子 [T,b] 的次双线性分解（见下文定理 1.3），然后通过双线性算子 L 建立鞅型 Hardy空间 H_1^b 的一个等价刻画（见下文定理 4.12）。这些结果足以证明定理 1.4。在第4.4节中，我们给出属于 $\mathcal{K}_q$ 这一类的算子示例，例如鞅变换和鞅分数阶积分算子。

最后，第5节着重讨论我们的结果在调和分析中的应用。在第5.1节中，我们得到了二进Hilbert变换的交换子在非倍增测度下的端点估计。第5.2节给出了 Walsh–Fourier 级数的 Ces`aro 均值极大算子的交换子的端点估计。

在本文中，我们始终分别令 $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$，以及 $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \ldots\}$。我们用 C 表示正常数，该常数可能随行而异。符号 $f \lesssim Cg$ 表示存在正常数 C，使得 $f \le Cg$。如果写作 $f \approx g$，则表示 $f \lesssim g$ 且 $g \lesssim f$。如果 $f \le Cg$ 且 $g = h$ 或 $g \le h$，那么我们写作 $f \lesssim g \approx h$ 或 $f \lesssim g \lesssim h$，而不是 $f \lesssim g = h$ 或 $f \lesssim g \le h$。对于 Ω 的任意子集 E，我们用 $\mathbf{1}_E$ 表示其特征函数。对于任意可测函数 f，定义 $\operatorname{supp}(f) := \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$。

2 预备知识

本节介绍本文后续所需的鞅 Hardy 空间和 BMO 空间的一些基本预备知识。本文的符号和术语均为标准用法，参见专著 [18, 24, 42]。

2.1 鞅 Hardy 空间

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 为一个完备概率空间，$(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 $\mathcal{F}$ 上满足 $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{F}_n)$ 的递增子-σ代数序列。关于 $\mathcal{F}$ 的期望算子记为 $\mathbb{E}$。关于 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 的条件期望算子依次记为 $(\mathbb{E}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$。若序列 $f := (f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} \subset L^1$ 满足对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，则称其为鞅，

$$\mathbb{E}_n(f_{n+1}) = f_n.$$

用 $\mathcal{M}$ 表示所有与 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 相关的鞅 $f := (f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 的集合。对任意 $f \in \mathcal{M}$，定义其鞅差如下（为方便起见，令 $f_{-1} := 0$ 且 $\mathbb{E}_{-1} := 0$）

$$d_n(f) = d_n f := f_n - f_{n-1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+.$$

照例，对于任意鞅 $f \in \mathcal{M}$ 和任意 $p \in [1, \infty]$，令

$$\|f\|_{L^p} := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|f_n\|_{L^p} := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left(\int_\Omega |f_n|^p \, d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

若 $\|f\|_{L^p} < \infty$，则称 f 为 L^p-有界鞅。

注 2.1. 若 $p \in (1,\infty)$，且 $f \in \mathcal{M}$ 是一个 L^p-有界鞅，则存在一个 $f_\infty \in L^p$，使得对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，都有 $f_n = \mathbb{E}_n(f_\infty)$，并且当 $n \to \infty$时，$\|f_n - f_\infty\|_{L^p} \to 0$；例如参见 [24, 第 28] 页。在这种情况下，我们也称其为 L^p-鞅。请回想，对于一个 L^1-有界鞅 $f := (f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$，上述结论不再成立。若鞅 $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 由可测函数 $f_\infty \in L^1$, 生成，即对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$都有 $f_n = \mathbb{E}_n(f_\infty)$，那么在这种情况下，还有 $\|f_n - f_\infty\|_{L^1} \to 0$，当 $n \to \infty$ 时成立，我们也称其为 L^1-鞅。

当鞅 $f := (f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 由函数 f_∞生成时，也就是说，当 f 是一个 L^1-鞅时，我们有时不区分鞅与 f_∞。

对于任意 $n \in Z_+$，鞅 f 的 Doob极大算子 M(f)、平方函数 S (f) 和条件平方函数 s(f) 分别定义如下:

$$M(f) := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |\mathbb{E}_n(f)|,\ S(f) := \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} |d_n f|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

and

$$s(f) := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_{n-1}|d_n f|^2 + |d_0 f|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 n 2.2。鞅 Hardy 空间 H_1,h_1, 和 h_1^d 分别定义如下: g

$$H_1 := \{f \in \mathcal{M} :\ \|f\|_{H_1} := \|S(f)\|_{L^1} < \infty\},$$

$$h_1 := \{f \in \mathcal{M} :\ f_0 = 0,\ \|f\|_{h_1} := \|s(f)\|_{L^1} < \infty\},$$

and

$$h_1^d := \left\{f \in \mathcal{M} :\ \|f\|_{h_1^d} := \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \|d_k f\|_{L^1} < \infty\right\}.$$

显然，H_1 中的鞅都是 L^1-鞅。

以下是著名的 Davis不等式；见 [16] 或 [24,定理 2.1.9]。

引理 2.3. 存在一个常数 $C \in [1,\infty)$，使得对于任意 $f \in H_1$,

$$C^{-1}\|f\|_{H_1} \le \|M(f)\|_{L^1} \le C\|f\|_{H_1}.$$

以下结果是引理 2.15] 的一部分。

引理 2.4. 对于任意 $f \in H_1$, ，存在正常数 C 和两个鞅 $f^1 \in h_1$ 以及 $f^d \in h_1^d$，使得 $f = f^1 + f^d$，其中

$$\left\|f^1\right\|_{h_1} \le C\|f\|_{H_1} \quad and \quad \left\|f^d\right\|_{h_1^d} \le C\|f\|_{H_1}. \tag{2.1}$$

我们需要同时用到以下事实：$f \in H_1$，且 f 属于 L^2。回到证明，可以得到以下性质。

注 2.5. 在引理 2.4 中，此外，若 f 是一个 L^2-鞅，则 f^1 和 f^d 均可选为 L^2-鞅。

Orlicz 空间 $L^{\log}$ 定义为满足以下条件的所有可测函数 f 的集合 t

$$\|f\|_{L^{\log}} := \inf\left\{\lambda \in (0,\infty) : \int_\Omega \frac{|f|/\lambda}{\log(e+|f|/\lambda)}\, d\mathbb{P} \le 1\right\} < \infty.$$

显然，$\|\cdot\|_{L^{\log}}$ 是一个准范数，且 $L^1 \subset$ 连续嵌入于 $L^{\log}$。若将其中定义 2.2 的 $\|\cdot\|_{L^1}$ 替换为 $\|\cdot\|_{L^{\log}}$，则得到鞅 Hardy 空间 $H^{\log}$ 和 $h^{\log}$ 的定义。

以下结果是 [42,定理 2.11] 和 [27,定理 2.5] 的一部分。

引理 2.6. (i) 存在一个正常数 C，使得对任意 $f \in h_1$，

$$\|f\|_{H_1} \le C\|f\|_{h_1}.$$

(ii) 存在正常数 C，使得对于任意 $f \in h^{\log}$，

$$\|f\|_{H_{\log}} \le C\|f\|_{h_{\log}}.$$

2.2 鞅 BMO 空间与 John–Nirenberg 不等式

本节介绍有关鞅BMO空间的定义和基本结果。设 X_1 和 X_2 为两个拟赋范空间，且它们都是某个豪多夫拓扑向量空间的子空间。空间 X_1+X_2 定义为所有形如 $x = x_1+x_2$,的元素 x 的集合，其中 $x_1 \in X_1$ 且 $x_2 \in X_2$,，并赋予拟范数

$$\|x\|_{X_1+X_2} := \inf\left\{\|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2}\right\},$$

其中下确界取遍所有满足 $x_1 \in X_1$ 且 $x_2 \in X_2$ 、其和等于 x 的元素。空间 $X_1 \cap X_2$ 定义为所有元素 $x \in X_1 \cap X_2$ 的集合，并赋予拟范数

$$\|x\|_{X_1\cap X_2} := \max\left\{\|x\|_{X_1}, \|x\|_{X_2}\right\}.$$

定义 2.7. 对任意 $p \in [1,\infty)$，鞅空间 BMO^p 定义为所有满足 $f \in L^p$ 的鞅的集合，其范数为

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_p} := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\|\mathbb{E}_n\left(|f-f_{n-1}|^p\right)\right\|_{L^\infty}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

鞅 ingale 空间 bmo^p 定义为所有满足 $f \in L^p$ 的鞅所构成的集合，其范数为

$$\|f\|_{\mathrm{bmo}_p} := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\|\mathbb{E}_n\left(|f-f_n|^p\right)\right\|_{L^\infty}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

鞅 鞅空间 BMO^d 定义为所有满足 $f \in L^\infty$ 的鞅的集合，其范数为

$$\|f\|_{\mathrm{bmo}^d} := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|d_n f\|_{L^\infty} < \infty.$$

众所周知，对于任意 $p \in [1,\infty)$，

$$L^\infty \subset \mathrm{BMO}_p \subset \mathrm{bmo}_p \subset L^p;$$

更多详情请参见 Weisz [42, p. 51]。当 $p = 2$ 时，显然

$$\mathrm{BMO}_2 = \mathrm{bmo}_2 \cap \mathrm{bmo}^d$$

且范数相等。John–Nirenberg 不等式指出，对于任意给定的 $p \in [1,\infty)$，$\mathrm{BMO}^p = \mathrm{BMO}_1$ 的范数等价。更多详情请参见 [18] 或 [24, 第 4] 章，相关研究还可参见 Nakai 和 Sadasue [29]。下文中，对于任意给定的 $p \in [1,\infty)$，我们均简称 BMO，而不再写作 BMO^p。

现在，我们回顾鞅 Hardy 空间的对偶定理。对于任意（拟）巴拿赫空间 X，我们用 X^* 表示 X 的对偶空间，即 X 上所有连续线性泛函构成的空间。

引理 2.8. 以下对偶结果成立：

(i) $(H_1)^* = \mathrm{BMO}$，且范数等价；

(ii) $(h_1)^* = \mathrm{bmo}_2$ 和 $(h_1^q)^* = \mathrm{bmo}^d$，且范数等价。

条目 (i) 的证明见 [24, 定理 2.2.2]，条目 (ii) 的证明见 [42, 定理 2.23] 和 [42,定理 2.32]。

2.3 鞅 Hardy 空间的原子分解

本小节将介绍第 2.1 节中定义的 Hardy 空间的原子分解。我们先回顾原子的定义；更多详情请参阅 Weisz 专著的 [42, 第 2] 章。

定义 2.9。若存在整数 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和集合 $A \in \mathcal{F}_n$，使得可测函数 a 满足以下条件，则称 a 为简单 (s,∞)-原子：

(i) $a_n := \mathbb{E}_n(a) = 0$;

(ii) a 的支撑 $\subset A$;

(iii) $\|s(a)\|_{L^\infty} \le [\mathbb{P}(A)]^{-1}$。

若将上述 (iii) 替换为 $\|a\|_{L^\infty} \le [\mathbb{P}(A)]^{-1}$，则得到简单$\infty$-原子的定义。

In t以下引理汇集了与简单 (s,∞)-原子相关的若干有用性质 s.

引理 2.10。设 a 是关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和 $A \in \mathcal{F}_n$的简单 (s,∞)-原子，则以下结论成立：

(i) 对任意 $T \in \{M, S, s\}$，T(a) 的支撑包含于集合 A；

(ii) 对任意 $p \in [1,2]$，都有 $\|M(a)\|_{L^p} \le 2[\mathbb{P}(A)]^{1/p-1}$;

(iii) 对任意 $p \in [1,2]$ 和 $T \in \{S, s\}$，都有 $\|T(a)\|_{L^p} \le [\mathbb{P}(A)]^{1/p-1}$;

(iv) 对任意 $p \in [1,2]$，有 $\|a\|_{L^p} \le [\mathbb{P}(A)]^{1/p-1}$。

特别地，a 属于 h_1。

证明。为完整起见，我们给出证明。注意到 $A \in \mathcal{F}_n$ and，对于任意 $m \le n$，$\mathbb{E}_m(a) = 0$。因此，对于任意 $m \in \mathbb{Z}_+$，$\mathbb{E}_m(a)\mathbf{1}_A = \mathbb{E}_m(a)$ 且 $d_m(a)\mathbf{1}_A = d_m(a)$，由此得到结论 (i)。根据结论 (i)，对于每个 $p \in [1,2]$，我们有

$$\begin{aligned}\|M(a)\|_{L^p} &= \|M(a)\mathbf{1}_A\|_{L^p} \le \|M(a)\|_{L^2}\,[\mathbb{P}(A)]^{1/p-1/2}\\ &\le 2\|a\|_{L^2}\,[\mathbb{P}(A)]^{1/p-1/2} = 2\|s(a)\|_{L^2}\,[\mathbb{P}(A)]^{1/p-1/2}\\ &\le 2\|s(a)\|_{L^\infty}\,[\mathbb{P}(A)]^{1/2}\,[\mathbb{P}(A)]^{1/p-1/2} \le 2\,[\mathbb{P}(A)]^{1/p-1},\end{aligned}$$

其中在第二个不等式中，我们使用了 Doob极大不等式（例如参见 [24, 定理 2.1。3]）。结论 (iii) 和结论 (iv) 可用与证明结论 (ii) 相同的方法证明。我们使用以下基本事实，而不使用 Doob极大不等式

$$\|a\|_{L^2} = \|S(a)\|_{L^2} = \|s(a)\|_{L^2}.$$

至此，引理 2.10 的证明完成。 □

现在转而讨论原子分解，该分解归功于 Herz，见 [19]。本文采用如下 h_1, 的简单原子分解，见 [42,定理 2.5]（另见 [41] 和 [33,第 5 章3]）。

引理 2.11. 设 $f \in h_1$。则存在一个简单 (s,∞)-原子序列 $(a^k)_{k\in\mathbb{Z}}$、一个实数序列 $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 以及正常数 C，使得对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$f_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k \mathbb{E}_n\left(a^k\right) \quad a.s.$$

and

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k| \le C\|f\|_{h_1}.$$

我们需要同时用到这样一个事实：$f \in h_1$，且 f 是一个 L^2-鞅。回到证明，可得以下性质。

注 2.12. 在引理 2.11 中，此外，若 f 是一个 L^2-鞅，则级数 $P_{k\in\mathbb{Z}}\mu_k\mathbb{E}_n(a^k)$ 也在 L^2 中收敛。

3 乘积与抛物乘积

在本节中，我们证明定理 1.1。取 $(f,g) \in H_1 \times BMO$。无需失去一般性，我们可以假设 $g_0 = 0$（否则，H_1,中有一个补充项，它包含在 $H^{\log}$中）。我们从以下恒等式出发：对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n g_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(d_j f)(d_k g) \tag{3.1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_{k-1}(d_k g) + \sum_{k=1}^{n} (d_k f) g_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} (d_k f)(d_k g)$$
$$=: \Pi_1(f,g)_n + \Pi_2(f,g)_n + L(f,g)_n.$$

