arXiv:2301.09405v1 [math.MG] 23 Jan 2023

曲线的凸包：体积与签名

Carlos Am´endola、Darrick Lee、Chiara Meroni

摘要

在计算几何中，取一条曲线的凸包是一种自然的构造。另一方面，路径签名在随机分析中占有重要地位，能够捕捉曲线的几何性质，尽管对于高于二阶的层级，其精确解释尚未得到充分理解。本文研究如何利用路径签名计算曲线凸包的体积。我们给出曲线满足的充分条件，使得其凸包的体积可以通过此类公式计算。典型例子是经典的矩曲线；我们称为循环的的曲线类还包括其他已知类别，例如 d 阶曲线以及具有全正挠率的曲线。我们还猜想了签名体积公式成立所需的曲线必要且充分条件。最后，我们从长度和有向面积的角度，对体积公式给出具体的几何解释。

1 引言

求曲线的凸包是一种经典的几何构造。理解其计算方法和性质，对于非线性计算几何十分重要；其中，空间曲线尤其与几何建模等应用密切相关 [Sed86，SEJK04，RS12]。另一方面，体积是基本的几何不变量。计算凸包的体积会引出优化中的有趣等周问题 [Mel60]，，并且在《生态学》 [CSA06]和光谱成像 [MZSB10]等领域有应用。

在近期的一篇文章 [dDPIM22]，中，作者证明，对于满足全正扭率性质的曲线，可以利用某个积分公式计算其凸包的体积。全正扭率性质是一种局部凸性条件，而满足这一性质的路径有一个例子就是矩曲线

$$\mathbf{x}(t) = (t, t^2, \ldots, t^d) : [0, 1] \to \mathbb{R}^d.$$

从离散几何的角度来看，矩曲线也是一类称为d 阶曲线 [Stu87]的曲线中的典型例子。我们的贡献是将 [dDPIM22] 关于凸包体积的积分公式推广到循环曲线这一类曲线，它们是 d阶曲线的均匀极限。这个名称的由来是因为 d阶曲线可以用循环多胞体逼近，而循环多胞体在我们证明这一推广结果的过程中发挥着核心作用。

我们的方法使用了路径签名 [Che58]，这一概念。路径签名是一种强大的工具，广泛应用于随机分析 [FH20] 和机器学习 [LM22]，，它将路径表示为一个由张量构成的无限序列。众所周知，路径签名能够在树状等价 [HL10]，意义下刻画路径，但路径签名中的各个项在几何上难以解释。本文 [DR19]表明，路径签名的某些正交不变量可以理解为一种有向体积。特别地，作者证明，在矩曲线这一特定情形下，该正交不变量计算出的正是凸包的体积。这一结果启发我们将其推广到循环曲线的情形，从而将 [dDPIM22] 的凸包公式与路径签名联系起来。

2 曲线的分类

本节将考察几类曲线凸包性质良好的路径。在本文中，我们始终考虑 Lipschitz连续路径 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathrm{Lip}([0,1], \mathbb{R}^d)$。路径的全正扭率性质 [dDPIM22] 定义如下。

定义 2.1 （全正挠率（T^d））。若路径 $\mathbf{x} \in C^d((0,1), \mathbb{R}^d) \cap C([0,1], \mathbb{R}^d)$ 的导数矩阵的所有顺序主子式

$$\mathfrak{T}(\mathbf{x})(t) := (\mathbf{x}'(t), \ldots, \mathbf{x}^{(d)}(t))$$

对所有 $t \in (0,1)$ 均为正，则该路径具有全正挠率。全正挠率路径的空间记为 T^d。

请注意，这个定义取决于参数化，且在正交群作用下并非不变。因此，空间 T^d 是 $\mathbb{R}^d$ 中所有能够通过旋转变为全正挠率路径的曲线所构成的空间。此外，这个定义要求 $\mathbf{x}$具有较高的正则性，至少应为 d 次可微。在[dDPIM22] 中，我们还发现了以下更大的曲线类，它们被用于许多证明中。

定义 2.2 （严格正行列式条件（SD^d））。若路径 $\mathbf{x} \in \mathrm{Lip}([0,1], \mathbb{R}^d)$ 满足以下性质，则称其满足严格正行列式条件

$$\mathfrak{D}(\mathbf{x})(t_1, \ldots, t_d) := \det(\mathbf{x}'(t_1), \ldots, \mathbf{x}'(t_d)) > 0, \quad 0 < t_1 < \ldots < t_d < 1$$

在$\mathbf{x}$ 可微处成立。这类严格正行列式路径的空间记为 SD^d。

另一方面，以下这类曲线纯粹是几何对象，因此与参数化无关。

定义 2.3 （d 阶路径（Ord^d））。若路径 $\mathbf{x} \in \mathrm{Lip}([0,1], \mathbb{R}^d)$ 是一个 d阶路径，则任意仿射超平面在 $\mathbb{R}^d$ 中与$\mathbf{x}$ 的像至多相交于 d 个点。当且仅当下述性质成立时，情况如此

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mathbf{x}(t_0) & \mathbf{x}(t_1) & \ldots & \mathbf{x}(t_d) \end{pmatrix} > 0 \qquad \text{for all } 0 \le t_0 < \ldots < t_d \le 1 \tag{1}$$

d 阶路径的空间记为 Ord^d。

这些曲线具有特殊性质，在文献中受到广泛研究，尽管它们有许多不同的名称。本文沿用 [Stu87]的术语。Motzkin 将这些曲线称为共单调曲线 [Mot57, Mot60], ，并将这一概念的起源归于 Juel [Jue07]。单调性的这一概念也可追溯至 Hjelmslev [Hje14]。在 Labourie [Lab06]的文献中，它们被称为超凸曲线。 d阶曲线最广为人知的名称或许是凸曲线。不过，不同作者对凸性的定义略有差异：有时会按重数计算曲线与超平面的交点 [SS05, SS22], ，有时则允许式（1）中的部分但非全部行列式为零 [Kar19]。例如，在 [Kar19] 中，我们所说的 d 阶曲线被称为严格凸曲线。需要指出的是，这一定义与 Barner [Bar56]和 Fabricius-Bjerre [FB61, FB62]所使用的严格凸曲线定义并不相同。

不论名称如何，目前已有许多已知结果，也提出了一些猜想。例如，在 [KS66]中，作者计算了凸曲线的体积和 Carathéodory 数；而在 [Sch54] 中，则给出了这类闭合偶维曲线的凸包体积公式。我们将利用 d阶曲线的一个特点：

