arXiv:2301.09432v2 [math.AT] 9 Jan 2024

FRANKE 的奇异等价的幺半性质

NIKITAS NIKANDROS 和 CONSTANZE ROITZHEIM

Abstract. 众所周知，Franke 重构函子 $\mathcal{R}$能够给出稳定模型范畴的同伦范畴之间的三角等价实例。这些等价之所以奇异，是因为底层模型范畴并不 Quillen 等价。我们证明，尽管 $\mathcal{R}$ 通常不是张量三角函子，但它与幺半群乘积相容。

1. Introduction

几十年来，Franke 的奇异等价一直令同伦论学者着迷，因为它是一个罕见的例子：某种机制能够在两个并不 Quillen 等价的模型范畴之间提供同伦意义下的等价。在实践中，已知可以应用 Franke 构造来获得这种等价的情形

$$\mathcal{R}\colon \mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$$

将一个代数模型范畴（$\mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 是适当阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中某类链复形的导出范畴）与一个不一定是代数的稳定模型范畴 $\mathcal{M}$ 联系起来。关键例子包括

- $\mathcal{A}$ 环谱 R 上的 $\pi_*(R)$-模范畴，以及 $\mathcal{M}$ 上的模范畴 R；此外还需对 $\pi_*(R)$ 的投射维数作出一些额外假设，并要求 $\pi_*(R)$ 集中在某个 $N > 1$ 的倍数度上，
- $\mathcal{A}$ $E(1)_*E(1)$-余模范畴，以及奇素数处的 K-局部谱范畴 $\mathcal{M}$ 。

本文中，我们始终假设 $\mathcal{R}$ 存在且为等价。

代数侧 $\mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 和拓扑侧 $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ 都带有幺半结构，这些结构源自 $\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{M}$ 上的幺半模型范畴结构，因此考察 $\mathcal{R}$ 是否与这些结构相容是很自然的。然而，由于 $\mathcal{R}$ 并非由 Quillen 函子 $\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{M}$ 导出，这个问题需要采用不同的方法，紧密结合 $\mathcal{R}$ 本身的构造来处理。

在 K 处的局部谱的例子告诉我们 $p = 3$ ，一般来说，我们不能期望 $\mathcal{R}$ 是一个幺半函子：模 3 Moore 谱的原像是一个具有幺半群结构的链复形，而模 3 Moore 谱没有结合乘法 [Gan07, 注 1.4。2]然而，我们得到了以下结果，它是本文的主要结论。

定理 1.0.1. 设 $(\mathcal{M}, \wedge)$ 是一个单纯稳定幺半模型范畴，$(\mathcal{A}, \otimes)$ 是一个有足够多投射对象的遗传阿贝尔幺半范畴，并且 Franke 重构函子 $\mathcal{R}$ 存在且为等价。则

$$\mathcal{R}\colon (\mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A}), \otimes^{\mathbb{L}}) \to (\mathrm{Ho}(\mathcal{M}), \wedge^{\mathbb{L}})$$

在自然同构意义下与相应的幺半群乘积相交换

$$\mathcal{R}(M_* \otimes^{\mathbb{L}} N_*) \cong \mathcal{R}(M_*) \wedge^{\mathbb{L}} \mathcal{R}(N_*).$$

重构函子 $\mathcal{R}$ 以如下方式从代数数据中重建 $\mathcal{M}$ 。首先，关于 $\mathcal{A}$ 的部分假设是，它可分解为较小阿贝尔范畴 $\mathcal{B}$ 的移位副本。随后利用这一点，将 $\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 中的对象分解成若干部分，并将它们置于特定的冠形图表 C_N 中。利用这些分块数据，接着在 $\mathcal{M}$ 中构造一个 C_N 形图表。最后，对 C_N 取同伦余极限，从而得到 $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$。具体而言， $\mathcal{R}$ 是如下复合

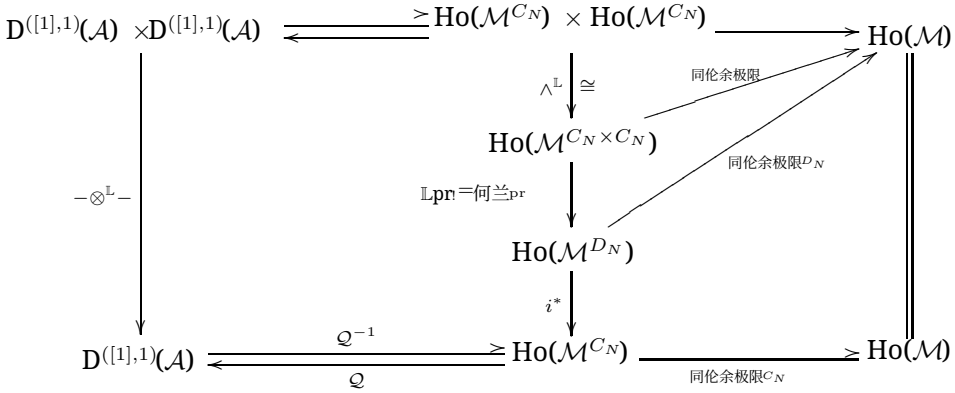
$$\mathcal{R} : \mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathcal{Q}^{-1}} \mathcal{L} \subseteq \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \xrightarrow{\mathrm{hocolim}_{C_N}} \mathrm{Ho}(\mathcal{M}).$$

因此，我们取图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \times \mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathcal{R}\wedge^{\mathbb{L}}\mathcal{R}} & \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \times \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \\ \downarrow{\scriptstyle \otimes^{\mathbb{L}}} & & \downarrow{\scriptstyle \wedge^{\mathbb{L}}} \\ \mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathcal{R}} & \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \end{array}$$

我们希望证明它是交换的，并按照下文所述对其加以细化，以便分别处理 $\mathcal{R}$ 的不同分量。

(1.0.2)



这里， D_N 表示对冠形图表作适当修改 C_N 并连同一个包含映射 $i\colon\ C_N \longrightarrow D_N$。（当然，所有这些要素都会在适当之处详细定义。）我们的证明大致遵循了 [Gan07]的关键思路；不过，我们选择在模型范畴的框架下开展工作，这使得我们的阐述更加明确、直接。总体而言，我们采用了当代方法，并参考了现代文献。我们的技术为 Ganter 定理提供了坚实、严谨的基础，并使其置于与其他现有文献更为恰当的背景之中，同时也希望能使其更易于适应未来的推广。

本文的组织结构如下。

在第2 节中，我们回顾主要结果及其证明所需的背景知识和工具，即单纯替换、同伦 Kan 延拓、图表模型范畴上的幺半结构、一种特定的映射锥构造、利用带有函子系数的范畴同调计算同伦余极限，以及对 Franke 函子构造的回顾。

在第3 节中，我们将首先着手建立一项主要结果，其中涉及推导图表1.0.2的中间垂直部分。关键步骤是运用谱序列论证，计算函子 $\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge Y)$的顶点。随后，我们将把这一结果用于 Franke 函子 $\mathcal{Q}$ 的定义，以得到图表1.0.2左侧关于幺半性的必要公式，并分别处理扭链复形的底层分次模和微分。

第4 节将完成图表1.0.2 右侧部分的论述，这主要涉及同伦余极限的标准性质。最后，我们可以将这些结果汇总起来，完成主定理的证明，并以一些例子作结。

Acknowledgments

本文基于第一作者在第二作者指导下完成的博士论文。我们谨此感谢英国工程与自然科学研究委员会通过项目 EP/R513246/1 为本项目提供资助。此外，我们还要感谢 Nora Ganter、Irakli Patchkoria 和 Neil Strickland 提供的宝贵意见与支持。

2. Preliminaries

本节将介绍一些理解我们结果所需的术语。我们假设读者熟悉单纯集合、同调代数和模型范畴的基本背景知识。

单纯集合范畴记作 $s\mathbf{Set}$。对于 $n \geq 0, \Delta^n$ 表示标准的 n-单纯形。对于任意范畴 $\mathcal{C}$，记号 $s\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{C}$中的单纯对象，即$s\mathcal{C} = \mathbf{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$。我们有 $I = \Delta^1$ 和 $I_+ = \Delta^1 \cup *$ 以及 $S^0 = \Delta^0 \cup *.$。类似地， S^1 表示单纯圆 $I/(0 \sim 1)$，也就是 $\Delta^1/\partial\Delta^1$。

我们令 $\mathcal{A}$ 为一个分次（$\mathbb{Z}$-分次）阿贝尔范畴，这意味着 $\mathcal{A}$ 具有一个移位函子 $[1]$，它是一个范畴等价，而 $[n]$ 表示 $[1]$的 n次迭代。 $\mathcal{A}$的分次整体同调维数 $\mathbf{gl.dim}\,\mathcal{A}$，是 $\mathcal{A}$中对象的投射维数的上确界。若阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 满足 $\mathbf{gl.dim}\,\mathcal{A} = 1$，则称其为遗传的。遗传阿贝尔范畴还有其他等价的描述，但这一种最适合我们的目的。

2.1. 模型范畴。现在我们来介绍模型范畴的背景知识。对于带有自然弱等价 $q\colon Q \to 1_{\mathcal{M}}$ 的任意余纤维替换函子 $Q\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$，我们记作.....

约定 2.1.1。我们用 $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ 表示范畴 $\mathcal{M}_{\mathrm{cof}}[\mathcal{W}^{-1}]$，其中 $\mathcal{M}_{\mathrm{cof}}$ 表示 $\mathcal{M}$ 的余纤维对象全子范畴，并用 $[X, Y].$ 表示 $\mathbf{Ho}(\mathcal{M})$ 中的态射集合

约定2.1.1 使我们能够非常简单地描述左导出函子 $\mathbb{L}F$左 Quillen 函子 $F\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$。事实上，函子

$$F\,|_{\mathcal{M}_{\mathrm{cof}}} : \mathcal{M}_{\mathrm{cof}} \to \mathcal{N}_{\mathrm{cof}}$$

保留弱等价，因此它在局部化之间诱导出一个函子。按照我们的约定，这个函子恰好是 $\mathbb{L}F$

最后，一类重要的模型范畴是单纯模型范畴。这类模型范畴在 $s\mathbf{Set}$ 上富集、张量化且余张量化，并满足推挤积公理（SM7）。如果一个单纯模型范畴是带基点的，即终对象与始对象同构，那么 $\mathcal{M}$ 就在范畴 $s\mathbf{Set}_*$（带基点单纯集合）上富集。特别地，我们有函子

$$- \otimes - \colon s\mathrm{Set}_* \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \quad \mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(-.-) : \mathcal{M}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{M} \to s\mathrm{Set}_*,$$

以及伴随

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(K \wedge X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{s\mathrm{Set}}(K, \mathrm{Map}_{\mathcal{M}}(X, Y)),$$

参见[BR20，定义 6.1。28]以及 [Rie14，第 11 节。4]。

2.1.1. 图表范畴。 本文中我们将始终使用图表范畴上的模型结构。下面我们介绍直接范畴的定义，它是偏序集概念的推广，参见 [Hov99，定义 5.1。1] 更多详情见此处。 。

定义 2.1.2. 令 ω 表示有序集 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ 的偏序集范畴。若存在函子 $f\colon J \to \omega$，将非恒等态射映为非恒等态射，则称小范畴 J 为直接范畴。我们将 $f(j)$ 称为对象 j 的度。对偶地，若存在函子 $J^{\mathrm{op}} \to \omega$，将非恒等态射映为非恒等态射，则称 J 为反向范畴

任意有限偏序集 J 都是直接范畴，反之亦然， J^{op} 是反向范畴。我们给出一些后续将会用到的例子。

定义 2.1.3. 设 $\mathcal{M}$ 是一个具有小余极限的小范畴， J 是一个小范畴， z 是 J 中的一个对象， J_z 是所有陪域为 z的非恒等态射所构成的范畴。锁定空间函子 $L_z\colon \mathcal{M}^J \to \mathcal{M}$ 是以下复合

$$\mathcal{M}^J \to \mathcal{M}^{J_z} \xrightarrow{\mathrm{colim}} \mathcal{M},$$

其中第一个箭头是限制函子。等价地，图表 X 的闩空间定义为

$$L_zX = \operatorname{colim}\left(J_z \hookrightarrow J \xrightarrow{X} \mathcal{M}\right),$$

其中 $J_z \hookrightarrow J$ 是包含映射。

注意，对于任意固定的对象 $z \in J$，我们都有一个自然变换 $L_zX \to X_z$。
现在我们可以描述投射模型结构在 $\mathcal{M}^J$上的情形，参见 [Hov99，定理 5.1。3]。

命题 2.1.4. 给定一个模型范畴 $\mathcal{M}$ 和一个直接范畴 J，在 $\mathcal{M}^J$ 上存在一个模型结构，其中态射 $f\colon X \to Y$ 是弱等价（分别为纤维化），当且仅当映射 $f_z\colon X_z \to Y_z$ 对所有 $z \in J$ 都是弱等价（分别为纤维化）。此外，$f\colon X \to Y$ 是（平凡）余纤维化，当且仅当诱导映射

$$X_z \coprod_{L_zX} L_zY \to Y_z$$

对所有 $z \in J$ 都是（平凡）余纤维化。

现在我们来介绍本文中将发挥核心作用的有限偏序集 J。

例 2.1.5. 我们用 $[1]$ 表示偏序集 $0 \leq 1$。我们知道，本节前面也用过这个记号来表示分次对象上的移位函子。这两种记号都是标准记法；而且，根据我们对偏序集 $0 \leq 1$ 的用法，几乎不可能把二者混淆。

例 2.1.6. 考虑偏序集

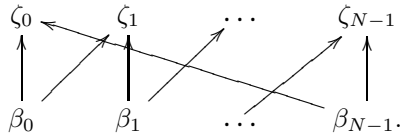
$$\begin{array}{ccc} (0,0) & \longrightarrow & (1,0) \\ \downarrow & & \\ (0,1) & & \end{array}$$

记作 $\ulcorner$。令 $\iota\colon [1] \to \ulcorner$ 为偏序集映射，它将 0 映到 (0, 0)，将 1 映到 (1, 0)。换言之，ι 将区间 $[1]$ 包含到顶端的水平线上。此外，考虑区间偏序集的积 $[1] \times [1]$。它是如下偏序集

$$\begin{array}{ccc} (0,0) & \longrightarrow & (1,0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (0,1) & \longrightarrow & (1,1) \end{array}$$

并令 $i_\ulcorner\colon \ulcorner \to [1] \times [1]$ 为包含映射。

例 2.1.7. 设 $N \geq 2$ 为一个自然数。偏序集 C_N 由满足 $\beta_i < \zeta_i$ 且 $\beta_i < \zeta_{i+1}$（其中 $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$）的元素 $\{\beta_i, \zeta_i \mid i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$ 组成，即，

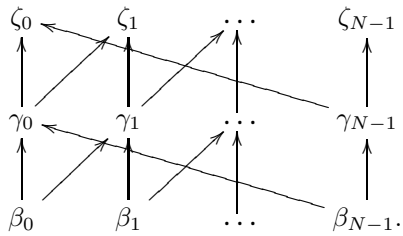


当且仅当典范映射 $L_zX \to X_z$ 是 $\mathcal{M}$ 中的余纤维化时，$X \in \mathcal{M}^{C_N}$ 才是余纤维化的；换言之，当且仅当 X_{β_i}、X_{ζ_i} 是余纤维化的，并且诱导态射

$$X_{\beta_{i-1}} \vee X_{\beta_i} \to X_{\zeta_i}$$

是一个余纤维化，其中 $\vee$ 是 $\mathcal{M}$中的余积。由于图表 C_N呈冠形，我们将对象 $X \in \mathcal{M}^{C_N}$ 称为冠状图表。

例 2.1.8. 令 D_N 为由元素 $\{\beta_n, \gamma_n, \zeta_n$ 组成的偏序集：$n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$，使得 $\beta_n \le \gamma_n \le \zeta_n$ 且 $\beta_n \le \gamma_{n+1}$ 且 $\gamma_n \le \zeta_{n+1}$，即，



注 2.1.9。 以下讨论中，当我们有一个直接范畴 I 和一个模型范畴 $\mathcal{M}$时，图表范畴 $\mathcal{M}^I$ 总是采用命题2.1.4中定义的模型结构，无需另行说明。否则，我们会明确指出。

I由此可知，对于任意模型范畴 $\mathcal{M}$ 和直接范畴 J，存在一个 Quillen 伴随 n

$$\operatorname{colim}\colon \mathcal{M}^J \rightleftarrows \mathcal{M}\colon \operatorname{const}.$$

（注意，书写伴随时，顶部的箭头始终表示左伴随。）

定义 2.1.10。colim: $\mathcal{M}^J \to \mathcal{M}$ 的左导出函子称为同伦余极限，记作

$$\operatorname{hocolim}\colon \operatorname{Ho}(\mathcal{M}^J) \to \operatorname{Ho}(\mathcal{M}).$$

若 $J = \ulcorner$，则该同伦余极限称为同伦推出。同伦推出的一个具体例子是同伦余纤维，它是如下形式图表的同伦推出

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$$

记作

$$\operatorname{hocofib}(f) := \operatorname{hocolim}(* \leftarrow X \xrightarrow{f} Y). \tag{2.1.11}$$

一般而言，为了记号方便，有时将同伦推出记作

$$\operatorname{hocolim}(Z \leftarrow X \to Y) := Z \coprod_X^h Y.$$

2.1.2. 单纯模型范畴中的同伦余极限。 在定义 2.1.10 中，我们回顾了同伦余极限作为导出函子的定义。这里，我们将介绍一种通过单纯技术构造同伦余极限的替代方法。在引入一些定义后，我们将简要说明这种方法如何为同伦余极限提供良好的理论，另见 [Rie14，第 4,5] 和[Shu06，节 7]。

设 $\mathcal{M}$ 是一个模型范畴，并考虑单纯对象的范畴 $s\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$。我们将 $s\mathcal{M}$ 视为一个单纯范畴，其张量积按对象逐点定义，即对于 $K \in s\mathbf{Set}$ 和 $X \in s\mathcal{M}$，有

$$(K \otimes X)_n = K \otimes X_n.$$

现在，设 $\mathcal{M}$ 是一个单纯模型范畴。给定一个单纯对象 $X \in s\mathcal{M}$，我们可以构造 ct an 对象 $\mathcal{M}$ 经由几何实现，参见[Hir03，定义 18.6。2]。

定义 2.1.12（几何实现）。设 $X \in \mathcal{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$。 X 的几何实现，记作 $|X|$，定义为余等化子

$$\operatorname{coeq}\left(\coprod_{\sigma\colon [n]\to[k]\in\Delta} \Delta^k \otimes X_n \rightrightarrows \coprod_{[n]\in\Delta} \Delta^n \otimes X_n \right).$$

这是函子张量积（余端）的一个例子。在本例中，几何实现是 X 的函子张量积： $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{M}$ 和函子 $\Delta^\bullet$： $\Delta \to s\mathrm{Set}$ $[n] \mapsto \Delta^n$. 换言之，该实现 $|X|$ 是对象

$$\Delta^\bullet \otimes_{\Delta^{\mathrm{op}}} X = \int^n \Delta^n \otimes X_n.$$

以下定理是我们通过几何实现阐述同伦余极限的基石，参见 [GJ09，VII 3。6], [Hir03，18.4。11] 以及 [Rie14，推论 14.3。10]。关于 $s\mathcal{M}$上的 Reedy 模型结构的细节，参见 [GJ09，定义 2。1]。

定理 2.1.13. 若 $\mathcal{M}$是一个单纯模型范畴，则

$$|-| : \mathcal{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}} \to \mathcal{M}$$