首先注意，由于 $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|d_n g\|_{L^\infty} < \infty$，因此对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，每个 g_n 都有界。所以，上述表达式中的每一项都是可积的。我们从最后一项中看到了有界变差过程（我们将证明这一点）。注意，Π_1 和 Π_2 是抛物乘积。它们是鞅，因为对每个 $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_{k-1}(f_{k-1} d_k g) = 0 \text{ and } \mathbb{E}_{k-1}(d_k f g_{k-1}) = 0.$$

由此可知，$(f_n g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是一个半鞅。我们首先证明 $L(f,g)$ 有有界变差，然后证明鞅 $\Pi_1(f,g)$ 属于 H_1,，且映射 $(f,g) \mapsto \Pi_1(f,g)$ 连续；对 Π_2 也同样如此，只需将 H_1 替换为 $H^{\log}$。由于 H_1 包含于 $H^{\log}$，这将使我们能够完成定理 1.1 的证明。

3.1 有界变差过程

这由以下命题给出。

命题 3.1. 设 $f := (f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} \in H_1$，$g := (g_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} \in \mathrm{BMO}$。那么

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |d_k f|\,|d_k g| \in L^1.$$

特别地，过程 $L(f,g)$ 收敛到 L^1 中的一个函数。

证明。由对偶性 $(H_1)^* = \mathrm{BMO}$ 的证明（例如参见 [24, p. 43]），可以推得

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathbb{E}(|d_k f d_k g|) \le \sqrt{2}\|f\|_{H_1}\|g\|_{\mathrm{BMO}} < \infty.$$

所需结果由 L^1 是一个完备空间这一事实得出。命题 3.1 的证明至此完成。□

3.2 抛物乘积 Π_1

本小节旨在证明式 (3.1) 中定义的双线性算子 Π_1 的有界性。事实上，我们将证明一个更强的结论，即有以下命题。

命题 3.2。双线性算子 Π_1 将乘积空间 $H_1 \times \mathrm{bmo}_2$ 有界地映射到空间 h_1。

为证明命题 3.2，根据引理 2.4 中的 Davis 分解，我们可以将 f 写成两个鞅之和，一个属于 h_1，另一个属于 h_1^d。因此，我们需要分别考虑属于 h_1 和 h_1^d的鞅的情形。

引理 3.3. 设 f $\in h_1^d$ 且 g $\in bmo_2$。那么抛物乘积 $\Pi_1(f,g)$ 属于 h_1，且

$$\|\Pi_1(f,g)\|_{h_1} \le \|g\|_{bmo_2}\|f\|_{h_1^d}.$$

证明。由于 h_1 是巴拿赫空间，只需分别考虑乘积中的每一项，即每个 $\Pi_1(d_n(f),g) = d_n(f) P_{k\ge n+1} d_k(g)$。但是，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，

$$s(\Pi_1(d_n(f),g)) = |d_n(f)|\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} E_{k-1}\left([d_k(g)]^2\right)\right]^{1/2}.$$

我们对与 $\mathcal{F}_n$ 相关的条件期望应用施瓦茨不等式，并写出对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n(s(\Pi_1(d_n(f),g))) &\le |d_n(f)|\left[\mathbb{E}_n\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{E}_{k-1}\left([d_k(g)]^2\right)\right)\right]^{1/2}\\ &= |d_n(f)|\left[\mathbb{E}_n\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}[d_k(g)]^2\right)\right]^{1/2}.\end{aligned}$$

第二个因子由 g 的 bmo_2 范数控制，因此对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，

$$\mathbb{E}_n(s(\Pi_1(d_n(f),g))) \le |d_n(f)|\,\|g\|_{bmo_2}.$$

对两边取期望，再对 $n \in \mathbb{Z}_+$ 求和，即得结论。引理 3.3 的证明至此完成。□

为了证明关于 h_1，中鞅的命题，我们证明以下引理；该引理也给出了一个显式常数，不过针对的是原子。

引理 3.4. 对任意简单的 (s,∞)-原子 a 以及任意 $g \in bmo_2$，

$$\|\Pi_1(a,g)\|_{h_1} \le 2\|g\|_{bmo_2}.$$

证明. 令 $g \in bmo_2$。由于 a 是一个简单的 (s,∞)-原子，因此存在 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和 $A \in \mathcal{F}_n$，使得 $\mathbb{E}_n(a) = 0$ 且 $\operatorname{supp}(a) \subset A$。因此，对任意 $k \in \{0,\dots,n\}$，都有 $a_k = \mathbb{E}_k(a) = 0$。于是

$$\Pi_1(a,g) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_{k-1}d_k g = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k-1}d_k g,$$

结合 s 和 bmo_2,的定义，可进一步推出

$$\begin{aligned}s(\Pi_1(a,g)) &= \left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{E}_{k-1}\left(|a_{k-1}|^2|d_k g|^2\right)\right]^{1/2}\\ &= \left[\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_{k-1}|^2\mathbb{E}_{k-1}\left(|d_k g|^2\right)\right]^{1/2} \le M(a)\|g\|_{bmo_2}.\end{aligned}$$

由上述论证以及引理 2.10 的 (i) 和 (ii)，可推得

$$\|\Pi_1(a,g)\|_{h_1} \le \|M(a)\|_{L^1}\|g\|_{bmo_2} \le \|M(a)\|_{L^2}\mathbb{P}(A)^{1/2}\|g\|_{bmo_2} \le 2\|g\|_{bmo_2},$$

由此完成引理 3.4 的证明。□

现在我们可以证明命题 3.2 了。

命题 3.2 的证明。取 $(f, g) \in H_1 \times BMO$。根据引理 2.4，存在一个分解 $f = f^1 + f^d$，使得 $f^1 \in h_1$ 且 $f^d \in h_1^d$，其中

$$\left\|f^1\right\|_{h_1} \lesssim \|f\|_{H_1} \text{ and } \left\|f^d\right\|_{h_1^d} \lesssim \|f\|_{H_1}.$$

根据 h_1 的原子分解（引理 2.11），我们有

$$f^1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k a^k \text{ a.s. and } \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k| \lesssim \left\|f^1\right\|_{h_1},$$

其中 $(a^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是由简单的 (s, ∞)-原子构成的序列。结合这一点与引理 3.3 和 3.4，我们得到

$$\begin{aligned}\|\Pi_1(f,g)\|_{h_1} &\le \left\|\Pi_1\left(f^1, g\right)\right\|_{h_1} + \left\|\Pi_1\left(f^d, g\right)\right\|_{h_1} \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k| \cdot \left\|\Pi_1\left(a^k, g\right)\right\|_{h_1} + \left\|\Pi_1\left(f^d, g\right)\right\|_{h_1} \\ &\lesssim \left\|f^1\right\|_{h_1} \|g\|_{\mathrm{bmo}_2} + \left\|f^d\right\|_{h_1^d} \|g\|_{\mathrm{bmo}_2} \lesssim \|f\|_{H_1} \|g\|_{\mathrm{bmo}_2}.\end{aligned}$$

至此，命题 3.2 得证。 □

注 3.5。这里指出，命题 3.2 可由 [13, 推论 6] 得出，该推论是通过停时论证证明的。这里，我们通过使用鞅 Hardy 空间的原子分解，给出命题 3.2 的另一种证明。此外，我们的论证还使我们能够通过使用原子分解建立交换子的端点估计（见下文第 4 节）。

3.3 算子 Π_2的有界性

本小节的目标是证明，在（3.1）中定义的双线性算子 Π_2 从 $H_1 \times$BMO 到 $H^{\log}$有界，即得到以下结果。

命题 3.6. 双线性算子 Π_2 是从乘积空间 $H_1 \times$BMO 到空间 $H^{\log}$的有界算子。

证明。证明很直接。和前面一样，我们可以假设 $g_0 = 0$。这里不必分别考虑 h_1 和 h^d。我们写作

$$S(\Pi_2(f,g)) = \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} |g_{n-1}|^2 d_n(f)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le M(g) S(f). \tag{3.2}$$

于是，当前命题可由下面两个众所周知的引理推出。第一个引理是 John–Nirenberg 不等式的一个改编版本，可见于 [24, p. 131],，它说明 M(g) 属于指数类。回顾一下，若存在正常数 α，使得 $\exp(\alpha\psi)$ 可积，则函数 ψ 属于指数类 exp L。指数类 exp L 是一个巴拿赫空间，我们可以将以下量作为 Luxemburg 范数：

$$\|\psi\|_{\exp L} := \inf\left\{\lambda \in (0,\infty) : \mathbb{E}\left(\exp(\psi/\lambda)\right) \le 2\right\}.$$

引理 3.7. 设 g 是 BMO 中的一个鞅，且 $g_0 = 0$。那么 Mg 属于指数类，并且存在一个与 g 无关的正常数 C，使得

$$\|Mg\|_{\exp L} \le C\|g\|_{\mathrm{BMO}}.$$

然后，我们利用以下广义 Hölder 不等式完成命题 3.6 的证明。该不等式例如可见于 [40, 引理 3.2]（另见 [2]）。为完整起见，我们给出一个简短证明。这里只陈述 Ω 上两个函数以及我们所考虑的 Orlicz 函数情形下的引理，但它在一般情形下也成立。

引理 3.8. 设 ϕ 是 L^1, 中的函数，且 ψ 是指数类中的函数。那么，乘积$\phi\psi$属于 $L^{\log}$。此外，存在正常数 C，使得

$$\|\phi\psi\|_{L^{\log}} \le C\|\phi\|_{L^1}\|\psi\|_{\exp L}.$$

正常数 C 与 ϕ、ψ无关。

证明. 由乘积两个因子的齐次性，不妨设两个范数均为 1。此外，与 Hölder 不等式的证明类似，该不等式可由一个初等不等式推出。这里我们断言，对于任意 s、t $\in (0,\infty)$,

$$\frac{st}{\log(e+st)} \le t + e^s.$$

事实上，当 s 或 t 小于 1 时，这显然成立。假设 $1 < s < \log(e+t)$。那么左边有界于 t。最后，如果 $e^s > t + e$，左边有界于 e^s。为完成本引理的证明，我们分别用 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 替换 s 和 t，然后对 x 积分。引理 3.8 的证明至此完成。□

现在命题 3.6 的结论显而易见：只需用 M(g) 替换 ψ，它根据引理 3.7 属于指数类；再用 S (f) 替换 ϕ。由此命题 3.6 的证明完成。□

注 3.9。我们注意到，命题 3.6 的证明与 [3, 第 3 节4] 完全相同，尽管所引用的参考文献不同。事实上，两者都依赖于 BMO 函数的一项强性质。作者引用了 [3] Garcia 的书 [18]，以说明对于任意 g $\in$ BMO，M(g) 仍属于 BMO；而我们直接采用 Long 的书 [24], , 其中直接给出了当 g $\in$BMO 时关于 M(g) 的 John–Nirenberg 不等式。

3.4 定理 1.1 的证明

现在我们可以借助命题 3.1、3.2 和 3.6 证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明。设 (f, g) $\in H_1 \times$ BMO。显然，对于任意 n $\in \mathbb{Z}_+$,

$$f_n g_n = \Pi_1(f,g)_n + \Pi_2(f,g)_n + L(f,g)_n.$$

于是，根据命题 3.1，L 从乘积空间 $H_1 \times$BMO 有界映射到空间 L^1。令 G := $\Pi_1 + \Pi_2$。注意，$H_1 \subset H^{\log}$ 且 $h_1 \subset H_1$。结合这一观察与命题 3.2 和命题 3.6，可得 G 从 $H_1 \times$BMO 有界映射到 $H^{\log}$。定理 1.1 的证明至此完成。□

回顾一下，空间 H_1 也可以定义为满足 M f 属于 L^1,的鞅 f 所构成的空间；也就是说，我们可以用 Doob 极大算子 M 替代鞅平方算子 S。对于空间 $H^{\log}$ ，情况则不再如此，因此我们将 $H^M_{\log}$ 定义为满足 M f 属于 $L^{\log}$的鞅 f 所构成的空间。尽管如此，我们仍有以下结论。

The理 3.10。将空间 $H^{\log}$ 替换为空间 H 时，定理 1.1 仍然成立 $^M_{\log}$.

证明。只需修改命题 3.6。我们注意到，前面的证明可直接推广到 $f \in h^d_1$ ，因为

$$M(\Pi_2(f,g)) \le M(g) \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} |d_n(f)|.$$

对于 $f \in h_1$, ，我们注意到

$$s(\Pi_2(f,g)) \le M(g)\, s(f),$$

因此 $\Pi_2(f, g)$ 属于 $h^{\log}$。但这个空间是 $H^M_{\log}$ 的子空间（例如参见 [27, (2.5)]）。由此也可得出任意 $f \in h_1$的情形。为完成本定理的证明，对于 $f \in H_1$, ，我们在引理 2.4 中使用 Davis 分解，将 f 写为 $f = f^1 + f_d$，并利用 $H^M_{\log}$ 是拟巴拿赫空间这一事实，从而

$$\|\Pi_2(f,g)\|_{H^M_{\log}} \lesssim \left\|\Pi_2(f^1,g)\right\|_{H^M_{\log}} + \left\|\Pi_2(f^d,g)\right\|_{H^M_{\log}}.$$

证明的其余部分是直接的。定理3.10 的证明至此完成。 □

注3.11. 要说明两个 Hardy 空间 $H^M_{\log}$ 和 $H^{\log}$ 一般并不相同，可以采用与证明 [42, 命题2.16]时类似的论证。

在对滤过作出假设时，论证可以简化。回顾一下，若存在正常数 C^{reg} ，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $A \in \mathcal{F}_n$，都存在集合 $B \in \mathcal{F}_{n-1}$ ，满足 $A \subset B$ 且

$$\mathbb{P}(B) \le C_{\mathrm{reg}}\mathbb{P}(A).$$

等价地 （例如参见 [24, 第 265]页），对于任意 $\mathcal{F}_n$ 可测非负函数 f ，

$$f \le C_{\mathrm{reg}}\mathbb{E}_{n-1}(f).$$

我们将在下面的例4.19和5.2中给出鞅的具体例子，其中既包括正则鞅，也包括非正则鞅。

若滤过 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$是正则的，则有 $s(f) \sim S(f)$，因此存在常数 $C \in [1,\infty)$，使得对于任意 $f \in h_1$,

$$C^{-1}\|f\|_{h_1} \le \|f\|_{H_1} \le C\|f\|_{h_1} \tag{3.3}$$

并且，对于任意 $f \in h^{\log}$,

$$C^{-1}\|f\|_{h_{\log}} \le \|f\|_{H_{\log}} \le C\|f\|_{h_{\log}}. \tag{3.4}$$

例如，参见 [42, 推论 2.23] 和 [27, 定理 2.5]。

注 3.12. 设 $p,q \in [1,\infty)$。如果相关的 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是正则的，那么所有空间 BMO^p 和 bmo^q 都等价；更多详情请参见 [42, 推论 2.51] 。

