arXiv:2301.09440v1 [cs.CG] 23 Jan 2023

将平面图拆分为外平面图*

Martin Gronemann, Martin N¨ollenburg 和 Ana¨ıs Villedieu

维也纳工业大学算法与复杂性组，奥地利维也纳{mgronemann | noellenburg | avilledieu}@ac.tuwien.ac.at

摘要。 顶点分裂是将一个顶点替换为两个副本，并将其关联边分配给这两个副本。作为一种图编辑操作，人们研究了如何以尽可能少的分裂次数实现所需性质，其中最常见的目标是平面性；对于这一目标，该问题是 NP 难的。本文研究如何以最少的分裂次数将平面图变为外平面图。我们通过建立平面图分裂为外平面图、寻找连通面覆盖以及在其对偶图中寻找反馈顶点集三者之间的直接联系，来解决这一问题。我们证明，对于平面双连通图，该问题是 NP 完全的；同时，我们证明极大平面图存在多项式时间算法。最后，我们为某些极大平面图族给出上界和下界。

关键词： 顶点分裂 · 外平面性 · 反馈顶 集。

1 引言

图编辑问题是图论中的基本问题。它们定义了一组对图 G 执行的基本操作，并要求找出将 G 转化为目标图类 $\mathcal{G}$ [24,29,34,42] 中的图所需的最少操作次数。例如，在簇编辑问题 [38] 中，操作是插入或删除单条边，目标图类是簇图，即顶点不相交的团的并集。在图绘制领域，一个特别有趣的图类是平面图，已有研究探讨了若干相关的图编辑问题，例如，需要删除多少个顶点才能将任意图转化为平面图 [32] ，或者需要进行多少次顶点分裂才能得到一个平面图 [16,23]。本文关注的是后一种操作：顶点分裂。顶点分裂会将一个顶点 v 复制为两个副本，将它的边分配给这两个副本，然后从 G 中删除 v 。

此外，我们将图编辑问题转化为更具几何性或拓扑性的图绘制编辑问题。这意味着，我们不是对抽象图的顶点应用分裂操作，而是对平面图绘制的顶点应用分裂操作，或者更一般地说，对平面嵌入图（或平面图）的顶点应用分裂操作。在平面图中，每个顶点的关联边都有一个由其确定的循环次序；任何顶点分裂都必须遵循该次序，也就是说，我们必须将其

*Ana¨ıs Villedieu 获得奥地利科学基金会（FWF）资助，项目编号为 P31119。



(a) (b)

图 1：(a) 一个 Outerplane Splitting Number 实例，其中彩色顶点将被分裂；(b) 经过最少 3 次分裂后得到的外平面图。

循环次序分成两个连续区间，分别对应两个副本。从另一个角度来看，作为这两个边区间分隔界的两个面，实际上会因顶点分裂而合并为一个面。

最后，我们将外平面图作为目标图类。因此，我们希望对一个平面图 G应用最少次数的顶点分裂，以合并尽可能少的面，从而得到一个外平面嵌入图 G'，其中所有顶点都与同一个面相邻，该面称为外部面。我们将这一最小分裂次数记为外平面分裂数osn(G)，对应于 G （见图 1）。外平面图是图绘制中的一个重要图类（例如，参见 $[7, 17, 27, 28]$），在更广泛的图论和图算法领域中也同样如此（例如，参见 $[10, 18, 31]$）。例如，外平面图允许采用平面圆形布局或单页书嵌入 [5]。此外，外平面图常常作为平面图的一个更简单的子类，具有良好的算法性质。例如，它们的树宽为 2，而推广得到的 k-外平面图仍具有有界树宽 $[6, 9]$, ，因此，对于这类有界树宽图上可处理的 NP 完全问题，可以设计多项式时间算法。进而，可以据此为这些问题在平面图上构造多项式时间近似方案 [4]。

现在我们可以定义如下的主要计算问题。

问题 *1*（Outerplane Splitting Number）。给定一个平面双连通图 $G = (V, E)$和一个整数 k，我们能否通过对 G 至多进行 k 次顶点分裂，将 G 转换为外平面图 G'？

贡献。 本文提出上述问题 Outerplane Splitting Number. We start by showing ，这是我们后续结果的关键性质：将平面双连通图 G 转化为外平面图所需的（最少）顶点分裂集，对应于 G 中的（最小）连通面覆盖（第 2 节）；而后者又等价于 G的对偶图中的（最小）反馈顶点集。利用这一工具，我们证明，对于一般的平面双连通图，
Outerplane Splitting Number是 NP 完全的（第 3 节）；而对于极大平面图，则可在多项式时间内求解

