arXiv:2301.09473v1 [math.PR] 23 Jan 2023

关于求和规则之间的一些桥梁

FABRICE GAMBOA、JAN NAGEL 和 ALAIN ROUAULT

Abstract. 我们介绍了由一些经典映射所诱导的对应关系，这些映射作用于区间上的测度与单位圆上的测度之间。更确切地说，我们建立了它们的正交多项式序列及其递推系数之间的联系。我们还推导出随机矩阵系综中若干特定平衡测度之间的一些对应关系。此外，我们表明，这些映射为若干经典模型相关的求和规则架起了桥梁，并由此得到若干求和规则的新表述。

1. Introduction

单位圆上的正交多项式（OPUC）与实线上的正交多项式（OPRL）之间的关系是一个由来已久的问题。将单位圆上的测度映射为实数轴上的测度时，与这些测度相关的正交多项式或其递推系数之间有何关系？这方面最早的结果可追溯到 Szeg˝o；他发现，当到实数轴的映射是通过 $z \mapsto z + z^{-1}$ 进行的推前时，正交多项式之间存在一种关系。这种映射如今称为 Szeg˝o 映射；有关其历史的介绍，见 [40], 第 880 页。递推系数之间的关系由 Geronimus 发现：令人惊讶的是，单位圆上的递推所对应的所谓 Verblunsky 系数 $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ 会出现在实数轴上 Jacobi 系数的一种分解中，由此形成了如今称为 Geronimus 关系的恒等式。此后，人们研究了各种映射，其动机来自正交多项式的应用 [5, 16] 、算子理论 [28, 20, 13] 或信号处理[17, 19, 9]。

让我们特别强调这类映射和关系对谱理论中称为求和规则的重要恒等式所具有的意义。求和规则是概率测度 μ （其支撑紧包含于 $\mathbb{R}$ ）（相应地，支撑于 $\mathbb{T}$ 的 ν ）的两个非负泛函之间的恒等式。一方面，第一个泛函是相对于某个参考测度的熵类泛函。另一方面，第二个泛函由 μ （相应地， ν）的 Jacobi 系数（相应地，Verblunsky 系数）构成，并且仅当测度为参考测度时才为零。我们将左端（LHS）称为谱侧，将右端（RHS）称为系数侧。

Date: 2023年1月24日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 42C05、47B36、15B52、34L05。*Key words and phrases.* 求和规则、Szeg˝o 映射、Verblunsky 系数、Delsarte-Genin 映射、Jacobi 系数、相对熵。

这类求和规则中最早的历史范例是经典的 Szeg˝o-Verblunsky 恒等式,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log g_\nu(\theta)d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\log(1-|\alpha_k|^2)\,, \tag{1.1}$$

其中， ν 是单位圆上的一个测度，其勒贝格分解为

$$d\nu(\theta)=g_\nu(\theta)\tfrac{d\theta}{2\pi}+d\nu_s(\theta)$$

其 Verblunsky 系数为（α_k）$_{k\geq 0}$。当且仅当 ν是圆上的均匀测度（在此情形下即为参考测度）时，(1.1) 两边均为零。关于这条求和规则的起源，参见 [40] 第 1 章。

实数轴上测度最著名的求和规则是 Killip-Simon 求和规则 [32]。关于这条求和规则的全面讨论和历史，可参见 [40] 一书第 1.10 节；该书第 3 章则给出了深入的解析证明。这条求和规则的参考测度是半圆律（SC）。

这两条求和规则的一个重要推论是：两个条件等价，且它们分别刻画两边有限的情形；一个条件以 Verblunsky 系数或 Jacobi 系数表述，另一个则是谱条件。用 Simon [40],的话说，它们是谱理论中的瑰宝。在 [26] 和 [23], 中，我们从概率论的角度重新探讨了这些结果，并给出了基于大偏差的新证明。我们还提及 Breuer 等人 [10] 的研究，该研究向非概率论学者阐明了 [23], [26]。这一方法具有足够的普适性，能够证明新的求和规则，其参考测度包括实数轴上的 Marchenko-Pastur（MP）、Kesten-McKay（KMK），以及单位圆上的 Gross-Witten（GW）、Hua-Pickrell（HP）。