利用定理 1.1、(3.3)、(3.4) 和注 3.12，我们得到如下双线性分解。

推论 3.13. 若滤过 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 正则，则将定理 1.1 中的空间 H_1, BMO 和 $H^{\log}$ 分别替换为 h_1, bmo 和 $h^{\log}$ 后，定理 1.1 仍然成立。

正如我们所见，在定理 1.1 的证明中，引理 3.8 在算子 Π_2 的估计中起着重要作用。众所周知，对于 bmo^p，John–Nirenberg 不等式一般不成立。 [42, Example 2.17] 中给出了一个反例。这就是为什么在定理 1.1 中，我们一般不能用 bmo_2 替换空间 BMO。

3.5 稠密性与终值

定义鞅的乘积时，人们曾想将其定义为终值的乘积。但是，正如我们在引言中所见，乘积 $f_\infty g_\infty$ 虽然几乎处处有定义，但通常并非可积。$H^{\log}$ 中的鞅也没有终值。不过，我们可以利用稠密性，为这些公式赋予意义，这要用到下面这个众所周知的引理（例如参见 [24,第 42] 页）。

引理 3.14. L^2-鞅空间在 H_1 中稠密。

现在，假设 f 是一个 L^2-鞅，g 是一个 BMO 鞅，则函数 $f_\infty g_\infty$ 对任意 $p \in (0,2)$ 都属于 L^p，而 $(\mathbb{E}_n(f_\infty g_\infty))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是一个 L^1-鞅。与之前一样，我们可以写成

$$f \cdot g = L(f,g) + G(f,g).$$

由于 $L(f,g)$ 和 $\Pi_1(f,g)$ 在 L^1, 中有终值，因此 $\Pi_2(f,g)$ 也同样如此。由 (3.2) 可立即推出，对于任意 $p \in (0,2)$，$\Pi_2(f,g)$ 是一个 L^p-鞅，特别地，它也是一个 L^1-鞅。前一个等式也可以写成

$$f_\infty g_\infty = (f\cdot g)_\infty = \Pi_1(f,g)_\infty + \Pi_2(f,g)_\infty + L(f,g)_\infty. \tag{3.5}$$

在适用时，我们也用 $\Pi_j(f,g)$ 表示任意 $j \in \{1,2\}$，以此代替它们的终值。定理 1.1 随即推出以下结果，它讨论的是函数而非鞅。这里，如注 2.1 中所建议的，我们将一个 L^1 函数 f 与鞅 $(\mathbb{E}_n(f))_{n\in\mathbb{Z}_+}$等同起来，并称其属于 BMO（分别属于 H_1 或 $H^{\log}$），如果这个鞅属于 BMO（分别属于 H_1 或 $H^{\log}$）。采用这些记号，我们由定理 1.1 推得以下结论。

推论 3.15. 存在两个双线性算子和一个正常数 C，使得 $L : L^2 \times \mathrm{BMO} \to L^1$ 且 $G : L^2 \times \mathrm{BMO} \to L^{3/2}$，并且对于任意 $\varphi \in L^2$ 和 $\psi \in \mathrm{BMO}$,

$$\varphi\psi = \mathbf{L}(\varphi,\psi) + \mathbf{G}(\varphi,\psi)$$

with

$$\|\mathbf{L}(\varphi,\psi)\|_{L^1} \le C\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{\mathrm{BMO}} \text{ and } \|\mathbf{G}(\varphi,\psi)\|_{H_{\log}} \le C\|\varphi\|_{H_1}\|\psi\|_{\mathrm{BMO}}.$$

3.6 乘子

由对偶性，定理 1.1 导出了一个关于 BMO 逐点乘子的定理，我们现在给出其定义。

定义 3.16. 设 X 是由 $\mathcal{F}$-可测函数构成的赋范空间。若对任意 $f \in X$，逐点乘积 fg 都属于 X，且存在一个与 f 无关的正常数 C，使得

$$\|fg\|_X \le C\|f\|_X.$$

我们用 PWM(X) 表示 X 上所有逐点乘子的集合。对于任意 $g \in \mathrm{PWM}(X)$，其范数定义为

$$\|g\|_{\mathrm{PWM}(X)} := \sup_{f\in X,\|f\|_X\neq 0} \frac{\|fg\|_X}{\|f\|_X}.$$

应用定理 1.1，可得以下推论。

推论 3.17. $(H^{\log})^*$ 中的有界函数是 BMO 的逐点乘子。特别地，对于正则滤过，$(h^{\log})^*$ 中的有界函数是 BMO 的逐点乘子。

证明。首先注意到，由于 H_1 包含于 $H^{\log}$，其对偶空间可视为 BMO 的子空间，而 $L^1 + H^{\log}$ 的对偶空间可视为 $L^\infty \cap (H^{\log})^*$。此外，若 $b \in L^\infty \cap (H^{\log})^*$ 且 $f \in L^2$,，则对偶性由 L^2, 中的标量积给出，且

$$|\mathbb{E}(bf)| \le \|b\|\,\|f\|_{L^1+H_{\log}}.$$

设 $g \in$BMO。对于任意 $f \in L^2$,，乘积 bg f 对任意 $p \in (0, 2)$ 都属于 L^p，由定理 1.1 可得

$$|\mathbb{E}(bgf)| \lesssim \|f\|_{H_1}\|g\|_{\mathrm{BMO}}.$$

由于 L^2 在 H_1, 中稠密，这意味着 bg 可视为一个 BMO 函数，也就是说，b 是 BMO 的逐点乘子。关于正则滤过的最后一条陈述是引理 2.8 和 (3.4) 的推论。推论 3.17 的证明至此完成。□

对于正则鞅的情形，可以直接从 Nakai 和 Sadasue 的工作 [28] 中推导出证明。他们还在所有 σ-代数 $\mathcal{F}_n$ 均由原子生成这一特殊情形下给出了一个逆命题。回想一下，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，若集合 $B \in \mathcal{F}_n$ 不存在子集 $A \subset B$，使得 $A \in \mathcal{F}_n$ 满足 $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$，则称 B 为 $\mathcal{F}_n$ 的一个原子。鞅 Campanato 空间 $\mathrm{bmo}^{\log}$ 定义为所有满足下列条件的鞅 $f \in L^2$ 的集合：

$$\|f\|_{\mathrm{bmo}_{\log}} := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\sup_{A\in\mathcal{F}_n} \frac{1}{\phi(\mathbb{P}(A))}\left[\frac{1}{\mathbb{P}(A)}\int_A |f-\mathbb{E}_n(f)|^2\,d\mathbb{P}\right]^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

其中 $\phi(r) := \frac{1}{r\Phi^{-1}(1/r)}$，对任意 $r \in (0,\infty)$，且 Φ 是一个凹函数，与函数 $r \mapsto r\log(e+r)$ 等价，~~对任~~意 $r \in (0,\infty)$。定理 2.10] 证明了 $(h^{\log})^* = \mathrm{bmo}^{\log}$具有等价范数。

在 [28, 推论 1.5], 中，Nakai 和 Sadasue 确定了鞅 Campanato 空间的逐点乘子；在我们的情形下，这给出了如下结论。

引理 3.18. 假设滤过 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是正则的，并且对任意 $n \in \mathbb{N}$，每个 σ-代数 $\mathcal{F}_n$都由可数个原子和 $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$生成。那么

$$\mathrm{PWM}(\mathrm{bmo}_1) = \mathrm{bmo}_{\log} \cap L^\infty$$

具有等价范数。

这意味着，从某种意义上说，在这个特定情形下，定理 1.1 已是最佳可能结果：其对偶命题也是最佳可能结果。

4 鞅框架下交换子的端点估计

本节中，我们将上一节建立的双线性分解应用于研究鞅框架下交换子的端点估计。我们还将给出定理 1.3 和 1.4 的证明。首先，我们定义所要研究交换子的算子类。

4.1 一类算子

本小节旨在证明定理 1.3。我们首先引入 $\mathcal{K}_q$ 次线性算子这一类。回顾一下，我们称函数 $g \in L^1$ 为鞅跳跃，若存在某个 $n \in \mathbb{Z}_+$，使得 g 是 $\mathcal{F}_n$ 可测的，且 $\mathbb{E}_{n-1}(g) = 0$。对于任意 $q \in [1, \infty)$，空间 $L^{q,\infty}$ 定义为 Ω 上所有满足下述条件的可测函数 f 的集合

$$\|f\|_{L^{q,\infty}} := \sup_{t>0} t\left[\mathbb{P}\left(\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}\right)\right]^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

定义 4.1. 设 $q \in [1, \infty)$。记 $\mathcal{K}_q$ 为所有定义在 L^2 上且满足下列条件的连续次线性算子 T 的集合

(i) T 是从 H_1 到 L^q的有界算子；

(ii) T 是从 L^1 到 $L^{q,\infty}$的有界算子；

(iii) 若 a 是关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$的简单 (s, ∞)-原子，则对任意 $b \in \mathrm{BMO}$，

$$\|(b - b_{n-1})T(a)\|_{L^q} \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}} \tag{4.1}$$

and

$$\|[T, b_{n-1}](a)\|_{L^q} \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}}; \tag{4.2}$$

(iv) 若 g 是关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$的鞅跳跃，则对任意 $b \in \mathrm{BMO}$，

$$\|(b - b_{n-1})T(g)\|_{L^q} \le C\|g\|_{L^1}\|b\|_{\mathrm{BMO}} \tag{4.3}$$

and

$$\|[T, b_{n-1}](g)\|_{L^q} \le C\|g\|_{L^1}\|b\|_{\mathrm{BMO}}, \tag{4.4}$$

其中 C 是一个与 a、g 和 b 无关的正常数。

记 $\mathcal{K}_H$ 为所有满足以下条件的 $T \in \mathcal{K}_1$ 的集合：当且仅当 $f \in H_1$ 时，$T(f) \in L^1$。

回顾一下，若算子 T 满足：对于任意函数 f、g 及任意标量 α、β，都有

$$|T(\alpha f + \beta g)| \le |\alpha|\,|Tf| + |\beta|\,|Tg|.$$

特别地，对于任意函数 f、g，

$$\big||Tf| - |Tg|\big| \le |T(f-g)|.$$

注 4.2. 根据 (3.3)，若滤过 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是正则的，则鞅空间 H_1 也具有原子分解。因此，在正则情形下，定义 4.1 中的 (4.3) 和 (4.4) 并非必要。此外，在这种情形下，我们可以用简单的 ∞-原子代替简单的 (s,∞)-原子；参见 [42, 推论 2.23] 和 [42, 定理 2.5]。因此，在正则情形下，要证明 (4.1) 和 (4.2)，只需证明对于关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 的任意简单 ∞-原子 a，(4.1) 和 (4.2) 均成立。

此外，如果 σ-代数 $\mathcal{F}_n$ 是原子的，我们就不需要假设 (4.2) 和 (4.4)，因为在这种情况下，b_{n-1} 在一个原子的支撑上为常数。这解释了为什么 Ky 在经典情形 [21]下不需要这些假设。

注 4.3。与 [21], 中 Ky 的定义相比，我们假设 T 已经是 L^2 上的有界算子。这对应用而言并非问题，因为这一条件总是满足的。加入这一假设是为了能够在稠密子集上定义交换子。Ky [21] 使用了有限原子分解，而这种分解尚未在鞅的背景下得到发展。另一方面，我们允许 q 取其他值，而不只是 [21], 中的 $q = 1$，因此也可以处理分数积分算子。

接下来，我们证明 Doob 极大算子 M 和平方函数 S 都属于 $\mathcal{K}_1$。在第4.4节中，我们将给出更多属于 $\mathcal{K}_q$ 的次线性算子的例子。

例 4.4. 设 T 为 Doob 极大算子 M 或平方函数 S。则 $T \in \mathcal{K}_1$。

证明。对于 S，H_1 的定义蕴含了 $q = 1$ 时的定义 4.1(i)；对于 M，这可由引理 2.4 得出。M 和 S 都是弱型 (1, 1)，因此满足 $q = 1$ 时的定义 4.1(ii)；参见 [24, 定理 2.1.1 和 2.1.2]。为了证明它们同时满足定义 4.1 的 (iii) 和 (iv)，我们先证明 (4.1) 和 (4.3) 对 $T = M$ 成立。另一种情形可用类似的论证证明。设 a 是相对于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 的 $A \in \mathcal{F}_n$ 的简单 (s,∞)-原子。由引理 2.10(i)，可知 $\operatorname{supp}(M(a)) \subset A$。利用条件期望的 Jensen 不等式和 Hölder 不等式，我们推得，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$（为方便起见，记 $b_{-1} := 0$），

$$\begin{aligned}
\|(b-b_{n-1})\,M(a)\|_{L^1} &= \int_A |b-b_{n-1}|\cdot M(a)\,d\mathbb{P} \\
&= \int_A \mathbb{E}_n\left(|b-b_{n-1}|\cdot M(a)\right)\,d\mathbb{P} \\
&\le \int_A \left[\mathbb{E}_n\left(|b-b_{n-1}|^2\right)\right]^{1/2}\cdot\left[\mathbb{E}_n\left(M(a)^2\right)\right]^{1/2}\,d\mathbb{P} \\
&\le \|b\|_{\mathrm{BMO}}\left\|\left[\mathbb{E}_n\left(M(a)^2\right)\right]^{1/2}\right\|_{L^2}\|\mathbf{1}_A\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

利用引理 2.10(ii)，可得，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，

$$\left\| \left[\mathbb{E}_n \left(M(a)^2 \right) \right]^{1/2} \right\|_{L^2} = \|M(a)\|_{L^2} \le 2 \left[\mathbb{P}(A) \right]^{-1/2}.$$

因此，我们有

$$\|(b - b_{n-1})\, M(a)\|_{L^1} \le 2\|b\|_{\mathrm{BMO}}.$$

这表明 (4.1) 对 M 成立。

现在，假设 g 是相对于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 的鞅跳跃。那么 g 是 $\mathcal{F}_n$-可测的，且 $\mathbb{E}_{n-1}(g) = 0$ ($\mathbb{E}_{-1}(g) := 0$ 为方便起见)，因此，$M(g) = |g|$。于是，我们得到

$$\begin{aligned} \|(b - b_{n-1})M(g)\|_{L^1} &= \int_\Omega |b - b_{n-1}| \cdot |g| \, d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega |g| \cdot \mathbb{E}_n(|b - b_{n-1}|) \, d\mathbb{P} \\ &\le \|b\|_{\mathrm{BMO}} \int_\Omega |g| \, d\mathbb{P} \le \|g\|_{L^1} \|b\|_{\mathrm{BMO}}. \end{aligned}$$

因此，(4.3) 对 M 成立。

最后，我们证明 (4.2) 和 (4.4) 对 M 也成立。显然，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，当函数 f 满足对任意 $k \in \{0, \dots, n-1\}$，$d_k(f) = 0$ 时，$M(b_{n-1} f) = b_{n-1} M(f)$。对于这些函数，算子 M 与乘以 b_{n-1} 的算子可交换，因此可以推出这两条性质。由上述论证可知，对于 Doob 极大算子 M，定义 4.1 在 $q = 1$ 时成立。对于 S 的证明类似。例 4.4 的证明至此完成。□