这类曲线上任意 n个点构成的凸包都是一个循环多胞体[Zie95] ，且这些 n 点都是其顶点。

根据 [dDPIM22，引理 3。1], 全正扭率性质蕴含严格正行列式条件，因此 $\mathsf{T}^d \subsetneq \mathsf{SD}^d$。此外， [dDPIM22，推论 2。5] 的证明表明，对于路径$\mathbf{x}$ ，严格正行列式条件蕴含 $\mathbf{x}$ 是一个 d阶路径，因此 $\mathsf{SD}^d \subseteq \mathsf{Ord}^d$。如下两个例子表明，这两个包含关系都是严格的。

例 2.4 ($\mathsf{T}^d \subsetneq \mathsf{SD}^d$)。 考虑由下式定义的路径

$$\mathbf{x}(t) = \big(t, (t-0.5)^4\big).$$

SD^d 条件中的行列式为

$$\mathfrak{D}(\mathbf{x})(t_1,t_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4(t_1-0.5)^3 & 4(t_2-0.5)^3 \end{vmatrix} = 4(t_2-0.5)^3 - 4(t_1-0.5)^3 > 0$$

当 $t_1 < t_2$ 时。然而，挠率矩阵为

$$\mathfrak{T}(\mathbf{x})(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4(t-0.5)^3 & 12(t-0.5)^2 \end{pmatrix},$$

且当 $t = 0.5$ 时，行列式为零。 ◇

例 2.5 ($\mathsf{SD}^d \subsetneq \mathsf{Ord}^d$)。 考虑由下式定义的单位圆路径

$$\mathbf{x}(t) = \big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\big).$$

显然，$\mathbf{x}$ 是一个二阶路径，因为 $\mathbb{R}^2$ 中的任意一条直线与此圆的交点至多有 2 个。然而，行列式

$$\mathfrak{D}(\mathbf{x})\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \begin{vmatrix} -2\pi & 2\pi \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

不满足严格正行列式条件。 ◇

一方面，我们可以将 T^d 的条件理解为局部条件，也就是说，只需在曲线上的各个点分别检验。另一方面，Ord^d 的条件是全局条件，也就是说，它会同时考虑曲线上的 $d+1$ 个点。

如例 2.5 所示，严格正行列式条件已经相当严格；特别是，任何闭曲线都会以类似的方式违反这一条件。我们发现，更一般的全局条件 Ord^d 才是适合我们目的的概念。事实上，我们还可以进一步扩展 Ord^d这一类；其名称暗示了它与循环多胞体的联系。

定义 2.6 （循环路径（Cyc^d）） 。路径$\mathbf{x} \in \mathrm{Lip}([0,1], \mathbb{R}^d)$若是 d阶曲线在 Lipschitz（或等价地，一致）拓扑下的极限，则称为循环的。循环路径的空间记作 Cyc^d。

特别是，循环曲线包含一些分段线性曲线，而这些曲线并不属于之前介绍的任何类别。它还允许曲线的某些子集位于低维空间中。示例见图1 。需要指出的是，对于张成整个 $\mathbb{R}^d$的曲线$\mathbf{x}$ ，循环性等同于条件（1）的宽松版本，即要求行列式非负。如果$\mathbf{x}$ 包含在某个低维子空间中，那么（1）的宽松版本对曲线不作任何限制，而循环性则会施加限制。

总之，我们得到了以下严格包含关系序列，展示了曲线从局部性质到整体性质的过渡：

$$\mathsf{T}^d \subset \mathsf{SD}^d \subset \mathsf{Ord}^d \subset \mathsf{Cyc}^d.$$

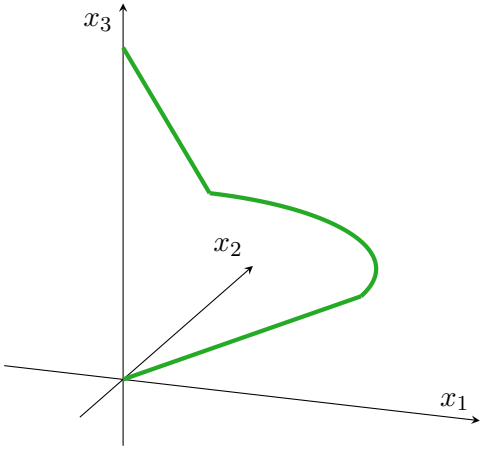


图 1：$\mathrm{Cyc}^d \setminus \mathrm{Ord}^d$ 中的一条曲线，包含两条线段和一段位于平面 $\{x_3 = \frac{1}{2}\}$ 内的圆弧。

注 2.7. 循环曲线是凸曲线的推广。凸曲线与 Shapiro-Shapiro 猜想有关，该猜想于 20 世纪 90 年代初提出，涉及实舒伯特演算以及如何获得全实构型。有关这一猜想的最新进展，请参见 [SS22]. ◇

3 路径签名与体积

本节介绍曲线凸包的体积公式与路径签名之间的联系；路径签名是基于迭代积分对曲线的一种刻画 [Che58]。特别地，我们证明循环曲线的凸包体积可以用路径签名的反对称化来表示。这种联系最初由 [DR19]在矩曲线的情形下进行研究。

定义 3.1。设$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathrm{Lip}([0,1], \mathbb{R}^d)$。阶数为 k 的路径签名$\mathbf{x}$ 是一个张量 $\sigma^{(k)}(\mathbf{x}) \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$，定义如下：

$$\sigma^{(k)}(\mathbf{x}) \coloneqq \int_{\Delta^k} \mathbf{x}'(t_1) \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}'(t_k)\, \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$$

其中积分区域为 k-单纯形

$$\Delta^k \coloneqq \{0 \le t_1 < \cdots < t_k \le 1\}.$$

给定一个多重指标 $I = (i_1, \ldots, i_k) \in [d]^k$，关于$\mathbf{x}$ 相对于 I的路径签名为

$$\sigma_I(\mathbf{x}) \coloneqq \int_{\Delta^k} x'_{i_1}(t_1) \cdots x'_{i_k}(t_k)\, \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k \in \mathbb{R}.$$