本文的主要贡献有两个方面。一方面，我们汇集了一系列关于单位圆上的测度与实数轴上的测度及其正交多项式之间关系的结果，涉及若干广为人知的映射：Szeg˝o、Delsarte-Genin（DG）、Derevyagin-Vinet-Zhedanov（DVZ）和 M¨obius。另一方面，我们展示了如何利用这些关系，从一个已有的求和规则中导出一个可能是新的求和规则。基本思路很简单：根据映射对等式两端进行变换。我们的第一项贡献纯属综述性质，而我们认为第二项贡献可能极具价值，既可用于寻找新的求和规则，也可用于凸显已有恒等式之间的联系，或“桥梁”。

作为这种桥梁的一个简单例子，Szeg˝o-Verblunsky 求和规则 (1.1) 在根据 Szeg˝o 映射变换两端后，导出一个关于 $[-2,2]$ 上测度的恒等式。左端可以写成关于反正弦律的积分，而 Geronimus 关系则使我们能够改写右端（见第 6.1 节）。为了概述更多结果（求和规则的陈述见第 3 节，映射的定义见第 4 节）：

- KMK求和规则的特例可通过Szeg˝o映射或DG 映射（第6.2节）从HP 求和规则得到。
- GW求和规则通过Szeg˝o映射推出了新的求和规则（6.7）和（6.13）。
- 在DG 映射下，GW求和规则导出了重述形式（6.19）和（6.18），并给出了定理6.1中右端的新公式。
- 在DVZ映射下，GW求和规则导出了Killip-Simon求和规则（6.22）的一种变体。
- 我们针对定理 6.2 中的泊松测度 Pois(ζ)证明了一个新的求和规则。

- 由 [6] 在命题 6.3 中的近期结果，我们得到了另一个新的泊松求和公式。
- 命题 8.1 给出了 HP 求和规则弱版本的一种新的解析证明。

本文的结构安排如下：第 2 节回顾实直线和单位圆上正交多项式的必要背景知识及相应的递推公式。第 3 节回顾主要的已知求和规则及其参考测度。第 4 节讨论本文中使用的映射。随后，第 5 节将这些映射应用于我们的参考测度。第 6 节介绍单位圆上的正交多项式求和规则与实直线上正交多项式求和规则之间的桥梁。第 7 节给出一些新求和规则的证明，第 8 节则给出一些辅助结果。

2. Orthogonal polynomials

令 $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$（分别为 $\mathcal{M}_1(\mathbb{T})$）表示 $\mathbb{R}$ 上（分别为单位圆 $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ 上）的所有概率测度的集合，其中 $\mathbb{D}$ 是开单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$。此外，我们用 $\mathcal{M}_{1,\ s}(\mathbb{T})$ 表示 $\mathbb{T}$ 上所有在变换 $z \mapsto \bar{z}$ 下保持不变的对称概率测度的集合。

2.1. 实直线上正交多项式。对于一个支撑由无穷多个点组成的概率测度 $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$，实直线上的正交多项式（OPRL）序列定义良好，这种情况也称为非平凡情形（与支撑由 n 个点组成的有限支撑情形，即平凡情形相对）。对序列 $1, x, x^2, \ldots$ 应用正交归一化的格拉姆–施密特正交化过程，即可得到这些多项式。所得多项式 $p_0, p_1, \ldots$ 中，p_k 的次数为 k，并满足递推关系

$$xp_k(x) = a_{k+1}p_{k+1}(x) + b_{k+1}p_k(x) + a_k p_{k-1}(x) \tag{2.1}$$

对于 $k \geq 0$，其中 $p_{-1} = 0$。递推系数，即 Jacobi 系数（简称"J-系数"），满足对所有 k，$b_k \in \mathbb{R}$ 且 $a_k > 0$。请注意，这里的正交多项式不是首一的，而是在 $L^2(\mu)$中归一化的。首一多项式满足递推关系

$$xP_k(x) = P_{k+1}(x) + b_{k+1}P_k(x) + a_k^2 P_{k-1}(x)\,. \tag{2.2}$$

当 μ 的支撑由 n 个点组成时，正交多项式可能定义到 $n-1$ 次，而 J 系数 b_1、a_1、... ...、a_{n-1}、b_n 均有定义。

对于非平凡测度 μ，令我们以基底 $(p_k)_{k\geq 0}$ 为向量空间 $L^2(\mu)$ 配备基底。那么线性映射 $f \mapsto xf$（即乘以单位元）由以下三对角矩阵表示

$$J_\mu = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

反过来，如果 H 是无限维希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的有界厄米算子，且 e 是一个循环向量，那么我们可以定义有序对 (H, e) 的谱测度μ，于是 $(\mathcal{H}, H, e)$ 与 (ℓ^2, J_μ, e_1) 同构，其中 $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)^t$。这种对应关系在 n 维空间上的厄米算子与支撑在 n 个点上的测度以及 $n \times n$ 阶三对角矩阵之间仍然成立。