4.2 定理 1.3 的证明与算子 U

定理 1.3 的证明。现在定义次线性算子 $T \in \mathcal{K}_q$ 与 $b \in \mathrm{BMO}$ 的交换子 $[T, b]$。对于任意 $f \in L^2$ 和 $x \in \Omega$，在 L^2 上将其定义为：

$$[T, b](f)(x) := T(bf - b(x)f)(x).$$

对于 H_1 中的函数，每个分离项（在线性情形下）都没有意义。但函数 $[T, b](f)$ 对 L^2 是定义良好的；对于任意 $p \in [1, 2)$，它是 L^p 中的函数。通过从稠密空间 L^2 连续延拓，可将其定义在 H_1 上。我们首先需要求出先验估计。

因此，我们首先对任意 $f \in L^2$ 证明本定理。一旦证明了恰当的先验估计，它便自动延拓到 H_1。

我们首先考虑线性情形，并使用旁乘积分解 (3.5)，从而得到

$$[T, b](f) = T(\Pi_1(f, b)) + T(\Pi_2(f, b)) + T(L(f, b)) - bT(f).$$

利用命题 3.2 和定义 4.1(ii)，我们已经知道，$f \mapsto T(\Pi_1(f, b))$ 可延拓为从 H_1 到 L^q 的有界算子，且 $q \in [1, \infty)$。接下来只需考虑另一项。对于一般的次线性算子 $T \in \mathcal{K}_q$ （满足 $q \in [1, \infty)$）而言，该项可写为

$$U(f, b)(x) = T(\Pi_2(f, b) - b(x)f)(x). \tag{4.5}$$

事实上，与之前一样，目前在一般情形下这个量并未定义良好，但当 f 属于 L^2 时则有意义。我们将在 L^2 函数的稠密子集上建立先验估计，从而通过连续性定义 U。关于 U 的主要结果如下。

引理 4.5. 设 $q \in [1,\infty)$，且 U 与 (4.5) 中的相同，其中 $T \in \mathcal{K}_q$。则 U 可延拓为从 $H_1 \times BMO$ 到 L^q 的有界算子。

若暂且接受此引理，则当 T 为线性算子时，定理 1.3 的证明立即成立。当 T 仅为次线性算子时，我们令

$$R(f,b) := |U(f,b)| + |T(\Pi_1(f,b))|.$$

那么容易证明

$$|T(\Pi_3(f,b))| - R(f,b) \le |[T,b](f)| \le R(f,b) + |T(\Pi_3(f,b))|$$

然后以与线性情形相同的方式得出所需结论。至此，定理 1.3 的证明完成。□

现在我们来证明引理 4.5，其证明需要一系列引理。我们先给出以下结果。

引理 4.6. 假设 a 是关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 的简单 (s,∞)-原子，并假设 $A \in \mathcal{F}_n$。若 $b \in BMO$，则

$$\|\Pi_2(a, b - b_{n-1})\|_{H_1} \le 2\|b\|_{BMO}.$$

Proof。根据关于 a 的假设，对于任意 $k \in \{0,\dots, n\}$，我们有 $d_k a = 0$。因此，

$$\begin{aligned}
&\|\Pi_2(a, b - b_{n-1})\|_{H_1} \\
&= \left\| \sum_{k\ge n+1} (b_{k-1} - b_{n-1}) d_k a \right\|_{H_1} = \left\| \left(\sum_{k\ge n+1} |b_{k-1} - b_{n-1}|^2 |d_k a|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1} \\
&\le \left\| \left(\sum_{k\ge n+1} |b_{k-1} - b|^2 |d_k a|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1} + \left\| \left(\sum_{k\ge n+1} |b - b_{n-1}|^2 |d_k a|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1} \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

我们先估计 I_1。注意，对每个 $k \ge n+1$，$\operatorname{supp}(d_k a) \subset A$。因此，由 H¨older 不等式可得

$$I_1 \le \left\| \left(\sum_{k\ge n+1} |b_{k-1} - b|^2 |d_k a|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2} \|\mathbf{1}_A\|_{L^2}.$$

另一方面，根据 BMO 的定义和引理 2.10(iv)，我们有

$$\left\| \left(\sum_{k\ge n+1} |b_{k-1} - b|^2 |d_k a|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2}^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\ge n+1}\int_\Omega |b-b_{k-1}|^2|d_k a|^2\,d\mathbb{P}\\
&= \sum_{k\ge n+1}\int_\Omega \mathbb{E}_k\left(|b-b_{k-1}|^2\right)|d_k a|^2\,d\mathbb{P}\\
&\le \|b\|_{\mathrm{BMO}}^2\|S(a)\|_{L^2}^2 \le \|b\|_{\mathrm{BMO}}^2\,[\mathbb{P}(A)]^{-1}.
\end{aligned}
$$

因此，$\mathrm{I}_1 \le \|\mathrm{b}\|_{\mathrm{BMO}}$。

接下来，我们估计 I_2。由于 supp (S (a)) $\subset$ A（见引理 2.10）且 A $\in \mathcal{F}_n$，由 H¨older 不等式和引理 2.10(iii) 可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(\sum_{k\ge n+1}|b-b_{n-1}|^2|d_k a|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^1}\\
&\quad\le \||b-b_{n-1}|S(a)\mathbf{1}_A\|_{L^1} \le \||b-b_{n-1}|\mathbf{1}_A\|_{L^2}\|S(a)\|_{L^2}\\
&\quad\le \left[\int_\Omega \mathbb{E}_n\left(|b-b_{n-1}|^2\right)\mathbf{1}_A\,d\mathbb{P}\right]^{\frac12}\|S(a)\|_{L^2} \le \|b\|_{\mathrm{BMO}}.
\end{aligned}
$$

这就得到了所需的不等式，从而完成了引理 4.6 的证明。 □

我们回到算子 U。

Lemma 4.7. 设 q $\in [1,\infty)$ 且 T $\in \mathcal{K}_q$。则存在正常数 C，使得

(i) 对任意简单的 (s,∞)-原子以及任意 b $\in$ BMO，

$$\|U(a,b)\|_{L^q} \le C\|b\|_{\mathrm{BMO}};$$

(ii) 对任意鞅跳跃 g 和任意 b $\in$ BMO，

$$\|U(g,b)\|_{L^q} \le C\|g\|_{L^1}\|b\|_{\mathrm{BMO}}.$$

证明。我们先证明 (i)。不失一般性，可设 a 是关于某个 n $\in \mathbb{Z}_+$ 和 A $\in \mathcal{F}_n$的简单 (s,∞)-原子。注意到 $\Pi_2(\mathrm{a},\mathrm{b}_{n-1}) = \mathrm{ab}_{n-1}$。由此，我们将 U(a, b) 改写为：对任意 x $\in \Omega$，

$$U(a,b)(x) = T\left(\Pi_2(a,b-b_{n-1}) + [b_{n-1}-b_{n-1}(x)]a + [b_{n-1}(x)-b(x)]a\right) \tag{4.6}$$

由于 T $\in \mathcal{K}_q$，由定义 4.1 可知，T 从 H_1 到 L^q有界。利用这一点以及 (4.1)、(4.2) 和引理 4.6，我们得到

$$
\begin{aligned}
\|U(a,b)\|_{L^q} &\le \|T(\Pi_2(a,b-b_{n-1}))\|_{L^q} + \|[T,b_{n-1}](a)\|_{L^q}\\
&\quad + \|(b-b_{n-1})T(a)\|_{L^q}\\
&\lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}} + \|\Pi_2(a,b-b_{n-1})\|_{H_1} \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}}.
\end{aligned}
$$

这就证明了 (i)。

对于相对于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 的任意鞅跳跃 g，我们有

$$\Pi_2(g, b - b_{n-1}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} d_k g \mathbb{E}_{k-1}(b - b_{n-1}) = g\mathbb{E}_{n-1}(b - b_{n-1}) = 0$$

以及 $\Pi_2(g, b_{n-1}) = gb_{n-1}$。利用 (4.6)、(4.4) 和 (4.3)，即可得到 (ii)。引理 4.7 的证明至此完成。□

最后证明引理 4.5。

引理 4.5 的证明。取 $(f, b) \in H_1 \times \mathrm{BMO}$。由引理 2.4 可知，存在分解 $f = f^1 + f^d$，使得 (2.1) 成立。此外，根据注 2.5，我们可以假设 f^1 和 f^d 都是 L^2-鞅。由引理 2.11 可推知，存在一列简单的 (s, ∞)-原子 $(a^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 和一列实数 $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$，使得

$$f^1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k a^k \text{ a.s.}$$

此外，利用注 2.12，我们可以假设该级数在 L^2 中收敛，并且

$$U\left(f^1, b\right) = \lim_{n\to\infty} U\left(\sum_{k=-n}^{n} \mu_k a^k, b\right).$$

类似地，我们也有

$$U\left(f^d, b\right) = \lim_{n\to\infty} U\left(\sum_{k=-n}^{n} d_k(f^d), b\right).$$

为了证明该极限定义了 H_1，上的有界次线性算子，只需证明当 f^1 和 f^d 均替换为有限和时，该算子具有一致有界性。在这种情况下，结合前面的等式、引理 4.7 和 (2.1)，我们得到

$$\begin{aligned}
\|U(f, b)\|_{L^q} &\le \left\|U\left(f^1, b\right)\right\|_{L^q} + \left\|U\left(f^d, b\right)\right\|_{L^q} \\
&\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k| \left\|U\left(a^k, b\right)\right\|_{L^q} + \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\|U\left(d_n(f^d), b\right)\right\|_{L^q} \\
&\lesssim \left\|f^1\right\|_{h_1} \|b\|_{\mathrm{BMO}} + \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\|d_n(f^d)\right\|_{L^1} \|b\|_{\mathrm{BMO}} \\
&\approx \left(\left\|f^1\right\|_{h_1} + \left\|f^d\right\|_{h_1^d}\right) \|b\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|f\|_{H_1} \|b\|_{\mathrm{BMO}}.
\end{aligned}$$

引理 4.5 的证明至此完成。□

现在给出两个推论。第一个是定理 1.3 的另一种表述，另一个则是直接推论。

推论 4.8. 设 $q \in [1, \infty)$、$T \in \mathcal{K}_q$，且 $b \in \mathrm{BMO}$。那么 $[T, b](f)$ 属于 L^1，当且仅当 $T(L(b, f))$ 属于 L^1。

推论 4.9. 设 q $\in [1,\infty)$、T $\in \mathcal{K}_q$，且 b $\in$ BMO。那么存在正常数 C，使得对于任意 f $\in H_1$，

$$\|[T,b](f)\|_{L^{q,\infty}} \le C\|f\|_{H_1}.$$

证明。只需使用定理 1.3、L(f, b) 属于 L^1，这一事实，以及 T 的弱 L^q 估计。由此推论 4.9 的证明完成。□

我们来写出定理 1.3 对极大算子的推论。回顾一下，$\mathcal{K}_H$ 是所有满足以下条件的 T $\in \mathcal{K}_1$ 的集合：T (f) $\in L^1$ 当且仅当 f $\in H_1$。根据例 4.4，我们发现 Doob 极大函数 M $\in \mathcal{K}_H$。可以验证

$$[M,b](f) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |[\mathbb{E}_n, b](f)|.$$

由定理 1.3，我们立即得到以下结果。

推论 4.10。对于任意 (f, b) $\in H_1 \times$ BMO，

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |\mathbb{E}_n(L(f,b))| - R(f,b) &\le \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |[\mathbb{E}_n, b](f)| \\ &\le \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |\mathbb{E}_n(L(f,b))| + R(f,b),\end{aligned}$$

其中 L 与 (3.1) 中相同，且 $R : H_1 \times$BMO $\to L^1$ 是一个有界双线性算子。

4.3 鞅Hardy空间 H_1^b 及定理 1.4 的证明

本小节借鉴 Ky [21] 在调和分析中的一些思想，引入鞅Hardy空间 H_1^b。我们还将在本小节证明定理 1.4。

定义 4.11. 设 b $\in$ BMO。鞅Hardy空间 H_1^b 定义为满足下列条件的所有鞅 f 所组成的集合：

$$\|f\|_{H_1^b} := \|f\|_{H_1}\|b\|_{\mathrm{BMO}} + \left\|\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |[\mathbb{E}_n, b](f)|\right\|_{L^1} < \infty.$$

我们建立空间 H_1^b的以下刻画。

定理 4.12. 设 b $\in$ BMO 非常数。则下列断言等价：

(i) f $\in H_1^b$; (ii) L(f, b) $\in H_1$; (iii) [T, b](f) $\in L^1$，其中 T $\in \mathcal{K}_H$。

此外，如果上述结论之一成立，那么

$$\begin{aligned}\|f\|_{H_1^b} &= \|f\|_{H_1}\|b\|_{\mathrm{BMO}} + \left\|\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |[\mathbb{E}_n, b](f)|\right\|_{L^1} \\ &\approx \|f\|_{H_1}\|b\|_{\mathrm{BMO}} + \|L(f,b)\|_{H_1} \\ &\approx \|f\|_{H_1}\|b\|_{\mathrm{BMO}} + \|[T,b](f)\|_{L^1},\end{aligned}$$

其中，正的等价常数与 f 和 b 均无关。

证明。(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)。由推论 4.10 可知，$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|[\mathbb{E}_n, b](f)| \in L^1$ if 当且仅当

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|\mathbb{E}_n(L(f,b))| \in L^1,$$

结合引理 2.3，可进一步推出 $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|[\mathbb{E}_n, b](f)| \in L^1$ 当且仅当 $L(f, b) \in H_1$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\|f\|_{H_1^b} &= \|f\|_{H_1}\|b\|_{\mathrm{BMO}} + \left\|\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|[\mathbb{E}_n, b](f)|\right\|_{L^1}\\ &\approx \|f\|_{H_1}\|b\|_{\mathrm{BMO}} + \|L(f,b)\|_{H_1},\end{aligned}$$

由此进一步可得命题 (i) 与 (ii) 等价。

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)。由定理 1.3 可知，$[T, b](f) \in L^1$ 当且仅当 $T(L(f, b)) \in L^1$。由于 $T \in \mathcal{K}_H$，因此 $T(f) \in L^1$ 当且仅当 $f \in H_1$；见定义 4.1。因此，$[T, b](f) \in L^1$ 当且仅当 $L(f, b) \in H_1$。此外，

$$\|f\|_{H_1}\|b\|_{\mathrm{BMO}} + \|L(f,b)\|_{H_1} \approx \|f\|_{H_1}\|b\|_{\mathrm{BMO}} + \|[T,b](f)\|_{L^1},$$