路径签名 $\sigma(\mathbf{x})$是路径$\mathbf{x}$ 的形式幂级数，通过对所有层级 $\sigma^{(k)}(\mathbf{x})$ 求和得到。众所周知，路径签名能够在树等价 [Che58、HL10]意义下刻画路径；然而，签名 $\sigma_I(\mathbf{x})$ 的各个分量往往难以从几何角度理解。我们旨在通过将签名项反对称化到外代数 $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ 中，为其提供几何解释：$= \bigoplus_{k=0}^{d} \Lambda^k \mathbb{R}^d$，其中 $\Lambda^k \mathbb{R}^d$ 是由 $\mathbb{R}^d$ 的 k 阶交错张量构成的向量空间。这些张量使用保序单射 $P\colon [k] \to [d]$ 进行索引，记作 $\mathcal{O}_{k,d}$。

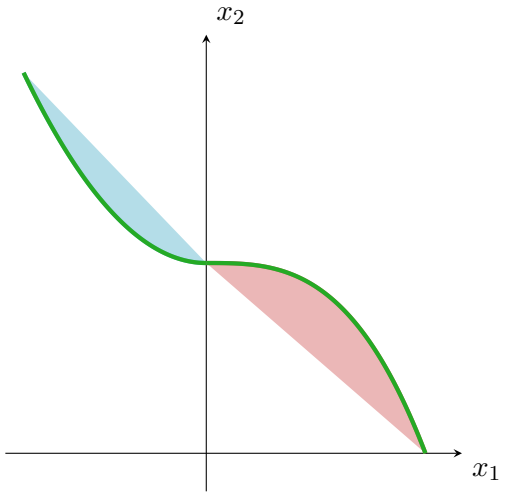


图 2：绿色曲线$\mathbf{x}$ 的有向面积等于红色区域与蓝色区域面积之和，其中红色区域取正号，蓝色区域取负号。

定义 3.2。 设$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{Lip}([0,1], \mathbb{R}^d)$。第 k 层交错签名是$\mathbf{x}$ 的一个张量 $\alpha^{(k)}(\mathbf{x}) \in \Lambda^k \mathbb{R}^d$，定义如下：

$$\alpha^{(k)}(\mathbf{x}) \coloneqq \int_{\Delta^k} \mathbf{x}'(t_1) \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}'(t_k)\, \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k \in \Lambda^k \mathbb{R}^d.$$

给定一个保序单射 $P\colon [k] \to [d]$，曲线$\mathbf{x}$ 相对于 P 的交替签名为

$$\alpha_P(\mathbf{x}) \coloneqq \frac{1}{k!} \int_{\Delta^k} \det(x'_{P(1)}(t_1), \dots, x'_{P(k)}(t_k))\, \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k \in \mathbb{R}.$$

交替签名也可以等价地用反对称化来定义

$$\mathrm{Alt} : (\mathbb{R}^d)^{\otimes k} \to \Lambda^k(\mathbb{R}^d), \qquad \mathrm{Alt}(\sigma)_P \coloneqq \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \Sigma_d} \mathrm{sgn}(\tau) \sigma_{P \circ \tau},$$

其中

$$\alpha^{(k)}(\mathbf{x}) \coloneqq \mathrm{Alt}(\sigma^{(k)}(\mathbf{x})) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^d).$$

我们主要关注第 $k = 2$ 级和第 $k = d$ 级交替签名。设**曲线** $\in \mathbf{Lip}([0,1], \mathbb{R}^d)$，并考虑第 $k = 2$ 级的交替签名。在此级别，$\alpha^{(2)}$**(曲线)** 可以视为一个 $d \times d$ 反对称矩阵，其第（i, j）个元素为

$$\alpha_{i,j}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\sigma_{i,j}(\mathbf{x}) - \sigma_{j,i}(\mathbf{x}) \right),$$

这恰好是路径的有向面积（见图2），即路径$\mathbf{x}$ 投影到（e_i,e_j）平面后的面积。在第 $k = d$ 级的情况下，外幂 $\Lambda^d \mathbb{R}^d$ 是一维的，因此我们可以将第 d 级交替签名表示为

$$\alpha^{(d)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{d!} \int_{\Delta^d} \det(\mathbf{x}'(t_1), \dots, \mathbf{x}'(t_d)) \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_d.$$

此外，最高层交错签名具有旋转不变性。

定理 3.3 ([DR19])**.** 对于路径 d 的第 $\mathbf{x} \in Lip([0,1], \mathbb{R}^d)$ 级交替签名，在特殊正交群 $\mathrm{SO}(d)$ 作用下保持不变（该作用逐点作用于$[0,1]$），也就是说，给定 $V \in \mathrm{SO}(d)$,

$$\alpha^{(d)}(V\mathbf{x}) = \alpha^{(d)}(\mathbf{x}).$$

3.1 循环曲线的凸包公式

在 [DR19], 中，作者将交替签名 $\alpha^{(d)}$ 解释为曲线的有向体积，并进一步证明 $\alpha^{(d)}$ 是矩曲线凸包的体积。我们推广的第一部分将这一结果扩展到 d阶曲线。最初， [KS66中的定理 6 使用其他方法证明了这一点。1]。

定理 3.4。 设 $\mathbf{x}: [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 是一条 d 阶曲线。那么

$$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x})) = \alpha^{(d)}(\mathbf{x}).$$

证明。 考虑 $n+1$ 个点 $p_0 = \mathbf{x}(t_0) \ldots, p_n = \mathbf{x}(t_n)$ 位于 d 阶曲线上，其中$0 \le t_0 < \ldots < t_n \le 1$。记 C_n 它们的凸包 $\mathrm{conv}(p_0, \ldots, p_n)$，它是一个循环多胞体。按照 C_n 中的方法，通过拉取一个顶点，可以对其进行三角剖分，参见 [DR19，引理 3。29]。事实上，根据 Gale 偶性判据，循环多胞体的三角剖分由满足以下条件的单形给出，其顶点为 $p_{i_0}, \ldots, p_{i_d}$ 满足

- 当 d 为偶数时： $i_0 = 0$ 且对任意 $1 \le \ell \le d$;
- 当 d 为奇数时： $i_0 = 0$、 $i_d = n$ 和 $i_{2\ell+1} + 1 = i_{2\ell+2}$; 对任意 $1 \le \ell \le d-1$ 均成立。

我们用 $\mathcal{I}$ 表示满足这些条件的所有 d 元指标组的集合。因此， C_n 的体积等于所有这些单形体积之和。因为 $\mathbf{x}$ 是一条 d 阶曲线

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mathbf{x}(s_0) & \mathbf{x}(s_1) & \ldots & \mathbf{x}(s_d) \end{pmatrix} > 0$$