相对于 Reedy 模型结构，这是一个左 Quillen 函子。特别地， $|-|$ 将 Reedy 余纤维单纯对象映为余纤维对象，并保持它们之间的逐对象弱等价。

在如此一般的层次上，这已经是可能得到的最强结果。几何实现并不保持所有逐对象弱等价。不过，上述结论已足以满足我们的目的。现在我们可以开始逐步构造单纯模型范畴 $\mathcal{M}$中图表 $X \in \mathcal{M}^J$ 的同伦余极限。

为实现这一目标，我们首先定义单纯替换函子。也就是说，对于任意图表 F： $I \to \mathcal{M}$ ，我们都可以将其替换为 $\mathcal{M}$ 中具有良好性质的单纯对象。

定义 2.1.14（单纯替换）。设 I 是一个小范畴，并考虑一个图表 $X \in \mathcal{M}^I$。 X 的单纯替换是 $\mathcal{M}$ 中的单纯对象，记作 srep X，其单纯次数 $[n]$ 下的对象为

$$(\mathrm{srep}\, X)_n = \coprod_{(i_0 \to i_1 \to \ldots \to i_n) \in N(I)_n} X_{i_0}.$$

余积按 n-链的集合进行索引

$$\sigma = [i_0 \to i_1 \to \ldots \to i_n]$$

在 I 的神经上。如果 $0 \le k < n$，那么

$$d_k : (\mathrm{srep}\, X)_n \to (\mathrm{srep}\, X)_{n-1}$$

将以 σ 为索引的项 X_{i_n} 映射到以.....为索引的项 X_{i_n}

$$\sigma(k) = [i_0 \to i_1 \to i_{k-1} \to i_{k+1} \to \ldots \to i_n]$$

通过恒等映射；而对于 $k = n$，映射 d_n 将项 X_{i_n} 发送到以.....为索引的 $X_{i_{n-1}}$

$$\sigma(n) = [i_0 \to i_1 \to \ldots \to i_{n-1}]$$

通过诱导映射 $X(i_n \to i_{n-1})$。退化映射

$$s_j : (\mathrm{srep}\, X)_n \to (\mathrm{srep}\, X)_{n+1}, 0 \le j \le n$$

定义起来更简单。每个 s_j 将对应于直和项的直和项 X_{i_n} 送到

$$[i_0 \to i_1 \to \ldots \to i_n]$$

对应于插入了恒等映射 $i_j \to i_j$ 的链的相同直和项 X_{i_n} 。

换句话说，单纯替换是以下单纯对象

$$\coprod_{i_0} X_{i_0} \longleftarrow \coprod_{i_0 \to i_1} X_{i_0} \;\substack{\longleftarrow\\ \longleftarrow}\; \coprod_{i_0 \to i_1 \to i_2} X_{i_0} \cdots$$

其中省略了退化映射。请注意，这在文献中也称为单纯条形构造或 Bousfield-Kan 构造，记作 $B(*, I, X)$。

注 2.1.15. 若图表 $X \in \mathcal{M}^I$ 的余极限存在，则它与 $\mathrm{srep}(X) \in s\mathcal{M}.$ 的余极限一致。事实上，将图表 $\mathrm{srep}(X)$ 的余极限视为余等化子

$$\coprod_i X_i \leftleftarrows \coprod_{j \leftarrow i} X_i,$$

但这恰好就是 X 的余极限。因此，在这种情况下，$\mathrm{srep}(X)$ 具有增广

$$\mathrm{srep}(F) \to \operatorname*{colim}_I F,$$

其中我们将对象 $\operatorname{colim}_I F$ 视为一个常值单纯对象。

因此我们得到以下结果。

引理 2.1.16. 给定一个图表 $X \in \mathcal{M}^I$ 及其单纯替换 $\mathrm{srep}(X) \in \mathcal{M}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$，存在一个典范同构

$$\operatorname*{colim}_I X \cong \operatorname*{colim}_{\Delta^{\mathrm{op}}} (\mathrm{srep}(X)) .$$

证明见 [Rie14，引理 4.4。2]。以下引理也很重要，参见 [Rie14，引理 5.1。2], [Shu06，引理 8。7]。

引理 2.1.17. 设 I 是一个小范畴，$\mathcal{M}$ 是一个单纯模型范畴。若 $F \in \mathcal{M}^I$ 逐对象余纤维，则 $\mathrm{srep}(F) \in s\mathcal{M}$ 是 Reedy 余纤维。

上面的引理 2.1.16和定理 2.1.13 基本上表明，逐对象余纤维图表的几何实现是计算同伦余极限的良好模型。详情请参见[Rie14，定理 6.6。1]。

2.2. 同伦 Kan 延拓。 本小节将介绍 同伦 Kan 延拓，即普通 Kan 延拓的同伦不变版本，参见例如 [Hir03，第 11 节。9]。

现在，设 $\mathcal{M}$ 为一个模型范畴。此外，设 I、J 为直接范畴，且 $f\colon I \to J$ 为一个函子。拉回函子

$$f^*\colon \mathcal{M}^J \to \mathcal{M}^I$$

保持弱等价，因此它定义了同伦范畴之间的一个函子，我们仍用同一个字母表示它。回忆函子 $\mathrm{Lan}_f = f_!$，它是 f^* 的左伴随。我们有如下命题。

命题 2.2.1. 设 $\mathcal{M}$ 为一个模型范畴，且设 $f\colon I \to J$ 为直接范畴之间的一个映射。那么伴随为

$$f_!\colon \mathcal{M}^I \rightleftarrows \mathcal{M}^J\colon f^*$$

是一个 Quillen 伴随。

证明。 这由投射模型结构的定义可得，参见命题2.1.4。函子 f^* 按构造是一个右伴随。它保持弱等价和投射纤维化，这意味着 f^* 也是一个右 Quillen 函子。 □

因此，伴随对 $(f_!, f^*)$ 的导出函子在层面上定义了一个伴随对 of ho同伦范畴

$$\mathbb{L}\mathrm{Lan}_f := \mathbb{L}f_!\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^I) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^J)\colon \mathbb{R}f^*.$$

关于同伦 Kan 延拓的一个有用事实是，它们不会改变图表的同伦余极限，这与普通 Kan 延拓的性质类似。

推论 2.2.2. 设 $\mathcal{M}$ 是一个模型范畴，$f\colon I \to J$ 是直接范畴的一个映射，并设 $X \in \mathcal{M}^I$。那么在 $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ 中存在一个典范同构

$$\operatorname*{hocolim}_J \mathbb{L}f_! X \cong \operatorname*{hocolim}_I X.$$

证明. 这是由以下事实推出的：对于每一对左 Quillen 函子 F 和 G，都存在一个自然同构

$$\mathbb{L}F \circ \mathbb{L}G \to \mathbb{L}(F \circ G),$$

参见 [Hov99，定理 1。37],以及自然同构

$$\operatorname*{colim}_J \operatorname{Lan}_f X \cong \operatorname*{colim}_I X.$$

□

作为本节的结束，我们将简要讨论如何计算同伦 Kan 延拓的取值和边。回顾给定偏序集 C 和 D 以及函子 $f\colon C \to D$时切片范畴的概念，即

$$f/d = \{c \in C\colon f(c) \leq d\} \tag{2.2.3}$$

对于 $d \in D$。下面的结果见 [Cis09，命题 1。14], 它告诉我们，同伦 Kan 延拓可以逐点计算。

命题 2.2.4. 设 $f\colon I \to J$ 是一个偏序集映射，且 X 是任意函子 $I \to \mathcal{M}$。对于任意对象 $j \in J$，在 Ho($\mathcal{M}$) 中存在一个典范同构

$$(\mathbb{L}f_!F)_j \cong \operatorname{hocolim}\left(f/j \xrightarrow{\pi} I \xrightarrow{X} \mathcal{M}\right).$$

2.3. 幺半模型范畴。 现在我们转而讨论一些关于幺半模型范畴的结果，定义参见例如 [Hov99，定义 4.2。6], [BR11，定义 6.1。9] 或 [Rie14，定义 11.4。6]。

注记 2.3.1. 设 $(\mathcal{C}, \wedge)$ 是一个闭对称幺半范畴，并设 $f\colon X_0 \to X_1$ and$g\colon Y_0 \to Y_1$ 是 $\mathcal{C}$ 中的映射。推挽积映射是如下的泛箭头

$$f \square g\colon X_0 \wedge Y_1 \coprod_{X_0 \wedge Y_0} X_1 \otimes Y_0 \to X_1 \wedge Y_1.$$

另一种理解推挽积映射的方式是将其视为左 Kan 延拓。同样，考虑一个余完备的（闭）幺半范畴 $(\mathcal{C}, \wedge)$。设 $[1] = \{0 \leq 1\}$。此外，考虑以下偏序集映射。

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}\colon [1] \times [1] &\to [1] \\ (0,0), (1,0), (0,1) &\mapsto 0 \\ (1,1) &\mapsto 1 \end{aligned}$$

现在令 f 和 g 是 $\mathcal{C}$中的态射。我们可以将它们视为箭头范畴$f, g \in \mathcal{C}^{[1]}$中的对象。 $f\colon [1] \to \mathcal{C}$ 和 $g\colon [1] \to \mathcal{C}$给出它们逐对象的张量积$f \wedge g$，见定义 2.3.2。也就是说，函子

$$f \wedge g\colon [1] \times [1] \to \mathcal{C}$$

这是如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} X_0 \wedge Y_0 & \longrightarrow & X_1 \wedge Y_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_0 \wedge Y_1 & \longrightarrow & X_1 \wedge Y_0. \end{array}$$

注意，切片范畴 $\mathrm{pr}/0$ 是偏序集 $\ulcorner$，而切片 $\mathrm{pr}/1$ 是整个正方形。因此，映射

$$\operatorname*{colim}_{\ulcorner}(f \wedge g) \to \operatorname*{colim}_{[1]\times[1]}(f \wedge g)$$

由包含映射 $\ulcorner \hookrightarrow [1] \times [1]$ 诱导的正是该映射

$$f \square g\colon X_0 \wedge Y_1 \coprod_{X_0 \wedge Y_0} X_1 \wedge Y_1 \to X_1 \wedge Y_1.$$

所以确实，$(\mathrm{Lan}_{\mathrm{pr}}(f \wedge g)) = \mathrm{pr}_!(f \wedge g) = f \square g$。

2.3.1. 图表范畴的楔积。幺半范畴 $(\mathcal{M}, \wedge)$ 通过考虑从小范畴到 $\mathcal{M}$ 的图表，能够导出更多幺半范畴。在下一个例子中，我们将讨论这与模型范畴论的关系。

定义 2.3.2. 设 $(\mathcal{M}, \wedge)$ 为一个幺半范畴，且 I 和 J 为直接范畴。我们定义外积，即双函子

$$- \wedge -\colon \mathcal{M}^I \times \mathcal{M}^J \to \mathcal{M}^{I\times J}$$

将 (X, Y) 映到图表

$$X \wedge Y\colon I \times J \to \mathcal{M},\quad (i,j) \mapsto X_i \wedge Y_j.$$

外积是双变量伴随的一部分。由于我们不会用到额外的结构，因此不定义该双变量伴随中的另外两个函子。下面给出一个命题。

命题 2.3.3. 设 $(\mathcal{M}, \wedge)$ 为一个幺半模型范畴。那么，双函子

$$- \wedge -\colon \mathcal{M}^I \times \mathcal{M}^J \to \mathcal{M}^{I\times J}$$

是一个 Quillen 双函子，也就是说，它具有全左导出函子

$$- \wedge^{\mathbb{L}} -\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^I) \times \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^J) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{I\times J}).$$

证明. 假设单射模型结构 $\mathcal{M}^I_{\mathrm{inj}}$、$\mathcal{M}^J_{\mathrm{inj}}$ 和 $\mathcal{M}^{I\times J}{}_{\mathrm{inj}}$ 存在，例如，当 $\mathcal{M}$ 是组合模型范畴时。由于单射模型结构中的余纤维化是逐对象余纤维化，上述命题可直接得出。$- \wedge^{\mathbb{L}} -$ 的泛性质表明，两个构造在典范同构意义下给出相同结果。□

我们有如下推论。

推论 2.3.4。 在命题 *2.3.3*的背景下，存在一个函子同构

$$\operatorname*{hocolim}_{I\times J}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \cong (\operatorname*{hocolim}_I X) \wedge^{\mathbb{L}} (\operatorname*{hocolim}_J Y).$$

证明。 由命题 2.3.3可知，外积保持图表余纤维对象，并保持图表余纤维对象之间的平凡图表余纤维化。结论由严格公式

$$\operatorname*{colim}_{I\times J}(X \wedge Y) \cong (\operatorname*{colim}_I X) \wedge (\operatorname*{colim}_J Y)$$

得出，因为涉及的所有对象都是余纤维的。 □

作为命题2.3.3的推论，我们还得到如下结果。

例 2.3.5。 设 $(\mathcal{M}, \wedge)$ 是一个幺半模型范畴，并设 J 是一个直接范畴。考虑图表范畴 $\mathcal{M}^J$ 及其模型结构 2.1.4。范畴 $\mathcal{M}^J$ 继承了一个幺半结构

$$\mathcal{M}^J \times \mathcal{M}^J \to \mathcal{M}^J,\quad (X, Y) \mapsto X \wedge Y,$$

其中 $X \wedge Y$是图表 $j \mapsto X_j \wedge Y_j$。通过类似于命题 2.3.3 的证明，$(\mathcal{M}^J, \wedge)$ 是一个幺半模型范畴。

推论 2.3.6. 设 $(\mathcal{M}, \wedge)$ 是一个带基点对称幺半模型范畴，并设 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon U \to V$ 是 $\mathcal{M}$ 中的态射。存在一个典范同构

$$\mathrm{hocofib}(f) \wedge^{\mathbb{L}} \mathrm{hocofib}(g) \cong \mathrm{hocofib}(f \,\square^{\mathbb{L}}\, g).$$

由于这对我们的论述很重要，我们将在此给出一个证明。另一种证明见 [Hov14，命题 4。1]。

证明。我们不妨假设 X, Y, U, V 在 $\mathcal{M}$ 中是余纤维化的。根据定义，

$$\operatorname{hocofib}(f) \wedge^{\mathbb{L}} \operatorname{hocofib}(g) = \operatorname{hocolim}(* \leftarrow X \xrightarrow{f} Y) \wedge^{\mathbb{L}} \operatorname{hocolim}(* \leftarrow U \xrightarrow{g} V).$$

根据推论2.3.4，这同构于

$$\operatorname{hocolim} \begin{pmatrix} * & \longleftarrow & X \wedge V & \longrightarrow & Y \wedge V \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ * & \longleftarrow & X \wedge U & \longrightarrow & Y \wedge U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ * & \longleftarrow & * & \longrightarrow & * \end{pmatrix}. \tag{2.3.7}$$

我们将上述底层的 $\ulcorner \times \ulcorner$-图表记为 $\mathcal{Z}$。我们定义如下偏序集映射

$$\begin{aligned} \mathrm{pr} \colon \ulcorner \times \ulcorner &\to \ulcorner \\ ((1,0),(1,0)) &\mapsto (1,0) \\ ((0,0),(0,0)),((0,0),(1,0)),((1,0),(0,0)) &\mapsto (0,0) \\ \text{else} &\mapsto (0,1), \end{aligned}$$

并考虑同伦左 Kan 延拓

$$\mathbb{L}\mathrm{pr}_! \colon \operatorname{Ho}(\mathcal{M}^{\ulcorner \times \ulcorner}) \to \operatorname{Ho}(\mathcal{M}^{\ulcorner}). \tag{2.3.8}$$

将命题 2.2.4 中的公式应用于图表 $\mathcal{Z}$，我们得到 $(\mathbb{L}\mathrm{pr}_!\mathcal{Z})_{(1,0)} = Y \wedge V$。接下来，对于对象 $(0,0)$，切片范畴 $\mathrm{pr}/(0,0)$ 恰好是偏序集 $\ulcorner$，并且有

$$(\mathbb{L}\mathrm{pr}_!\mathcal{Z})_{(0,0)} = \operatorname{hocolim} \begin{pmatrix} X \wedge U & \xrightarrow{f \wedge 1} & Y \wedge U \\ \downarrow{\scriptstyle 1 \wedge g} & & \\ X \wedge V & & \end{pmatrix}$$

最后，$(\mathbb{L}\mathrm{pr}_!\mathcal{Z})_{(0,1)} \cong *$。注意

$$(\mathbb{L}\mathrm{pr}_!\mathcal{Z})_{(0,0)} \to (\mathbb{L}\mathrm{pr}_!\mathcal{Z})_{(1,0)} = f \square^{\mathbb{L}} g.$$

因此，底层图表（2.3.8）的同伦左 Kan 延拓（2.3.7）如下$\ulcorner$-图表所示。

$$\begin{array}{ccc} X \wedge V \coprod\limits_{X \wedge U}^{h} Y \wedge U & \longrightarrow & Y \wedge V \\ \downarrow & & \\ * & & \end{array}$$

由此可直接得到，该图表的同伦余极限为

$$\operatorname{hocofib}(f \square^{\mathbb{L}} g).$$

□

2.3.2. 稳定模型范畴与三角范畴。回顾一下，带基点模型范畴 $\mathcal{M}$ 的同伦范畴 $\operatorname{Ho}(\mathcal{M})$ 支持一个悬挂函子

$$\Sigma \colon \operatorname{Ho}(\mathcal{M}) \to \operatorname{Ho}(\mathcal{M})$$

定义为

$$\Sigma X := \operatorname{hocolim}(* \leftarrow X \to *),$$

并具有一个右伴随函子

$$\Omega \colon \operatorname{Ho}(\mathcal{M}) \to \operatorname{Ho}(\mathcal{M})$$

由.....给出

$$\Omega X = \operatorname{holim}(* \to X \leftarrow *).$$

定义 2.3.9. 稳定模型范畴是这样一种带基点模型范畴，其中函子 Σ 和 Ω 互为逆等价。

例 2.3.10. 稳定模型范畴的典型例子是谱范畴 Sp。当然，谱有许多变体；但由于我们的结果不依赖于对合适的幺半模型范畴的选择，因此无需对此作进一步说明。

例 2.3.11. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有足够多投射对象的分次阿贝尔范畴，并令 $\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 表示扭曲的 $([1],1)$ 链复形或微分对象范畴。$\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 的一个对象是一个对 (M_*, d)，其中 $M_* \in \mathcal{A}$ 连同一个态射（微分）

$$d\colon M_* \to M_*[1],$$

使得 $d[1] \circ d = 0$。范畴 $\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 具有稳定模型结构，即投射模型结构，其中弱等价是同调同构，纤维化是满射。特别地，余纤维对象是 $\mathcal{A}$ 中的投射对象。我们用 $\mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 的同伦范畴。对于对象 $(M_*, d) \in \mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$，我们定义同调 $H(M) = \ker d / \operatorname{im} d$，于是得到同调函子

$$H_*\colon \mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}.$$

下文中，我们令 $(\mathcal{A}, \otimes, 1)$ 为一个有足够多投射对象的阿贝尔对称幺半范畴。在这种情况下，$(\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \otimes)$ 是一个幺半稳定模型范畴。最后，我们提及，同调函子 $H_*\colon \mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 通过 K¨unneth 态射成为一个松对称幺半函子。

我们注意到，本文中所用的方法也适用于 $\mathcal{A}$ 没有足够多投射对象的情形。在 $\mathcal{A} = E(1)_*E(1)$-余模，$\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 的情形下，可以赋予其一种模型结构，使得余纤维化扭链复形作为 $E(1)_*$-模是逐次投射的。这种 相对投射模型结构 也是幺半的，参见 [BR11，第 5] 节。

如果 $\mathcal{M}$ 是一个有基点单纯模型范畴，那么悬挂函子

$$\Sigma\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$$

有一种简单的描述。事实上，根据单纯模型范畴公理，函子

$$S^1 \wedge -\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

由与单纯集合的张量积定义，是一个左 Quillen 函子。于是， Σ 可以定义为 $S^1 \wedge$ –的左导出函子，即

$$\Sigma X := S^1 \wedge^{\mathbb{L}} X = S^1 \wedge QX,$$

参见[Hov99，6.1。1]。注意，若 $\mathcal{M}$ 是稳定的，则其同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ 是一个三角范畴，带有 Σ 移位函子，参见 [BR11，定理 4.2。1]以及 [Hov99，7.1。6]。

在单纯模型范畴 $\mathcal{M}$ 中，我们可以为一个态射的同伦余纤维（）选择一个特定的模型（ 2.1.11），这有助于进行计算。它称为映射锥构造。

定义 2.3.12。设 $\mathcal{M}$ 是一个单纯稳定模型范畴，且 f是一个态射在 $\mathcal{M}_{\mathrm{cof}}$。令 $\mathrm{cone}(f)$ 为沿典范态射对 f 作的推出

$$\mathrm{incl} \otimes 1\colon S^0 \otimes X \to (I, 0) \otimes X = CX,$$

也就是说，$\mathrm{cone}(f)$ 带有如下推出方块

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \mathrm{incl}\otimes 1}\downarrow & & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & \mathrm{cone}(f). \end{array}$$

这里， $CX = (I, 0) \otimes X$ 表示 X 的锥。自然映射

$$\pi\colon (I, 0) \otimes X \to S^1 \otimes X$$

以及平凡映射

$$*\colon Y \to S^1 \otimes X$$

利用推出的泛性质，诱导出一个映射 $\partial\colon \mathrm{cone}(f) \to S^1 \otimes X$.