如果 μ 的支撑包含于 $[0,\infty)$，则 J 系数可以分解为：

$$\begin{aligned} b_k &= z_{2k-2} + z_{2k-1}, \\ a_k^2 &= z_{2k-1} z_{2k}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中 $z_0 = 0$ 和 $z_k \geq 0$ 对应于 $k \geq 1$ （见 [15] 第47页）。 z_k 称为典范系数，它们由 J 系数唯一确定。

若 μ 非平凡且其支撑包含于区间 $[-2,2]$，则存在 J 系数的一种分解：

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= (1-u_{2k})u_{2k+1} - (1+u_{2k})u_{2k-1}, \\ a_{k+1}^2 &= (1-u_{2k})(1-u_{2k+1}^2)(1+u_{2k+2}), \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $u_0 = -1$ 和 $u_k \in (-1, 1)$ 对所有 $k \geq 1$均成立。 u_k 称为典范矩（尽管从更传统的意义上说，$_{1\,2}(u_k+1)$ 才称为典范矩[21]），它们由 J 系数唯一确定。若 μ 非平凡，则对所有 $k \geq 1$，$u_k \in (-1, 1)$；而若 μ 的支撑由 n 个点构成，我们仍可定义u_1、.....、$u_{2n-2} \in (-1, 1)$以及 $u_{2n-1} \in \{-1, 1\}$。注意，若 μ关于单位圆对称，则对所有 k， $u_{2k+1} = 0$，所有对角系数 b_k 均为零，并且

$$a_{k+1}^2 = (1-u_{2k})(1+u_{2k+2}) \ \ (k \geq 0)\,. \tag{2.6}$$

2.2. 单位圆上的正交多项式。对于支撑至少包含 $k+1$个点的概率测度 $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T})$，两个相邻首一多项式 Φ_{k+1} 和Φ_k之间的递推关系如下：其中 Φ_k 的次数为 k，且关于 ν正交；该关系涉及一个复数α_k，可写为

$$\Phi_{k+1}(z) = z\Phi_k(z) - \overline{\alpha}_k \Phi_k^*(z) \text{ where } \Phi_k^*(z) := z^k \overline{\Phi_k(1/\bar{z})}. \tag{2.7}$$

复数 $\alpha_k = -\Phi_{k+1}(0)$ $k \geq 0$ 称为Verblunsky 系数（简称 V 系数）。在其他语境中，它们也称为 Schur、Levinson、Szeg˝o 系数，或称为典范矩 [21]。我们还令 $\alpha_{-1} = -1$。当 $k \geq 1$且 ν 的支撑包含至少 $k+1$ 个点时，V 系数满足 $|\alpha_{k-1}| < 1$；当支撑恰好由 k 个点组成时，满足 $|\alpha_{k-1}| = 1$。对于对称测度$\nu \in \mathcal{M}_{1,\,s}(\mathbb{T})$，V 系数为实数。我们用$(\varphi_k)_{k\geq 0}$ 表示单位圆上的正交归一多项式（单位圆上的正交多项式）序列。

在由对 1、z、z^{-1}、z^2、z^{-2}、.....进行正交归一化得到的基 $(\chi_k)_{k\geq 0}$ 中， $L^2(\nu)$ 中的线性变换 $f \to zf$ 由所谓的 CMV矩阵表示

$$\mathcal{C}_\mu = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_0 & \bar{\alpha}_1\rho_0 & \rho_1\rho_0 & 0 & 0 & \dots \\ \rho_0 & -\bar{\alpha}_1\alpha_0 & -\rho_1\alpha_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \bar{\alpha}_2\rho_1 & -\bar{\alpha}_2\alpha_1 & \bar{\alpha}_3\rho_2 & \rho_3\rho_2 & \dots \\ 0 & \rho_2\rho_1 & -\rho_2\alpha_1 & -\bar{\alpha}_3\alpha_2 & -\rho_3\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_4\rho_3 & -\bar{\alpha}_4\alpha_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