由此进一步可得命题 (ii) 与 (iii) 等价，进而完成定理 4.12 的证明。□

现在，我们证明定理 1.4。

定理 1.4 的证明。设 $f \in H_1^b$。于是，由定理 4.12 可知，$L(f, b) \in H_1$。由于 $T \in \mathcal{K}_q$，根据定义 4.1，我们推得 T 是从 H_1 到 L^q的有界算子。现在，利用定理 1.3，我们得到

$$\begin{aligned}\|[T,b](f)\|_{L^q} &\le \|T(L(f,b))\|_{L^q} + \|R(f,b)\|_{L^q}\\ &\lesssim \|L(f,b)\|_{H_1} + \|f\|_{H_1}\|b\|_{\mathrm{BMO}} \lesssim \|f\|_{H_1^b},\end{aligned}$$

由此完成定理 1.4 的证明。□

注 4.13。设 $b \in \mathrm{BMO}$。我们指出，$\mathcal{Y} := H_1^b$ 是 H_1 的最大子空间，使得对于任意 $T \in \mathcal{K}_H$，交换子 $[T, b]$ 是从 $\mathcal{Y}$ 到 L^1 的有界算子。事实上，若 $\mathcal{Y}$ 是 H_1 的一个子空间，且 $[T, b]$ 是从 $\mathcal{Y}$ 到 L^1，的有界算子，那么任意元素 $f \in \mathcal{Y}$ 都满足 $[T, b](f) \in L^1$。因此，定理 4.12 蕴含 $f \in H_1^b$，这意味着 $\mathcal{Y} \subset H_1^b$。

4.4 类 $\mathcal{K}_q$的示例

正如我们在例 4.4 中已经指出的，Doob 极大函数和平方函数都属于 $\mathcal{K}_H \subset \mathcal{K}_1$，其定义见定义 4.1。本小节中，我们给出属于 $\mathcal{K}_q$ 的典型算子。

4.4.1 鞅变换

鞅变换最初由 Burkholder [11] 引入。如今，鞅变换已被证明是非常有力的工具，不仅适用于概率情形，也适用于调和分析；例如参见 [4] 及其参考文献。最近，文献 [39] 研究了非正则鞅的鞅变换的交换子。本小节中，我们证明每个鞅变换都属于 $\mathcal{K}_1$。因此，我们可以应用推论 4.9 和定理 1.4 来研究鞅变换交换子的端点估计。

令 $\varepsilon := (\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 是一个适应可测过程（也就是说，对每个 $k \in \mathbb{Z}_+$，ε_k 都是 $\mathcal{F}_k$-可测的），满足

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \|\varepsilon_k\|_{L^\infty} \le 1.$$

为方便起见，令 $\varepsilon_{-1} = 0$。与鞅 f 和 ε 相关的鞅变换是鞅 $T_\varepsilon(f)$，定义为对任意 $k \in \mathbb{Z}_+$，$d_k(T_\varepsilon f) := \varepsilon_{k-1} d_k f$。由于 $S(T_\varepsilon f) \le S(f)$，立即可得，对于任意 $p \in (1,\infty)$，T_ε 在 L^p 上有界，并且在 H_1上也有界。在所有这些情形下，它都可以视为作用于终值上的映射：现在令 f 为 L^p 中的函数，其中 $p \in (1,\infty)$，或为 H_1, 中的函数，则函数 $T_\varepsilon f$ 定义为

$$T_\varepsilon(f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \varepsilon_{k-1} d_k f.$$

我们仍称之为鞅变换。

我们还将极大鞅变换 $M \circ T_\varepsilon$ 定义为

$$M \circ T_\varepsilon f := \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_{k-1} d_k f \right|.$$

回顾一下，鞅变换具有以下性质（见 [11, 24]）：

(i) 对任意 $f \in L^2$, $\|T_\varepsilon(f)\|_{L^2} \le \|M \circ T_\varepsilon(f)\|_{L^2} \le C\|f\|_{L^2}$;

(ii) 对任意 $f \in H^1$, $\|T_\varepsilon(f)\|_{L^1} \le \|M \circ T_\varepsilon(f)\|_{L^1} \le C\|f\|_{H_1}$;

(iii) 对任意 $f \in L^1$, $\|T_\varepsilon(f)\|_{L^{1,\infty}} \le \|M \circ T_\varepsilon(f)\|_{L^{1,\infty}} \le C\|f\|_{L^1}$,

其中 C 是一个与 f 无关的正常数。

命题 4.14. 令 T_ε 为上述鞅变换，$M \circ T_\varepsilon$ 为上述极大鞅变换。那么 T_ε 和 $M \circ T_\varepsilon$ 都属于 $\mathcal{K}_1$。

证明. 我们来证明 (4.1) 和 (4.3) 对 T_ε和 $M \circ T_\varepsilon$都成立。不难验证，若 a 是关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和 $A \in \mathcal{F}_n$的简单 (s,∞)-原子，则 $T_\varepsilon(a)$ 和 $M \circ T_\varepsilon(a)$ 的支撑都包含于 A 中。此外，若 g 是关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$的鞅跳跃，则有

$$|T_\varepsilon(g)| \le |g| \quad \text{and} \quad M \circ T_\varepsilon(g) \le |g|.$$

注意到 T_ε 和 $M \circ T_\varepsilon$ 在 L^2上都是有界的。应用例 4.4 的证明中所用的相同论证，可得 (4.1) 和 (4.3) 对 T_ε 和 $M \circ T_\varepsilon$均成立。最后，关于 T_ε 和 $M \circ T_\varepsilon$ 的另外两个性质 (4.2) 和 (4.4) 是交换性质的推论：沿用前面的记号，$T_\varepsilon(b_{n-1}a) = b_{n-1}T_\varepsilon(a)$，且 $T_\varepsilon(b_{n-1}g) = b_{n-1}T_\varepsilon(g)$；$M \circ T_\varepsilon$也同样成立。命题 4.14 的证明至此完成。□

以下结果直接由推论 4.9 和定理 1.4 得出。

推论 4.15. 设 T_ε 为上述鞅变换。设 $b \in \mathrm{BMO}$ 是一个非恒定函数。那么

(i) 交换子 $[T_\varepsilon, b]$ 从 H_1 到 $L^{1,\infty}$ 有界；

(ii) 交换子 $[T_\varepsilon, b]$ 从 H_1^b 到 L^1 有界。

在结束本小节之前，我们将证明一个类似于经典情形下给出的 H_1^b函数例子的结论。我们需要一个补充定义。

定义 4.16. 设 $b \in \mathrm{BMO}$ 是一个非恒定函数。关于 $n \in \mathbb{Z}_+$ 的原子 a 称为一个 (b,∞)-原子，若其满足以下附加性质

$$\mathbb{E}_n(ba) = 0.$$

此外，我们将 $\mathcal{H}_1^b$ 记为 H_1 中满足以下条件的所有函数 f 所构成的空间

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j a^j \text{ a.s. and } \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mu_j| < \infty,$$

其中 $(a^j)_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 (b,∞)-原子。

Pr命题 4.17. 对于 $b \in \mathrm{BMO}$ 中的非恒定函数，空间 $\mathcal{H}_1^b$ 包含于 H_1^b.

证明。我们仅概述证明，因为它需要对前面的证明作一些变体。首先，我们可以考虑取值于希尔伯特空间的鞅变换这一事实（例如，参见 [19]）。特别地，考虑取值于 l^2, 的鞅变换 Γ，其定义为 $\Gamma f = \sum_{n\in\mathbb{N}} (d_n f) e_n$，其中 e_n 是 l^2 的标准基。由于 $\|\Gamma f\|_{\ell^2} = S(f)$，可知 H_1-鞅可由以下性质在 L^1-鞅中刻画： Γf 属于 $L^1(\Omega, l^2)$。我们将默认前面的定理对向量值情形也成立，因此只需证明，只要 f 属于 $\mathcal{H}_1^b$， $\Gamma(L(f,b))$ 就属于 $L^1(\Omega, l^2)$。我们先对一个 (b,∞)-原子证明这一点。

引理 4.18. 设 $b \in \mathrm{BMO}$ 是一个非恒定函数，a 是一个 (b,∞)-原子。那么 $\Gamma(L(a,b))$ 属于 $L^1(\Omega, l^2)$。此外，其 $L^1(\Omega, l^2)$ 范数由一个一致常数控制。

证明. 假设 (b,∞)-原子 a 与某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 相关。由推论 4.8 可知，只需证明 $[\Gamma, b](a)$ 属于 $L^1(\Omega, l^2)$，且其范数有一致界。根据性质 (4.2)，甚至只需对 $[\Gamma, b - b_{n-1}](a)$ 证明同样的结论；或者根据性质 (4.1)，只需对 $\Gamma((b - b_{n-1})a)$ 证明。可是，这可由 $(b - b_{n-1})a$ 属于 H_1 且其范数有一致界这一事实推出。事实上，由于它是一个 (b,∞)-原子，

$$\mathbb{E}_n((b - b_{n-1})a) = \mathbb{E}_n(ba) - b_{n-1}\mathbb{E}_n(a) = 0.$$

此外，由 H¨older 不等式可得

$$\mathbb{E}\left(|(b - b_{n-1})a|^p\right) \le \left[\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A |b - b_{n-1}|\right)^{2p}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\mathbb{E}\left(|a|^{2p}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \lesssim [P(A)]^{1-p},$$

其中我们用到了这一事实：

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A|b-b_{n-1}|^{2p}\right)\le\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_A\right)\left[\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_n(|b-b_{n-1}|)\right]^{2p}.$$

因此，M((b−b$_{n-1}$)a) 的支撑包含于 A 中，故属于 L^1，且其范数一致有界。这意味着 (b −b$_{n-1}$) a 属于 H$_1$，且其范数一致有界，这正是我们要证明的结论。引理 4.18 的证明至此完成。□

让我们回到命题 4.17 的证明。设 f = P $_{j\in\mathbb{Z}}$μ $_j$a^j 几乎处处成立，且 P $_{j\in\mathbb{Z}}$ |μ $_j$| < ∞，其中 (a^j) $_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 (b, ∞)-原子。序列 (P $_{j=1}^{N}$μ $_j$Γ(L(a $_j$, b)))$_{N\in\mathbb{N}}$ 是 H$_1$, 中的柯西序列，并在 L^1, $_\infty$(Ω, l^2) 中收敛到其极限，即 Γ(L(f, b))。因此，L(f, b) 属于 H$_1$，故 f 属于 H$_1^b$。命题 4.17 的证明至此完成。□

4.4.2 鞅框架下的分数阶积分

在鞅框架下，分数阶积分算子及其交换子最早在 [14] 中得到研究。关于这一主题的最新进展，也请读者参阅 Nakai 等人 [1] 。如今，众所周知，鞅分数阶积分算子可视为调和分析中黎斯势的离散模型。本小节将证明，在 $\alpha\in(0,1)$ 的条件下，分数阶积分算子 I$_\alpha$ 属于 $\mathcal{K}_{\frac{1}{1-\alpha}}$。基于此，我们可以研究分数阶积分算子 I$_\alpha$ 的交换子的端点估计。为方便起见，这里仅考虑如下给定的 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+})$。

例 4.19. 设数列 $(p_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}\subset\mathbb{N}$ 满足对每个 k ∈ ℤ$_+$，均有 p$_k$ ≥ 2 。对于任意 n ∈ ℤ$_+$，令 P$_n$:= Q$_{k=0}^{n}$ p$_k$,

$$\mathcal{F}_n:=\sigma\{[kP_n^{-1},(k+1)P_n^{-1}):\ k\in\{0,\dots,P_n-1\}\},\tag{4.7}$$

and

$$\mathcal{F}:=\sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathcal{F}_n\right).$$

令可测空间 $([0,1),\mathcal{F})$ 配备勒贝格测度 ν。那么不难证明，只要 sup$_{k\in\mathbb{Z}_+}$ p$_k$ = ∞，滤过 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 就不是正则的。

对每个 n ∈ ℤ$_+$，记 A($\mathcal{F}_n$) 为 $\mathcal{F}_n$ 中所有原子构成的集合。对于任意 $\alpha\in(0,\infty)$、任意 n ∈ ℤ$_+$ 以及任意鞅 f ∈ L^1, , f 的分数积分 I$_{\alpha,\ n}$ 和 I$_\alpha$ 分别定义如下：

$$I_{\alpha,n}(f):=\sum_{k=0}^{n}\beta_k^\alpha d_k f\ \text{ and }\ I_\alpha(f):=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\beta_k^\alpha d_k f,\tag{4.8}$$

其中，对于任意 k ∈ ℤ$_+$,

$$\beta_k:=\sum_{B\in A(\mathcal{F}_k)}\mathbb{P}(B)\mathbf{1}_B$$

且 $\beta_{-1} := \beta_0$。关于分数阶积分 I_α 的更多细节，请参阅 [36, 38] 。显然，对于任意 $k \in \mathbb{Z}_+$, $\beta_k = \frac{1}{P_k}$。因此，对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$I_{\alpha,n}(f) := \sum_{k=0}^{n} P_k^{-\alpha} d_k f \text{ and } I_\alpha(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} P_k^{-\alpha} d_k f.$$

注意到，例 4.19 是 [36, 38]中所研究的滤过的一个特例。因此，由 [36,定理 2.11] 和 [38, 引理1.2 及定理 0.1], 可推得，对于任意 $\alpha \in (0,1)$，存在正常数 $C_{(\alpha)}$，它仅依赖于 α，使得

(i) for any $f \in H_1(0,1)$, $\|I_\alpha(f)\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(0,1)} \le C_{(\alpha)}\|f\|_{H_1(0,1)}$;

(ii) 对任意 $f \in L^1(0,1)$, $\|I_\alpha(f)\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha},\infty}(0,1)} \le C_{(\alpha)}\|f\|_{L^1(0,1)}$;

(iii) 对任意 $f \in L^p(0,1)$, $\|I_\alpha(f)\|_{L^q(0,1)} \le C_{(\alpha)}\|f\|_{L^p(0,1)}$，其中 $p \in (1,\infty)$ 且 $1/p - 1/q = \alpha$。

命题 4.20. 设 $\alpha \in (0,1)$。那么分数阶积分算子 I_α 属于 $\mathcal{K}_{\frac{1}{1-\alpha}}$。

证明。根据上述论证，只需证明对于 I_α 且 $q := \frac{1}{1-\alpha}$，(4.1)-(4.4)成立。首先，假设 a 是关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和 $A \in \mathcal{F}_n$的简单 (s, ∞)-原子。取 $r \in (\alpha, 1)$，使得 $r - \alpha \in (0, 1/2)$。注意，supp $(I_\alpha(a)) \subset A$，因为 I_α 仍然是一个鞅变换。于是由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\|(b - b_{n-1})I_\alpha(a)\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(0,1)} &\le \|(b - b_{n-1})\mathbf{1}_A\|_{L^{\frac{1}{r-\alpha}}(0,1)} \|I_\alpha(a)\|_{L^{\frac{1}{1-r}}(0,1)} \\ &=: I_1 \times I_2.\end{aligned}$$