映射锥构造表示同伦余纤维这一事实及更多细节可见 [BR20，第 4 节。3]。

定义 2.3.13. 设 $\mathcal{M}$ 是一个单纯稳定模型范畴，且 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathcal{M}_{\mathrm{cof}}$ 中的一个态射。与 f 相关联的初等三角是三角形

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\iota} \mathrm{cone}(f) \xrightarrow{\partial} S^1 \otimes X.$$

三角形 (f, g, h)

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$$

若 $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ 中的三角形同构于一个初等三角形，则称其为可区别的。

2.4. 带函子系数的范畴同调。 本小节将介绍我们的主要工具之一，即带函子系数的范畴同调。它是函子同调的一个特例，将群 $\mathrm{Tor}^I_*(F, G)$ 赋给函子 $F\colon I \to \mathcal{A}$ 和$G\colon I^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}$，其取值于 $\mathcal{A}$ 一个阿贝尔范畴。由于我们并不需要如此一般的框架，因此将采用更直观的方式，通过可追溯至 Quillen 的单纯技术来介绍。传统参考文献包括 [Obe67] 和 [Obe68]，；较新的参考文献包括 [GCNT13] 和[Ric20，第 15, 16] 章。

在定义带函子系数的范畴同调之前，我们先定义阿贝尔范畴中单纯对象的关联复形。

定义 2.4.1。设 $D \in s\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个单纯对象。我们将关联复形 $(C_\bullet(U)\ \partial) \in \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ 定义为

$$C_n(D) = D_n, \quad \partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n d_i\colon C_n(D) \to C_{n-1}(D).$$

注意，单纯恒等式蕴含 $\partial^2 = 0$，因此 $C_\bullet(D)$ 确实是一个链复形。此外，这显然定义了一个函子 $C\colon s\mathcal{A} \to \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$。换句话说，单纯对象 $D \in s\mathcal{A}$ 的关联复形就是下面这个链复形。

$$D_0 \xleftarrow{d_0 - d_1} D_1 \xleftarrow{d_0 - d_1 + d_2} D_2 \leftarrow \dots. \tag{2.4.2}$$

定义 2.4.3. 设 I 是一个小范畴，并考虑一个图表 $D\colon I \to \mathcal{A}$。范畴 I 以函子 D 为系数的同调，定义为复形 $C_\bullet(D)$ 的同调，即单纯替换 $\mathrm{srep}(D) \in s\mathcal{A}$的关联复形的同调。

因此，展开定义，我们首先取单纯替换 $\mathrm{srep}(D)\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}$ 的 D，见定义 2.1.14，即以下图表

$$\bigoplus_{i_0} D_{i_0} \leftleftarrows \bigoplus_{i_0 \to i_1} D_{i_0} \lefttriplearrows \bigoplus_{i_0 \to i_1 \to i_2} D_{i_0} \cdots.$$

然后，我们考虑关联链复形 (2.4.2) $C_\bullet(D)$。接着，我们将 $H_p(I; D)$ 定义为链复形 p 的第 th 个同调群 $C_\bullet(D)$。

现在我们将探讨这些构造如何帮助我们计算同伦余极限。首先，回顾如下内容。

定义 2.4.4. 我们称函子 $F_*\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}$ 为同调的，若它满足以下条件。

(i) F_* 是一个分次函子，也就是说，它与悬挂交换，因此存在自然等价

$$F_*(\Sigma X) \cong F_*(X)[1] := F_{*-1}(X)$$

它们是结构的一部分。

(ii) F_* 是可加的，即它与任意余积相容。(iii) F_* 将三角转化为长正合列。(iv) 此外，若$(\mathcal{M},\wedge)$是幺半模型范畴，且$(\mathcal{A},\otimes)$是幺半阿贝尔范畴，我们要求 F_* 是松对称幺半的，也就是说，存在一个自然的 K¨unneth 态射

$$\kappa_{X,Y}\colon F_*X\otimes F_*Y\to F_*(X\wedge^{\mathbb{L}}Y).$$

现在设 $\mathcal{M}$ 是一个单纯稳定模型范畴， I 是一个直接范畴，并且 $X\in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^I)$。此外，设

$$F_*\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M})\to\mathcal{A}$$

是一个取值于某个（分次）阿贝尔范畴的同调函子。于是存在一个谱序列

$$E^2_{pq}=H_p(I;F_qX)\Rightarrow F_{p+q}(\operatorname*{hocolim}_I X), \tag{2.4.5}$$

参见 [Ric20, 16.3。1]。谱序列（2.4.5）的构造源自单纯对象的骨架滤过。该谱序列将在第 $\mathcal{Q}$ 3 节中关于 $\mathcal{Q}$ 的幺半性质的计算中发挥核心作用。

2.5. Franke 实现函子。本小节将回顾 Franke 等价的构造

$$\mathcal{R}\colon \mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A})\to\mathrm{Ho}(\mathcal{M}).$$

详细介绍请参见 [Pat12，第 3 节。3] 以及 [Roi08]。回忆一下， C_N 是例 2.1.7 中的冠形偏序集，并且上文中的范畴 $\mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 是例 2.3.11 中扭链复形的导出范畴，其中 $\mathcal{A}$ 是一个具有足够多投射对象的分次对称幺半遗传阿贝尔范畴， $\mathcal{M}$ 是一个单纯稳定模型范畴，并且$F\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M})\longrightarrow\mathcal{A}$ 是一个同调函子。此外，我们假设 $\mathcal{A}$ 可分解为另一个阿贝尔范畴的移位副本 $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{A}=\bigoplus_{i=0}^{N-1}\mathcal{B}[i]$$

对于 $N>1$。在这些假设下， $\mathcal{R}$ 存在且是一个等价。

对于一个对象 $X\in\mathcal{M}^{C_N}$，我们如下给出 X 的结构态射。

$$l_i\colon X_{\beta_i}\to X_{\zeta_i},\quad k_i\colon X_{\beta_{i-1}}\to X_{\zeta_i},\quad i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

此外，令

$$Z^{(i)}(X)=F_*(X_{\zeta_i}),\quad B^{(i)}(X)=F_*(X_{\beta_i}),\quad C^{(i)}(X)=F_*(\mathrm{cone}(k_i)),$$
$$\lambda^{(i)}\colon =F_*l_i\colon B^{(i)}(X)\longrightarrow Z^{(i)}(X), i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z},$$

其中 $\mathrm{cone}(k_i)$ 表示定义 2.3.12中的锥构造。现在我们将列出一些额外假设，以便将 $C^{(i)}$ 组装成一个链复形 C_*。

定义 2.5.1。考虑 $\mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N})$ 的全子范畴 $\mathcal{L}$，它由满足以下条件的图表$X\in\mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N})$组成。

(i) 对任意 $i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，对象 X_{β_i} 和 X_{ζ_i} 在 $\mathcal{M}$ 中都是余纤维化的。(ii) 对任意 $i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，对象 $F_*(X_{\beta_i})$ 和 $F_*(X_{\zeta_i})$ 都属于 $\mathcal{B}[i]$。(iii) 对任意 $i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，映射 $\lambda^{(i)}$: $F_*(X_{\beta_i})\to F_*(X_{\zeta_i})$ 是一个单态射。

接下来我们构造一个函子

$$\mathcal{Q}\colon \mathcal{L}\to\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A}).$$

设 X 是 $\mathcal{L}$ 的一个对象。由于函子

$$F_*\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M})\to\mathcal{A}$$

是同调的，可区别三角

$$X_{\beta_{i-1}}\xrightarrow{k_i}X_{\zeta_i}\to\mathrm{cone}(k_i)\to\Sigma X_{\beta_{i-1}}$$

诱导出长正合列

$$\ldots \to B^{(i-1)}(X) \to Z^{(i)}(X) \xrightarrow{\iota^{(i)}} C^{(i)}(X) \xrightarrow{\rho^{(i)}} B^{(i-1)}(X)[1] \to Z^{(i)}(X)[1] \to \ldots.$$

注意，对所有 $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$， $B^{(i-1)}(X) \in \mathcal{B}[i-1]$ 和 $Z^{(i)}(X) \in \mathcal{B}[i]$，因为 $X \in \mathcal{L}$。因此，态射 $B^{(i-1)}(X) \to Z^{(i)}(X)$ 和 $B^{(i-1)}(X)[1] \to Z^{(i)}(X)[1]$ 均为零。由此，对于任意 $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，我们实际上在 $\mathcal{A}$ 中得到短正合列

$$0 \to Z^{(i)}(X) \xrightarrow{\iota^{(i)}} C^{(i)}(X) \xrightarrow{\rho^{(i)}} B^{(i-1)}(X)[1] \to 0. \tag{2.5.2}$$

现在考虑 $\mathcal{A}$ 中的以下对象。

$$\begin{aligned} C_*(X) &= C^{(0)}(X) \oplus C^{(1)}(X) \oplus \ldots \oplus C^{(N-1)}(X) \\ Z_*(X) &= Z^{(0)}(X) \oplus Z^{(1)}(X) \oplus \ldots \oplus Z^{(N-1)}(X) \\ B_*(X) &= B^{(0)}(X) \oplus B^{(1)}(X) \oplus \ldots \oplus B^{(N-1)}(X) \end{aligned}$$

态射 $\lambda^{(i)}, \iota^{(i)}, \rho^{(i)}, i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 诱导出直和之间的态射

$$\begin{aligned} \lambda &\colon B_*(X) \to Z_*(X), & \lambda &= \lambda^{(0)} \oplus \lambda^{(1)} \oplus \ldots \oplus \lambda^{(N-1)}, \\ \iota &\colon Z_*(X) \to C_*(X), & \iota &= \iota^{(0)} \oplus \iota^{(1)} \oplus \ldots \oplus \iota^{(N-1)}, \\ \rho &\colon C_*(X) \to B_*(X)[1], & \rho &= \rho^{(0)} \oplus \rho^{(1)} \oplus \ldots \oplus \rho^{(N-1)}. \end{aligned}$$

求和后，我们得到 $\mathcal{A}$ 中对象的短正合列

$$0 \to Z_*(X) \xrightarrow{\iota} C_*(X) \xrightarrow{\rho} B_*(X)[1] \to 0. \tag{2.5.3}$$

将此短正合列与其移位副本拼接，得到 $\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 中的一个对象。更确切地说，定义

$$d = \iota[1]\lambda[1]\rho \colon C_*(X) \to C_*(X)[1].$$

根据构造，我们有 $d^2 = 0$，因此得到一个 $([1],1)$-扭曲复形。现在我们已经得到了定义

$$\mathcal{Q} \colon \mathcal{L} \to \mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A}), \quad \mathcal{Q}(X) = \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} F_*(\mathrm{cone}(k_i)), d \right) = (C_*(X), d).$$

可以证明， $\mathcal{Q}$ 实际上是一个范畴等价。复合

$$\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathcal{Q}^{-1}} \mathcal{L} \xrightarrow{\mathrm{hocolim}} \mathrm{Ho}(\mathcal{M}). \tag{2.5.4}$$

分解为 $\mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$，它就是 Franke 实现函子 $\mathcal{R}.$。由 $\mathcal{R}$ 的构造可知，它与悬挂可交换，并且 $F_* \circ \mathcal{R} \cong H_*$。

3. Monoidal Properties of $\mathcal{Q}$

在本节中，我们将考察双函子的性质

$$i^* \mathbb{L}\mathrm{pr}_!(- \wedge^{\mathbb{L}} -) \colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \times \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N})$$

通过定理3.1.5，这是图表1.0.2的主要组成部分之一。

3.1. 冠状图表预备知识。 回顾偏序集 C_N ，它来自例 2.1.7（具有两行的冠形）以及偏序集 D_N ，它来自例 2.1.8 （具有三行的冠形）。我们将关注这两个范畴之间的两个函子。第一个函子是投影函子

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}\colon C_N \times C_N &\to D_N \\ (\beta_i, \beta_j) &\mapsto \beta_{i+j} \\ (\zeta_i, \zeta_j) &\mapsto \zeta_{i+j} \\ (\zeta_i, \beta_j) &\mapsto \gamma_{i+j} \\ (\beta_i, \zeta_j) &\mapsto \gamma_{i+j}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

注意，我们实际上应该写作 $\beta_{i(\mathrm{mod}N)}$ 和 $\gamma_{i+j(\mathrm{mod}N)}$ 等，但这里稍微滥用一下记号，省去这些写法。我们接下来感兴趣的另一个函子是

$$i\colon C_N \to D_N, \quad \zeta_n \mapsto \zeta_n, \quad \beta_n \mapsto \gamma_n, \tag{3.1.2}$$

它是将冠形 C_N 包含到 D_N底部两行中的包含映射。由于图表范畴中的弱等价是逐对象给出的，函子 $i^*\colon \mathcal{M}^{D_N} \to \mathcal{M}^{C_N}$ 保弱等价。因此，它在同伦范畴上定义了一个函子，我们仍用同一个字母表示，即

$$i^*\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{D_N}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}).$$

接下来，回顾定义 $X \in \mathcal{M}^I$ 和 $Y \in \mathcal{M}^J$ 的直接范畴 I 和 J 上的图表的外部楔积2.3.2。选取 $I = J = C_N$后，形式上可得双函子

$$- \wedge -\colon \mathcal{M}^{C_N} \times \mathcal{M}^{C_N} \to \mathcal{M}^{C_N \times C_N}. \tag{3.1.3}$$

根据命题2.3.3，外积有一个全左导出函子

$$- \wedge^{\mathbb{L}} -\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \times \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N \times C_N}). \tag{3.1.4}$$

给定图表 $X, Y \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N})$，我们可以沿投影函子 $\mathrm{pr}\colon C_N \times C_N \to D_N$，定义外部楔积 $X \wedge^{\mathbb{L}} Y \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N \times C_N})$ 的同伦左 Kan 延拓，即

$$E = \mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{D_N}).$$

现在我们已经具备了所有必要的要素，终于可以陈述以下定理。

定理 3.1.5。双函子

$$i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(- \wedge^{\mathbb{L}} -)\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \times \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N})$$

满足以下性质。设 $X, Y \in \mathcal{L}$，使得 $F_*(X_{\alpha_n})$ $F_*(Y_{\alpha_n}) \in \mathcal{A}_{\mathrm{proj}}$对任意 $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 和任意 $\alpha \in \{\beta, \zeta\}$ 均成立。那么， $i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \mathcal{L}$，也就是说，我们有一个双函子

$$i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(- \wedge^{\mathbb{L}} -)\colon \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}.$$

此外，存在一个自然同构

$$\mathcal{Q}(i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \cong \mathcal{Q}(X) \otimes \mathcal{Q}(Y).$$

该定理分为两部分。首先，我们证明 $i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}(- \wedge^{\mathbb{L}} -)$ 实际上是一个双函子

$$i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(- \wedge^{\mathbb{L}} -)\colon \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}.$$

第二部分是，对于满足上述假设的任意两个冠状图表 X、$Y \in \mathcal{L}$ ，存在一个自然同构

$$\mathcal{Q}(i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \cong \mathcal{Q}(X) \otimes \mathcal{Q}(Y).$$

Th这两部分合起来表明，以下图表是交换的（在自然同构意义下）

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \times \mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A}) & \xleftarrow{\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}} & \mathcal{L}\times\mathcal{L} \\ \otimes \downarrow & & \downarrow i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_! \\ \mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A}) & \xleftarrow[\mathcal{Q}]{} & \mathcal{L}. \end{array}$$

定理 3.1.5 的第一部分是小节 3.3 和命题3.3.1的内容。自然同构

$$\mathcal{Q}(i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \cong \mathcal{Q}(X) \otimes \mathcal{Q}(Y).$$

是小节 3.4 和 3.5 以及命题3.6.6的内容。

3.2. 投影函子的切片范畴。 同样， $\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(- \wedge^{\mathbb{L}} -)$ 的取值由命题2.2.4中的公式给出。也就是说， E 在 D_N 的各对象上的取值由下式给出

$$E_{\gamma_n} = \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\gamma_n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \tag{3.2.1}$$

$$E_{\zeta_n} = \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \tag{3.2.2}$$

$$E_{\beta_n} = \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\beta_n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y). \tag{3.2.3}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$图表 E, $l_n\colon E_{\gamma_n} \to E_{\zeta_n}$和 $k_n\colon E_{\gamma_{n+1}} \to E_{\zeta_n}$的结构态射是同伦 Kan 延拓的边，并由以下自然映射给出

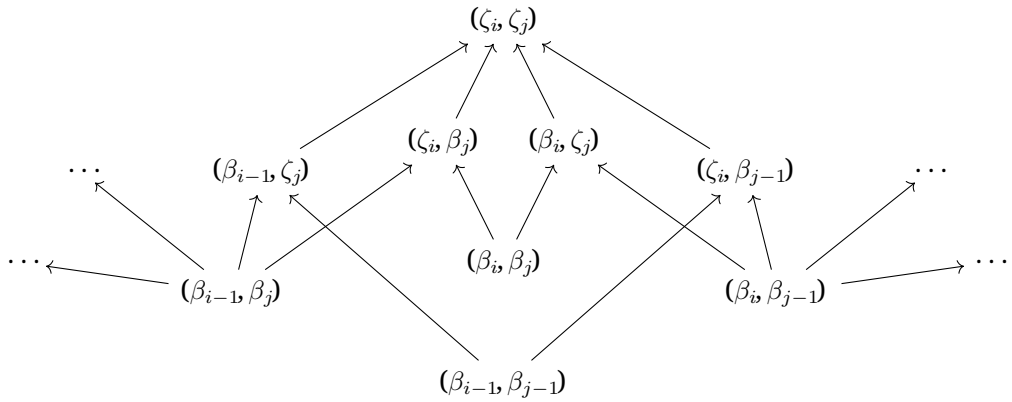
$$E_{\gamma_n} \cong \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\gamma_n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \to \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \cong E_{\zeta_n} \tag{3.2.4}$$

$$E_{\gamma_{n+1}} \cong \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\gamma_{n+1}}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \to \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \cong E_{\zeta_n} \tag{3.2.5}$$