在非平凡情形下，对每个 $k \geq 0$，都有 $\rho_k = \sqrt{1-|\alpha_k|^2}$。

反过来，如果 U 是作用在无限维希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 上的酉算子，且 e 是一个循环向量，那么我们可以定义这对 (U,e) 的谱测度 ν，于是 $(\mathcal{H},U,e)$ 与 $(\ell^2,\mathcal{C}_\nu,e_1)$ 同构。令

$$\Theta_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \rho_k \\ \rho_k & -\alpha_k \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

and

$$\mathcal{L} = \Theta_0 \oplus \Theta_2 \oplus \cdots, \qquad \mathcal{M} = \mathbf{1} \oplus \Theta_1 \oplus \Theta_3 \oplus \cdots, \tag{2.10}$$

其中，$\mathbf{1}$ 表示 1×1 单位矩阵，而 $\oplus$ 是直和算子。酉算子 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{M}$ 满足

$$\mathcal{C}_\nu = \mathcal{L}\mathcal{M}\,. \tag{2.11}$$

对于均定义在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{T}$上的概率测度 ν、μ，令 $\mathcal{K}(\nu|\mu)$表示 ν 相对于 μ的 Kullback–Leibler 散度或相对熵:

$$\mathcal{K}(\nu\,|\,\mu) = \begin{cases} \displaystyle\int \log\frac{d\nu}{d\mu}\,d\nu & \text{if } \nu \ll \mu \ \text{ and } \ \log\tfrac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\nu), \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.12}$$

3. Reference measures and sum rules

3.1. $\mathbb{R}$上的测度。我们从实数轴上的测度开始，并陈述相对于这些测度的求和规则。为了表述谱侧，我们需要一些支撑条件。对于 $c^- < c^+$，我们将集合 $\mathcal{S}_1(c^-, c^+)$定义为 $\mathbb{R}$ 上的概率测度 μ 所构成的集合，其支撑满足

$$\operatorname{supp}(\mu) = I \cup E,$$

其中 $I \subset [c^-, c^+]$，而 $E = E(\mu)$是 $[c^-, c^+]^c$的一个至多可数子集。

3.1.1. 半圆分布。半圆律为

$$\mathrm{SC}(dx) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\;\mathbb{I}_{\{-2\le x\le 2\}}\,dx. \tag{3.1}$$

它是经典随机矩阵理论中的核心概率测度。事实上，它是大类随机矩阵模型的平衡测度（即其经验特征值分布的极限）。SC 的雅可比矩阵也称为带有 J 系数的自由雅可比矩阵

$$a_k^{\mathrm{SC}} = 1,\ b_k^{\mathrm{SC}} = 0 \ \text{ for all } k \ge 1\,. \tag{3.2}$$

我们先陈述 [33] 的经典求和规则（并在 [41] 第 37 页中作了解释）；使用大偏差的新概率论证明可见 [23]。对于定义在 $\mathbb{R}$ 上、具有递推系数 a_k、b_k（如 (2.1) 所示）的概率测度 μ，定义求和

$$\mathcal{I}_H(\mu) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 + G(a_k^2), \tag{3.3}$$

其中

$$G(x) = x - 1 - \log x\,. \tag{3.4}$$

此外，定义

$$\mathcal{F}_{\mathrm{SC}}(x) := \int_2^{|x|} \sqrt{t^2 - 4}\,dt = \frac{|x|}{2}\sqrt{x^2 - 4} - 2\log\left(\frac{|x| + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right)$$

如果 $|x| \ge 2$ 和 $\mathcal{F}_H(x) = \infty$ 则否则。于是，下面这个重要的恒等式成立。

定理 3.1（[33]）。设 J是一个雅可比矩阵，其对角线元素为 b_1、b_2、$\ldots \in \mathbb{R}$，次对角线元素为 a_1、a_2、$\ldots > 0$，满足 $\sup_k(a_k + |b_k|) < \infty$，并设 μ是相应的谱测度。那么，当 $\mu \notin \mathcal{S}_1(-2, 2)$ 时，$\mathcal{I}_H(\mu)$ 是无限的；对于$\mu \in \mathcal{S}_1(-2, 2)$,

$$\mathcal{K}(\mathrm{SC} \mid \mu) + \sum_{\lambda \in E(\mu)} \mathcal{F}_{\mathrm{SC}}(\lambda) = \mathcal{I}_H(\mu),$$