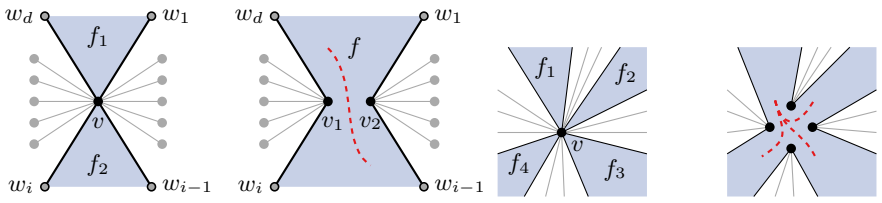


图2：(a) 两个相邻的面 f_1，f_2 在其边界上共有一个顶点 v。(b) 对 v 相对于 f_1，f_2 进行分裂后的结果，将它们合并为一个新面 f。(c-d) 将覆盖单个顶点 v 的4个面 f_1，……，f_4 合并，共进行3次分裂。

（第 4 节）。最后，我们给出极大平面图的外平面分裂数的上界和下界（第 5 节）。

相关工作。 </style}分裂数的研究大多针对抽象（非平面）图，旨在将其转化为平面图。一般情况下，该 PlanarSplitting Number 问题是NP完全的 [16], ，但完全图和完全二部图 [21, 23], 以及四维超立方体 [15]的精确分裂数已为人所知。对于一般二部图的双层绘图，该问题仍然是NP完全的，但以拆分顶点数为参数时属于固定参数可解 [2] 。这一问题也针对环面 [19]和射影平面 [20]等其他曲面进行了研究。另一个相关概念是图的拆分厚度 G （或其折叠覆盖数 [26]），即满足以下条件的最小值 k ：通过对每个顶点至多进行 k 次分裂，可以将 G 转化为平面图。判定图的拆分厚度是否为2是NP难的，但对于树宽有界的图，存在常数因子近似算法和固定参数算法 [14]。近期，研究者探讨了嵌入拆分数问题的复杂性，即将非平面图绘制转化为平面图绘制 [35]。除了对分裂数和平面性的理论研究外，图绘制领域也有应用研究，利用顶点分裂来消除边交叉 [41] ，或改善社区探索的布局质量 [3, 22]。

关于通过顶点分裂来实现平面性以外的图性质，Trotter 和 Harary [39]研究了通过顶点分裂将图转化为区间图。Paik等人 [36] 考虑了通过顶点分裂来消除有向无环图中的长路径，而 Abu-Khzam等人 [1] 则研究了在聚类编辑问题中使用顶点分裂的启发式方法。

预备知识。 我们方法的核心概念是：将给定平面图 $G = (V, E)$ 中的一组面合并为一个大面，该图的顶点集为 $V = V(G)$，边集为 $E = E(G)$，而这个大面与 G 的所有顶点都关联。因此，所得图是外平面图。其思路是，如果两个面 f_1 和 f_2 在边界上共享一个顶点 v （我们称 f_1 和 f_2 相接，见图2a），那么我们可以将 v 分裂为两个新顶点 v_1，v_2。这样，我们便能形成一道狭窄的间隙，从而合并

f_1、f_2 为一个更大的面 f（见图2b）。基于这一思路，我们形式化地定义相对于两个关联面 f_1 和 f_2对顶点 v 进行的保嵌入分裂。我们构造一个新的平面图 $G' = (V', E')$，其中 $V' = V \setminus \{v\} \cup \{v_1, v_2\}$。考虑 v 的两个邻点，它们都与 f_1 关联，并令 w_1 为顺时针次序中的第二个邻点。类似地，令 w_i 为与 f_2关联且邻接于 v 的第二个顶点。我们将循环次序中位于邻点 w_1 之前的顶点称为 w_d，其中 v的度为 d，见图2a。注意，虽然 $w_1 = w_{i-1}$和 $w_i = w_d$ 是可能的，但 $w_d \neq w_1$ 和 $w_{i-1} \neq w_i$则不可能。对于边集，我们现在令 $E' = E \setminus \{(v, w_1) \dots, (v, w_d)\} \cup \{(v_2, w_1) \dots, (v_2, w_{i-1})\} \cup \{(v_1, w_i) \dots, (v_1, w_d)\}$，并假设它们继承自 G 的嵌入。从现在起，我们将这一操作简称为分裂；如果 f_1、f_2 的含义由上下文可知，也可以称为在 v 处分裂以合并两个面。取代 v 而引入的顶点 v_1、v_2 称为 v 的副本。如果顶点 v 的一个副本 v_i 再次被分裂，那么 v_i 的任意副本也称为原始顶点 v的副本。

现在，我们可以重新表述如何尽可能减少分裂次数这一任务。我们的目标是找到一组面 S，满足两个条件。(1) G 中的每个顶点都必须位于至少一个面 $f \in S$的边界上，也就是说，S覆盖 V中的所有顶点。[1] 以及 (2) 对于任意两个面 f、$f' \in S$，都存在一组面 $\{f_1, \dots, f_k\} \subseteq S$，使得 $f = f_1$、.....、$f_k = f'$，并且 f_i 与 f_{i+1} 相接触，$1 \leq i < k$。换言之，S 在面接触关系下是连通的。现在，我们介绍构造中的主要工具，用以形式化这一概念。