对于每一种递增的 $0 \le s_0 < \ldots < s_d \le 1$ 取值均成立。因此,

$$\mathrm{vol}(C_n) = \frac{1}{d!} \sum_{\{i_0,\ldots,i_d\} \in \mathcal{I}} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ p_{i_0} & p_{i_1} & \ldots & p_{i_d} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

由于 $\mathbf{x}$ 具有有界变差，我们可以对 $n \to \infty$取 [DR19 引理 3 中29]式 (2) 的极限。特别地，我们用到了 [Sch13第 1 节中关于凸包连续性的结论8] 以及 [FV10命题 7 中关于截断签名连续性的结论63]。由此得到公式 $\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x})) = \alpha^{(d)}(\mathbf{x})$。 □

然而，由于体积和路径签名都是连续的，体积公式对于 d-阶曲线的极限仍然成立

定理 3.5. 设 $\mathbf{x}: [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 是一条循环曲线。那么，

$$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x})) = \alpha^{(d)}(\mathbf{x}).$$

证明。 由于 $\mathbf{x}$ 是循环的，我们可以将它写成 d阶曲线 $\mathbf{x}_k$ 在 $\mathbb{R}^d$中的极限，使得$\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$ 。由于 conv 是连续运算 [Sch13，第 1 节。8], 因此 $\mathrm{conv}(\mathbf{x}) = \lim \mathrm{conv}(\mathbf{x}_k)$。由定理 3.4可知，$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x}_k)) = \alpha^{(d)}(\mathbf{x}_k)$。因此我们得到

$$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x})) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x}_k)) = \lim_{k\to\infty} \alpha^{(d)}(\mathbf{x}_k) = \alpha^{(d)}(\mathbf{x}).$$

其中，第一个等式由体积运算的连续性 [Sch13，定理 1.820]得出；第二个等式由定理3.4 得出；最后一个等式则源于有界变差连续曲线这一类中签名的稳定性 [FV10，命题 763]。

□

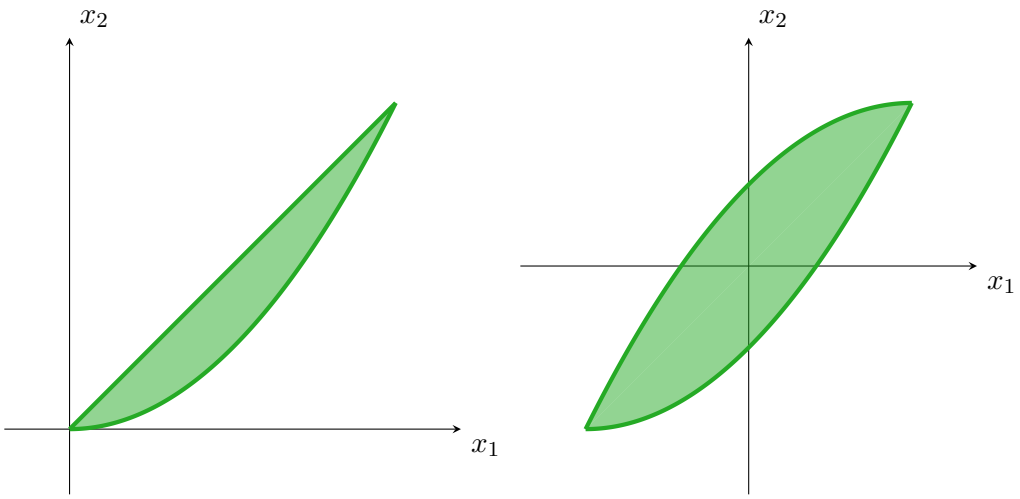


图3：左：矩曲线$\mathbf{x}(t) = (t,\ t^2)$ 对于 $t \in [0,1]$ 的凸包。右：zonotope（拟阵体）$\mathcal{Z}(\mathbf{x}')$。

从一条循环曲线出发，可以自然地构造出一个中心对称凸体，其体积与该曲线本身的凸包体积相同。具体而言，设$\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^d$ 是一条循环曲线，并将参数化$\mathbf{x}'$ 的一阶导数向量$\mathbf{x}$视为一个 $\mathbb{R}^d$随机向量。于是可以按照 [Vit91]中所述，定义与给定随机向量相关的拟阵体 $\mathcal{Z}(\mathbf{x}'$。我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\operatorname{conv}(\mathbf{x})) &= \frac{1}{d!}\int_{\Delta^d} \det(\mathbf{x}'(t_1),\dots,\mathbf{x}'(t_d))\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_d \\ &= \frac{1}{d!\cdot d!}\int_{[0,1]^d} |\det(\mathbf{x}'(t_1),\dots,\mathbf{x}'(t_d))|\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_d = \frac{1}{d!}\operatorname{vol}(\mathcal{Z}(\mathbf{x}')).\end{aligned}$$

下面通过一个例子来说明。

例3.6。 令 $\mathbf{x}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ 为由 $(t,\ t^2)$ 参数化的矩曲线。于是我们可以显式地计算 zonotope（拟阵体） $\mathcal{Z}(\mathbf{x}')$。其支撑函数 [Sch13]按定义为

$$h_{\mathcal{Z}}(u,v) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\langle (u,v), \mathbf{x}'(t)\rangle|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 |u+2vt|\,\mathrm{d}t$$

对于 $(u,\ v) \in \mathbb{R}^2$。通过案例分析，可以求解上述积分，并求得对偶体 $\mathcal{Z}(\mathbf{x}')^\circ$的方程。关于 zonotope（拟阵体）和凸体的更多内容，参见 [Sch13]。这使得我们能够求得图中所示的半代数拟阵体

$$\mathcal{Z}(\mathbf{x}') = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4x^2+4x-4y+1 \geq 0, -4x^2-4x+4y+1 \geq 0\}$$

图中展示于 3。计算表明，$\operatorname{vol}(\mathcal{Z}(\mathbf{x}')) = \frac{1}{3} = 2\cdot\operatorname{vol}(\operatorname{conv}(\mathbf{x}))$。 – ◇

注3.7。 设$\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^d$ 是一条参数化为

$$\mathbf{x}(t) = (a_1^{(i)}t + b_1^{(i)}, \dots, a_d^{(i)}t + b_d^{(i)}) \qquad \text{for } t \in [m_i, M_i]$$