分别由偏序集的映射 ϕ 和 ψ诱导，参见 3.2.8。

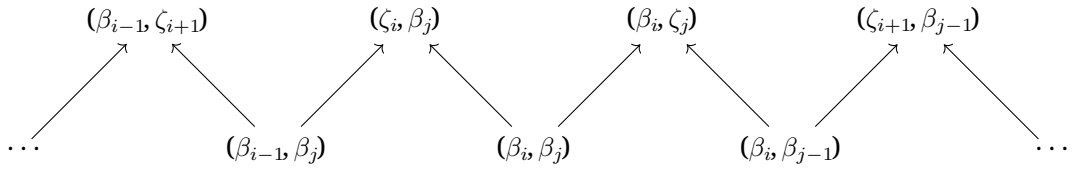
由于我们关注函子 pr: $C_N \times C_N \to D_N$ 的同伦 Kan 延拓，因此需要确定涉及的所有切片范畴，即 pr/ζ_n、pr/γ_n 和 pr/β_n。我们分以下三种情况讨论。

(i) 第一种情况是 pr/ζ_n。对于 $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 和对象 ζ_n，我们有切片范畴 pr/ζ_n



其中 $i + j \equiv n$（模 N）。注意，所有非恒等态射都具有 $(1, l_i)$ 或 $(l_i, 1)$ 的形式；对于任意 $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，类似地也有 $(1, k_i)$ 或 $(k_i, 1)$。偏序集 pr/ζ_n 在左右两侧遵循相同的模式。

（ii）接下来讨论 pr/γ_n 的情形。令 $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，现在考虑切片范畴 pr/γ_n，其形式如下：



其中 $i + j \equiv n$（模 N）。与上文类似，所有非恒等态射都具有 $(1, l_i)$ 或 $(l_i, 1)$ 以及 $(1, k_i)$ 或 $(k_i, 1)$ 的形式，其中 $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 为任意值。

(iii) 接下来是 pr/β_n 的情形。仍令 $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，但现在考虑切片范畴 pr/β_n。注意，它是

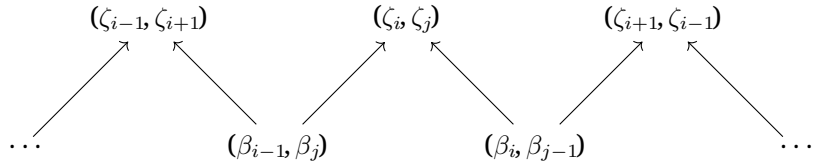
$$\cdots \qquad (\beta_{i-1}, \beta_{j+1}) \qquad (\beta_i, \beta_j) \qquad (\beta_{i+1}, \beta_{j-1}) \qquad \cdots$$

其中 $i + j \equiv n$（模 N）。换言之，它是一个离散范畴。这意味着

$$E_{\beta_n} = \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\beta_n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \cong \bigoplus_{i+j=n} X_{\beta_i} \wedge^{\mathbb{L}} Y_{\beta_j}.$$

这是我们唯一能够明确给出同伦左 Kan 延拓 $E = \mathbb{L}\mathrm{pr}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)$ 取值的情形。

(iv) 最后一个例子是 pr/ζ_n 的一个特定子偏序集，严格来说它并不是任何取值的切片。不过，以下内容对我们非常有用。考虑如下定义的子偏序集 $J_n \subseteq \mathrm{pr}/\zeta_n$



其中 $i + j \equiv n$（模 N）。在这个偏序集中，非恒等态射的形式为 (k_i, l_i) 或 (l_i, k_i)，不同于上面的例子，那里的一个箭头总是恒等箭头。

注 3.2.6. 现在令 $\theta\colon J_n \to \mathrm{pr}/\zeta_n$ 表示将 (iv) 中定义的子偏序集包含到 (i) 中的包含映射。我们将定义一个偏序集映射

$$L\colon \mathrm{pr}/\zeta_n \to J_n$$

只需为 (i) 中可见的偏序集部分定义它，其余部分可类似地定义。映射 L 定义为

$$\begin{aligned} L\colon \mathrm{pr}/\zeta_n &\to J_n \\ (\beta_{i+1}, \beta_j) &\mapsto (\beta_{i+1}, \beta_j) \\ (\beta_i, \beta_{j+1}) &\mapsto (\beta_i, \beta_{j+1}) \\ \text{else} \quad &\mapsto (\zeta_i, \zeta_j). \end{aligned}$$

注意，L 是 θ-的左伴随，这一点可直接根据定义迅速验证，因为任一偏序集中的态射集要么为空，要么恰好包含一个元素。因此，由于包含映射 $\theta\colon J_n \to \mathrm{pr}/\zeta_n$ 是右伴随，它是同伦终的；也就是说，对于任意 $F \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\zeta_n})$，我们有

$$\operatorname*{hocolim}_{J_n} \theta^*(F) \cong \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n} F.$$

换句话说，E_{ζ_n}（3.2.1）中的值可以计算为

$$E_{\zeta_n} \cong \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \cong \operatorname*{hocolim}_{J_n} \theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y). \tag{3.2.7}$$

我们将在第 4.1 节更详细地讨论同伦终结性，参见定义 4.1.3。

对于 $C_N \times C_N$ 的任意子偏序集，例如例子（$/\gamma_n$ 中的 prii），我们可以沿包含映射 $X \wedge Y \in \mathcal{M}^{C_N \times C_N}$: pr$/\gamma_n$ 取拉回，从而将外部 smash 积 ν 限制到 pr$/\gamma_n \to C_N \times C_N$，即

$$\nu^* \colon \mathcal{M}^{C_N \times C_N} \to \mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\gamma_n}.$$

注意， ν^* 保留弱等价，因此它在同伦范畴上诱导出一个函子 es

$$\nu^* \colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N \times C_N}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\gamma_n}).$$

此外，我们还有 $C_N \times C_N$ 的子偏序集之间的映射。态射 $\gamma_n \to \zeta_n$ 和$\gamma_{n+1} \to \zeta_n$ 诱导出偏序集的映射

(3.2.8)
$$\psi \colon \mathrm{pr}/\gamma_n \to \mathrm{pr}/\zeta_n$$
$$\phi \colon \mathrm{pr}/\gamma_{n-1} \to \mathrm{pr}/\zeta_n$$

这些映射又在同伦范畴上诱导出拉回函子，也就是说，

$$\phi^* \colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\zeta_n}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\gamma_{n-1}}), \quad \text{and} \quad \psi^* \colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\zeta_n}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\gamma_n}).$$

我们以一个约定结束本节。

Conv约定 3.2.9。鉴于上述内容，我们将滥用记号，改用写 例如，

$$\phi^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\gamma_n})$$

我们将简单地写作

$$X \wedge^{\mathbb{L}} Y \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\gamma_n}),$$

并默认这个图表是由限制函子的复合给出的

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N \times C_N}) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\zeta_n}) \xrightarrow{\phi^*} \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\gamma_n})$$

除非为了阐明而需要使用更完整的记号。

注 3.2.10。 考虑一个图表 $F \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N \times C_N})$。根据约定 2.1.1，我们可以假设 F 是一个投射余纤维对象，因此特别地，它是逐对象余纤维的。外部 smash 积

$$- \wedge - \colon \mathcal{M}^{C_N} \times \mathcal{M}^{C_N} \to \mathcal{M}^{C_N \times C_N}$$

如（3.1.3）中所定义的是 Quillen 双函子，因此尤其保余纤维对象。这意味着 $X \wedge^{\mathbb{L}} Y$在 $\mathcal{M}^{C_N \times C_N}$中是余纤维化的，因而尤其是逐对象余纤维的。现在，对于任意子偏序集

$$\iota \colon J \hookrightarrow C_N \times C_N,$$

例如，投影函子 pr（3.1.1）的任意切片范畴，我们都有拉回函子

$$\iota^* \colon \mathcal{M}^{C_N \times C_N} \to \mathcal{M}^J.$$

关于投射模型结构，这个函子不一定是左 Quillen 函子，见命题 2.1.4。然而，图表 $\iota^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)$ 是逐对象余纤维的，这意味着单纯替换的几何实现仍然是图表 $\iota^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)$ 的同伦余极限模型。特别是，所有限制的骨架滤过始终是 Reedy 余纤维的，见引理 2.1.17。

3.3. 谱序列计算。本小节的主要结果是：给定满足一个简单条件的冠状图表 $X, Y \in \mathcal{L}$，图表 $i^*E = i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)$ 也属于子范畴 $\mathcal{L}$；也就是说，对象 X_{β_i} 和 X_{ζ_i} 在 $\mathcal{M}$中是余纤维化的，对象 $F_*(X_{\beta_i})$ 和 $F_*(X_{\zeta_i})$ 属于 $\mathcal{B}[i]$，并且映射

$$\lambda^{(i)} \colon F_*(X_{\beta_i}) \to F_*(X_{\zeta_i})$$

对任意 $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 都是单态射，参见定义 2.5.1。本质上，这一条件是指，对于给定的同调函子 $F_* \colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}$，冠状图表 X 或 Y是逐对象投射的。

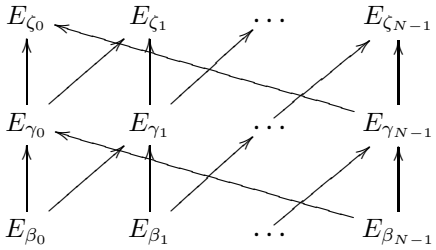
命题 3.3.1. 设 $X, Y \in \mathcal{L}$ 使得 $F_*(X_{\alpha_n})$ $F_*(Y_{\alpha_n}) \in \mathcal{A}_{\text{proj}}$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 及任意 $\alpha \in \{\beta, \zeta\}$ 均成立。考虑同伦左 Kan 延拓 $E = \mathbb{L}\text{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \text{Ho}(\mathcal{M}^{D_N})$

$$X \wedge^{\mathbb{L}} Y \in \text{Ho}(\mathcal{M}^{C_N \times C_N})$$

沿着

$$\text{pr}: C_N \times C_N \to D_N$$

其取值和态射分别由（3.2.1）-（3.2.3）及（3.2.4）、（3.2.5）给出。



那么，对于任意 $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 和任意 $\alpha \in \{\beta, \zeta\}$，我们有 $F_*(E_{\alpha_n}) \in \mathcal{B}[n]$ 以及这些态射

$$F_*(E_{\gamma_n}) \to F_*(E_{\zeta_n})$$

由 $E_{\gamma_n} \to E_{\zeta_n}$ 诱导的都是单态射。

推论 3.3.2. 设 X, Y 是满足命题 3.3.1假设的冠状图表。图表 $E = \mathbb{L}\text{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)$ 的前两行构成 $\mathcal{L}$中的一个对象，即图表$i^*E \in \mathcal{L}$。

根据我们的假设，对于任意 $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 和任意 $\alpha \in \{\beta, \zeta\}$，对象 $F_*(X_{\alpha_n})$ 和 $F_*(Y_{\alpha_n})$ 在 $\mathcal{A}$ 中都是投射的。这保证存在自然的 K¨unneth 同构

$$F_*\left(X_{\alpha_n} \wedge^{\mathbb{L}} Y_{\alpha_n}\right) \cong F_*(X_{\alpha_n}) \otimes F_*(Y_{\alpha_n}). \tag{3.3.3}$$

由于 $E_{\zeta_n}, E_{\gamma_n}$ 和 E_{β_n} 的取值是通过同伦余极限计算的，我们将使用（2.4.5），即收敛到同伦余极限之同调的谱序列。

引理 3.3.4. 存在谱序列

$$E^2_{pq} = H_p(\text{pr}/\gamma_n; F_q(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \Rightarrow F_{p+q}\left(\underset{\text{pr}/\gamma_n}{\text{hocolim}}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)\right) \cong F_{p+q}(E_{\gamma_n}) \tag{3.3.5}$$

and

$$E'^2_{pq} = H_p(\text{pr}/\zeta_n; F_q(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \Rightarrow F_{p+q}\left(\underset{\text{pr}/\zeta_n}{\text{hocolim}}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)\right) \cong F_{p+q}(E_{\zeta_n}) \tag{3.3.6}$$

an 谱序列的自然态射 f: $\{E^2_{pq}\} \to \{E'^2_{pq}\}$ 由（3.2.4）中的映射诱导 .

现在我们开始命题3.3.1的证明。

证明。我们的主张是，$F_*(E_{\gamma_n}) \to F_*(E_{\zeta_n})$ 是一个单态射，其中

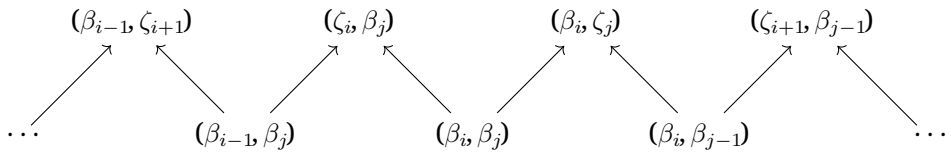
$$E = \mathbb{L}\text{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \text{Ho}(\mathcal{M}^{D_N})$$

与之前一样，$F_*: \text{Ho}(\mathcal{M}) \to \mathcal{A}$是我们的同调函子。为了获得关于 $F_*(E_{\gamma_n})$ 和 $F_*(E_{\zeta_n})$ 的信息，我们将首先推导谱序列（3.3.5），我们曾说明它是谱序列（2.4.5）的一个特例。命题的证明分为三部分：

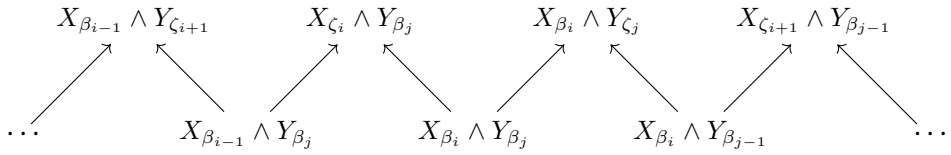
- 计算 E_2 项 $H_p(\text{pr}/\gamma_n; F_q(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$,
- 计算 E_2 项 $H_p(\text{pr}/\zeta_n; F_q(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$,
- 证明谱序列的诱导映射给出了所需的同构。

步骤 1： $H_p(\mathrm{pr}/\gamma_n; F_q(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$

我们将使用第2.4节中介绍的单纯形替换技术。回忆偏序集 pr/γ_n ，其形式如下。



这里， $i + j = n$ 模 N，因此函子 $X \wedge^{\mathbb{L}} Y \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\gamma_n})$ 如下所示。

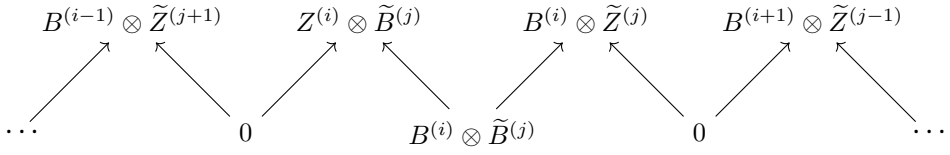


我们的目标是计算

$$H_p(\mathrm{pr}/\gamma_n; F_q(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \qquad \text{for all } p \geq 0 \text{ and all } q \in \mathbb{Z},$$

它们是谱序列（ E^2项。3.3.5为此，我们将同调函子 $F_n(-)$ 应用于前面的图表，得到图表 $F_n($ $X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}/\gamma_n}$ 根据（3.3.3），它如下所示。

(3.3.7)



我们将记作

$$f_{ij} = \lambda_i \otimes 1 \colon B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)} \to Z^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)} \tag{3.3.8}$$

$$g_{ij} = 1 \otimes \tilde{\lambda}_j \colon B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)} \to B^{(i)} \otimes \widetilde{Z}^{(j)} \tag{3.3.9}$$

以便在下文的单纯替换中标记并区分这两个不同的态射。注意，由于 B^i 和 $\widetilde{B}^j$ 在 $\mathcal{A}$中是投射的，按照我们的约定，它们自动是平坦的，因此态射（3.3.8）和（3.3.9）是单态射。

接下来，我们考虑图表 F_n（$X \wedge^{\mathbb{L}} Y$） $\in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}/\gamma_n}$的单纯替换，即 $\mathrm{srep}\left(F_n\right.$（$\left.X \wedge^{\mathbb{L}} Y\right)$ $) \in \mathcal{A}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$。根据定义2.1.14，我们有

$$\mathrm{srep}\left(F(X \wedge^{L} Y)\right)_0 = \bigoplus_{i+j=n} \left((B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}) \oplus (Z^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}) \oplus (B^{(i)} \otimes \widetilde{Z}^{(j)})\right)$$

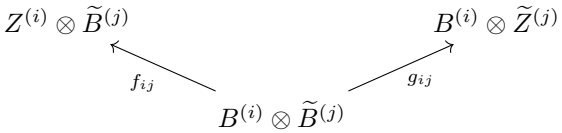
$$\mathrm{srep}\left(F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)\right)_1 = \bigoplus_{i+j=n} \left((B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)})_{f_{ij}} \oplus (B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)})_{g_{ij}}\right),$$

面映射分别由“源”和“目标”给出。由于偏序集 pr/γ_n 的形状，对于所有 $m \geq 2$，单纯形 $\mathrm{srep}\left(F_n(\right.$ $\left.X \wedge^{\mathbb{L}} Y)\right)_m$ 仅由退化单形构成。

现在我们考虑这个单纯复形的关联复形 $C_*(F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$，参见定义 2.4.1。我们简要说明复形 $C_*(E(1)_{-n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$ 的微分，即映射

$$d = d_0 - d_1 \colon C_1(F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \to C_0(F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)).$$

注意，根据（3.3.7），我们可以考虑一种更简单的情形，其中图表如下所示 .