其中两边可能同时为无穷大。

需要强调的是，对于定理 3.1 中的求和规则，两边均非负，且当且仅当 μ 等于参考测度时，两边才为零；此处的参考测度为半圆律 SC。

3.1.2. Marchenko-Pastur 分布。参数为 $\tau \in (0, 1]$ 为）的 Marchenko-Pastur 分布

$$\mathrm{MP}_\tau(dx) = \frac{\sqrt{(x - \tau_-)(\tau_+ - x)}}{2\pi\tau x} \mathbb{I}_{[\tau_-, \tau_+]}(x)dx\,. \tag{3.5}$$

其中 $\tau_\pm = \sqrt{1 \pm \tau}$。在随机矩阵理论中，它是拉盖尔系综的平衡测度。其典范系数（见 (2.4)）为

$$z_{2k-1} = 1, \quad z_{2k} = \tau \ (k \geq 1)$$

其中 $z_0 = 0$，它们对应于 J 系数

$$a_k = \sqrt{\tau}, \quad b_{k+1} = 1 + \tau \ (k \geq 1)$$

其中 $b_1 = 1$。注意，MP 分布并不对称。定义 $\mathcal{I}_L$ 为

$$\mathcal{I}_L(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau^{-1} G(z_{2k-1}) + G(\tau^{-1} z_{2k})\,. \tag{3.6}$$

此外，对 $x \notin (\tau^-, \tau^+)$ 定义

$$\mathcal{F}_{\mathrm{MP}}(x) := \int_{I(x)} \frac{\sqrt{(t - \tau^+)(t - \tau^-)}}{\tau t}\, dt$$

其中，当 $x \geq \tau^+$ 时，$I(x)$ 为 $= [\tau^+, x]$；当 $0 < x \leq \tau^-$ 时，$I(x)$ 为 $= [x, \tau^-]$。于是我们有以下定理。

定理 3.2（[23] 定理 2.2）。设 $\mu \in \mathcal{M}_1([0, \infty))$ 是一个非平凡的紧支撑测度，且 $0 < \tau \leq 1$。那么，当 $\mu \notin \mathcal{S}_1(\tau^-, \tau^+)$ 时，$\mathcal{I}_L(\mu)$ 为 $= \infty$；若$\mu \in \mathcal{S}_1(\tau^-, \tau^+)$，则有

$$\mathcal{K}(\mathrm{MP}(\tau) \,|\mu) + \sum_{\lambda \in E(\mu)} \mathcal{F}_{\mathrm{MP}}(\lambda) = \mathcal{I}_L(\mu), \tag{3.7}$$

其中两边可以同时为无穷大。

3.1.3. KMK分布。参数为 κ_1、 $\kappa_2 \geq 0$ 的 Kesten-McKay定律记作 KMK(κ_1, κ_2)，其密度为

$$\mathrm{KMK}(\kappa_1,\kappa_2)(dx) = \frac{(2+\kappa_1+\kappa_2)}{2\pi}\frac{\sqrt{(x-u_-)(u_+-x)}}{4-x^2}\mathbb{I}_{\{u^-<x<u^+\}}\,dx \tag{3.8}$$

其中

$$u^{\pm} = \frac{2\left(\kappa_2^2-\kappa_1^2 \pm 4\sqrt{(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)(1+\kappa_1+\kappa_2)}\right)}{(2+\kappa_1+\kappa_2)^2}\,. \tag{3.9}$$

它是 Jacobi系综的平衡测度。KMK(κ_1, κ_2) 的偶数指标和奇数指标典范矩分别为：

$$u_{2k}^{\kappa_1,\kappa_2} \equiv u_e^{\kappa_1,\kappa_2} := -\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2+\kappa_1+\kappa_2}\,,\ u_{2k+1}^{\kappa_1,\kappa_2} \equiv u_o^{\kappa_1,\kappa_2} := \frac{\kappa_2-\kappa_1}{2+\kappa_1+\kappa_2}\,. \tag{3.10}$$