由于 $A \in \mathcal{F}_n$，因此

$$I_1^{\frac{1}{r-\alpha}} = \int_A \mathbb{E}_n\left(|b - b_{n-1}|^{\frac{1}{r-\alpha}}\right) d\nu \lesssim \|g\|^{\frac{1}{r-\alpha}}_{\mathrm{BMO}(0,1)} \nu(A).$$

另一方面，对于 I_2,，利用 I_α 从 $L^{1-\frac{1}{(r-\alpha)}}(0,1)$ 到 $L^{\frac{1}{1-r}}(0,1)$ 的有界性，可得

$$I_2 \lesssim \|a\|_{L^{\frac{1}{1-(r-\alpha)}}(0,1)} \lesssim [\nu(A)]^{-(r-\alpha)},$$

其中第二个不等式由引理 2.10(iv) 得出，因为 $1 < 1 - \frac{1}{(r-\alpha)} < 2$。综合 I_1 和 I_2, 的估计，我们便得出

$$\|(b - b_{n-1})I_\alpha(a)\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(0,1)} \lesssim \|g\|_{\mathrm{BMO}(0,1)}.$$

这就证明了 (4.1)。

在本证明的其余部分，假设 a 是关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 的鞅跳跃。那么

$$|I_\alpha(a)| \le P_n^{-\alpha}|a|.$$

由于 a 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测，因此

$$\begin{aligned}
&\|(b-b_{n-1})I_\alpha(a)\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(0,1)}^{\frac{1}{1-\alpha}}\\
&\quad\le\int_0^1\left(|b-b_{n-1}|\cdot P_n^{-\alpha}|a|\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}d\nu\\
&\quad=\int_\Omega\left(P_n^{-\alpha}|a|\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\cdot\mathbb{E}_n\left(|b-b_{n-1}|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)d\nu\\
&\quad\le\|g\|_{\mathrm{BMO}(0,1)}^{\frac{1}{1-\alpha}}\left\|P_n^{-\alpha}a\right\|_{L^{\frac{1}{1-\alpha}}(0,1)}^{\frac{1}{1-\alpha}}\overset{(R)}{\lesssim}\|b\|_{\mathrm{BMO}(0,1)}^{\frac{1}{1-\alpha}}\|a\|_{L^1(0,1)}^{\frac{1}{1-\alpha}},
\end{aligned}$$

其中，不等式（R）源自 [36, 引理 2.3(i)]。因此，(4.3) 成立。最后，I_α 是一个鞅变换，并满足相同的交换性质，由此得到 (4.2) 和 (4.4)。因此，$I_\alpha\in\mathcal{K}_{\frac{1}{1-\alpha}}$。命题 4.20 的证明至此完成。□

注 4.21. 作者谨向 Dmitriy Stolyarov 致谢，他指出，若在分数阶积分 (4.8) 的定义中用 β_{k-1} 替换 β_k，则命题 4.20 前面的估计 (i)–(iii) 不成立，并提醒我们关注他的合著文章 [38]。

由于 $I_\alpha\in\mathcal{K}_{\frac{1}{1-\alpha}}$，以下结论可直接由推论 4.9 和定理 1.4 得出。

推论 4.22。设 $\alpha\in(0,1)$，且 I_α 为上述分数阶积分算子。设 $b\in\mathrm{BMO}(0,1)$ 非常数。则

(i) 交换子 $[I_\alpha, b]$ 在 $H_1(0,1)$ 到 $L^{\frac{1}{1-\alpha},\infty}(0,1)$ 之间有界；

(ii) 交换子 $[I_\alpha, b]$ 在 $H_1^p(0,1)$ 到 $L^{\frac{1}{1-\alpha}}(0,1)$ 之间有界。

5 调和分析中的应用

本节旨在将前几节建立的交换子双线性分解应用于调和分析中的一些问题。

5.1 倍增测度之外的二进 Hilbert 变换

回顾一下，L´opez-S´anchez 等人 [25] 首次刻画了与博雷尔测度相关的二进 Hilbert变换及其伴随算子的有界性。受此启发，本小节将研究超越倍增测度情形下二进 Hilbert变换及其伴随算子的交换子。

这里，我们考虑 $([0,1),\mathcal{F};(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+})$，这对应于例 4.19，其中每个 $k\in\mathbb{Z}_+$ 均有 $p_k=2$。不过，我们在可测空间 $([0,1),\mathcal{F})$ 上赋予概率测度 μ，而该测度不一定是勒贝格测度。在本小节中，相应的勒贝格空间、鞅Hardy空间和有界平均振荡空间分别记为 $L^p(\mu)$、$H_1(\mu)$ 和 $\mathrm{BMO}(\mu)$。

下文中，对每个 $n \in \mathbb{Z}_+$，用 $A(\mathcal{F}_n)$ 表示 $\mathcal{F}_n$中所有二进区间构成的集合。令 $A(\mathcal{F}) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} A(\mathcal{F}_n)$。给定 $I \in A(\mathcal{F})$，分别用 I_- 和 I_+表示 I 的左、右二进子区间。对任意 $I \in A(\mathcal{F})$，令

$$m(I) := \frac{\mu(I_-)\mu(I_+)}{\mu(I)} \quad \text{and} \quad h_I := \sqrt{m(I)}\left[\frac{\mathbf{1}_{I_-}}{\mu(I_-)} - \frac{\mathbf{1}_{I_+}}{\mu(I_+)}\right].$$

以下引理是显然的；参见 [25,(2.3)]。

引理 5.1. 对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$ 以及任意二进制区间 $I \in \mathcal{F}_n$，函数 h_I 是 $\mathcal{F}_{n+1}$-可测的，且 $\mathbb{E}_n(h_I) = 0$。此外

$$\|h_I\|_{L^1(\mu)} = 2\sqrt{m(I)} \text{ and } \|h_I\|_{L^\infty(\mu)} \approx \frac{1}{\sqrt{m(I)}} \tag{5.1}$$

其中正的等价常数与 I 无关。

若存在正常数 C，使得对任意 $I \in A(\mathcal{F})$，概率测度 μ 就称为 m-递增（分别称为 m-递减）。

$$m(I) \le Cm\left(\widehat{I}\right) \left[\text{resp. } Cm(I) \ge m\left(\widehat{I}\right)\right]. \tag{5.2}$$

b 此处及下文中，符号 I 表示 I 的二进父区间。

下一个例子取自 [25, 第 4 节1] ，并证明相对于 μ，二进滤过可能不是正则的。

例 5.2（非正则二进滤过）。设 $(I_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ 是一个递减的二进区间序列，例如，对任意 $k \in \mathbb{Z}_+$，$I_k = [0, 2^{-k})$。设 $(I_k^b)_{k\in\mathbb{N}}$ 是它的二进制兄弟区间。设 $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 满足 $\alpha_1 := 1/2, \alpha_k := 1 - 2^{-k^2}$，对任意 $k \ge 2$，且 $\beta_k := 1 - \alpha_k$，对任意 $k \in \mathbb{N}$。递归定义 μ：令 $\mu(I_0) := 1$，并且对每个 $k \in \mathbb{N}$，

$$\mu(I_k) := \alpha_k \mu(I_{k-1}) \text{ and } \mu\left(I_k^b\right) := \beta_k \mu(I_{k-1}).$$

对任意 $k \in \mathbb{N}$，以及任意满足 $J \subset I_k^b$ 的二进制区间，定义

$$\mu(J) := \frac{\nu(J)}{\nu(I_k^b)} \mu\left(I_k^b\right),$$

其中 ν 表示 $[0, 1$上的通常勒贝格测度）。文献 *[25,* 第 *72]* 页证明了 μ 是 m-递增的。然而，μ 是非二进倍增的。因此，配备测度 μ 的滤过 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 不是正则的。

按照文献 [25, 第 50], 页的定义，对于 $[0, 1)$ 上的任意可测函数 f 以及任意 $x \in [0, 1)$，二进Hilbert变换定义为：

$$H_{\mathscr{D}}(f)(x) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{I\in A(\mathcal{F}_k)} \delta(I)\langle f, h_{\widehat{I}}\rangle h_I(x), \tag{5.3}$$

b b，其中 $\delta(I) := 1$，若 $I := (I)_-$；$\delta(I) := -1$，若 $I := (I)_+$；且 $\langle f, h_{\widehat{I}}\rangle := \mathbb{E}(f h_{\widehat{I}})$。本小节的主要结果如下。

命题 5.3. 设 μ 是 $[0,1$ 上的 m-递增概率测度。则二进Hilbert变换 $H_{\mathscr{D}}$ 属于 $\mathcal{K}_1$。

为证明命题 5.3，我们需要若干引理。以下结果出自 [25, (3.4)]和 [25,定理 2.5]。

引理 5.4. 设 μ 是 $[0,1)$ 上的 m-递增概率测度。那么

(i) $H_{\mathscr{D}}$在 $L^2(\mu)$ 上有界；此外，对于任意 $f \in L^2(\mu)$，$\|H_{\mathscr{D}}(f)\|_{L^2(\mu)} \le 2\|f\|_{L^2(\mu)}$；

(ii) $H_{\mathscr{D}}$ 是从 $L^1(\mu)$ 到 $L^{1,\infty}(\mu)$ 的有界算子。

与引理 2.10 的 (i) 和 (ii) 两部分证明类似，利用引理 5.4(i)，可以得到以下结论；细节从略。

引理 5.5. 设 μ 是 $[0,1)$ 上的 m-递增博雷尔测度。假设 a 是关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和某个二进制区间 $Q \in A(\mathcal{F}_n)$ 的简单 (s,∞)-原子。那么

(i) $\operatorname{supp}(H_{\mathscr{D}}(a)) \subset Q$；

(ii) $\|H_{\mathscr{D}}(a)\|_{L^p(\mu)} \le 2[\mu(Q)]^{1/p-1}$ 对任意 $p \in [1,2]$ 均成立。

引理 5.6. 设 μ 是 $[0,1)$ 上的 m-递增博雷尔测度。那么存在正常数 C，使得对于任意 $w \in L^1_d(\mu)$，

$$\|H_{\mathscr{D}}(w)\|_{L^1(\mu)} \le C\|w\|_{L^1_d(\mu)}.$$

证明. 不失一般性，可假设 w 是关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 的鞅跳跃。我们来证明 $\langle w, h_{\widehat{I}}\rangle := \mathbb{E}(wh_{\widehat{I}})$ 在 I 属于 $A(\mathcal{F}_n)$ 时以外均为 0。事实上，若 $I \in A(\mathcal{F}_k)$，其中某个 $k \in \{0,\dots,n-1\}$，由于 $h_{\widehat{I}}$ 是 $\mathcal{F}_k$-可测的，因此

$$\mathbb{E}_n(wh_{\widehat{I}}) = h_{\widehat{I}}\mathbb{E}_n w = 0.$$

接下来，如果 $I \in A(\mathcal{F}_k)$，且 $k \in \{n+1, n+2, \dots\}$，那么

$$\mathbb{E}_{k-1}(wh_{\widehat{I}}) = w\mathbb{E}_{k-1}(h_{\widehat{I}}) = 0,$$

最后一个不等式用到了引理 5.1。因此，当 I 不属于 $A(\mathcal{F}_n)$ 时，$\mathbb{E}(wh_{\widehat{I}}) = 0$。

由式 (5.3) 可得

$$H_{\mathscr{D}}(w) = \sum_{I\in A(\mathcal{F}_n)} \delta(I)\langle w, h_{\widehat{I}}\rangle h_I. \tag{5.4}$$

由上述等式、(5.1) 和 (5.2)，我们得出

$$\begin{aligned}\|H_{\mathscr{D}}(w)\|_{L^1(\mu)} &\le \sum_{I\in A(\mathcal{F}_n)} \left|\langle w, h_{\widehat{I}}\rangle\right| \|h_I\|_{L^1(\mu)} \\ &\le \sum_{I\in A(\mathcal{F}_n)} \left\|h_{\widehat{I}}\right\|_{L^\infty(\mu)} \|h_I\|_{L^1(\mu)} \int_{\widehat{I}} |w|\,d\mu\end{aligned}$$

$$\lesssim \sum_{I\in A(\mathcal{F}_n)} \frac{\sqrt{m(I)}}{\sqrt{m(\widehat{I})}} \int_{\widehat{I}} |w|\, d\mu$$
$$\lesssim \sum_{I\in A(\mathcal{F}_n)} \int_{\widehat{I}} |w|\, d\mu \lesssim \|w\|_{L^1},$$

引理 5.6 的证明至此完成。 □

注 5.7。由 (5.4) 可知，对于一般的鞅 f,

$$H_{\mathscr{D}}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \sum_{I\in A(\mathcal{F}_n)} \delta(I)\langle d_n(f), h_{\widetilde{I}}\rangle h_I.$$

此外，若 a 是相对于 n 的原子或跳跃，且 g 是 $A(\mathcal{F}_{n-1})$-可测的，则 $H_{\mathscr{D}}(ga) = gH_{\mathscr{D}}(a)$。

命题 5.8。设 μ 是 $[0,1$ 上的 m-递增博雷尔测度。那么二进Hilbert变换 $H_{\mathscr{D}}$ 是从 $H_1(\mu)$ 到 $L^1(\mu)$ 的有界算子。

证明。设 $f \in H_1(\mu)$。所需结论可由引理 2.1、2.11、5.5 和 5.6 综合推出。事实上，由这些引理可得

$$\begin{aligned}\|H_{\mathscr{D}}(f)\|_{L^1(\mu)} &\le \left\|H_{\mathscr{D}}\left(f^1\right)\right\|_{L^1(\mu)} + \left\|H_{\mathscr{D}}\left(f^d\right)\right\|_{L^1(\mu)}\\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k| \left\|H_{\mathscr{D}}\left(a^k\right)\right\|_{L^1(\mu)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\|H_{\mathscr{D}}\left(d_n\left(f^d\right)\right)\right\|_{L^1(\mu)}\\ &\lesssim \left\|f^1\right\|_{h_1(\mu)} + \left\|f^d\right\|_{h_1^d(\mu)} \lesssim \|f\|_{H_1(\mu)},\end{aligned}$$

其中 $(a^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是由简单的 (s,∞)-原子组成的序列。这就完成了命题 5.8 的证明。□

现在，我们准备证明命题 5.3。

命题 5.3 的证明。注 5.7 的第二个断言蕴含 (4.2) 和 (4.4)。因此，借助引理 5.4 和命题 5.8，根据定义 4.1，当 $q = 1$ 时，要完成本命题的证明，只需证明对于 $H_{\mathscr{D}}$，当 $q = 1$ 时 (4.1) 成立，且当 $q = 1$ 时 (4.3) 成立。利用引理 5.5，并重复例 4.4 证明中的论证，可知当 $q = 1$ 时，(4.1) 对 $H_{\mathscr{D}}$ 成立。现在，假设 $b \in \mathrm{BMO}(\mu)$，且 $w \in L^1_d(\mu)$ 是关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 的鞅跳跃。那么

$$\begin{aligned}&\|(b - b_{n-1})H_{\mathscr{D}}(w)\|_{L^1(\mu)}\\ &\quad\le \|(b - b_n)H_{\mathscr{D}}(w)\|_{L^1(\mu)} + \|(b_n - b_{n-1})H_{\mathscr{D}}(w)\|_{L^1(\mu)}\\ &\quad=: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