对于 N向量 $a^{(i)},\ b^{(i)} \in \mathbb{R}^d$，以及 $0 = m_1 < \ldots < M_{i-1} = m_i < \ldots < M_N = 1$属于 $[0,1]$。那么， $\mathcal{Z}(\mathbf{x}')$ 的支撑函数为 $h_{\mathcal{Z}(\mathbf{x}')}(u) = \sum_{i=1}^N \frac{M_i - m_i}{2}|\langle u, a^{(i)}\rangle|$。因此， $\mathcal{Z}(\mathbf{x}')$ 是一个 zonotope（拟阵体）

$$\mathcal{Z}(\mathbf{x}') = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{(M_i-m_i)}{2}a^{(i)}, \frac{(M_i-m_i)}{2}a^{(i)}\right].$$

◇

3.2 对数曲线

一个可以使用体积公式的曲线示例是对数曲线。取 d 个互不相同的非负实数 a_1, a_2, .., a_d，并考虑与之对应的对数曲线（简称对数曲线），其参数化形式为

$$\mathbf{x} : [0,1] \to \mathbb{R}^d, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \log(1+a_1 t) \\ \log(1+a_2 t) \\ \vdots \\ \log(1+a_d t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

我们证明对数曲线是 d阶的，因此它们是循环的。

引理 3.8。 式（(3) 中的对数曲线是 d阶曲线。

证明。 考虑 $0 \le t_0 < \ldots < t_d \le 1$，并取曲线上的相应点 $\mathbf{x}(t_i)$。我们需要证明以下 $(d+1) \times (d+1)$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) & \ldots & \mathbf{x}(t_d) \\ 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

是非奇异的。反设它是奇异的。因此，存在 c_1、.....、 $c_d \in \mathbb{R}$使得

$$c_1 \log(1+a_1 t_i) + \ldots + c_d \log(1+a_d t_i) \;=\; 1 \tag{4}$$

对所有 $i = 0$、.....、 d 均成立。接下来考察函数

$$f(t) \;=\; c_1 \log(1+a_1 t) + \ldots + c_d \log(1+a_d t) - 1.$$

方程（4）意味着 f至少有 $d+1$ 个不同的根，位于 $[0,1]$, 这个可微区间内。然而，

$$f'(t) \;=\; \frac{g(t)}{(1+a_1 t) \cdot \ldots \cdot (1+a_d t)}$$

其中 $g(t)$ 是一个次数为 $d-1$ 的多项式。因此， f' 在 $\mathbb{R}$ 上至多有 $d-1$ 个根。这意味着 f 在区间 $[0,1]$, 内至多有 d 个根，这与以下情况矛盾：对于 $i \neq j$，$t_i \neq t_j$。因此，$\mathbf{x}$ 中没有 $d+1$ 个点属于任何超平面，故对数曲线是一条 d 阶曲线。 □

因此我们有 $\mathbf{x} \in \mathsf{Cyc}^d$，所以可以使用定理 3.5中的符号公式计算其凸包的体积。具体而言，对于 $d = 3$ 以及互不相同的非负参数 a, b, $c \neq 0$，我们得到

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(\operatorname{conv}(\mathbf{x})) = \frac{1}{6} \int_0^1 \int_0^w \int_0^v & \frac{abc}{(1+au)(1+bv)(1+cw)} - \frac{abc}{(1+bu)(1+av)(1+cw)} \\ & - \frac{abc}{(1+au)(1+cv)(1+bw)} + \frac{abc}{(1+cu)(1+av)(1+bw)} \\ & + \frac{abc}{(1+bu)(1+cv)(1+aw)} - \frac{abc}{(1+cu)(1+bv)(1+aw)} \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\ = G(-\tfrac{1}{a}, -\tfrac{1}{b}, -\tfrac{1}{c}; 1) & - G(-\tfrac{1}{b}, -\tfrac{1}{a}, -\tfrac{1}{c}; 1) + G(-\tfrac{1}{a}, -\tfrac{1}{c}, -\tfrac{1}{b}; 1) \\ & - G(-\tfrac{1}{c}, -\tfrac{1}{a}, -\tfrac{1}{b}; 1) + G(-\tfrac{1}{b}, -\tfrac{1}{c}, -\tfrac{1}{a}; 1) - G(-\tfrac{1}{c}, -\tfrac{1}{b}, -\tfrac{1}{a}; 1), \end{aligned}$$

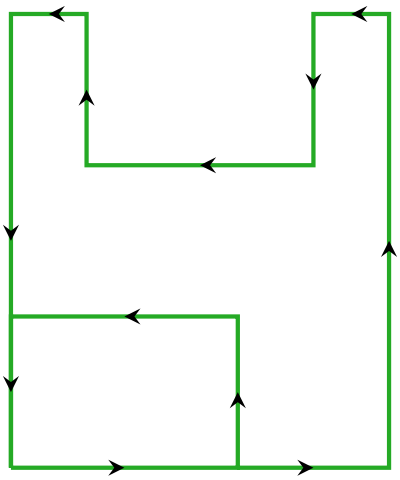


图4：凸包体积公式成立的非循环曲线。

其中 $G(z_1, \ldots\ldots, z_3; 1)$ 是多重多对数，定义见 [Wei22 第 8 节。1]。因此，对数曲线 $\mathbf{x}$ 的凸包体积是多重多对数的组合。在高维情形下也同样成立：

$$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x})) = \sum_{\tau \in \Sigma_d} \mathrm{sgn}(\tau) G\left(-\frac{1}{a_{\tau(1)}}, -\frac{1}{a_{\tau(2)}}, \ldots, -\frac{1}{a_{\tau(d)}}; 1\right)$$

其中 $\mathbf{x}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一条对数曲线，参数为 $a_1, \ldots, a_d$。

3.3 探讨必要条件

既然我们已经扩展了凸包体积等于交替签名的曲线类别，自然会想知道，循环性这一充分条件是否也是体积公式成立的必要条件。换句话说，我们希望定理 3.5 的逆命题成立。遗憾的是，事实并非如此，以下例子便说明了这一点。

例3.9。 考虑图4中的曲线。路径 $\mathbf{x}$ 从左下方出发（并在左下方结束），先描绘小循环，再绕过外环。注意，凸包 $\mathrm{conv}(\mathbf{x})$是一个实心矩形，其面积等于两个环各自围成的面积之和。后者恰好就是交替签名，因此

$$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x})) = \alpha^{(2)}(\mathbf{x}).$$