2 面-顶点关联图

设 $G = (V, E)$ 是一个平面双连通图，F 是其面集。面-顶点关联图定义为 $H = (V \cup F, E_H)$，并包含边$E_H = \{(v, f) \in V \times F : v$位于 $f\}$的边界上。图 H按构造是二部图；我们将每个顶点 $f \in F$ 放入其对应的面 G中，并假设它是平面图。

定义 1. 设 G 为一个平面双连通图，F 为G的面集，H 为其面-顶点关联图。G 的面覆盖 是一个面集 $S \subseteq F$，使得每个顶点 $v \in V$ 都与 S中的至少一个面关联。如果 G 的面覆盖 S 在 H 中所对应的$S \cup V$ 的导出子图 $H[S \cup V]$ 是连通的，则称其为连通 面覆盖。

我们指出，寻找连通面覆盖的问题并不等同于连通面击中集问题 [37], ；后者计算的是一个与每个面都关联的连通顶点集。接下来，我们给出两个引理，它们涉及在同一顶点处合并多个面（图2c）。

引理 1. 设 G 为一个平面双连通图，$S \subseteq F$ 是 G 的面集F的一个子集，且这些面在其边界上都包含顶点 $v \in V$。那么，只需 $|S| - 1$ 次分裂，就足以将 S 中的这些面合并为一个面。

[1] 检验是否存在这样的 S $|S| \leq k$ Face，是一个 NP 完全问题。 Cover [8]

证明。令 f_1，……，f_k 为 S 的面，它们按照环绕 v （任意选取的 f_1 ）时出现的顺时针次序排列，并满足 $k = |S|$。我们迭代地将 f_1 与 f_i 合并，其中 $2 \leq i \leq k$，总共需要 $|S| - 1$ 次分裂（见图2c和图2d）。□

引理 2. 设 G 是平面双连通图， S 是 G 的连通面覆盖。那么， $|S| - 1$ 次分裂足以将 S 的面合并为一个。

证明。 设 $H' = H[S \cup V]$ ，并在 H' 中计算一棵生成树 T。对于每个顶点 $v \in V$（T） $\cap V$（G），我们应用引理 1，并使用面集 F'（v） $= \{f \in S \cap V$（T） $|$ (v, f) $\in E$（T）$\}$。我们以任意面 $f' \in S$ 为树根，从而为 T 中的顶点和面建立层级关系。根据引理 $1\ |F'|$，每个顶点 $v \in V$（T）$\cap V$（G）都需要 $| - 1$ 次分裂。注意， T 中所有叶顶点$|F'$（v）$| = 1$，也就是说，它们不会被分裂。每次分裂都计入 T 中 v 的子节点。由于 H 是二部图， T 也如此。因此，每个面 $f \in S \setminus \{f'\}$ 恰好由其父节点计入一次，所以 $|S| - 1$ 次分裂就足够了。□

引理 3. 设 G 是平面双连通图， σ 是一系列顶点分裂，使其成为外平面图。那么 G 有一个大小为 $k + 1$ 的连通面覆盖。

证明。 根据定义，将 σ 应用于 G 会生成一个与 V（G）中所有顶点都关联的单一大面：通过迭代合并原始面中的成对面来定义集合 $S \subseteq F$。显然， S 是 G 的一个面覆盖；而且，由于顶点分裂和面合并的结果是生成单一面，集合 S 也必定连通。□

由引理 2 和引理 3 可得， Outerplane Split-ting Number 与计算最小连通面覆盖是等价的。

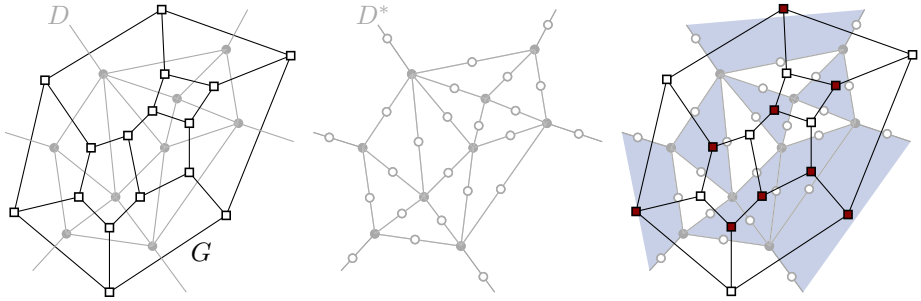
定理 1. 设 G 是平面双连通图。当且仅当 G 有一个大小为 $k + 1$ 的连通面覆盖时，其外平面分裂数为 k 。

3 NP 完全性

本节将证明，寻找大小为 k 的连通面覆盖（因此 Outerplane Splitting Number）是 NP完全的。思路是取一个双连通平面图 Vertex Cover 实例的对偶图，并将每条边细分一次（我们称之为全 *1*-细分）。注意，图 G的全 1-细分对应于其顶点-边关联图，而 G 的对偶图的全 1-细分对应于 G的面-边关联图。连通面覆盖因此对应于原图中的顶点覆盖，反之亦然。以下性质大大简化了关于定义1的论证。