根据引理 5.6，我们有

$$I_2 \le \|b_n - b_{n-1}\|_{L^\infty(\mu)}\|H_{\mathscr{D}}(w)\|_{L^1(\mu)} \lesssim \|w\|_{L^1}\|b\|_{\mathrm{bmo}^d(\mu)} \lesssim \|w\|_{L^1}\|b\|_{\mathrm{BMO}(\mu)}.$$

注意，$H_{\mathscr{D}}(w)$ 由 (5.4) 给出，且是 $\mathcal{F}_{n+1}$-可测的。因此，

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 [\mathbb{E}_{n+1}(|b-b_n|)] \times |H_{\mathscr{D}}(w)|\, d\mu \\ &\le \|b\|_{BMO(\mu)} \|H_{\mathscr{D}}(w)\|_{L^1(\mu)} \lesssim \|w\|_{L^1} \|b\|_{BMO(\mu)}. \end{aligned}$$

最后，根据对 I_1 和 I_2 的估计，我们得出

$$\|(b-b_{n-1})H_{\mathscr{D}}(w)\|_{L^1(\mu)} \lesssim \|w\|_{L^1} \|b\|_{BMO(\mu)}.$$

因此，对于 $H_{\mathscr{D}}$，(4.3) 中的 $q = 1$ 也成立。命题5的证明至此完成。 □

应用命题 5.3，可直接由推论 4.9 和定理 1.4 得出以下推论。

推论5.9. 设 μ 是 $[0,1)$ 上的一个 m-递增博雷尔测度，且 $b \in BMO(\mu)$ 非常数。那么

(i) 交换子 $[H_{\mathscr{D}}, b]$ 从 $H_1(\mu)$ 到 $L^{1,\infty}(\mu)$ 有界；

(ii) 交换子 $[H_{\mathscr{D}}, b]$ 从 $H_1^b(\mu)$ 到 $L^1(\mu)$ 有界。

备注5.10. 记 $H_{\mathscr{D}}^*$ 为二进Hilbert变换 $H_{\mathscr{D}}$ 的伴随算子。设 μ 是 $[0,1$ 上的 m-递减Borel测度，且 $b \in BMO(\mu)$ 非常数。与上述推论类似，我们可以证明交换子 $[H_{\mathscr{D}}^*, b]$ 从 $H_1(\mu)$ 到 $L^{1,\infty}(\mu)$ 有界，并且从 $H_1^b(\mu)$ 到 $L^1(\mu)$ 也有界；细节从略。此外，人们还可以考虑两个交换子 $[H_{\mathscr{D}}, b]$ 和 $[H_{\mathscr{D}}^*, b]$ 的 L^p-有界性，其中 $p \in (1,\infty)$。为控制本文篇幅，我们不在此进一步探讨这个问题。

5.2 Walsh–Fourier级数的 Ces`aro 均值

在本小节中，我们将定理 1.3 和 1.4 应用于研究 $L^1[0,1)$ 中函数的 Walsh–Fourier级数 Ces`aro 均值的极大算子的交换子。在本小节中，我们使用 $([0,1), \mathcal{F}, \nu; (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+})$，其中 ν 是勒贝格测度，并且每个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 对应的 $\mathcal{F}_n$都与 (4.7) 中相同，其中任意 $k \in \mathbb{Z}_+$ 满足 $p_k = 2$。那么，滤过 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是正则的。

Walsh–Fourier分析中的以下基本符号取自 [37, 44]。每个点 $t \in [0,1)$ 都可以写成如下形式：

$$t = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} t_k 2^{-k-1} \text{ with } t_k \in \{0,1\} \text{ for any } k \in \mathbb{Z}_+.$$

如果同一个 t 有两种不同的形式，我们选择使 $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$ 的那一种。Rademacher函数 $(r_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$（定义在 $[0,1$ 上）规定如下：对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$r_n(t) := \exp(\pi i t_k),\ \forall\, t \in [0,1).$$

由 Rademacher函数生成的乘积系统称为 Walsh系统 $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$：对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，其中 $n = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} n_k 2^k$ ($n_k \in \{0,1\}$ 对任意 $k \in \mathbb{Z}_+$），

$$w_n := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}.$$

二进制加法 $\oplus$ on $[0,1)$ 定义如下：对于任意 t、$s \in [0,1)$，满足

$$t = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} t_k 2^{-k-1} \text{ and } s = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} s_k 2^{-k-1},$$

其中，对任意 $k \in \mathbb{Z}_+$，令 t_k、$s_k \in \{0,1\}$

$$t \oplus s := \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |t_k - s_k| 2^{-k-1}.$$

对于任意 $t \in [0,1)$ 和 $I \in \mathcal{F}$，令

$$I \oplus t := \{x \oplus t : x \in I\}.$$

根据 [37, p. 13], 中的定理4，我们得到

$$\nu(I \oplus t) = \nu(I), \ \forall\, t \in [0,1), \tag{5.5}$$

而且，如果对于某个 $n \in \mathbb{N}$ 有 $I = [0, 2^{-n})$，且 $t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} t_k 2^{-k-1} \in [l2^{-n}, (l+1)2^{-n})$ 对某个 $l \in \mathbb{Z}_+$ 成立，那么

$$I \oplus t = \begin{cases} [\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}), & \bar{t} \notin I, \\ [\ell 2^{-n}, (\ell+1)2^{-n}], & \bar{t} \in I, \end{cases} \tag{5.6}$$

其中 $\bar{t} := \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \bar{t}_k 2^{-k-1}$ with

$$\bar{t}_k = \begin{cases} 0, & k \in \{0, \dots, n-1\}, \\ |1 - t_k|, & k \in \{n, n+1, \dots\}. \end{cases}$$

注5.11. 记 $\mathbb{Z}_2$ 为阶为 2 的离散循环群，即带有离散拓扑和模 2 加法的集合 $\{0,1\}$。于是二进制群 G 定义为乘积

$$G := \prod_{k=0}^{\infty} \mathbf{Z}_2,$$

赋予积拓扑。有关二进制群 G 可与区间 $[0,1)$ 相识别的细节，请参阅 [37, 第 1 章。3] 特别地，$[0,1)$ 上的沃尔什函数可视为二进制群 G 的特征。

对于任意 $f \in L^1[0,1)$，f 的第 n 个沃尔什–傅里叶系数定义如下：对任意 $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\widehat{f}(n) := \int_0^1 f(t) w_n(t)\, dv(t).$$

Walsh–Dirichlet 核 $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 定义如下：对任意 $n\in\mathbb{N}$，$D_n:=\mathrm{P}_{k=0}^{n-1}w_k$，其满足

$$D_{2^n}(x)=\begin{cases}2^n & \text{if } x\in[0,2^{-n}),\\ 0 & \text{if } x\in[2^{-n},1).\end{cases} \tag{5.7}$$

对于任意 $n\in\mathbb{N}$，记 $S_n(f)$ 为 $f\in L^1[0,1)$ 的 Walsh–Fourier级数的第 n 个部分和，即对于任意 $x\in[0,1)$,

$$S_n(f)(x):=\sum_{k=0}^{n-1}\widehat{f}(k)w_k(x)=f*D_n(x)=\int_0^1 f(t)D_n(x\oplus t)\,d\nu(t).$$

对于任意 $n\in\mathbb{Z}_+$、$f\in L^1[0,1)$ 和 $Q\in\mathcal{F}_n$，令

$$f_Q:=\frac{1}{\nu(Q)}\int_Q f\,d\nu.$$

于是，根据条件期望的定义，对于任意 $n\in\mathbb{Z}_+$，我们得到

$$\mathbb{E}_n(f)=\sum_{Q\in A(\mathcal{F}_n)}f_Q\mathbf{1}_Q.$$

由 (5.7) 易得，对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $x\in[0,1)$,

$$S_{2^n}(f)(x)=\int_0^1 f(t)D_{2^n}(x\oplus t)\,d\nu(t)=\mathbb{E}_n(f)(x).$$

C Ces`aro 均值 $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}f$ 的 $\in L^1[0,1)$ 定义如下：对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $x\in[0,1$),

$$\sigma_n(f)(x):=f*K_n(x)=\int_0^1 f(t)K_n(x\oplus t)\,d\nu(t),$$

其中，K_n 表示 Walsh–Fej´ér 核，其定义如下:

$$K_n:=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}D_n.$$

由于滤过 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是正则的，由 [29, p. 189] 可知，存在正常数 C，使得对于任意 $b\in$ BMO[0, 1),

$$\frac{1}{C}\|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}\le\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\sup_{Q\in A(\mathcal{F}_n)}\frac{1}{\nu(Q)}\int_Q\left|b-b_Q\right|d\nu\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}.$$

我们先证明以下技术引理。

引理 5.12. 设极大算子 $\sigma:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\sigma_n$。则存在正常数 C，使得对于任意 $b\in$ BMO[0, 1), 以及关于某个 $n\in\mathbb{Z}_+$ 和某个 $Q\in A(\mathcal{F}_n)$ 的任意简单 ∞-原子 a,

$$\left\|\left(b-b_{\widehat{Q}}\right)\sigma(a)\right\|_{L^1[0,1)}\le C\|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)},$$

b其中 Q 表示 Q 的二进父区间。

证明。注意到勒贝格测度 ν 关于二进加法具有平移不变性（见 (5.5) 以及 [43, p. 238]）。根据 (5.6)，我们发现，对于任意 $Q \in A(\mathcal{F}_n)$，若 $Q = [l2^{-n}$，则 $(l+1)2^{-n})$ 对某个 $l \in \mathbb{Z}_+$ 成立，且 $Q = [0, 2^{-n}) \oplus t$ 对某个固定的 $t \in Q$ 成立。因此，不失一般性，我们可以假设 $Q = [0, 2^{-n})$。我们首先写出

$$\begin{aligned}\left\|\left(b - b_{\widehat{Q}}\right)\sigma(a)\right\|_{L^1[0,1)} &= \int_Q \left|b - b_{\widehat{Q}}\right| \sigma(a)\, d\nu + \int_{[0,1)\setminus Q} \cdots \\ &=: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

由于 σ 在 $L^\infty[0,1)$ 上有界（这可由 [44]中的定理 3.4 轻易推出），且 a 是一个简单的 ∞-原子，因此

$$\begin{aligned}I_1 &\le \|\sigma(a)\|_{L^\infty[0,1)} \int_Q \left|b - b_{\widehat{Q}}\right| \, d\nu \\ &\lesssim \|a\|_{L^\infty[0,1)} 2^{-n+1} \|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)} \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

对于项 I_2,，文献 [43, 第 238] 页证明了：对于任意 $x \in [0,1) \setminus Q$,

$$\begin{aligned}\sigma(a)(x) \lesssim &\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1}\left\{2^{i-n}\mathbf{1}_{[2^{-n},2^{-i})}(x) + 2^{i-n}\mathbf{1}_{[2^{-j-1},2^{-j-1}\oplus 2^{-i})}(x)\right\} \\ &+ 2^n \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i}\mathbf{1}_{[2^{-j-1},2^{-j-1}\oplus 2^{-n})}(x).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}I_2 &= \sum_{k=1}^{n}\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left|b - b_{\widehat{Q}}\right| \sigma(a)\, d\nu \\ &\le \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{k-1} 2^{i-n}\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left|b - b_{\widehat{Q}}\right| \, d\nu \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1} 2^{i-n}\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left|b - b_{\widehat{Q}}\right| \mathbf{1}_{[2^{-j-1},2^{-j-1}\oplus 2^{-i})}\, d\nu \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} 2^n 2^{k-1} \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i}\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left|b - b_{\widehat{Q}}\right| \mathbf{1}_{[2^{-k},2^{-k}\oplus 2^{-n})}\, d\nu \\ &=: B_1 + B_2 + B_3.\end{aligned}$$

我们回顾一下，若 $Q \in A(\mathcal{F}_n)$ 且 $Q' \in A(\mathcal{F}_k)$，其中 $k \in \{0, \ldots, n\}$，使得 $Q \subset Q'$，则

$$|f_{Q'} - f_Q| \lesssim (n-k)\|f\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}. \tag{5.9}$$

在下文中将频繁使用这个初等不等式。

为了估计 B_1, 设 $Q_k := [0, 2^{-k})$ 对每个 $1 \le k \le n$。利用 (5.9)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_1 &\le 2^{-n}\sum_{k=1}^{n} k2^k \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left|b - b_{Q_{k-1}} + b_{Q_{k-1}} - b_{\widehat{Q}}\right| dv\\ &\lesssim 2^{-n}\sum_{k=1}^{n} k2^k \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left|b - b_{Q_{k-1}}\right| dv + 2^{-n}\sum_{k=1}^{n} k2^k 2^{-k}\left|b_{Q_{k-1}} - b_{\widehat{Q}}\right|\\ &\lesssim 2^{-n}\left[\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k(n-k)\right]\|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)} \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}.\end{aligned}$$

现在我们估计 B_2。对于任意 $i, j \in \{1, \dots, n\}$，令 $I_{i,j} := [2^{-j}, 2^{-j} \oplus 2^{-i}) = [0, 2^{-i}) \oplus 2^{-j}$。显然，$v(I_{i,j}) = 2^{-i}$ 且 $I_{i,j} \in A(\mathcal{F}_i)$，对每种 i, j 的取值均成立；见 (5.5)。根据 (5.6)，我们有

$$I_{i,j+1} = \begin{cases}[0, 2^{-i}), & i = j,\\ [2^{-j-1}, 2^{-i} + 2^{-j-1}), & i \ge j+1.\end{cases}$$

因此，由此可得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_2 &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n-1} 2^{i-n}\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left|b - b_{\widehat{Q}}\right| \mathbf{1}_{[2^{-j-1}, 2^{-j-1}+2^{-i})}\, dv\\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-n}\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left|b - b_{\widehat{Q}}\right| \mathbf{1}_{[0,2^{-j})}\, dv\\ &=: \mathrm{B}_{2,1} + \mathrm{B}_{2,2}.\end{aligned}$$

注意，对于任意 $i \ge j+1$，$I_{i,k} \subset [2^{-k}, 2^{-k+1})$ 和 $I_{i,j} \cap [2^{-k}, 2^{-k+1}) = \emptyset$ 在 j, k 时成立。利用这一点和 (5.9)，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_{2,1} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n-1} 2^{i-n}\int_{I_{i,k}} \left|b - b_{I_{i,k}} + b_{I_{i,k}} - b_{Q_{k-1}} + b_{Q_{k-1}} - b_{\widehat{Q}}\right| dv\\ &\le \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n-1} 2^{i-n}\int_{I_{i,k}} \left|b - b_{I_{i,k}}\right| dv + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n-1} 2^{i-n}2^{-i}\left|b_{I_{i,k}} - b_{Q_{k-1}}\right|\\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n-1} 2^{i-n}2^{-i}\left|b_{Q_{k-1}} - b_{\widehat{Q}}\right|\\ &\lesssim 2^{-n}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n-1} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n-1}(i-k) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n-1}(n-k)\right]\|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}\\ &\lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}.\end{aligned}$$