那么，此图表的单纯替换所对应的关联复形的微分为

$$d_{ij} = d_0 - d_1 \colon (B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}) \oplus (B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}) \to (B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}) \oplus (Z^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}) \oplus (B^{(i)} \otimes \widetilde{Z}^{(j)})$$
$$(x, y) \mapsto (x + y, -f_{ij}(x), -g_{ij}(y)).$$

该复形的第 0 阶同调就是推出

$$B^{(i)} \otimes \widetilde{Z}^{(j)} \coprod_{B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}} Z^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(i)}.$$

第一同调是微分 d_{ij} 的核。由于映射 f_{ij} 和 g_{ij} 是单射，这就迫使 $d_{ij}(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y = 0$，这意味着第一同调是平凡的。由图表 (3.3.7) 可知，复形 $C_*(F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$ 上的微分 d 是微分 d_{ij}（其中 $i + j = n$）的直和。既然我们已经知道复形 $C_*(F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$ 的微分，接下来就计算它的同调。由此可知， $H_0(\mathrm{pr}/\gamma_n; F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$ 是图表 $F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)$ 的余极限。通过检查上面的图表 $F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)$，可以看出该图表的余极限是推出的直和（余积），也就是说，

$$H_0(\mathrm{pr}/\gamma_n; F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) = \operatorname*{colim}_{\mathrm{pr}/\gamma_n} F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)$$
$$= \bigoplus_{i+j=n} \left(Z^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)} \coprod_{B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}} B^{(i)} \otimes \widetilde{Z}^{(j)} \right).$$

与较简单的情形类似，第一同调

$$H_1(\mathrm{pr}/\gamma_n; F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$$

是微分的核

$$d_0 - d_1 \colon \mathrm{srep}(F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))_1 \to \mathrm{srep}(F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))_0.$$

由于它是上述较简单微分 d_{ij} 的直和，因此可得

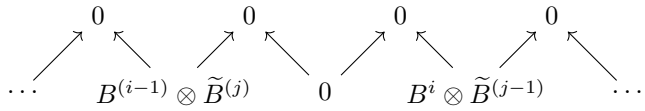
$$H_1(\mathrm{pr}/\gamma_n; F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) = 0.$$

当然，所有高阶同调

$$H_q(\mathrm{pr}/\gamma_n; F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$$

对所有 $q \geq 2$ 均消失。

接下来，我们将同调函子 $F_{n-1}(-)$ 应用于图表 $X \wedge^{\mathbb{L}} Y \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\gamma_n})$，得到图表 $F_{n-1}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}/\gamma_n}$，其形式如下。



显然，

$$H_0(\mathrm{pr}/\gamma_n; F_{n-1}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) = 0,$$

and

$$H_1(\mathrm{pr}/\gamma_n; F_{n-1}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) = \bigoplus_{i+j=n+1} B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}.$$

由此可知，对于所有 $p \geq 0$ 以及所有 $m \neq -n$， $-n-1$ 模 N，各项 $H_p(\mathrm{pr}/\gamma_n; F_m(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$ 均为零。这就完成了谱序列中 E^2 项的计算。它

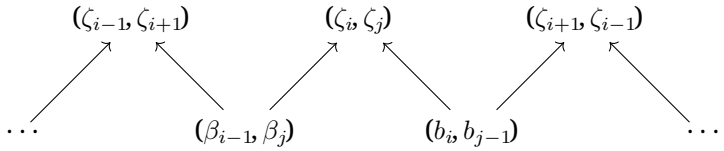
集中在度 $(0,m)$ 和 $(1,m-1)$，其中 $m \equiv n$ 模 N。因此谱序列退化，并且我们得到一个短正合列

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} \left(Z^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)} \bigoplus_{B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}} B^{(i)} \otimes \widetilde{Z}^{(j)} \right) \to F_n(E_{\gamma_n}) \to \bigoplus_{i+j=n+1} B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)} \to 0.$$

至此，我们完成了谱序列（3.3.5）的计算。

步骤 2： $H_p(\mathrm{pr}/\zeta_n; F_q(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$

现在我们将重复之前的策略，并将其应用于谱序列（3.3.6）。回顾（ J_n ）中的偏序集iv，它是 pr/ζ_n的以下子偏序集。



根据注记 3.2.6，包含函子 $\theta\colon \quad J_n \to \mathrm{pr}/\zeta_n$ 存在一个左左伴随 L，并且我们有

$$E_{\zeta_n} \cong \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \cong \operatorname*{hocolim}_{J_n} \theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y),$$

见（3. 2.7）。因此，我们可以计算以下谱序列，而不是谱序列（3.3.6）

ce

序列

$$H_p(J_n; F_q(\theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))) \Rightarrow F_{p+q}(\operatorname*{hocolim}_{J_n} \theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$$

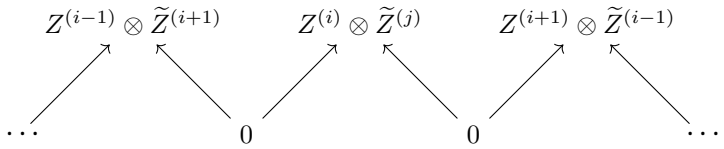
因为它们都收敛到同一个目标，即 E_{ζ_n} 的 F_*-同调，

$$F_*(\operatorname*{hocolim}_{J_n} \theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \cong F_*(\operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \cong F_*(E_{\zeta_n}).$$

事实上，这一点还可以进一步加强。伴随对 $L\colon \mathrm{pr}/\zeta_n \rightleftarrows J_n\colon \theta$ 诱导出一个自然同构

$$H_*(\mathrm{pr}/\zeta_n; F_q(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \cong H_*(J_n, \theta^* F_q(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)).$$

根据图表 J_n ，我们仍只需考虑 $F_n(-)$ 和 $F_{-n-1}(-)$。首先，我们将 $F_n(-)$ 应用于图表 $\theta^*($ $X \wedge^{\mathbb{L}} Y)$，得到如下的 $F_n(\theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \in \mathcal{A}^{J_n}$。



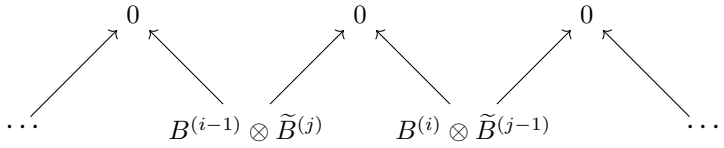
由此可得

$$H_0(J_n; F_n(\theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))) = \bigoplus_{i+j=n} Z^{(i)} \otimes \widetilde{Z}^{(j)}$$

and

$$H_p(J_n; F_n(\theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))) = 0, \quad p \geq 1.$$

接下来，我们将应用函子 $F_{n-1}(-)$，以得到下方所示的图表 $F_{n-1}(\theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \in \mathcal{A}^{J_n}$。



由上可得

$$H_1(J_n; F_{n-1}(\theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))) = \bigoplus_{i+j=n+1} B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}$$

and

$$H_p(J_n; F_{n-1}(\theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))) = 0 \quad \text{for } p = 0 \text{ and } p \geq 2.$$

这就完成了对最终谱序列的 E 项的计算。[2] 它集中在度数 $(0, m)$ 和 $(1, m-1)$，且 $m \equiv n \bmod N$。因此，谱序列退化，我们得到一个短正合列

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} Z^{(i)} \otimes \widetilde{Z}^{(j)} \to F_n(E_{\zeta_n}) \to \bigoplus_{i+j=n-1} B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)} \to 0.$$

步骤 3：单态射 $F_*(E_{\gamma_n}) \to F_*(E_{\zeta_n})$

现在我们已经计算出两个谱序列，可以继续证明 $F_*(E_{\gamma_n}) \to F_*(E_{\zeta_n})$ 是一个单态射。偏序集映射 $\psi\colon \mathrm{pr}/\gamma_n \to \mathrm{pr}/\zeta_n$ 在系数为 $F_n(-)$ 和 $F_{n-1}(-)$ 的范畴同调上分别诱导出态射，即

$$H_*(\mathrm{pr}/\gamma_n; F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \to H_*(\mathrm{pr}/\zeta_n; F_n(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \cong H_*(J_n; F_n(\theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)))$$
$$H_*(\mathrm{pr}/\gamma_n; F_{n-1}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \to H_*(\mathrm{pr}/\zeta_n; F_{n-1}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \cong H_*(J_n; F_{n-1}(\theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))).$$

因此，我们得到一个短正合列的态射

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i+j=n} \left(Z^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)} \coprod_{B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}} B^{(i)} \otimes \widetilde{Z}^{(j)} \right) & \longrightarrow & F_n(E_{\gamma_n}) & \longrightarrow & \bigoplus_{i+j=n+1} B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \\
0 & \longrightarrow & \bigoplus_{i+j=n} Z^{(i)} \otimes \widetilde{Z}^{(j)} & \longrightarrow & F_n(E_{\zeta_n}) & \longrightarrow & \bigoplus_{i+j=n+1} B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

由自然性可知，左侧垂直映射是推挤积映射的直和

$$\lambda_i \square \widetilde{\lambda}_j : \left(Z^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)} \coprod_{B^{(i)} \otimes \widetilde{B}^{(j)}} B^{(i)} \otimes \widetilde{Z}^{(j)} \right) \to Z^{(i)} \otimes \widetilde{Z}^{(j)}.$$

~由引理 3.7.2，映射 $\lambda_i \square \lambda_j$ 是单射，这意味着左侧垂直映射也是单射。由五引理可知，态射

$$F_n(E_{\gamma_n}) \to F_n(E_{\zeta_n})$$

是一个单射。特别地，$F_*(E_{\gamma_n})$ 和 $F_*(E_{\zeta_n})$ 集中在正确的次数上，且诱导的态射 $F_*(E_{\gamma_n}) \to F_*(E_{\zeta_n})$ 是单射。命题的证明至此完成。□

推论 3.3.2 由此得出：图表 E 确实属于子范畴 $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N})$，因为其顶点位于 $\mathcal{B}$ 的正确次数移位中，并且 F 作用于边 $E_{\gamma_n} \to E_{\zeta_n}$ 是一个单态射，这正是 $\mathcal{L}$ 的定义。

3.4 锥。在上一小节中，我们证明了对于任意两个逐对象投射的冠状图表 $X, Y \in \mathcal{L}$，$i^*E = i^*\mathrm{pr}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \mathcal{L}$。在本小节中，我们将证明，将函子 $\mathcal{Q}$ 应用于对象 i^*E，是张量积 $\mathcal{Q}(X) \otimes \mathcal{Q}(Y)$ 的一个良好模型。这将作为以下命题的推论得出。

命题 3.4.1. 考虑 $E \in \mathbb{L}\mathrm{pr}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{D_N})$，并令 i^*E 为沿着 i 对 E 的拉回：$C_N \to D_N$。对于每个 $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，我们都有一个典范同构

$$\mathrm{cone}(i^*E_{\beta_{n-1}} \to i^*E_{\zeta_n}) \cong \bigvee_{i+j=n} \mathrm{cone}(k_i) \wedge^{\mathbb{L}} \mathrm{cone}(\tilde{k}_j),$$

其中 $k_i : X_{\beta_{i-1}} \longrightarrow X_{\zeta_i}$ 是 $X \in \mathcal{L}$的结构态射。

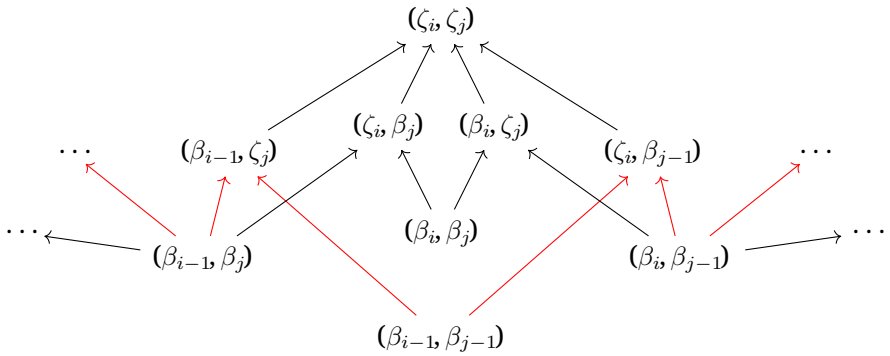
证明。 这个证明主要分为三个部分。首先，我们将通过计算 $i^*E_{\beta_{n-1}} \to i^*E_{\zeta_n}$<style id='6'}的相关取值，来求出态射 $E_{\beta_{n-1}}$ 和 E_{ζ_n}；我们将利用它们作为切片范畴上的同伦余极限的描述，参见第 3.2节。我们将得出结论：左端实际上是 $\operatorname{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}(\operatorname{cone}(\varepsilon_{X\wedge^{\mathbb{L}}Y}))$，其中 $\varepsilon_{X\wedge^{\mathbb{L}}Y}$是某个伴随的余单位。接着，我们将在步骤 2 中明确确定图表的映射 $\varepsilon_{X\wedge^{\mathbb{L}}Y}$，并在步骤 3 中计算其锥。

步骤 1：展开 $i^*E_{\beta_{n-1}} \to i^*E_{\zeta_n}$。

回顾映射 $\mathrm{pr}\colon C_N \times C_N \to D_N$ 在 ζ_n上的切片范畴，pr/ζ_n 来自示例 (i)，以及 pr/γ_n 来自示例 (ii)。根据 i的定义，我们有

$$(i^*E_{\beta_{n-1}} \to i^*E_{\zeta_n}) = E_{\gamma_{n-1}} \longrightarrow E_{\zeta_n}.$$

我们先回顾图表 $X \wedge^{\mathbb{L}} Y \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\zeta_n})$。红色显示了偏序集映射 ϕ 的像：$\mathrm{pr}/\gamma_{n-1} \to \mathrm{pr}/\zeta_n$.



(3.4.2)

回顾3.2.2中的内容

$$E_{\zeta_n} = \operatorname{hocolim}(\mathrm{pr}/\zeta_n \xrightarrow{\pi} C_N \times C_N \xrightarrow{X\wedge^{\mathbb{L}}Y} \mathcal{M}),$$

并且我们通过记号滥用将其记作

$$E_{\zeta_n} = \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) = \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n} \pi^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y).$$

此外，回顾 (3.2.5) 可知，态射 $E_{\gamma_{n-1}} \to E_{\zeta_n}$ 是典范态射

$$E_{\gamma_{n-1}} = \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\gamma_{n-1}} \phi^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \to \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) = E_{\zeta_n}$$

由偏序集映射 $\phi\colon \mathrm{pr}/\gamma_{n-1} \to \mathrm{pr}/\zeta_n$ 诱导。拉回函子

$$\phi^*\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\zeta_n}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\gamma_{n-1}})$$

有一个由同伦左 Kan 延拓 $\mathbb{L}\phi_!$ 定义的左伴随，即

$$\mathbb{L}\phi_!\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\gamma_{n-1}}) \rightleftarrows \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\zeta_n})\colon \phi^*.$$

The co导出伴随 $\varepsilon\colon \mathbb{L}\phi_!\phi^* \to \mathrm{Id}$ 的单位给出典范自然变换

(3.4.3)
$$\varepsilon_{X\wedge^{\mathbb{L}}Y}\colon \mathbb{L}\phi_!\phi^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \to X \wedge^{\mathbb{L}} Y.$$

最后，由于 $\mathbb{L}\phi_!$ 是同伦左 Kan 延拓，因此存在一个典范同构

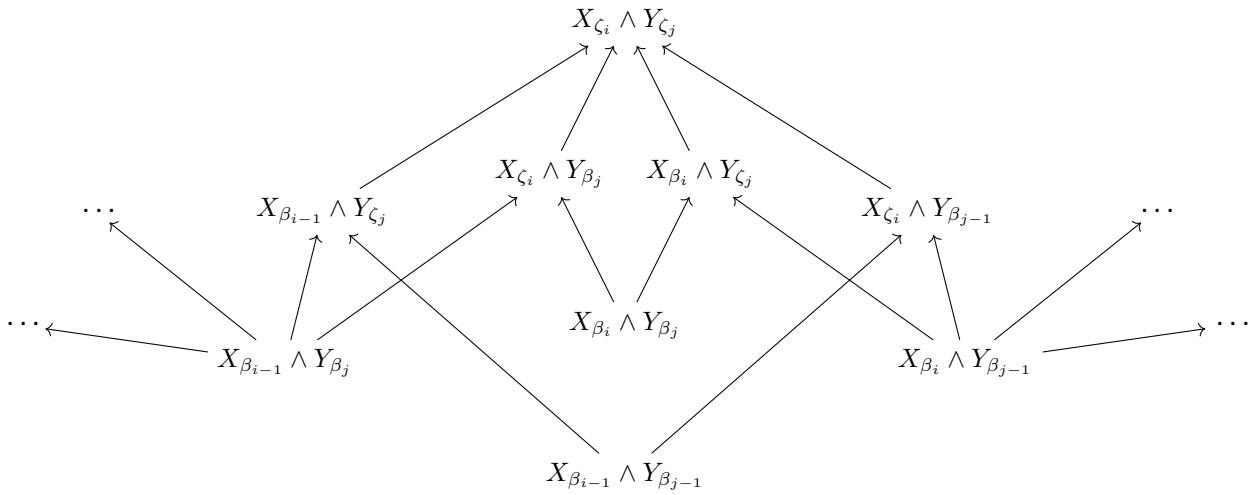
$$\operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\gamma_{n-1}} \phi^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \cong \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n} \mathbb{L}\phi_!\phi^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y).$$

综合以上所有内容可知，命题3.4.1 的左端是

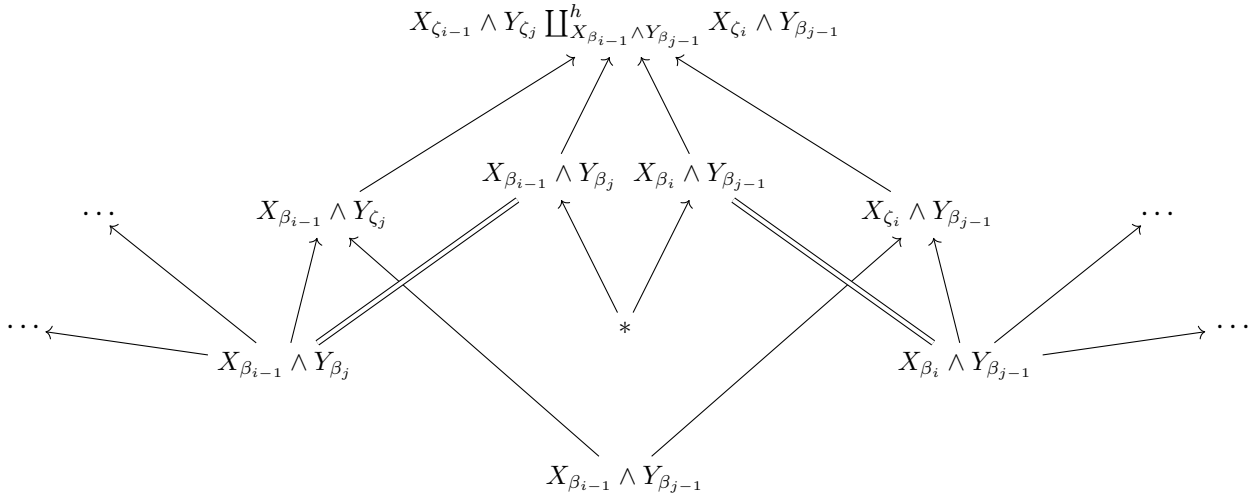
$$\operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n} (\operatorname{cone}(\varepsilon_{X\wedge^{\mathbb{L}}Y})).$$

步骤 2：计算 $\varepsilon_{X\wedge^{\mathbb{L}}Y}$。

底层图表 $X \wedge^{\mathbb{L}} Y \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\zeta_n})$ 如下所示。(3.4.4)



此外，同伦左 Kan 延拓 $\mathbb{L}\phi_!\phi^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\zeta_n})$ 如下所示。(3.4.5)



我们简要说明如何计算左同伦 Kan 延拓 $\mathbb{L}\phi_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)$。根据计算同伦 Kan 延拓的公式（2.2.4），我们可以计算在对象 (α_s, α_t) 处的同伦左 Kan 延拓 $\mathbb{L}\phi_!\phi^* \in \mathrm{pr}/\zeta_n$ 为:

$$\mathbb{L}\phi_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)_{(\alpha_s,\alpha_t)} \cong \mathrm{hocolim}(\phi/(\alpha_s,\alpha_t) \xrightarrow{\pi} \mathrm{pr}/\gamma_{n-1} \xrightarrow{\phi^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)} \mathcal{M}).$$

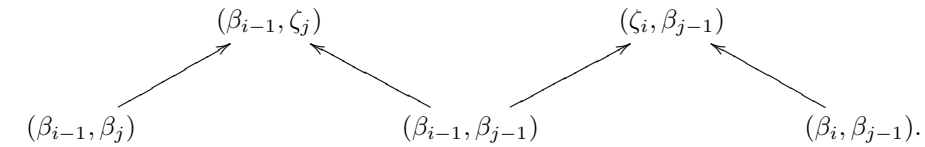
对于对象 (ζ_i, β_j)，切片 $\phi/(\zeta_i, \beta_j)$ 仅由对象 (β_{j-1}, β_j) 组成，这意味着

$$(\mathbb{L}\phi_!)_{(\zeta_i,\beta_j)} = X_{\beta_{i-1}} \wedge Y_{\beta_j}.$$

对于对象 (β_i, ζ_j)，论证与上面相同。对于 (β_i, β_j)，切片范畴 $\phi/(\beta_i, \beta_j)$ 为空，这意味着

$$(\mathbb{L}\phi_!)_{(\beta_i,\beta_j)} \cong *.$$

对于对象 (ζ_i, ζ_j)，切片范畴 $\phi/(\zeta_i, \zeta_j)$ 是偏序集



但该子偏序集

$$(\beta_{i-1}, \zeta_j) \longleftarrow (\beta_{i-1}, \beta_{j-1}) \longrightarrow (\zeta_i, \beta_{j-1})$$