性质1。 设 G' 是双连通平面图 G 的全 *1*-细分，S 是覆盖 V（G'）的一组面。那么 S 是 G'的连通面覆盖。

证明。 令 H 为 G 的对偶图的全 1-细分，并反设导出子图 $H' = H[S \cup V(G)]$ 不连通。于是存在一条边 $(u,\ v) \in E(G)$，使得 u 和 v 位于 H' 的不同连通分量中。令 w 为 G' 中 $(u,\ v)$ 的细分顶点。作为一个细分



(a) 原图（黑色）和对偶图（灰色）　(b) 对偶图的细分对偶图　(c) 顶点覆盖（红色），位于原图

图 3：原图 G、其顶点覆盖、对偶图 D 及其细分 D^*之间的联系。

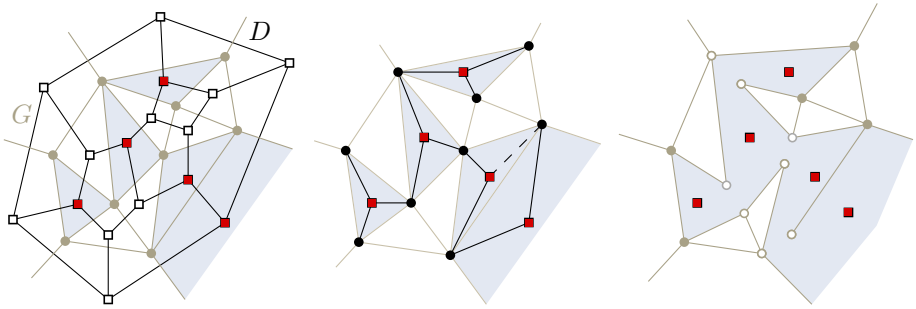
顶点，w 仅与两个面关联，其中一个面（记作 f）必定包含在 S 中。但 f 也与 u 和 v 关联，因此 u 和 v 通过面 f 位于 H' 的同一连通分量中，矛盾。因此 H' 连通，且 S 是 G' 的一个连通面覆盖。□

下一个定理的证明与 Bienstock 和 Monma 将 Face Cover [8]证明为 NP 完全问题的归约非常相似；由于问题定义存在差异，例如面覆盖的连通性要求，以及输入图是否为平面图，我们为完整起见给出完整的归约过程。

定理 2。判定一个平面双连通图 G 是否存在大小至多为 k 的连通面覆盖，是 NP完全问题。

证明。显然，该问题属于 NP。为证明其困难性，我们先引入一些记号。设 G 为一个平面双连通图，D 为其对应的对偶图。此外，设 D^* 为 D的全 1-细分。现在我们证明，在 D^* 中，大小为 k 的连通面覆盖 S^* 与 G 中大小为 k 的顶点覆盖 S 一一对应（见图 3）。具体而言，我们证明：在 D^*中构成连通面覆盖的 S^* 各面的对偶顶点，是 G 的一个顶点覆盖，反之亦然。该归约来自双连通平面图中的 NP 完全 VertexCover 问题，其中所有顶点的度均为 3（三次图） [33]。

Connected Face Cover ⇒ Vertex Cover：</style}令 G为这样一个双连通平面 Vertex Cover 实例。假设我们有一个连通面覆盖 S^*，且 $|S^*| = k$ 适用于 D^*。注意，D^* 的面对应于 G中的顶点。我们声称，将面 S^*映射到对应的顶点 $S \subseteq V(G)$ 后，它们构成 G的一个顶点覆盖。反过来假设，也就是说，存在一条边 $e^* \in E(G)$，其端点均不在 S中。然而，e^* 有一条对偶图边



（a）原图（灰色）和对偶图（黑色）　（b）连通面覆盖的生成树（黑色）连通面覆盖　（c）外平面图，经过沿着树分裂

图4：连通面覆盖（蓝色）是对偶图中的反馈顶点集（红色）。

$e \in E(D)$，因此也有一个细分顶点 $v_e \in V(D^*)$。因此，根据连通面覆盖的定义，存在一个面$f \in S^*$，其边界上有 v_e。映射到 D后，f 的边界上有 e，这意味着原图边e^* 至少有一个端点位于 S^*中；矛盾。

Vertex Cover ⇒ Connected Face Cover：为了证明顶点覆盖S 在 D^* 中导出连通面覆盖 S^*，我们必须证明 S^* 覆盖了所有顶点，且面-顶点关联图 H 中的导出子图是连通的。我们沿用反方向证明中的方法。S 覆盖了 $E(G)$ 中的所有边，因此每条边 $e \in E(D)$ 都至少由 S^*中的一个面界定。因此，$V(D^*)$ 中的每个细分顶点都被 S^*中的一个面覆盖。此外，D^* 中的每个顶点都与一个细分顶点相邻，因此也被 S^*中的一个面覆盖。由于S^* 覆盖了所有顶点，根据性质1可知，S^* 是一个连通面覆盖。□