然而，曲线$\mathbf{x}$ 并不是循环的，因为它不具备以下性质。 ◇

引理3.10. 设 $\mathbf{x} \in \mathrm{Cyc}^d$。则 $\mathbf{x} \subset \partial\mathrm{conv}(\mathbf{x})$。

证明。 根据定义，$\mathbf{x}$ 是 d阶曲线 $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$的利普希茨极限，因此逐点有$\mathbf{x}(t) = \lim \mathbf{x}_k(t)$。特别地，这意味着在豪斯多夫度量下，$\mathrm{conv}(\mathbf{x}_k) \to \mathrm{conv}(\mathbf{x})$。由于每条 d阶曲线都包含在其凸包的边界上，根据极限的连续性，$\mathbf{x}$ 也包含在$\partial\,\mathrm{conv}(\mathbf{x})$中。

□

注意，条件 $\mathbf{x} \subset \partial\mathrm{conv}(\mathbf{x})$ 不足以保证体积公式成立。将这一假设加强为$\mathbf{x} \subset \mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(\mathbf{x}))$ 也不行，其中 Ext 表示极点集合。事实上，令$\mathbf{x}$ 为由$[0,1] \ni t \mapsto (\cos\ 2\pi t, \sin\ 2\pi t, \cos\ 6\pi t) \in \mathbb{R}^3$参数化的曲线。那么，$\alpha^{(3)}(\mathbf{x}) = 0$，而 $\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x})) \neq 0$。

循环曲线具有这样的性质：其任意子路径也都是循环曲线，因此体积公式对循环曲线的所有子路径都成立。我们猜想，循环曲线是使签名公式对所有子路径都成立的最大曲线类。

猜想 3.11。 设$\mathbf{x}: [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 是利普希茨路径。那么，当且仅当对$\mathbf{x}$ 在任意子区间 $[a,b] \subset [0,1]$上的所有限制 $\tilde{\mathbf{x}}: [a,b] \to \mathbb{R}^d$，均有$\mathbf{x}$ 是循环的$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\tilde{\mathbf{x}})) = \alpha^{(d)}(\tilde{\mathbf{x}})$ 成立。

4 低阶分解

路径签名具有洗牌代数结构，由此可将高阶交替签名分解为一阶和二阶项。此外，我们还可以用有向面积来重新诠释签名体积公式。我们首先介绍 [DR19] 中交替签名的分解。

引理 4.1 ([DR19], 引理 3.17)。 设 $\mathbf{x} \in Lip, \mathbb{R}^d)$ 并假设 $k \le d$。

- *(k 奇数）*。假设$(P: [k] \to [d]) \in \mathcal{O}_{k,\ d}$。对于 $i \in [k]$，令$P_i \in \mathcal{O}_{k-1,\ d}$ 定义如下

$$P_i(r) = \begin{cases} P(r) & \text{if } r < i, \\ P(r+1) & \text{if } r \ge i. \end{cases}$$

Then

$$\alpha_P(\mathbf{x}) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\sigma_{P(i)}(\mathbf{x}) \cdot \alpha_{P_i}(\mathbf{x}).$$

- *(k 偶数）*。设$(P: [k] \to [d]) \in \mathcal{O}_{k,\ d}$。那么

$$\alpha_P(\mathbf{x}) = \frac{1}{k!(k/2)!}\sum_{\tau\in\Sigma_k}\mathrm{sgn}(\tau)\prod_{r=1}^{k/2}\alpha_{P(\tau(2r-1)),P(\tau(2r))}(\mathbf{x}).$$

注 4.2。 [DR19中的引理 3.17] 所述结果与此处的表述略有不同。在 [DR19], 中，结果以指标的交错排列来表述，且交替签名未除以$\frac{1}{k}!$。$\diamond$

结合引理 4.1中的两个公式，我们可以用 1 级和 2 级签名项来重写奇数级交替签名。

推论 4.3。 设$\mathbf{x} \in Lip([0,1], \mathbb{R}^d)$，假设 $k \le d$ 为奇数且$P \in \mathcal{O}_{k,\ d}$。那么

$$\alpha_P(\mathbf{x}) = \frac{1}{k!\left(\frac{k-1}{2}\right)!}\sum_{\tau\in\Sigma_k}\mathrm{sgn}(\tau)\sigma_{P(\tau(1))}(\mathbf{x})\prod_{r=1}^{(k-1)/2}\alpha_{P_i(\tau(2r)),P_i(\tau(2r+1))}(\mathbf{x}).$$

证明。 先应用奇数公式，再应用偶数公式，可得

$$\alpha_P(\mathbf{x}) = \frac{1}{k!\left(\frac{k-1}{2}\right)!}\sum_{i=1}^{k}\sum_{\tau\in\Sigma_{k-1}}(-1)^{i+1}\,\mathrm{sgn}(\tau)\sigma_{P(i)}(\mathbf{x})\prod_{r=1}^{(k-1)/2}\alpha_{P_i(\tau(2r-1)),P_i(\tau(2r))}(\mathbf{x}).$$

给定一些 $i \in [k]$ 和 $\tau \in \Sigma_{k-1}$，我们定义一个新的排列 $\tau' \in \Sigma_k$ 如下：

$$\tau'(r) = \begin{cases} i & \text{if } r = 1, \\ \tau(r-1) & \text{if } 1 < r \le k,\ \tau(r-1) < i, \\ \tau(r-1)+1 & \text{if } 1 < r \le k,\ \tau(r-1) \ge i. \end{cases}$$

注意，

$$\operatorname{sgn}(\tau') \;=\; (-1)^{i+1}\operatorname{sgn}(\tau)$$

因为我们可以将 τ' 写成 τ 与一个长度为 i的循环的复合。于是有

$$\alpha_P(\mathbf{x}) \;=\; \frac{1}{k!\left(\frac{k-1}{2}\right)!}\sum_{\tau'\in\Sigma_k}\operatorname{sgn}(\tau')\sigma_{P(\tau'(1))}(\mathbf{x})\prod_{r=1}^{(k-1)/2}\alpha_{P_i(\tau'(2r)),P_i(\tau'(2r+1))}(\mathbf{x}).$$

□

4.1 以有向面积表示的体积

本节讨论如何将交错签名体积公式解释为有向面积的乘积（偶数情形），并在此基础上乘以一个额外的位移（奇数情形）。为此，我们将最高阶交错签名 $\alpha^{(d)}(\mathbf{x})$ 分解为 1阶和2阶分量，如引理 4.1 和推论4.3所示。我们首先将奇数维情形化归为偶数维情形。