是同伦终的，这意味着

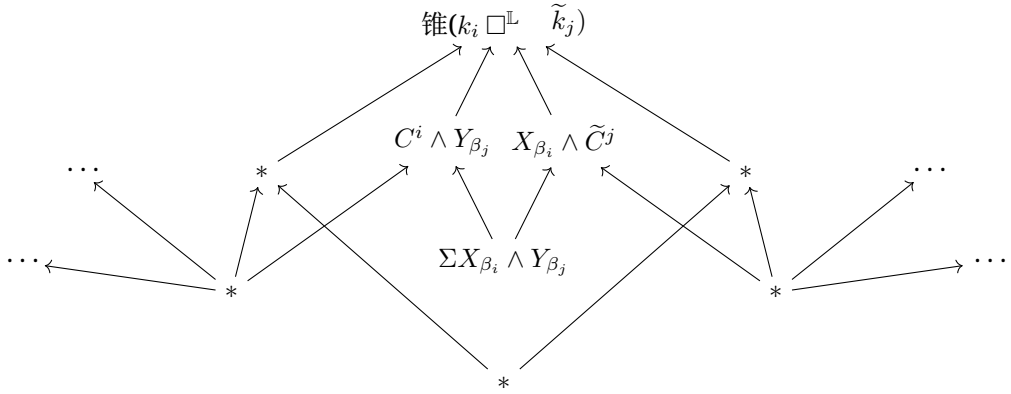
$$(\mathbb{L}\phi_!)_{(\zeta_i,\zeta_j)} \cong (\mathbb{L}\phi_!)_{(\zeta_i,\zeta_j)} \cong \operatorname{hocolim} \begin{pmatrix} X_{\beta_{i-1}} \wedge Y_{\beta_{j-1}} & \xrightarrow{k_i \wedge 1} & X_{\zeta_i} \wedge Y_{\beta_{j-1}} \\ {\scriptstyle 1\wedge \widetilde{k}_j}\downarrow & & \\ X_{\beta_{i-1}} \wedge Y_{\zeta_j} & & \end{pmatrix}.$$

步骤 3：计算左端的锥。

接下来，我们计算图表中自然变换 $\varepsilon_{X \wedge^{\mathbb{L}} Y}$(3.4.3) 在 $\mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\zeta_n})$ 中的锥。我们有图表锥$(\varepsilon_{X \wedge^{\mathbb{L}} Y}) \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\zeta_n})$，其形式为

$$\begin{aligned} \operatorname{cone}(\varepsilon_{X \wedge^{\mathbb{L}} Y}) : \mathrm{pr}/\zeta_n &\to \mathcal{M} \\ (\alpha_s, \alpha_t) &\mapsto \operatorname{cone}\left(\phi_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)_{(\alpha_s,\alpha_t)} \to (X \wedge^{\mathbb{L}} Y)_{(\alpha_s,\alpha_t)}\right). \end{aligned}$$

换言之，我们对从图表 (3.4.5) 到图表 (3.4.4) 的典范映射取逐对象的锥。这意味着，锥 $(\varepsilon_{X \wedge^{\mathbb{L}} Y})$ 如下所示。



(3.4.6)

这里，我们记

$$\begin{aligned} C^i &:= \operatorname{cone}(k_i) = \operatorname{cone}(X_{i-1} \to X_{\zeta_i}) \\ \widetilde{C}^j &:= \operatorname{cone}(\widetilde{k}_j) = \operatorname{cone}(Y_{j-1} \to Y_{\zeta_i}). \end{aligned}$$

接下来，我们确定图锥 $(\varepsilon_{X \wedge^{\mathbb{L}} Y})$ 的同伦余极限。一种方法是注意到，上述图表的同伦余极限在 $\mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ 中同构于（有限个）平方余积的同伦余极限

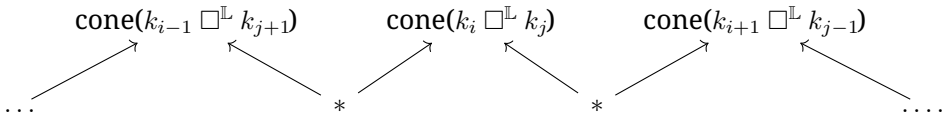
(3.4.7)

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X_{\beta_i} \wedge Y_{\beta_j} & \longrightarrow & \operatorname{cone}(k_i) \wedge Y_{\beta_j} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\beta_i} \wedge \operatorname{cone}(\widetilde{k}_j) & \longrightarrow & \operatorname{cone}(k_i \square^{\mathbb{L}} \widetilde{k}_j), \end{array}$$

在这里，我们可以将上述内容视为 $\mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{[1]\times[1]})$ 中的一个对象。严格来说，这是通过取偏序集的显然映射 $f\colon [1]\times[1]\to \mathrm{pr}/\zeta_n$（即 $(0,0)\mapsto(\beta_i,\beta_j)$, $(0,1)\mapsto(\zeta_i,\beta_j)$, $(1,0)\mapsto(\beta_i,\zeta_j)$, $(1,1)\mapsto(\zeta_i,\zeta_j)$）并考虑其拉回而得到的

$$f^*\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\zeta_n})\to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{[1]\times[1]}).$$

偏序集的右下角 $[1]\times[1]$ 是其终对象，这意味着图表 (3.4.7) 的同伦余极限自然同构于 $\mathrm{cone}(k_i\ \square^{\mathbb{L}}\ \widetilde{k}_j)$。因此，沿 pr/ζ_n 取同伦余极限，在自然同构意义下就是余积 $\bigvee_{i+j=n}\mathrm{cone}(k_i\ \square^{\mathbb{L}}\ \mathrm{cone}(\widetilde{k}_j))$。另一种理解方式是将上述图表拉回到 $\theta_n\colon\ J_n\to \mathrm{pr}\ /\zeta_n$，由此得到图表



总而言之，图表 (3.4.6) 的同伦余极限为

$$\operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}\left(\mathrm{cone}(\varepsilon_{X\wedge^{\mathbb{L}}Y})\right)\cong \bigvee_{i+j=n}\mathrm{cone}(k_i\ \square^{\mathbb{L}}\ \widetilde{k}_j). \tag{3.4.8}$$

最后，根据推论2.3.6，我们有典范同构

$$\mathrm{cone}(k_i\ \square^{\mathbb{L}}\ \widetilde{k}_j)\cong \mathrm{cone}(k_i)\wedge^{\mathbb{L}}\mathrm{cone}(\widetilde{k}_j)$$

对于每个 i，$j\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。这些同构与 (3.4.8) 的余积给出 that

$$\operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}\left(\mathrm{cone}(\varepsilon_{X\wedge^{\mathbb{L}}Y})\right)\cong \bigvee_{i+j=n}\mathrm{cone}(k_i)\wedge^{\mathbb{L}}\mathrm{cone}(\widetilde{k}_j).$$

现在我们汇总所有这些信息，以证明命题3.4.1。计算态射 $i^*E_{\beta_{n-1}}\to i^*E_{\zeta_n}$ 的同伦余纤维（锥），等同于计算同伦余纤维 $E_{\gamma_{n-1}}\to E_{\zeta_n}$。我们有以下自然同构。

$$\begin{aligned}
\mathrm{cone}\left(i^*E_{\beta_{n-1}}\to i^*E_{\zeta_n}\right) &= \mathrm{cone}\left(E_{\gamma_{n-1}}\to E_{\zeta_n}\right)\\
&= \mathrm{cone}\left(\operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\gamma_{n-1}}\phi^*(X\wedge^{\mathbb{L}}Y)\to \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}(X\wedge^{\mathbb{L}}Y)\right)\\
&\cong \mathrm{cone}\left(\operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}\phi_!\phi^*(X\wedge^{\mathbb{L}}Y)\to \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}(X\wedge^{\mathbb{L}}Y)\right)\\
&\cong \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n}\left(\mathrm{cone}\left(\phi_!\phi^*(X\wedge^{\mathbb{L}}Y)\to(X\wedge^{\mathbb{L}}Y)\right)\right)\\
&\cong \bigvee_{i+j=n}\mathrm{cone}(k_i\ \square^{\mathbb{L}}\ \widetilde{k}_j)\\
&\cong \bigvee_{i+j=n}\mathrm{cone}(k_i)\wedge^{\mathbb{L}}\mathrm{cone}(\widetilde{k}_j).
\end{aligned}$$

□

Coroll理 3.4.9。设 X,Y,E 如前，并进一步假设 $F_*(X_{\alpha_n})$ $F_*(Y_{\alpha_n})\in\mathcal{A}_{\mathrm{proj}}$ *for any* $n\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 以及任意 $\alpha\in\{\zeta,\beta\}$。那么存在一个典范同构

$$C^{(n)}(i^*E)=F_*(\mathrm{cone}(i^*E_{\beta_{n-1}}\to i^*E_{\zeta_n}))\cong \bigoplus_{i+j=n}C^{(i)}(X)\otimes C^{(j)}(Y).$$

证明。 根据我们的假设，对于任意 $\alpha\in\{\zeta,\beta\}$ 和任意 $n\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，对象 $F_*X_{\alpha_n}$ 是投射的。因此，根据定义， $Z^{(n)}(X)$ 和 $B^{(n-1)}(X)$ 是投射的。短正合列 (2.5.2) 现在推出，对于任意 $i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，分次对象 $C^{(i)}(X)$ 是投射的。由我们的假设可得

$$F_*(\mathrm{cone}\,k_s\wedge^{\mathbb{L}}\mathrm{cone}\,\widetilde{k}_t)\cong F_*(\mathrm{cone}\,k_s)\otimes F_*(\mathrm{cone}\,k_t).$$

由命题3.4.1 可得

$$\operatorname{cone}(i^*E_{\beta_{n-1}} \to i^*E_{\zeta_n}) \cong \bigvee_{i+j=n} \operatorname{cone}(k_i) \wedge^{\mathbb{L}} \operatorname{cone}(\tilde{k}_j),$$

并应用函子 $F_*(-)$，我们得到

$$\begin{aligned} F_*(\operatorname{cone}(i^*E_{\beta_{n-1}} \to i^*E_{\zeta_n})) &\cong F_*\left(\bigvee_{i+j=n} \operatorname{cone}(k_i) \wedge^{\mathbb{L}} \operatorname{cone}(\tilde{k}_j)\right) \\ &\cong \bigoplus_{i+j=n} F_*(\operatorname{cone}(k_i) \wedge^{\mathbb{L}} \operatorname{cone}\tilde{k}_j) \\ &\cong \bigoplus_{i+j=n} F_*(\operatorname{cone} k_i) \otimes F_*(\operatorname{cone}\tilde{k}_j). \end{aligned}$$

将上述内容平移 $[n] = [i+j]$，我们得到

$$C^{(n)}(i^*E) \cong \bigoplus_{i+j=n} C^{(i)}(X) \otimes C^{(j)}(Y).$$

□

3.5. 微分。在前一小节中，我们证明了 $C_*(i^*E) \cong C_*(X) \otimes C_*(Y)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的对象，因此图表 i^*E 是张量积的一个合适候选

$$C_*(X) \otimes C_*(Y).$$

为了证明确实如此，最后一步是

$$\mathcal{Q}(i^*E) \cong \mathcal{Q}(X) \otimes \mathcal{Q}(Y)$$

作为 $\mathsf{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 中的对象，需要证明微分 $d\colon C_*(i^*E) \to C_*(i^*E)[1]$ 与张量积 $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ 的微分一致。也就是说，我们必须证明

$$(C_*(i^*E), d) \cong ((C_*(X) \otimes C_*(Y), d_\otimes)$$

其中，$d_\otimes$ 是微分分次对象 $(C_*(X)\ d)$ 与 $(C_*(Y)$ 的张量积的微分，$d)$.

3.5.1. 归约到圆盘情形。我们将把证明归约到一个简单得多的情形。令$L_* \in \mathsf{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$，并选取 $s \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。不失一般性，我们假设 L_* 是逐次投射的。考虑以下微分分次对象之间的映射

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & L_s & = & L_s & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow{\scriptstyle d^s} & & \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow[d^{s+2}]{} & L_{s+1} & \xrightarrow[d^{s+1}]{} & L_s & \xrightarrow[d^s]{} & L_{s-1} & \xrightarrow[d^{s-1}]{} & L_{s-2} & \xrightarrow[d^{s-2}]{} & \dots \end{array} \tag{3.5.1}$$

其中，我们将顶部的微分分次对象视为 $\mathcal{B}[s-1] \oplus \mathcal{B}[s]$ 中的一个对象，也就是说，它集中在模 N 意义下的 $s-1$ 和 s 度。我们将其记为 $D^s(L_s)$，并将上述微分分次对象之间的映射记为 $f_{L,s}\colon D^s(L_s) \to L_*$。在范畴等价 $\mathcal{Q}\colon \mathcal{L} \to \mathsf{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 下，存在冠状图表 X 和 X'，以及一个态射 $F\colon X \to X'$，使得态射 $f_{L,\,s}$ 可表示为 $\mathcal{Q}(F)$。这意味着存在同构

$$\mathcal{Q}(X) \cong D^s(L_s), \qquad \mathcal{Q}(X') \cong L_*$$

并且下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}(X) & \xrightarrow{\mathcal{Q}(F)} & \mathcal{Q}(X') \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ D^s(L_s) & \xrightarrow[f_{L,s}]{} & L_* \end{array}$$

现在令 M_* 为另一个微分分次对象，我们也假设它逐次投射，并令 $t \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。类似于（3.5.1），我们有态射

$$g_{M,t} \colon D^t(M_t) \to M_*.$$

再者，在等价关系 $\mathcal{Q}$ 下，存在冠状图表 Y 和 Y'，以及一个态射 $G \colon Y \to Y'$，使得

$$\mathcal{Q}(Y) \cong D^t(M_t), \quad \mathcal{Q}(Y') \cong M_*$$

且下图表交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}(Y) & \xrightarrow{\mathcal{Q}(G)} & \mathcal{Q}(Y') \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ D^t(M_t) & \xrightarrow[g_{M,t}]{} & M_* \end{array}$$

我们有微分分次对象的态射 $f_{L,\ s} \otimes g_{M,\ t} \colon D^s(L_s) \otimes D^t(M_t) \to L_* \otimes M_*$，其定义为

(3.5.2)
$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & L_s \otimes M_t & \longrightarrow & (L_s \otimes M_t) \oplus (L_s \otimes M_t) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (d^s \otimes \mathrm{id}, \mathrm{id} \otimes \widetilde{d}^t)} & & \\ \dots & \longrightarrow & \bigoplus_{i+j=n} L_i \otimes M_j & \longrightarrow & \bigoplus_{i+j=n+1} L_i \otimes M_j & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

其中，左侧垂直态射是 (s,t) 阶直和项的包含映射，右侧垂直映射则是从余积出发的泛映射。

现在假设

$$\mathcal{Q}(i^* \mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \cong \mathcal{Q}(X) \otimes \mathcal{Q}(Y),$$

也就是说，我们证明所声称的结论适用于 $X \cong \mathcal{Q}^{-1}(D^s(L_s))$ 和 $Y \cong \mathcal{Q}^{-1}(D^t(M_t))$。方形图表（3.5.2）的交换性意味着，底部的垂直映射也必须与张量积 $L_* \otimes M_*$一致，即

$$Q(i^* \mathrm{pr}_!(X' \wedge^{\mathbb{L}} Y')) \cong L_* \otimes M_*$$

并且下面的图表逐度可交换。

$$\begin{array}{ccc} Q(i^* \mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(i^* \mathrm{pr}_!(X' \wedge^{\mathbb{L}} Y')) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^s(L_s) \otimes D^t(M_t) & \longrightarrow & L_* \otimes M_* \end{array}$$

水平映射确实是微分分次对象之间的映射，因此如果我们能证明左侧的垂直映射也满足这一点，那么结论便对一般的 L_* 和 M_*成立。前者的证明将在下一小节中展开。

3.6. 圆盘的微分。 为了证明圆盘的情形，我们讨论一个与这些圆盘相对应的冠状图表。根据 [Pat12，命题 3.2。1], 存在一个对象 $A \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$，使得 $F_*A \in \mathcal{B}[s-1] = L_s$，这是因为我们的假设迫使相应的 Adams 谱序列退化。考虑下面的冠状图表

$$X = \quad \begin{array}{ccccccc} & * & & A & & * & & \dots \\ \nearrow & \uparrow & \nearrow & \| & \nearrow & \uparrow & \nearrow & \\ \dots & * & & A & & * & & \end{array}$$

其中非平凡项位于 $(s-1)$-位置，即，

$$X_{\beta_{s-1}} = X_{\zeta_{s-1}} = A.$$

图表 X 位于 $\mathcal{L}$ 中，因为

$$B_*(X) = B^{(s-1)}(X) = F_* X_{\beta_{s-1}} = F_*A \quad \text{and} \quad Z_*(X) = Z^{(s-1)}(X) = F_* X_{\zeta_{s-1}} = F_*A.$$

接下来，我们计算 $(C_*(X)\ d) \in \mathsf{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$。唯一非平凡的锥是锥$(k_{s-1})$和锥$(k_s)$。这意味着

$$\begin{aligned} C^{(s)}(X) &= F_* \operatorname{cone}(k_s) = F_* \operatorname{cone}(A \to *) = F_*(\Sigma A) \cong (F_* A)[1], \\ C^{(s-1)}(X) &= F_* \operatorname{cone}(k_{s-1}) = F_* \operatorname{cone}(* \to A) = F_* A, \\ C_*(X) &= C^{(s-1)}(X) \oplus C^{(s)}(X). \end{aligned}$$

我们得到： $\lambda\colon B_*(X) \to Z_*(X)$ 是恒等映射， $\iota\colon Z_*(X) \to C_*(X)$ 是到第一个因子的包含映射，而 $\rho\colon C_*(X) \to B_*(X)$ 是到第二个因子的投影。因此，$d\colon C_*(X) \to C_*(X)[1]$ 是恒等映射。类似地， $D^t(L_t)$ 被映射到一个冠状图表 Y，其中

$$Y_{\beta_{t-1}} = Y_{\zeta_{t-1}} = \widetilde{A}$$

其中唯一的非平凡态射是恒等映射。

现在我们已经具备了处理下面这个命题所需的要素。

命题 3.6.1. 设 X 和 Y 是 $\mathcal{L}$ 中形如 $\mathcal{Q}^{-1}(D^s(L_s))$ 和 $\mathcal{Q}^{-1}(D^t(M_t))$ 的对象。那么

$$\mathcal{Q}(i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \cong (C_*(X) \otimes C_*(Y), d_\otimes)$$

其中，$(C_*(X) \otimes C_*(Y)\ d_\otimes)$ 是 $\mathsf{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 中 $C_*(X)$ 与 $C_*(Y)$ 的张量积。

证明。注意到张量积 $D^s(L_s) \otimes D^t(M_t)$ 集中在度 $s+t$、$s+t-1$ 和 $s+t-2$ 模 N。我们已经知道这些链复形在每个度上都一致，因此只需在这些度上计算微分。按照惯例，我们记 $E = \mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)$。