4 反馈顶点集方法

图 G 的反馈顶点集 $S^\circ \subset V(G)$是一个顶点子集，使得其导出子图 $G[V(G) \setminus S^\circ]$ 无环。这里我们证明，对于平面双连通图 G，求大小为 k 的连通面覆盖 S，等价于在 G的对偶图 D 中求大小为 k 的反馈顶点集 $S^\circ \subset V(D)$。外平面图的弱对偶图（即去掉外部面对应顶点后的对偶图）是一片森林。因此，我们必须在 G中找到最少数量的分裂，使其将D 转变为森林。换言之，我们必须打断 D 中的所有环，因此 D 的反馈顶点集 S° 中的所有顶点，都对应于 G 中应合并在一起的面（见图4）。

性质 2. 设 H 为平面双连通图 G 的面-顶点关联图，S° 为 G的对偶图 D 中的一个反馈顶点集。那么，S° 在 G中诱导出一个连通面覆盖 S。

证明。我们需要证明 S° 是一个面覆盖，且它是连通的。首先，假设存在一个度数 $\deg(v) = d$ 的顶点 $v \in V(G)$，它不与 S°中的顶点关联，也就是说，它不与 G的面关联。由于 G 是双连通的，v 与 d 个面 $f_1, \ldots\ldots, f_d$关联，而这些面都不包含在 S° 中。但这样一来，$D[V(D) \setminus S^\circ]$ 便含有一个环（$f_1, \ldots\ldots, f_d$），矛盾。

接下来，我们将 $\overline{S^\circ} = V(D) \setminus S^\circ$ 定义为 D 中反馈顶点集S° 的补集。假设 $H[V \cup S^\circ]$ 至少有两个彼此分离的连通分量C_1，C_2。那么，平面上必定存在一条闭曲线，将 C_1 与 C_2 分隔开；这条曲线避开 S° 中的面，转而经过 S° 中一列面 $(f_1, \ldots\ldots, f_\ell)$，其中每一对 (f_i, f_{i+1})（$i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$）以及 (f_ℓ, f_1) 都在对偶图 D 中相邻。这再次意味着 $D[V(D) \setminus S^\circ]$ 中存在一个环，矛盾。因此，S° 是一个连通面覆盖。□

定理 3。平面双连通图 G 的外平面分裂数为 k，当且仅当其对偶图 D 有一个大小为 $k + 1$的最小反馈顶点集。

证明。设 S° 是图 G 的对偶图 D 的一个最小反馈顶点集，其基数为 $|S^\circ| = k + 1$；设 H 是 G的面-顶点关联图。由性质 2 可知，$H' = H[V(G) \cup S^\circ]$ 是连通的，因此 S° 诱导出一个连通面覆盖 S，且 $|S| = k + 1$。于是根据引理，2 G 的 $\mathrm{osn}(G) \leq k$。

反过来，设 σ 是一个顶点分裂序列，它将 G 变为外平面图 G'，且 F 是 G 的面集。根据引理 3，我们得到一个大小为 $k + 1$ 的连通面覆盖 S，它由所有经σ 合并的面组成。补集 $S = F \setminus S$ 由 G 中未被 σ 中的分裂合并的所有面组成，因此这些面是外平面图G'的剩余（内部）面。由于 G' 是外平面且双连通的，S 是 G' 的弱对偶图的顶点集，而该弱对偶图必为一棵树。因此，S 是 D 中的一个反馈顶点集，大小为 $k + 1$，且 D 中的最小反馈顶点集大小至多为 $k + 1$。□

由于极大平面图的所有面都是三角形，其对偶图的最大顶点度为 3。因此，我们可以将 Ueno 等人 [40]的多项式时间算法应用于该对偶图。该算法通过将问题实例归约为可在多项式时间内求解的拟阵奇偶问题实例，计算最大度为 3 的图的最小反馈顶点集，从而得到

推论 1. 我们可以在多项式时间内求解极大平面图的 Outerplane Splitting Number 。

许多关于反馈顶点集的其他已有结果也适用于 OuterplaneSplitting Number，例如，它有一个大小为 $13k$ [11] 的核，并且存在一个多项式时间近似方案（PTAS） [13]。

5 下界与上界

本节给出某些极大平面图的外平面分裂数的上界和下界。

5.1 上界

根据定理 3 的等价性，我们可以利用反馈顶点集问题的适当上界，得到外平面分裂数的上界。反馈顶点集问题已在许多图类中得到研究，其中包括三次图 [12]。Liu 和 Zhao [30] 证明，围长至少为四（分别为三）的三次图 $G=(V,\ E)$ 的最小反馈顶点集大小至多为 $\frac{|V|}{3}$（分别为 $\frac{3|V|}{8}$）。Kelly 和 Liu [25] 证明，围长至少为五的连通平面次三正则图的最小反馈顶点集大小至多为 $\frac{2|V|+2}{7}$。回顾一下，图的围长是其最短环的长度。