接下来，由 (5.9) 可得

$$\mathrm{B}_{2,2} \le \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} 2^{j+1-n}\int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} \left|b - b_{Q_{k-1}} + b_{Q_{k-1}} - b_{\widehat{Q}}\right| dv$$

$$\lesssim \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} 2^{j+1-n}\left[2^{-k+1}+2^{-k}(n-k)\right]\|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}$$
$$\lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}.$$

最后，对于B_3,，由事实 $I_{n,k}\subset Q_{k-1}$ 以及 (5.9) 可知

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_3 &\le \sum_{k=1}^{n} 2^k \int_{I_{n,k}} \left|b-b_{I_{n,k}}+b_{I_{n,k}}-b_{Q_{k-1}}+b_{Q_{k-1}}-b_{\widehat{Q}}\right| d\nu\\ &\lesssim \sum_{k=1}^{n} 2^k \int_{I_{n,k}} \left|b-b_{I_{n,k}}\right| d\nu + \sum_{k=1}^{n} 2^k 2^{-n}\left|b_{I_{n,k}}-b_{Q_{k-1}}\right|\\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} 2^k 2^{-n}\left|b_{Q_{k-1}}-b_{\widehat{Q}}\right|\\ &\lesssim \left[\sum_{k=1}^{n} 2^k 2^{-n} + \sum_{k=1}^{n} 2^k 2^{-n}(n-k)\right]\|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}\\ &\lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}.\end{aligned}$$

因此，我们得到 $I_2 \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}$，结合 (5.8) 可进一步推出所需结论。引理 5.12 的证明至此完成。□

应用上述引理，我们得到交换子 $[\sigma,b]$ 在 $b\in \mathrm{BMO}[0,1)$ 时的端点估计。

命题 5.13. 当 $T=\sigma$ 且 $q=1$ 时，定理 1.3 和 1.4 成立。

证明. 以下两个不等式可见于 [37,p. 265] 和 [26, 推论 2.3]（另见 [43]）：

(i) 对任意 $f\in L^1[0,1)$，$\|\sigma(f)\|_{L^{1,\infty}[0,1)}\le C\|f\|_{L^1[0,1)}$，其中 C 是与 f 无关的正常数；

(ii) 对任意 $f\in H_1[0,1)$，$\frac{1}{C}\|f\|_{H_1[0,1)} \le \|\sigma(f)\|_{L^1[0,1)} \le C\|f\|_{H_1[0,1)}$，其中 C 是一个与 f 无关的正常数。

注意，在定理 1.3 和 1.4 的证明中，(4.1) 和 (4.2) 仅用于证明以下不等式：对任意简单的 ∞-原子 a 以及任意 $b\in \mathrm{BMO}[0,1)$，

$$\|U(a,b)\|_{L^1[0,1)} \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}, \tag{5.10}$$

其中，对任意 $x\in[0,1)$，

$$U(a,b)(x) := \sigma\left(\Pi_2(a,b)-b(x)a\right)(x).$$

注意，本节中的滤过 $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是正则的。因此，为证明当前命题，只需证明 (5.10)。

对于任意 $b \in \mathrm{BMO}[0,1)$，以及关于某个 $n \in \mathbb{Z}_+$ 和某个 $Q \in A(\mathcal{F}_n)$ 的任意简单 ∞-原子 a，我们对任意 $x \in [0,1)$ 有：

$$|U(a,b)(x)| = \left|U\left(a, b - b_{\widehat{Q}}\right)(x)\right| \le \left|\sigma\left(\Pi_2\left(a, b - b_{\widehat{Q}}\right)\right)(x)\right| + \left|b(x) - b_{\widehat{Q}}\right| \sigma(a)(x). \tag{5.11}$$

由于 $\mathrm{supp}\,(a) \subset Q$，因此

$$\Pi_2\left(a, b - b_{\widehat{Q}}\right) = \Pi_2\left(a, b - b_{n-1}\right),$$

结合 σ 从 $H_1[0,1)$ 到 $L^1[0,1)$ 的有界性和引理 4.6，进一步可得

$$\left\|\sigma\left(\Pi_2\left(a, b - b_{\widehat{Q}}\right)\right)\right\|_{L^1[0,1)} \lesssim \left\|\Pi_2\left(a, b - b_{\widehat{Q}}\right)\right\|_{L^1[0,1)} \lesssim \|b\|_{\mathrm{BMO}[0,1)}.$$

结合这一点、(5.11) 和引理 5.12，我们得出 (5.10) 成立。命题 5.13 的证明至此完成。□

以下结论可直接由命题 5.13 和注 4.13 得出；细节从略。

推论 5.14. 设 $b \in \mathrm{BMO}[0,1)$ 非常数，则

(i) 交换子 $[\sigma,b]$ 从 $H_1[0,1)$ 到 $L^{1,\infty}[0,1)$ 有界；

(ii) $\mathcal{Y} := H_1^b[0,1)$ 是 $H_1[0,1)$ 的最大子空间，使得交换子 $[\sigma,b]$ 从 $\mathcal{Y}$ 到 $L^1[0,1)$ 有界。

致谢。我们感谢 Odysseas Bakas、Zhendong Xu、Yujia Zhai 和 Hao Zhang 就这一主题与我们交流，并向我们发送了 [3] 的初步版本。我们也感谢 Quanhua Xu 对这一主题的关注，并告知我们 Odysseas Bakas、Zhendong Xu、Yujia Zhai 和 Hao Zhang 正在研究相关问题；因此，我们向他们发送了本文内容的第一份草稿。

我们还要感谢 Dmitriy Stolyarov 指出我们错误地引用了有关分数阶积分的一些结果（见注 4.21）。

参考文献

[1] R. Arai、E. Nakai 和 G. Sadasue，《鞅 Orlicz 空间上的分数积分及其交换子》，《数学分析及其应用》487（2020年），论文编号123991，共35页。[2] O. Bakas、S. Pott、S. Rodr´ıguez-L´opez 和 A. Sola，《关于 $H^{\log}$ 的札记：结构性质、二进变体以及双线性 H^1-BMO 映射》，《数学文献汇编》60（2022年），231–175。[3] O. Bakas、Z. Xu、Y. Z hai 和 H. Zhang，《鞅 Hardy 空间及其对偶空间中元素之间的乘法》，arXiv: 2301.08723。[4] R. Ba˜nuelos，《D. L. Burkholder 的基础不等式及其若干影响》，《伊利诺伊数学杂志》54（2010年），789–868（2012年）。

[5] A. Bonami、J. Cao、L. D. Ky、L. Liu、D. Yang 和 W. Yuan, 《Hardy 空间与其对偶空间之间的乘法》, 《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）131（2019年）, 130–170。[6] A. Bonami、L. Liu、D. Yang 和 W. Yuan, 《$\mathbb{R}^n$ 上 Zygmund类的逐点乘子》, 《几何分析杂志》31（2021年）, 8879–8902。[7] A. Bonami、J. Feuto、S. Grellier 和 L. D. Ky, 《闭形式广义Hardy空间中的原子分解与弱分解》, 《数学科学通报》141（2017年）, 676–702。[8] A. Bonami、S. Grellier 和 L. D. Ky, 《通过小波研究 BMO($\mathbb{R}^n$) 和 $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ 中函数的抛物乘积与乘积》, 《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）97（2012年）, 230–241。[9] A. Bonami、T. Iwaniec、P. Jones 和 M. Zinsmeister, 《BMO 与 H_1, 中函数的乘积》, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）57（2007年）, 1405–1439。[10] A. Bonami 和 L. D. Ky, 《全纯函数某些 Hardy 型空间的分解》, 《巴黎科学院数学报告》352（2014年）, 817–821。[11] D. L. Burkholder, 《鞅变换》, 《数学统计年刊》37（1966年）, 1494–1504。[12] J. Cao、L. D. Ky 和 D. Yang, 《通过小波对局部 Hardy 空间与 Lipschitz 或 BMO 空间的乘积进行双线性分解》, 《当代数学通讯》20（2018年）, 1750025, 共30页。[13] J.-A. Chao 和 R. Long, 《具有无界乘子的鞅变换》, 《美国数学会会刊》114（1992年）, 831–838。[14] J.-A. Chao 和 H. Ombe, 《二进鞅上的交换子》, 《日本学士院院刊A辑：数学科学》61（1985年）, 35–38。[15] J.-A. Chao 和 L. Peng, 《简单鞅上的 Schatten类与交换子》, 《数学讨论会》71（1996年）, 7–21。[16] B. Davis, 《关于鞅平方函数的可积性》, 《以色列数学杂志》8（1970年）, 187–190。[17] X. Fu、D. Yang 和 L. Liang, 《齐次型空间上的 BMO ($\mathcal{X}$) 与 $H^1_{at}(\mathcal{X})$ 中函数的乘积：小波方法》, 《傅里叶分析及其应用杂志》 23 （2017年）, 919–990。[18] A. M. Garsia, 《鞅不等式：近期进展研讨会讲义》, 数学讲义丛书, W. A. Benjamin, Inc., 雷丁、马萨诸塞州—伦敦—阿姆斯特丹, 1973年。[19] C. Herz, 《有界平均振荡与受控鞅》, 《美国数学会汇刊》193（1974年）, 199–215。[20] S. Janson, 《BMO 与鞅变换的交换子》, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）31（1981年）, 265–270。[21] L. D. Ky, 《奇异积分算子的双线性分解与交换子》, 《美国数学会汇刊》365（2013年）, 2931–2958。[22] L. D. Ky, 《与 Schr¨odinger 算子相关的奇异积分交换子的端点估计》, 《伊比利亚美洲数学评论》31（2015年）, 1333–1373。[23] L. Liu、D. Yang 和 W. Yuan, 《齐次型空间上 Hardy 空间与 Lipschitz空间乘积的双线性分解》, 《数学论文集》533（2018年）, 1–93。[24] R. Long, 《鞅空间与不等式》, 北京大学出版社, 北京；Friedr. Vieweg & Sohn, 布伦瑞克, 1993年。[25] L. D. L´opez-S´anchez、J. M. Martell 和 J. Parcet, 《超越倍增测度的二进调和分析》, 《数学进展》267（2014年）, 44–93。[26] N. Memi´c 和 S. Sadikovi´c, 《极大算子与 Hardy 空间刻画》, 《数学分析》46（2020年）, 119–131。

[27] T. Miyamoto、E. Nakai 和 G. Sadasue，鞅 Orlicz-Hardy 空间，《数学通讯》285（2012年），670–686。[28] E. Nakai 和 G. Sadasue，鞅 Campanato 空间上的逐点乘子，《数学研究》220（2014年），87–100。[29] E. Nakai 和 G. Sadasue，关于 BLO 鞅的一些新性质，《东北数学杂志》（第二辑）69（2017年），183–194。[30] E. Nakai 和 G. Sadasue，鞅 Morrey 空间上的分数积分交换子，《数学不等式及其应用》22（2019年），631–655。[31] E. Nakai 和 K. Yabuta，有界平均振荡函数的逐点乘子，《日本数学会杂志》37（1985年），207–218。[32] C. P´erez，奇异积分算子交换子的端点估计，《泛函分析杂志》128（1995），163–185。[33] L.-E. Persson、F. Schipp、G. Tephnadze 和 F. Weisz，关于 Vilenkin 系统的 Carleson–Hunt 定理的一个类比，《傅里叶分析及其应用杂志》28（2022年），第48号论文，29页。[34] L.-E. Persson、G. Tephnadze 和 F. Weisz，《鞅 Hardy 空间与一维 Vilenkin–Fourier 级数的可和性》，Birkhuser/Springer，Cham，2022年。[35] M. C. Pereyra，二进调和分析与加权不等式：稀疏革命，载于：《应用调和分析新趋势》第2卷《调和分析、几何测度论及其应用》，第159–239页，《应用数值调和分析》，Birkh¨auser/Springer，Cham，2019年。[36] N. Randrianantoanina 和 L. Wu，非交换分数积分，《数学研究》229（2015年），113–139。[37] F. Schipp、W. R. Wade 和 P. Simon，《Walsh 级数》，Adam Hilger 有限公司，布里斯托尔，1990年，《二进调和分析导论》，J. P´al 合作编写。[38] D. Stolyarov 和 D. Yarcev，非规则鞅的分数积分，《东北数学杂志》（第二辑）74（2022年），253–261。[39] S. Treil，非齐次鞅环境中的交换子、抛物乘积与 BMO，《伊比利亚美洲数学评论》29（2013年），1325–1372。[40] A.L. Volberg 和 V. A. Tolokonnikov，《Hankel 算子与无界函数最佳逼近问题》，译自《苏联科学院斯捷克洛夫列宁格勒数学研究所科学研讨会纪要》141（1985年），5–17。[41] F. Weisz，$0 < p \le 1$ 的鞅 Hardy 空间，《概率论及相关领域》84（1990年），361–376。[42] F. Weisz，《鞅 Hardy 空间及其在傅里叶分析中的应用》，《数学讲义》第1568卷，施普林格出版社，柏林，1994年。[43] F. Weisz，一维和二维 Walsh-Fourier 级数的 Ces`aro 可和性，《数学分析》22（1996年），229–242。[44] F. Weisz，《多维傅里叶级数的可和性与 Hardy 空间》，《数学及其应用》第541卷，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，2002年。[45] D. Yang、W. Yuan 和 Y. Zhang，与局部 Hardy 空间及其对偶空间相关的乘积上的双线性分解与散度-旋度估计，《泛函分析杂志》280（2021年），第108796号论文，74页。

[46] Y. Zhang、D. Yang 和 W. Yuan，局部奥尔利奇切片 Hardy 空间的实变刻画及其在双线性分解中的应用，《当代数学通讯》24（2022年），第2150004号论文，35页。

Aline Bonami

丹尼斯·泊松研究所，法国国家科学研究中心联合研究组 7013，奥尔良大学，45067 奥尔良 Cedex 2，法国 电子邮件：aline.bonami@univ-orleans.fr（A. Bonami）

Yong Jiao、Guangheng Xie 和 Dejian Zhou 数学与统计学院，HNP-LAMA，中南大学，中国湖南长沙 410083

电子邮件：jiaoyong@csu.edu.cn（Y. Jiao）
xieguangheng@csu.edu.cn（G. Xie）
zhoudejian@csu.edu.cn（D. Zhou）

Dachun Yang

数学与复杂系统实验室（中国教育部），北京师范大学数学科学学院，北京 100875，中华人民共和国

电子邮件：dcyang@bnu.edu.cn（D. Yang）