设 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$，其中 $d = 2n+1$ 且 $\mathbf{x}(1) \neq \mathbf{x}(0)$。不失一般性（由于交错签名具有 $SO(d)$ 不变性），我们假设$\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0)$ 限制在 $n+1$ 坐标上。于是，方程 4.1中的分解为

$$\alpha^{(d)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{d!}(x_d(1) - x_d(0)) \cdot \alpha^{(2n)}(\overline{\mathbf{x}}),$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2n}) \colon [0,1] \to \mathbb{R}^{2n}$。因此，剩下的问题是解释偶数维路径的顶层交替签名。

现在，假设 $\mathbf{x} \colon [0,1] \to \mathbb{R}^d$，其中 $d = 2n$ 为偶数。由于 $\alpha^{(2)}(\mathbf{x})$ 是反对称矩阵，因此它具有纯虚特征值，且这些特征值成共轭对出现。通过在每一对共轭特征值之间进行（复）旋转，我们可以将矩阵 $\alpha^{(2)}$ 分块对角化如下：

$$\alpha^{(2)}(\mathbf{x}) \;=\; Q\Lambda Q^T, \tag{5}$$

其中

$$\Lambda \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_n & 0 \end{pmatrix}$$

且 Q 是由特征向量构成的正交矩阵

$$Q \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_{2n-1} & \mathbf{v}_{2n} \end{pmatrix}.$$

这里，$\mathbf{v}_{2k-1}$ 和$\mathbf{v}_{2k}$ 是 $i\lambda_k$ 对应的共轭特征向量对的实部和虚部 $-i\lambda_k$ （这里 i 是虚数单位，而不是索引）。此外，我们可以选择 Q 属于 $\mathrm{SO}(d)$。这种对有向面积矩阵进行对角化的想法曾在 [BS16]中被考虑。根据路径签名的等变性，我们有

$$\alpha^{(2)}(Q^T\mathbf{x}) = \Lambda.$$

根据最高层交错签名的 $SO(d)$ 不变性（定理3.3），等式4.1 中的分解可以写成

$$\alpha^{(2n)}(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot n!} \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

定理 4.4. 设$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 是一条循环曲线。若 $d = 2n$，则

$$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x})) = \frac{(-1)^n}{(2n)! \cdot n!} \prod_{k=1}^{n} \lambda_k,$$

其中 λ_k 是 Λ 在分解式 (5)中的各项。若 $d = 2n+1$ 且位移$\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0)$ 仅限于 x_d 坐标 ($x_k(1) - x_k(0) = 0$ 对于 $k \in [2n]$ 以及 $x_d(1) - x_d(0) > 0$)，则

$$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x})) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)! \cdot n!} (x_d(1) - x_d(0)) \prod_{k=1}^{n} \lambda_k,$$

其中 λ_k 是 Λ 在分解式 (5) 中$\alpha^{(2)}(\mathbf{x})$ 以及 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2n}) : [0,1] \Rightarrow \mathbb{R}^{2n}$。

利用上述分解，我们可以对曲线$\mathbf{x}$的凸包体积公式给出几何解释。事实上，体积可以改写为二维面积与一维长度的和与积。更确切地说，除旋转外，循环曲线的凸包体积等于起点与终点之间的距离乘以$\mathbf{x}$的 $\lfloor d/2 \rfloor$ 个有向面积；这些面积是$\mathbf{x}$ 在相应二维平面上的投影面积，条件是$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 的 d 为奇数。下一例中，我们将详细说明单调曲线的情形。

例 4.5. 令 $\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^3$ 为由 (t, t^2, t^3) 参数化的矩曲线。我们可以应用旋转

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

该旋转将向量 $\mathbf{x}(1) = (1,1,1)$ 映射到 $(0,0,1)$。于是，相关矩阵 Λ 的非对角线元素 λ_1 为

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{t_2} \frac{2 - 2t_1 - 3t_1^2}{\sqrt{6}} \frac{(2 - 3t_2)t_2}{\sqrt{2}} - \frac{2 - 2t_2 - 3t_2^2}{\sqrt{6}} \frac{(2 - 3t_1)t_1}{\sqrt{2}} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 = \frac{1}{30\sqrt{3}}.$$

这个值是 $\mathbf{x}$ 在垂直于 (1,1,1) 的平面上的投影的有向面积；图5中展示了这条曲线。应用定理4.4的奇数维版本，我们得到

$$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x})) = \frac{1}{3!} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{30\sqrt{3}} = \frac{1}{180}.$$

◇

上述解释似乎意味着：当曲线闭合时，在奇数维中会出现某种不可思议的情况，因为此时 $x(0) = x(1)$，这会产生一个零列，使整个行列式为零。因此，这个公式会预言无论循环曲线如何，体积都为零。这有一个有趣的几何推论。

推论 4.6. 不存在奇数维的闭循环曲线。更一般地，设 $\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^d$ 是一条满足 $\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\mathbf{x})) = \alpha^{(d)}(\mathbf{x})$ 的闭曲线。若 d 为奇数，则 $\mathbf{x}$ 包含于某个超平面中。

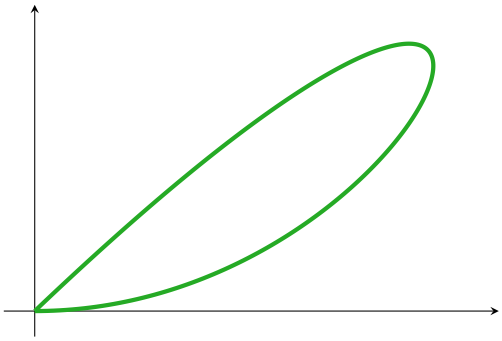


图 5：例4.5 中的矩曲线在正交于 (1，1，1) 的平面上的投影。

致谢

我们感谢 Bernd Sturmfels 向我们提出这个问题，也感谢 Anna-Laura Sattelberger 与我们进行了有益的讨论。我们还要感谢 Antonio Lerario 指出了该问题与 Shapiro-Shapiro 猜想及 zonoid 微积分之间的联系。DL 感谢 Bernd Sturmfels 和位于莱比锡的 MPI-MiS 在本项目启动期间接待其进行学术访问。DL 获得了 NCCR-Synapsy 第三阶段 SNSF 资助（编号 51NF40-185897）以及香港创新科技署（InnoHK 项目 CIMDA）的支持。