命题 1. 最小度分别为 *(i) 3*、*(ii) 4* 和 *(iii) 5* 的极大平面图$G=(V,E)$ 的外平面分裂数分别至多为 *(i)* $\frac{3|V|-10}{4}$、*(ii)* $\frac{2|V|-7}{3}$ 和 *(iii)* $\frac{4|V|-13}{7}$。

证明. 含有 $n=|V|$ 个顶点的极大平面图有 $2n-4$ 个面。因此，相应的对偶图有 $2n-4$ 个顶点。此外，由于 G 中顶点的度对应于对偶图中面圈的长度，最小顶点度为 3、4 或 5 的图，其对偶图的围长分别为 3、4 或 5。因此，如果 G 中的最小度为 3，我们得到反馈顶点集的上界 $(3n-6)/4$；如果最小度为 4，上界为 $(2n-4)/3$；如果最小度为 5，上界为 $(4n-6)/7$。由此，结论可由定理 3 得出。□

5.2 下界

我们首先给出极大平面图的外平面分裂数的一个通用下界。设 G 是一个有 n 个顶点、 $2n-4$ 个面的极大平面图。每个面都是与三个顶点相邻的三角形。在最小规模的连通面覆盖 S^* 中，第一个面覆盖三个顶点。由于连通性要求，其余每个面至多能新增覆盖两个顶点。因此，任何连通面覆盖都至少需要 $\frac{n-1}{2}$ 个面。由定理 1 可知，这意味着 osn(G)$\geq \frac{n-3}{2}$。

命题 2. 任意极大平面图 G 的外平面分裂数至少为 $\frac{|V_{(G)_2}|-3}{}$。

接下来，为了得到更好的下界，我们定义一族围长为 3 的极大平面图 $T_d=(V_d,E_d)$，其中 $d\geq 0$ 的外平面分裂数至少为 $\frac{2|V_d|-8}{3}$。这族图是深度为 d 的完全平面 3- 树，其递归定义如下。图 T_0 是 4- 团 K_4。对于 $d\geq 1$，要从 T_{d-1} 得到 T_d，我们将 T_{d-1} 的每个内部三角面细分为三个三角形：插入一个新顶点，并将它与该面的边界上的三个顶点相连。

命题 3. 深度为 d 的完整平面 *3*-树 T_d 的外平面分裂数至少为 $\frac{2|V_d|-8}{3}$。

证明。 每个 T_d 都是一个有 $n_d = 3 + \sum_{i=0}^{d} 3^i = \frac{3^{d+1}+5}{2}$ 个顶点的极大平面图。构造的最后一步中，加入到 T_{d-1} 的三角面中的所有 3^d 个叶层顶点的度均为 3，且各自关联三个互不重叠的面；也就是说，不存在一个面覆盖多个这类叶层顶点。这立即意味着， T_d 的任意面覆盖（无论是否连通）大小都至少为 3^d。由 $n_d = \frac{3^{d+1}+5}{2}$ 可得 $d = \log_3 \frac{2n_d-5}{3}$ 和 $3^d = \frac{2n_d-5}{3}$。因此，定理 1 推出 $\mathrm{osn}(T_d) \geq \frac{2n_d-8}{3}$。□

6 开放问题

我们提出了 Outerplane Splitting Number 问题，并确定了其在平面双连通图上的复杂度。最重要的开放问题围绕着嵌入要求展开。分裂操作可以采用更宽松的定义，允许拆分顶点采用任意新的嵌入和邻域。一般而言，也值得了解当输入图完全没有嵌入时，这一问题会有何不同；原始的分裂数问题便是如此。由于 Outerplane Splitting Number 在极大平面图上可在多项式时间内求解，但在平面双连通图上却是困难的，因此，当涉及度大于三的面时，仍有一个复杂度差距有待弥合。迄今为止，图绘制中的顶点分裂研究主要着眼于实现平面性和外平面性。一个自然的拓展方向是研究其在其他图类或图属性上的应用。