我们将计算链复形 $\mathcal{Q}$ 中的微分 $(i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y))$，从

$$\mathcal{Q}(i^*E)^{s+t} = C^{(s+t)}(i^*E) \to C^{(s+t-1)}(i^*E) = \mathcal{Q}(i^*E)^{s+t-1},$$

开始，然后讨论另一个度

$$C^{(s+t-1)}(i^*E) \to C^{(s+t-2)}(i^*E)$$

。之后。我们的证明分为以下几个步骤。

我们首先回顾定义 $\mathcal{Q}$ 应用于 i^*E 时所用的构造，并采用第 2.5节给出的描述，由此得到精确三角形

$$\operatorname{cone}(\widehat{k}_{s+t}) \to \Sigma E_{\gamma_{s+t-1}} \to \Sigma E_{\zeta_{s+t-1}} \to \Sigma \operatorname{cone}(\widehat{k}_{s+t-1}).$$

接下来的步骤分别确定 $E_{\zeta_{s+t-1}}$，随后确定映射 $\operatorname{cone}(k_{s+t}) \to \Sigma E_{\gamma_{s+t-1}}$、$E_{\gamma_{s+t-1}} \to E_{\zeta_{s+t-1}}$ 和 $E_{\zeta_{s+t-1}} \to \operatorname{cone}(k_{s+t-1})$。将这些合在一起，我们便得到所需的微分。

步骤 1：回顾 $\mathcal{Q}(i^*E)^{s+t} \longrightarrow \mathcal{Q}(i^*E)^{s+t-1}$ 的构造。

由命题 3.3.1 和命题 3.4.1，我们可以构造一个图表 $E = \mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{D_N})$ 使得

$$i^*E \in \mathcal{L} \quad \text{and} \quad \operatorname{cone}(i^*E_{\beta_{n-1}} \to i^*E_{\zeta_n}) \cong \bigvee_{i+j=n} \operatorname{cone}(k_i) \wedge \operatorname{cone}(\widetilde{k}_j).$$

为方便记号，我们记作

$$\widehat{k}_n\colon i^*E_{\beta_{n-1}} \to i^*E_{\zeta_n} \quad \text{and} \quad \widehat{l}_n\colon i^*E_{\beta_n} \to E_{\zeta_n}$$

冠状图表 i^*E 的结构映射。我们简要回顾微分的构造

$$d\colon C_*(i^*E) \to C_*(i^*E)[1] \quad d = \iota[1]\lambda[1]\rho C_*(i^*E) \to C_*(i^*E)[1].$$

De逐次数地， $C^{(n)}(i^*E) \to C^{(n-1)}(i^*E)$ 上的微分由将 $F_*(-)$ 作用于 seque映射的序列

$$\operatorname{cone}(\widehat{k}_n) \to \Sigma E_{\gamma_{n-1}} \to \Sigma E_{\zeta_{n-1}} \to \Sigma \operatorname{cone}(\widehat{k}_{n-1}). \tag{3.6.2}$$

因此，我们必须证明，对于 $n = s + t$ 映射序列 (3.6.2) 在应用 $F_*(-)$ 后，得到的是圆盘张量积的微分。根据命题3.4.1，我们有

$$\operatorname{cone}(\widehat{k}_{s+t}) \cong \operatorname{cone}(k_s) \wedge^{\mathbb{L}} \operatorname{cone}(\widetilde{k}_t)$$
$$\operatorname{cone}(\widehat{k}_{s+t-1}) \cong \left(\operatorname{cone}(k_{s-1}) \wedge^{\mathbb{L}} \operatorname{cone}(\widetilde{k}_t)\right) \vee \left(\operatorname{cone}(k_s) \wedge^{L} \operatorname{cone}(\widetilde{k}_{t-1})\right).$$

~回想一下， $A = X_{\beta_{s-1}} = X_{\zeta_{s-1}}$ 和 $A = Y_{\beta_{s-1}} = Y_{\zeta_{s-1}}$ 与之前相同。直接由冠状图表 X 和 Y 的结构态射可得

$$\operatorname{cone}(\widehat{k}_{s+t}) \cong (\Sigma A) \wedge (\Sigma \widetilde{A})$$
$$\operatorname{cone}(\widehat{k}_{s+t-1}) \cong \left(A \wedge \Sigma \widetilde{A}\right) \vee \left(\Sigma A \wedge \widetilde{A}\right).$$

为了分析映射序列（3.6.2），还需计算 $E_{\gamma_{s+t-1}}$、$E_{\zeta_{s+t-1}}$、$E_{\zeta_{s+t}}$ 以及映射 $E_{\gamma_{s+t-1}} \to E_{\zeta_{s+t-1}}$。这些映射

$$\operatorname{cone}(\widehat{k}_{s+t}) \to \Sigma E_{\gamma_{s+t-1}} \tag{3.6.3}$$
$$\Sigma E_{\zeta_{s+t-1}} \to \Sigma \operatorname{cone}(\widehat{k}_{s+t-1}) \tag{3.6.4}$$

是单纯稳定模型范畴中由可区别三角的构造给出的典范映射。映射（3.6.3）是典范映射

$$\operatorname{cone}(\widehat{k}_{s+t}) \to S^1 \wedge E_{\gamma_{s+t-1}}$$

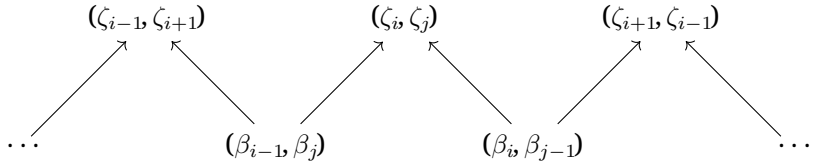
见定义 2.3.13。类似地，映射（3.6.4）是典范映射的悬挂

$$E_{\zeta_{s+t-1}} \to \operatorname{cone}(\widehat{k}_{s+t-1},)$$

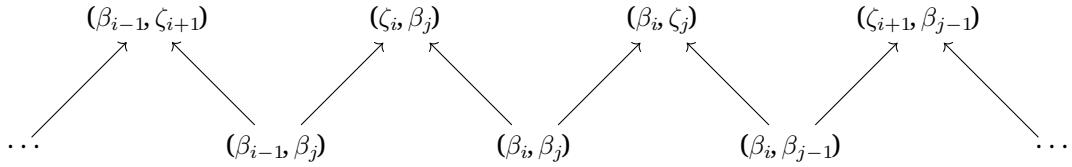
见定义 2.3.13。

步骤 2：计算 E_{ζ_n}。

为计算上述内容，我们回顾一下（iv）中的偏序集 J_n 及包含映射 $\theta\colon\ J_n \hookrightarrow \mathrm{pr}/\zeta_n$ 和左伴随 $L\colon \mathrm{pr}/\zeta_n \to J_n$。对于 $i + j \equiv n$ 模 N 偏序集 J_n 如下所示。



此外，回想一下 (ii) 中的切片范畴 pr/γ_n，对于 $i + j \equiv n$ 其形式如下。



根据同伦左 Kan 延拓的定义，我们有

$$E_{\zeta_n} = \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_n} X \wedge^{\mathbb{L}} Y \cong \operatorname*{hocolim}_{J_n} \theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y),$$
$$E_{\gamma_n} = \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\gamma_n} (X \wedge^{\mathbb{L}} Y).$$

这些映射

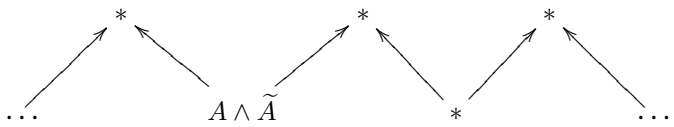
$$E_{\gamma_{n-1}} \to E_{\zeta_n} \quad \text{and} \quad E_{\gamma_{n-1}} \to E_{\zeta_{n-1}}$$

是由相应的偏序集映射诱导的同伦余极限映射

$$\psi\colon\ \mathrm{pr}\,/\gamma_{n-1} \to \mathrm{pr}\,/\zeta_n \quad \text{and} \quad \phi\colon\ \mathrm{pr}\,/\gamma_{n-1} \to \mathrm{pr}\,/\zeta_{n-1}.$$

我们首先计算 $E_{\zeta_{s+t-1}}$。底层图表 $\theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{J_{s+t-1}})$ i s

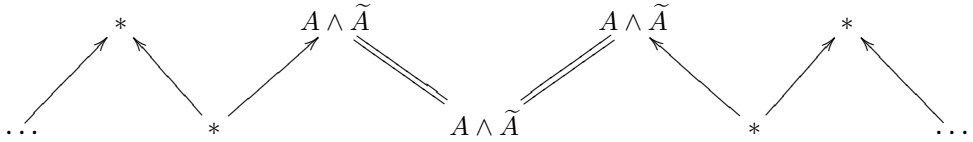
(3.6.5)



其中唯一的非平凡项位于 $(\beta_{s-1}, \beta_{t-1})$。由上面的图表可得

$$E_{\zeta_{s+t-1}} = \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_{s+t-1}} (X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \cong \operatorname*{hocolim}_{J_{s+t-1}} \theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \cong \Sigma A \wedge \widetilde{A}.$$

我们对 $E_{\gamma_{s+t}}$、$E_{\gamma_{s+t-1}}$ 和 $E_{\gamma_{s+t-2}}$ 也进行相同的处理。值 $E_{\gamma_{s+t-2}}$ 是图表 $X \wedge^{\mathbb{L}} Y \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{\mathrm{pr}/\gamma_{s+t-2}})$ 的同伦余极限，其形式为



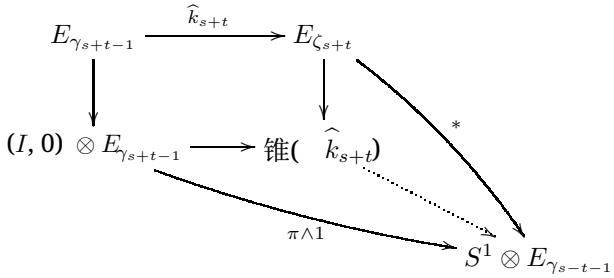
底部在位置 $(\beta_{s-1}, \beta_{t-1})$ 处有非平凡项，左侧在位置 $(\zeta_{s-1}, \beta_{t-1})$ 处有非平凡项，右侧在位置 $\widetilde{(}\beta_{s-1}, \zeta_{t-1})$ 处有非平凡项。因此，$E_{\gamma_{s+t-2}} \cong A \wedge A$. 类似地，我们有

$$E_{\gamma_{s+t}} = \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\gamma_{s+t}} (X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \cong *$$

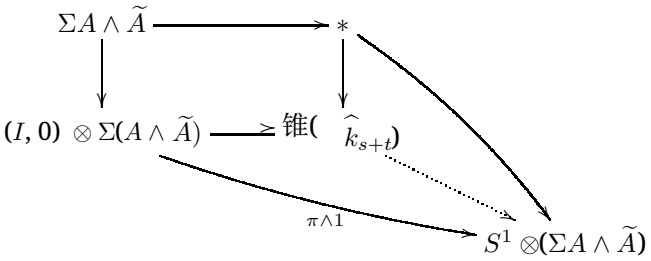
$$E_{\gamma_{s+t-1}} = \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\gamma_{s+t-1}} (X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \cong \Sigma A \wedge \widetilde{A}.$$

$\widehat{\ }$步骤 3：计算锥$(k_{s+t}) \to \Sigma E_{\gamma_{s+t-1}}$。

接下来我们计算映射 锥$(\widehat{k}_{s+t}) \to S^1 \otimes E_{\gamma_{s+t-1}}$。根据定义 2.3.13 我们有推出方块



根据我们的计算，结果如下。



回顾命题3.4.1，(3.4.8)以及推论2.3.6 可知，存在一系列典范同构

$$\mathrm{cone}(\widehat{k}_{s+t}) \cong \mathrm{cone}(k_s \,\square^{\mathbb{L}}\, \widetilde{k}_t) \cong \mathrm{cone}(k_s) \wedge^{\mathbb{L}} \mathrm{cone}(\widetilde{k}_t).$$

在我们的具体情形中，其中 $k_s\colon\ A \to A$ 且 $k\colon\ \widetilde{A} \to \widetilde{*}$，这就是

$$\mathrm{cone}(\widehat{k}_{s+t}) \cong \mathrm{cone}(k_s \,\square^{\mathbb{L}}\, k_t) \cong \Sigma^2 A \wedge \widetilde{A} \cong \Sigma A \wedge \Sigma \widetilde{A} \cong \mathrm{cone}(k_s) \wedge^{\mathbb{L}} \mathrm{cone}(\widetilde{k}_t).$$

这意味着从推出出发的泛映射就是恒等映射。因此，该映射

$$\mathrm{cone}(\widehat{k}_{s+t}) \to \Sigma E_{\gamma_{s+t-1}}$$

是映射 $\Sigma A \wedge \Sigma\widetilde{A} \to \Sigma^2(A \wedge \widetilde{A})$，它是典范映射（余极限的交换）与恒等映射的复合。

步骤 4：计算 l_{s+t-1}： $E_{\gamma_{s+t-1}} \to E_{\zeta_{s+t-1}}$。

从上面的偏序集中，我们可以直接看出映射

$$\widehat{l}_{s+t-1} \colon E_{\gamma_{s+t-1}} \to E_{\zeta_{s+t-1}}$$

是由.....诱导的恒等映射

$$\psi \colon \mathrm{pr}/\gamma_{s+t-1} \to \mathrm{pr}\,/\zeta_{s+t-1}.$$

因此，映射

$$\Sigma\widehat{l}_{s+t-1} \colon E_{\gamma_{s+t-1}} \to \Sigma E_{\zeta_{s+t-1}}$$

是恒等映射

$$1 \colon \Sigma^2(A \wedge \widetilde{A}) \to \Sigma^2(A \wedge \widetilde{A}).$$

步骤 5：计算 $E_{\zeta_{s+t-1}}$ →cone(k_{s+t-1})。

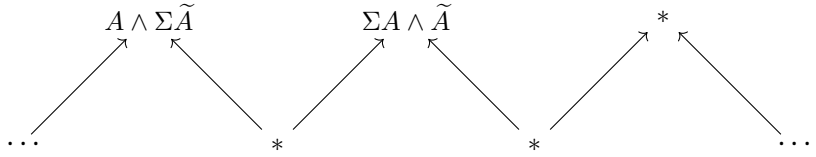
最后还需确定映射

$$E_{\zeta_{s+t-1}} \to \mathrm{cone}(\widehat{k}_{s+t-1}).$$

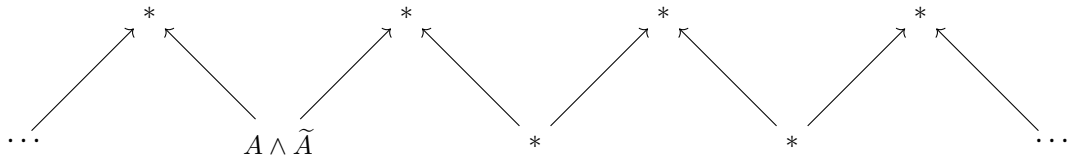
回想命题的证明3.4.1 可知，cone(k_{s+t-1}) 可写成一个同伦余极限

$$\mathrm{cone}(\widehat{k}_{s+t-1}) \cong \operatorname*{hocolim}_{\mathrm{pr}/\zeta_{s+t-1}} \left(\mathrm{cone}(\varepsilon_{X \wedge^{\mathbb{L}} Y})\right),$$

其中 ϕ: pr$/\gamma_{s+t-2} \to$ pr$/\zeta_{s+t+1}$，而 ε 是导出伴随 $(\mathbb{L}\phi_!, \phi^*)$ 的余单位。沿包含映射 θ: $J_{s+t-1} \to$ pr$/\zeta_{s+t-1}$ 将图锥 cone($\varepsilon_{X \wedge^{\mathbb{L}} Y}$) 拉回到 J_{s+t-1}，得到图表



在 (ζ_{s-1}, ζ_t) 和 (ζ_s, ζ_{t-1}) 处分别有非平凡项。回顾 (3.6.5) 中的以下图表 $\theta^*(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{J_{s+t-1}})$



唯一的非平凡项位于 $(\beta_{s-1}, \beta_{t-1})$，左上方为 (ζ_{s-1}, ζ_t)，右上方为 (ζ_s, ζ_{t-1})。由于底层偏序集及映射的形状，我们可以放心地忽略平凡项，因此映射 $E_{\gamma_{s+t-1}}$ →cone(k_{s+t-1}) 可视为同伦推出之间的映射

$$\mathrm{hocolim}(* \leftarrow A \wedge \widetilde{A} \to *) \to \mathrm{hocolim}(A \wedge \Sigma\widetilde{A} \leftarrow * \to \Sigma A \wedge \widetilde{A}),$$

由以下偏序集映射诱导。

$$\begin{array}{ccccc} * & \longleftarrow & A \wedge \widetilde{A} & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A \wedge \Sigma\widetilde{A} & \longleftarrow & * & \longrightarrow & \Sigma A \wedge \widetilde{A} \end{array}$$

现在考虑上述图表映射以及底部的以下映射。

$$\begin{array}{ccccc} * & \longleftarrow & A \wedge \widetilde{A} & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A \wedge \Sigma\widetilde{A} & \longleftarrow & * & \longrightarrow & \Sigma A \wedge \widetilde{A} \\ {\scriptstyle \tau}\downarrow & & \downarrow & & \| \\ \Sigma A \wedge \widetilde{A} & \longleftarrow & * & \longrightarrow & \Sigma A \wedge \widetilde{A} \end{array}$$

这里， τ 是映射

$$A \wedge \Sigma\widetilde{A} = A \wedge (S^1 \wedge \widetilde{A}) \cong (A \wedge S^1) \wedge \widetilde{A} \xrightarrow{\tau} (S^1 \wedge A) \wedge \widetilde{A} \cong \Sigma A \wedge \widetilde{A}$$

而第一个映射是结合律同构。由引理 3.7.1 可知，同伦余极限的诱导映射在弱等价意义下是对角映射

$$\mathrm{diag}\colon \Sigma A \wedge \widetilde{A} \to (\Sigma A \wedge \widetilde{A}) \vee (\Sigma A \wedge \widetilde{A}).$$

因此，映射 (3.6.2) 在弱等价意义下是对角映射，但如上所述，扭转映射引入了一个符号。这一点以及推论3.4.9 表明，微分确实

$$d\colon C^{(s+t)}(i^*E) \to C^{(s+t-1)}(i^*E)$$

与张量积的微分一致

$$\Big((D^s L^s) \otimes (D^t \widetilde{L}^t)\Big)^{s+t} \to \Big((D^s L^s) \otimes (D^t \widetilde{L}^t)\Big)^{s+t-1}.$$

步骤 6： $\mathcal{Q}(i^*E)^{s+t-1} \longrightarrow \mathcal{Q}(i^*E)^{s+t-2}$。

我们无需额外工作来确定另一个微分，即验证该微分

$$C^{(s+t-1)}(i^*E) \to C^{(s+t-2)}(i^*E)$$

与微分一致

$$\Big((D^s L^s) \otimes (D^t \widetilde{L}^t)\Big)^{s+t-1} \to \Big((D^s L^s) \otimes (D^t \widetilde{L}^t)\Big)^{s+t-2},$$

因为按照构造，$(C_*(i^*E),\ d)$ 是一个微分分次对象，这意味着必然有$d[1] \circ d = 0$ 作用于 $C_*(i^*E)$。证明至此完成。□