参考文献

.[Bar56] Martin Barner。《关于凸空间曲线上具有最少数量驻定密切平面的研究》。汉堡大学数学研讨班论文集，20:196–215，1956年。– 引用见第 2 页[BS16] Yuliy Baryshnikov 和 Emily Schlafly。《多元时间序列中的循环性及其在功能性 MRI 数据中的应用》。载于《2016年 IEEE 第 55 届决策与控制会议》（ CDC ），第 1625–1630 页，2016 年。– 引用见第 11 页[Che58] Kuo-Tsai Chen。《路径积分——以非交换形式幂级数忠实表示路径》。美国数学会汇刊，89(2):395–407，1958年。– 引用见第 1、4 页[CSA06] William K Cornwell、Dylan W Schwilk 和 David D Ackerly。《一种基于性状的生境筛选检验：凸包体积》。《生态学》，87(6):1465–1471，2006年。– 引用见第 1 页[dDPIM22] Jaume de Dios Pont、Paata I vanisvili 和 José Madrid。《具有全正挠率的空间曲线凸包描述的新证明》。arXiv:2201.12932，2022年。– 引用见第 1、2、3 页[DR19] Joscha Diehl 和 Jeremy Reizenstein。《基于迭代积分签名的多元时间序列不变量》。《应用数学学报》，164(1):83–122，2019年。– 引用见第 1、4、5、6、10 页[FB61] Fr. Fabricius-Bjerre。《关于严格凸曲线与线性单调性》。数学月刊，65(3):213–219，1961年。– 引用见第 2 页[FB62] Fr. Fabricius-Bjerre。《关于射影空间中的多边形阶数及其在严格凸曲线中的应用》。《斯堪的纳维亚数学》，10:221–229，1962年。– 引用见第 2 页[FH20] Peter K. Friz 和 Martin Hairer。《粗糙路径教程：正则性结构导论》。Universitext。Springer 国际出版公司，第二版，2020年。– 引用见第 1 页

[FV10] Peter K. Friz 和 Nicolas B. Victoir。《多维随机过程作为粗糙路径：理论与应用》。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2010年。– 引用见第 6 页[Hje14] Johannes Hjelmslev。《单调序列理论导论》。丹麦皇家科学院会议纪要，第 3–74 页，1914年。– 引用见第 2 页[HL10] Ben Hambly 和 Terry Lyons。《有界变差路径的签名唯一性与约化路径群》。数学年刊，171(1):109–167，2010年。– 引用见第 1、4 页[Jue07] Christian S. Juel。《关于非解析曲线》。德国数学家协会年报，16:196–204，1907年。– 引用见第 2 页[Kar19] Steven N. Karp。《正格拉斯曼流形的矩曲线与循环对称性》。《伦敦数学会通报》，51:900–916，2019年。– 引用见第 2 页[KS66] S. Karlin 和 W.J. Studden。《切比雪夫系统：及其在分析与统计学中的应用》。纯粹与应用数学：Interscience丛书。Interscience出版社，纽约，1966年。– 引用见第 2、6 页[Lab06] François Labourie。《阿诺索夫流、曲面群与射影空间中的曲线》。《数学新进展》，165(1):51–114，2006年。– 引用见第 2 页[LM22] Terry Lyons 和 Andrew D. McLeod。《机器学习中的签名方法》。arXiv:2206.*14674 [*计算机科学、数学、统计学*]*, 2022年11月。– 引用见第 1 页[Mel60] ZA Melzak。《闭空间曲线凸包的等周问题》。《美国数学会会刊》，11(2):265–274，1960年。– 引用见第 1 页[Mot57] Theodore S. Motzkin。《共单调曲线与多面体》。《美国数学会通报》，63:35，1957年。– 引用见第 2 页[Mot60] Theodore S. Motzkin。《凸型簇》。《美国国家科学院院刊》，46(8):1090–1092，1960年。– 引用见第 2 页[MZSB10] David Messinger、Amanda Ziemann、Ariel Schlamm 和 Bill Basener。《通过局部凸包体积估算光谱图像复杂度》。载于《2010年第二届高光谱图像与信号处理研讨会：遥感领域的发展》，第 1–4 页。IEEE，2010年。– 引用见第 1 页[RS12] Kristian Ranestad 和 Bernd Sturmfels。《关于空间曲线的凸包》。《几何学进展》，12(1):157–178，2012年。– 引用见第 1 页[Sch54] I. J. Schoenberg。《偶数维欧几里得空间中凸闭曲线的一个等周不等式》。《数学学报》，91:143–164，1954年。– 引用见第 2 页[Sch13] Rolf Schneider。《凸体：布伦-明可夫斯基理论》。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，第 2 版，2013年。– 引用见第 6、7 页[Sed86] Vyacheslav D Sedykh。《空间曲线凸包的结构》。《苏联数学杂志》，33(4):1140–1153，1986年。– 引用见第 1 页[SEJK04] J-K Seong、Gershon Elber、John K Johnstone 和 M-S Kim。《自由曲面的凸包》。载于《几何建模》，第 171–183 页。施普林格，2004年。– 引用见第 1 页[SS05] Vyacheslav Sedykh 和 Boris Shapiro。《关于凸曲线的两个猜想》。《国际数学杂志》，16(10):1157–1173，2005年。– 引用见第 2 页[SS22] Boris Shapiro 和 Michael Shapiro。《Vyacheslav Sedykh 与 Boris Shapiro〈关于凸曲线的两个猜想〉一文的勘误》。《国际数学杂志》，33(04):1157–1173，2022年。– 引用见第 2、4 页[Stu87] Bernd Sturmfels。《循环多胞体与 d 阶曲线》。《专论几何》，24(1):103–107，1987年。– 引用见第 1、2 页

[Vit91] Richard A. Vitale. 期望绝对随机行列式与带状体。应用概率年刊，1(2):293–300，1991年。——引自第7[Wei22] Stefan Weinzierl。费曼积分：面向学生和研究人员的全面论述。物理学 UNITEXT 丛书。Springer 国际出版公司，2022年。——引自第9[Zie95] G¨unter M Ziegler。多胞体讲义，第152卷，收录于数学研究生教材。施普林格出版社，纽约，1995年。修订版于1998年出版；第七次更新印刷版于2007年出版。——引自第3

作者地址：

Carlos Am´endola，柏林工业大学 amendola@math.tu-berlin.de
Darrick Lee，牛津大学 darrick.lee@maths.ox.ac.uk
Chiara Meroni，莱比锡马克斯·普朗克数学科学研究所 chiara.meroni@mis.mpg.de