参考文献

1. Abu-Khzam, F.N., Barr, J.R., Fakhereldine, A., Shaw, P.：一种用于带顶点分裂的簇编辑的贪心启发式算法。载于：第4届工业人工智能国际会议（AI4I）论文集。第38–41页。IEEE（2021）。https://doi.org/10 00017 2 1109 4 51902 2021 . /AI I . . . Ahmed, R., Kobourov, S.G., Kryven, M.：一种用于二分图顶点分裂的固定参数可 tractable 算法。载于：Angelini, P., von Hanxleden, R.（编）第30届图绘制与网络可视化国际研讨会（GD'22）论文集。LNCS，施普林格（2022 12898 3 10 48550 2208）。https://doi.org/ . /arXiv. . . Angori, L., Didimo, W., Montecchiani, F., Pagliuca, D., Tappini, A.：利用 chordlink 的混合图可视化：算法、实验与应用。IEEE可视化与计算机图形学汇刊**28**(2)，1288–1300（2022）。https://doi.org/10 3016055 4 1109 2020 . /TVCG. . . Baker, B.S.：平面图上NP完全问题的近似算法。J. ACM **41**174650 5 1 153 180 1994 10 1145 174644（），–（）。https://doi.org/ . / . . Bernhart, F., Kainen, P.C.：图的书厚度。J. Comb. Theory, Ser. B **27**2 6 3 320 331 1979 10 1016 0095 8956 79 90021（），–（）。https://doi.org/ . / - ( ) - . Biedl, T.：关于k-外平面图的三角剖分。Discret. Appl. Math. **181**，275–279 017 7 2015 10 1016 2014 10（）。https://doi.org/ . /j.dam. . . . Biedl, T.C.：外平面图、串并联图及其他平面图的小型绘图。Discret. Comput. Geom. **45**(1)，141–160（2011）。https://doi.org/10.1007/s00454-010-9310-z

8. Bienstock, D., Monma, C.L.：关于在平面图中用面覆盖顶点的复杂度。SIAM J. Comput. **17**(1)，53–76（1988）。https://doi.org/ 10 1137 0217004 . / . Bodlaender, H.L.：有界树宽图的部分树状谱系。^{9}Theor. Comput. Sci. **209**(1-2)，^{k}1–45（1998）。https://doi.org/10.1016/S0304- 3975 4 10 97 00228( ) - . Bodlaender, H.L., Fomin, F.V.：外平面图路径宽的近似。J. Algorithms **43**(2)，190–200（2002）。https://doi.org/10.1016/S0196- 6774 9 11 02 00001( ) - . Bonamy, M., Kowalik, L.：通过区域分解求解平面反馈顶点集问题的13k-核。Theor. Comput. Sci. **645**，25–40（2016）。https://doi.org/10 031 12 1016 2016 05 . /j.tcs. . . . Bondy, J.A., Hopkins, G., Staton, W.：三次图中诱导森林的下界。Can. Math. Bull. **30**(2)，193–199（1987）。https://doi.org/10.4153/CMB- 1987-028-5 13. Demaine, E., Hajiaghayi, M.：双维性：固定参数可解算法与多项式时间近似方案之间的新联系。载于：第37届ACM计算理论年度研讨会（STOC）论文集。第590 1070514 14 601 01 2005 10 1145 1070432页–（）。https://doi.org/ . / . . Eppstein, D., Kindermann, P., Kobourov, S.G., Liotta, G., Lubiw, A., Maignan, A., Mondal, D., Vosoughpour, H., Whitesides, S., Wismath, S.K.：关于图的平面分裂厚度。Algorithmica **80**(3)，977–994（2018）。https://doi.org/10.1007/s00453-017-0328-y 15. Faria, L., de Figueiredo, C.M.H., de Mendonˆca N., C.F.X.：四维超立方体的分裂数。载于：Lucchesi, C.L., Moura, A.V.（编）第3届拉丁美洲理论信息学研讨会（LATIN）论文集。LNCS，第1380卷，第141–150页。施普林格（1998 0054317 16 10 1007）。https://doi.org/ . /BFb . Faria, L., de Figueiredo, C.M.H., de Mendonˆca N., C.F.X.：分裂数是NP完全的。Discret. Appl. Math. **108**(1)，65–83（2001）。https://doi.org/10 1 17 1016 0166 218 00 00220 . /S - X( ) - . Frati, F.：在线性时间内绘制外平面图的平面直线图。Computat. Geom. **103**，101854 101854 18 2022 10 1016 2021（）。https://doi.org/ . /j.comgeo. . . Frederickson, G.N.：在区间和紧凑路由表中搜索。Algorithmica **1**501955044 19 5 448 466 1996 10 1007（），–（）。https://doi.org/ . /BF . Hartsfield, N.：完全图kn的环面分裂数。Discret. Math. **62**7 20 1 35 47 1986 10 1016 0012 365 86 90039（），–（）。https://doi.org/ . / - X( ) - . Hartsfield, N.：射影平面中完全图的分裂数。Graphs Comb. **3**01788557 21 1 349 356 1987 10 1007（），–（）。https://doi.org/ . /BF . Hartsfield, N., Jackson, B., Ringel, G.：完全图的分裂数。Graphs Comb. **1**02582960 22 1 311 329 1985 10 1007（），–（）。https://doi.org/ . /BF . Henry, N., Bezerianos, A., Fekete, J.：使用节点复制提高聚类社交网络的可读性。IEEE可视化与计算机图形学汇刊**14**(6)，1317–1324 141 23 2008 10 1109 2008（）。https://doi.org/ . /TVCG. . . Jackson, B., Ringel, G.：完全二部图的分裂数。Arch. Math. **42**01772941 24 2 178 184 1984 10 1007**21**1（），–（）。https://doi.org/ . /BF . Kant, G.：增广外平面图。J. Algorithms（），1–25（1996）。https://doi.org/10 0034 25 1006 1996 . /jagm. . . Kelly, T., Liu, C.：围长至少为五的平面图的最小反馈顶点集规模。Eur. J. Comb. **61**，138–150（2017）。https://doi.org/10 009 26 1016 2016 10 . /j.ejc. . . . Knauer, K.B., Ueckerdt, T.：覆盖图的三种方式。Discret. Math. **339**(2)，745–758（2016）。https://doi.org/10.1016/j.disc.2015.10.023