To c总结本节，结合推论3.4.9 和命题3.6.1 我们已证明
the foll下列命题。

命题 3.6.6. 设 $X, Y \in \mathcal{L}$ 满足：对于任意 $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 和任意 $\alpha \in \{\beta, \zeta\}$， $F_*(X_{\alpha_n})\ F_*(Y_{\alpha_n}) \in \mathcal{A}_{\mathrm{proj}}$。存在一个自然同构

$$\mathcal{Q}(i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \cong \mathcal{Q}(X) \otimes \mathcal{Q}(Y).$$

□

3.7. 技术引理。在本小节中，我们证明前述证明中用到的两个技术引理。第一个引理讨论稳定单纯模型范畴 $\mathcal{M}$中从对象的悬挂到悬挂的楔积的典范映射。第二个引理讨论遗传阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$中单射态射的推挤积。

引理 3.7.1. 设 $\mathcal{M}$ 是一个稳定单纯模型范畴，并设 $X \in \mathcal{M}$。考虑下面这个同伦推出之间的映射

$$\operatorname{hocolim}(* \leftarrow X \to *) \to \operatorname{hocolim}(\Sigma X \leftarrow * \to \Sigma X).$$

那么，上述映射在 Ho($\mathcal{M}$) 中同构意义下就是对角映射

$$\operatorname{diag}\colon \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X.$$

证明. 令 $CX = (I, 0) \otimes X$ 为 X 的锥，并令 $i\colon X \to CX$ 为典范包含，它是一个余纤维化。我们选取 ΣX 的一个模型，使其为以下同伦推出

$$\Sigma X \cong \operatorname{hocolim}(CX \leftarrow X \to CX).$$

事实上，由于 $i\colon X \to CX$ 是一个余纤维化，我们可以将其取为普通推出 colim($CX \longleftarrow X \to CX$)。由这个模型可直接得到推出上的诱导映射

$$\begin{array}{ccccc} CX & \xleftarrow{i} & X & \xrightarrow{i} & CX \\ {\scriptstyle \pi\otimes 1}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi\otimes 1} \\ \Sigma X & \longleftarrow & * & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

其中 $\pi\colon I \to S^1$ 是投影，该映射确实是对角映射 diag: $\Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X$。因此，同伦推出之间的诱导映射在自然同构意义下就是对角映射。□

引理3.7.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个遗传阿贝尔范畴。设 $X, Y, U, V \in \mathcal{A}_{\mathrm{proj}}$，并设 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon U \to V$ 是单射映射。那么，推挤积映射 $f \square g$ 是单射的。

证明. 由于 $g\colon U \to V$ 是单态射，我们有短正合列

$$0 \to U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{j} \operatorname{coker} g \to 0.$$

注意，阿贝尔范畴 $E(1)_*$-模的维数为 1，这意味着 coker g 是投射模，因为它是 V 的子模。由于 X 是平坦的，$X \otimes -$ 是正合函子，这意味着序列

$$0 \to X \otimes U \xrightarrow{1\otimes g} X \otimes V \xrightarrow{1\otimes j} X \otimes \operatorname{coker} g \to 0$$

是短正合的。考虑图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X \otimes U & \xrightarrow{1\otimes g} & X \otimes V & \xrightarrow{1\otimes j} & X \otimes \text{余核}\, g & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f\otimes 1}\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & Y \otimes U & \longrightarrow & P & \longrightarrow & X \otimes \text{余核}\, g & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & {\scriptstyle f\square g}\downarrow & & {\scriptstyle f\otimes 1}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y \otimes U & \xrightarrow[1\otimes g]{} & Y \otimes V & \xrightarrow[1\otimes j]{} & Y \otimes \text{余核}\, g & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 P是 $1 \otimes g$和 $g \otimes 1$的推出。由于左上方的方块是余笛卡尔的，典范映射 coker($1 \otimes g$) $\xrightarrow{\cong}$ coker($Y \otimes U \to P$) 是同构，因此中间一行也是正合的。现在注意到，态射 $f \otimes 1\colon X \otimes$coker $g \to Y \otimes$coker g是单射，因为 coker g是投射的。应用蛇引理可得 $f \square g$ 是单态射。

□

4. Main Result

4.1. 同伦余极限计算。 在本节中，我们讨论函子 $i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!$ 如何与各种图表范畴的同伦余极限相互作用，从而得到主图表1.0.2右侧的内容。本节的主要结果如下。

定理 4.1.1. 对于任意一对图表 $(X,Y) \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \times \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N})$，图表 $i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N})$ 的同伦余极限自然同构于 X 和 Y 的同伦余极限的楔积，即

$$\operatorname*{hocolim}_{C_N}\left(i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)\right) \cong \operatorname*{hocolim}_{C_N} X \wedge^{\mathbb{L}} \operatorname*{hocolim}_{C_N} Y.$$

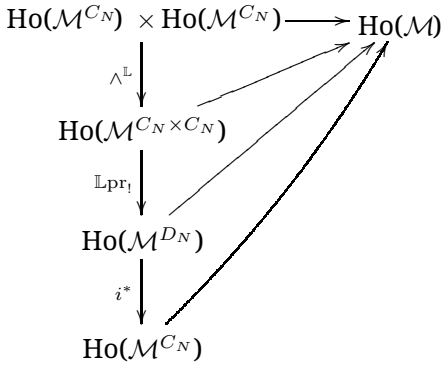
回忆一下，函子

$$i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(- \wedge^{\mathbb{L}} -)\colon \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \times \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N})$$

是复合

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \times \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \xrightarrow{\wedge^{\mathbb{L}}} \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N \times C_N}) \xrightarrow{\mathbb{L}\mathrm{pr}_!} \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{D_N}) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}).$$

为了证明定理 4.1.1 我们将把它分解成更小的部分。考虑以下图表。



最上方的水平函子是冠状图表的同伦余极限的楔积，即 $\mathrm{hocolim}_{C_N} X \wedge^{\mathbb{L}} \mathrm{hocolim}_{C_N} Y$. 。另外三个函子是同伦余极限函子。

(i) 同伦余极限$_{C_N \times C_N}$: $\mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N \times C_N}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$,

(ii) 同伦余极限$_{D_N}$: $\mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{D_N}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$,

(iii) 同伦余极限$_{C_N}$: $\mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{C_N}) \to \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$.

定理 4.1.1断言，上方外侧的三角形在同构意义下交换。只需证明所有小三角形都在同构意义下交换，即可得出这一结论。

引理 4.1.2。顶端的三角形和中间的三角形交换，即

$$\operatorname*{hocolim}_{C_N} X \wedge^{\mathbb{L}} \operatorname*{hocolim}_{C_N} Y \cong \operatorname*{hocolim}_{C_N \times C_N}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)$$

and

$$\operatorname*{hocolim}_{C_N \times C_N}(X \wedge^{\mathbb{L}} Y) \cong \operatorname*{hocolim}_{D_N} \mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y).$$

证明。 第一个断言可直接应用推论 2.3.4 于 $C = D = C_N$ 得出。第二个断言依据以下事实：图表的同伦左 Kan 延拓的同伦余极限与该图表自身的同伦余极限同构 [Ric20，命题 4.3。2]。 □

我们将通过证明函子 $i\colon C_N \to D_N$ 满足以下定义来证明上述命题，参见 [Rie14，定义 8.5。1]。

定义 4.1.3. 小范畴之间的函子 $K\colon C \to D$ 是同伦终（或同伦终端）的，当且仅当对每个对象 $d \in D$，单纯集 $N(d/K)$ 都是可缩的。

判断一个偏序集是否可缩，有一种方便的方法由 Quillen [Qui78第 1 节5]：偏序集 C 是锥形可缩的，如果存在一个对象 $c_0 \in C$ 以及一个偏序集映射 $f\colon C \to C$使得 $c \leq f(c) \geq c_0$ 对每个 $c \in C$都成立。在这种情况下，可以证明恒等映射 1_C、映射 f以及取值为 c_0 的 C 常值映射到其自身同伦（也就是说，它们的几何实现同伦），因此 C 是可缩的。因此，给定一个图表 $E \in \mathrm{Ho}(\mathcal{M}^{D_N})$，要验证典范态射

$$\phi_i\colon \operatorname*{hocolim}_{C_N} i^*E \to \operatorname*{hocolim}_{D_N} E$$

是同构，只需验证函子 $i\colon C_N \to D_N$ 的切片范畴 α_n/i 对任意 $\alpha \in \{\zeta, \gamma, \beta\}$ 和任意 $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 都是可缩的。We will 现在应用 ly th是对我们的 f函子 $i\colon C_N \to D^{N,}$ w hich is the 包含l入 o f the 两行冠状图表到三行冠图的嵌入（3.1.2）。

引理 4.1.4. 函子 $i\colon C_N \to D_N$ 是同伦终的。

证明. 我们将应用锥形可缩偏序集的 Quillen 判据来证明上述命题。首先，我们确定切片范畴 ζ_n/i、γ_n/i 和 β_n/i，然后检查它们是否确实是锥形可缩的。我们从 ζ_n/i开始。根据定义，

$$\zeta_n/i = \{\alpha_n \in C_N\colon i(\alpha_n) \geq \zeta_n\} = \{\zeta_n\}.$$

由于这个偏序集只包含一个元素，因此它显然是可缩的。接下来的切片范畴具有 γ_n/i的形式。根据定义，

$$\gamma_n/i = \{\alpha_n \in C_N\colon i(\alpha_n) \geq \gamma_n\},$$

也就是说，γ_n/i是偏序集

$$\begin{array}{ccc} \zeta_n & & \zeta_{n+1}. \\ \uparrow & \nearrow & \\ \beta_n & & \end{array}$$

我们选取 β_n 和 $1\colon \gamma_n/i \to \gamma_n/i$。直接由上文可知，$\gamma_n/i$ 是锥形可缩的。最后一种情况是切片 β_n/i。根据定义，

$$\beta_n/i = \{\alpha_n \in C_N\colon i(\alpha_n) \geq \beta_n\},$$

它是偏序集

$$\begin{array}{ccc} \zeta_n & & \zeta_{n+1} \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ \beta_n & & \beta_{n+1}. \end{array}$$

我们选择 β_n 以及 $\beta_n/i \to \beta_n/i$ 的映射如下。

$$\zeta_n \mapsto \zeta_n, \zeta_{n+1} \mapsto \zeta_{n+1}, \beta_n \mapsto \beta_n, \beta_{n+1} \mapsto \zeta_{n+1}$$

根据这些选择，我们可以看出偏序集 β_n/i 是锥形可缩的。 □

最后，我们得到了大图表中底部三角形的交换性，由此也完成了定理 4.1.1的证明。回顾函子 $i\colon C_N \to D_N$ 自

推论 4.1.5. （*1.0.2*）中的下方三角形是可交换的，即

$$\operatorname*{hocolim}_{C_N} i^*E \cong \operatorname*{hocolim}_{D_N} E.$$

□

4.2. 主定理的证明。最后，我们现在可以将所有工作汇总起来，得出主定理。

定理 4.2.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个遗传阿贝尔范畴， $\mathcal{M}$ 是一个幺半稳定模型范畴，并且 Franke 函子

$$\mathcal{R}\colon (\mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A}), \otimes^{\mathbb{L}}) \to (\mathrm{Ho}(\mathcal{M}), \wedge^{\mathbb{L}})$$

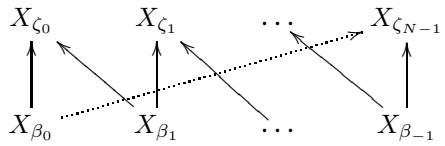
存在且是一个等价。则 $\mathcal{R}$ 在自然同构意义下保持幺半群乘积，即

$$\mathcal{R}(M_* \otimes^{\mathbb{L}} M_*) \cong \mathcal{R}(M_*) \wedge^{\mathbb{L}} \mathcal{R}(M_*).$$

证明。我们按照图表1.0.2的思路组织证明。令 M_* 和 N_* 为 $\mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 中的对象。根据约定2.1.1，这两个对象都是余纤维化的。由于 M_* 是余纤维化的，函子

$$M_* \otimes -\colon \mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \to \mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$$

是左 Quillen，见 [Hov99，注 4.2。3]，这意味着它保持余纤维对象。由于两个对象都是余纤维化的，张量积 $M_* \otimes N_*$ 在 $(\mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \otimes^{\mathbb{L}})$ 中表示导出张量积，而且它本身也是余纤维化的。回顾例 2.3.11 可知，$\mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$ 中的余纤维对象是 $\mathcal{A}$中的投射对象。这尤其意味着 M_*， N_* 和 $M_* \otimes N_*$ 都属于 $\mathcal{A}_{\mathrm{proj}}$。我们回顾一下第 3节中的一些记号。给定如下的冠状图表$X \in \mathcal{M}^{C_N}$



我们设

$$Z^{(n)}(X) = F_*(X_{\zeta_n}),\ B^{(n)}(X) = F_*(X_{\beta_n}),\ C^{(n)}(X) = F_*(\mathrm{cone}(X_{\beta_{n-1}} \to X_{\zeta_n})).$$

给定 $(M_*, d) \in \mathrm{C}^{([1],1)}(\mathcal{A})$，可以构造一个冠状图表 X in $\mathcal{L}$，使得

$$\begin{aligned}(C_*(X), d) &\cong (M_*, d)\\ Z_*(X) &\cong \ker d\\ B_*(X) &\cong \operatorname{im} d.\end{aligned}$$

根据上述讨论， $M_* \in \mathcal{A}_{\mathrm{proj}}$。由假设， $\mathcal{A}$ 是一个遗传阿贝尔范畴，换言之，gl. dim $\mathcal{A} = 1$。这意味着 $\ker d$、$\operatorname{im}\ d \in \mathcal{A}_{\mathrm{proj}}$，因为它们是 M_* 的子模。

因此，对于冠状图表 $X \cong \mathcal{Q}^{-1}(M_*)$，我们有 $F_*(X_{\alpha_n}) \in \mathcal{A}_{\mathrm{proj}}$，对每个 $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 和任意 $\alpha \in \{\zeta, \beta\}$ 都成立。类似地，对于微分分次对象 (N_*, d)，我们得到一个冠状图表 $Y \cong \mathcal{Q}^{-1}(N_*)$，使得 $F_*(Y_{\alpha_n}) \in \mathcal{A}_{\mathrm{proj}}$，对每个 $n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 和任意 $\alpha \in \{\zeta, \beta\}$ 都成立。

现在，根据定理3.1.5，

$$\mathcal{Q}(i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)) \cong \mathcal{Q}(X) \otimes \mathcal{Q}(Y) = M_* \otimes N_*$$

并且根据定理4.1.1，

$$\operatorname*{hocolim}_{C_N}\left(i^*\mathbb{L}\mathrm{pr}_!(X \wedge^{\mathbb{L}} Y)\right) \cong \operatorname*{hocolim}_{C_N} X \wedge^{\mathbb{L}} \operatorname*{hocolim}_{C_N} Y.$$

最后，我们回顾一下，Franke 实现函子（2.5.4）定义为

$$\mathcal{R} = \operatorname*{hocolim}_{C_N} \circ\, \mathcal{Q}^{-1},$$

由此完成证明。

□

定理4.2.1 的假设在以下情形中均成立。

例 4.2.2。 根据 [Pat12，推论 5.2。1]我们知道

$$\mathcal{R} : D(\pi_* R) \longrightarrow D(R) = \mathrm{Ho}(R\text{-mod})$$

对于环谱 R 满足 $\pi_*(R)$ 集中在某个 $N > 1$ 的倍数度上，且整体维数 $\pi_*(R)$ 等于 1 的情形，这是一个等价。它满足定理 4.2.1 的假设，适用于 $R = KU$、 $R = KU_{(p)}$、 $R = E(1)$（复 K-理论），以及 $R = k(n)$（连通 Morava K-理论）。

例 4.2.3. 根据 [Fra96] 和 Roitzheim [Roi08]，我们知道

$$\mathcal{R} : \mathrm{D}^{([1],1)}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(L_1\mathcal{S})$$

是一个等价。这里， $\mathcal{A}$ 是 $E(1)_*E(1)$-余模的范畴，而 $L_1\mathcal{S}$ 是一个合适的谱范畴，其配备了奇素数处的 K-局部模型结构。注意，正如例 2.3.11 中所提到的，尽管 $\mathcal{A}$ 没有足够的投射对象，但我们的所有证明在处理底层 $E(1)_*$-模为投射对象的余模时同样成立，另见第一作者的学位论文 [Nik22]。

References

[Bar07] Clark Barwick. 关于 Reedy 模型范畴。arXiv:0708.2832，2007。[BR11] David Barnes 和 Constanze Roitzheim。Franke 奇异模型的幺半性。 *Adv. Math.*，228(6):3223– 3248，2011。[BR20] David Barnes 和 Constanze Roitzheim。

Foundations of stable homotopy theory 185 *Cam-* ，[卷。剑桥 *bridge Studies in Advanced Mathematics* 2020 大学出版社，剑桥，09] 。

Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 147 3 593 614, Cis[2009 Denis-Charles Cisinski。局部常值函子。96] ，( ): – 。 *K-theory Preprint Archives*Fra[Jens Franke。具有 Adams 谱序列的某些三角范畴的唯一性定理。07] ，139，1996。 *E*Gan *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.*Nora Ganter。奇素数处的[(1)-局部谱的楔积。13] ，48 1 3 54，2007 ( ): – 。

´ *J.* GCNT[

Pure Appl. Algebra 217 11 2163 2179, 2013 Imma G09] alvez-Carrillo、Frank Neumann 和 Andrew Tonks。范畴的 Thomason 上同调。

Simplicial homotopy theory，( ): – 。 ¨GJ¨Paul G. Goerss 和 John F. Jardine。 [。现代 Birkh1711612]auser 经典。Birkh[auser 出版社，巴塞尔，2009。1999 年版的重印本 03] MR

Model categories and their localizations 99 *Mathematical Surveys and* 。[Hir99] *Monographs* 2003 Philip S. Hirschhorn。 *Model categories*， *Mathematical Surveys and Monographs*卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，[。14] Hov *arXiv preprint arXiv:1401.2850*Mark Hovey。[，22] 卷 63，属于

PhD thesis University of 。美国数学 *Kent*, 2022 会，普罗维登斯，罗得岛，1999。[Hov67] Mark Hovey。结构化环谱的 Smith 理想。 *Math. Z.*，2014。[Nik68] Nikitas Nikandros。Franke 实现函子与幺半群乘积。 *Math. Z.*，[，12] 。 *Algebr. Geom. Topol.*Obe[Ulrich Oberst。小范畴同调中的基扩张。78] ，100:36–58，1967。 *p*Obe *Adv. in Math.*Ulrich Oberst。范畴的同调与直接极限的正合性。[，107:87–115，1968。20] Pat *From categories to homotopy theory*Irakli Patchkoria。模谱的代数分类。[，12(4):2329– 2388，2012。14] Qui *Categorical homotopy theory*Daniel Quillen。群的非平凡

New Mathematical Monographs-子群偏序集的同伦性质。[，28 2 101( ): –128，1978。 08] Ric *K*Birgit Richter。 *Homology Homotopy Appl.*，第 188 卷。剑桥：剑桥大学出版社，2020。[Rie06] Emily Riehl。，卷 24。剑桥大学出版社，剑桥，2014。RoiConstanze Roitzheim。-局部谱的代数分类。，10 1 389( ): –412，2008。 ShuMichael Shulman。同伦极限与余极限以及富化同伦论。arXiv:0610194 2006。

（N. Nikandros） University of Kent, School of Mathematics, Statistics and Actuarial Science, Sibsonbuilding, Canterbury, CT2 7FS, UK*Email address*: nnikandros@gmail.com

（C. Roitzheim） University of Kent, School of Mathematics, Statistics and Actuarial Science, Sibsonbuilding, Canterbury, CT2 7FS, UK*Email address*: c.roitzheim@kent.ac.uk