27. Lazard, S., Lenhart, W.J., Liotta, G.：外平面图的边长比。Theor. Comput. Sci. **770**, 88–94 (2019)。https://doi.org/10 002 28 1016 2018 10 . /j.tcs. . . . Lenhart, W., Liotta, G.：外平面图的邻近绘制。载于：North, S.C.（编）《第4届国际图绘制研讨会（GD）论文集》。LNCS，第1190卷，3 55 29 286 302 1996 10 1007 3 540 62495 页–。施普林格（）。https://doi.org/ . / - - - . Lewis, J.M., Yannakakis, M.：遗传性质的节点删除问题是NP完全的。J. Comput. Syst. Sci. **20**(2), 219–230 (1980)。https://doi.org/10 4 30 1016 0022 0000 80 90060 . / - ( ) - . Liu, J., Zhao, C.：三次图中反馈顶点集的新界。Discret. Math. **148**(1-3), 119–131 (1996)。https://doi.org/10.1016/0012-365X(94)00268-N 31. Maheshwari, A., Zeh, N.：外平面图的外存算法。载于：Aggarwal, A., Rangan, C.P.（编）《第10届国际算法与计算研讨会（ISAAC）论文集》。LNCS，第1741卷，第307–316页。施普林格（1999 0 31 32 10 1007 3 540 46632）。https://doi.org/ . / - - - . Marx, D., Schlotter, I.：通过顶点删除得到平面图。Algorithmica **62**(3-4), 807–822 (2012)。https://doi.org/10.1007/s00453-010-9484-z 33. Mohar, B.：顶点图的面覆盖与亏格问题。J. Comb. Theory, Ser. B **82**2026 34 1 102 117 2001 10 1006 2000 ( ), – ( )。https://doi.org/ . /jctb. . . Natanzon, A., Shamir, R., Sharan, R.：一些边修改问题的复杂性分类。Discret. Appl. Math. **113**(1), 109–128 (2001)。https://doi.org/ 10 1016 0166 218 00 00391 7 . /S - X( ) - . Nollenburg, M., Sorge, 35 M., Terziadis, S., Villedieu, A., Wu, H., Wulms, J.：通过顶点分裂将图及其绘制平面化。载于：Angelini, P., von Hanxleden, R.（编）《第30届国际图绘制与网络可视化研讨会（GD’2212293 3620222202）论文集》。LNCS，施普林格（），https://arxiv.org/abs/ 。. Paik, D., Reddy, S.M., Sahni, S.：有向无环图中的顶点分裂及其在部分扫描设计和有损电路中的应用。Int. J. Found. Comput. Sci. **9**(4), 377–398 (1998)。https://doi.org/10 0129054198000301 37 1142. /S . Schweitzer, P., Schweitzer, P.：平面图中相连的面击中集。Inf. Process. Lett. **111**008 38 1 11 15 2010 10 1016 2010 10 ( ), – ( )。https://doi.org/ . /j.ipl. . . . Shamir, R., Sharan, R., Tsur, D.：簇图修改问题。Discret. Appl. Math. **144**007 39 1 2 173 182 2004 10 1016 2004 01 (-), – ( )。https://doi.org/ . /j.dam. . . . Trotter, W.T., Harary, F.：关于双重区间图和多重区间图。J. Graph Theory **3**3190030302 40 3 205 211 1979 10 1002 ( ), – ( )。https://doi.org/ . /jgt. . Ueno, S., Kajitani, Y., Gotoh, S.：关于顶点度不超过三的图的非分离独立集问题和反馈集问题。Discret. Math. **72** 1 3 355 360 1988 10 1016 0012 365 88 90226 9 (-), – 41 ( )。https://doi.org/ . / - X( ) - . Wu, H.Y., Nollenburg, M., Viola, I.：簇图的多层面积平衡。IEEE Trans. Vis. Comput. Graph. **28**(7), 2682–2696 (2022)。https://doi.org/10 3038154 42 1109 2020 . /TVCG. . . Yannakakis, M.：节点删除和边删除NP完全问题。载于：《第10届ACM年度计算理论研讨会（STOC）论文集》。第253–264页。ACM（1978）。https://doi.org/10.1145/800133.804355