我们还将考虑一个具有 $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ 的对称版本，记作 KMK(κ) := KMK(κ, κ):

$$\mathrm{KMK}(\kappa)(dx) = \frac{(1+\kappa)}{\pi}\frac{\sqrt{u^2-x^2}}{4-x^2}\mathbb{I}_{\{|x|\leq u\}}\,dx, \tag{3.11}$$

其中

$$u = 2\frac{\sqrt{1+2\kappa}}{1+\kappa}\,.$$

KMK κ 的典范矩为 ( )

$$u_{2k}^{\kappa} = u^{(\kappa)} := \frac{-\kappa}{1+\kappa}, \quad u_{2k-1}^{(\kappa)} = 0\,, \tag{3.12}$$

关于线性变换后的典范矩，参见 [27, 第 6] 节。对于 $\kappa = 0$，Kesten-McKay定律就是反正弦分布

$$\mathrm{Arcsine}(dx) := \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}\mathbb{I}_{\{-2<x<2\}}\,dx\,, \tag{3.13}$$

其典范系数全为零。

为了陈述求和规则，我们还需要一些记号。令 $u \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_e^{\kappa_1,\kappa_2}(u) &:= -(1+\kappa_1+\kappa_2)\log\frac{1-u}{1-u_e^{\kappa_1,\kappa_2}} - \log\frac{1+u}{1+u_e^{\kappa_1,\kappa_2}}\,,\\ \mathcal{H}_o^{\kappa_1,\kappa_2}(u) &:= -(1+\kappa_1)\log\frac{1-u}{1-u_o^{\kappa_1,\kappa_2}} - (1+\kappa_2)\log\frac{1+u}{1+u_o^{\kappa_1,\kappa_2}}\,.\end{aligned} \tag{3.14}$$

对于具有典范矩 $u_k \in (-1, 1)$ 的非平凡测度 $\mu \in \mathcal{M}_1([-2, 2])$，定义

$$\mathcal{I}_J(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{H}_o^{\kappa_1,\kappa_2}(u_{2k-1}) + \mathcal{H}_e^{\kappa_1,\kappa_2}(u_{2k})\,. \tag{3.15}$$

最后，对于偏离支撑点的贡献，我们对 $x \notin (u^-, u^+)$ 定义

$$\mathcal{F}_{\mathrm{KMK}(\kappa_1,\kappa_2)}(x) = \int_{I(x)}(2+\kappa_1+\kappa_2)\frac{\sqrt{(t-u^+)(t-u^-)}}{4-t^2}\,dt \tag{3.16}$$

其中，若 $x \in [u^+, 2]$，则 $I(x) = [u^+, x]$；若 $x \in [-2, u^-]$，则 $I(x) = [x, u^-]$。

现在我们可以给出相对于 KMK 测度的求和规则。这就是 [23]，中的定理 2.3，其中该定理针对 $[0, 1]$ 上的线性变换测度进行了表述。

定理 3.3。设 $\mu \in \mathcal{M}_1([-2,2])$ 是一个非平凡测度，且 $\kappa_1, \kappa_2 \geq 0$。那么$\mathcal{I}_J(\mu) = \infty$ 若 $\mu \notin \mathcal{S}_1(u^-, u^+)$，且若 $\mu \in \mathcal{S}_1(u^-, u^+)$，则有

$$\mathcal{K}(\mathrm{KMK}(\kappa_1, \kappa_2) \,|\, \mu) + \sum_{\lambda \in E(\mu)} \mathcal{F}_{\mathrm{KMK}(\kappa_1,\kappa_2)}(\lambda) = \mathcal{I}_J(\mu), \tag{3.17}$$

其中两边可能同时为无穷大。

注 1. 在特例 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ 中，我们得到恒等式

$$\mathcal{K}(\mathrm{Arcsine} \,|\, \mu) = -\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 - u_k^2)\,. \tag{3.18}$$

这与 Gamboa 和 Lozada 的结果 [22] 十分接近，并且等价于 Simon 和 Zlatos 的所谓 C_0 求和规则 [40, 定理 13.8。8]:

$$\mathcal{K}(\mathrm{Arcsine} \,|\, \mu) = \log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \log a_k^2\,. \tag{3.19}$$

事实上，利用 (2.5) 我们可以写成

$$-\sum_{k=1}^{n} \log a_k^2 = -\log 2 - \log(1 - u_{2n}) + \sum_{k=1}^{2n} -\log(1 - u_k^2)\,. \tag{3.20}$$

假设最后一个求和有界，则 $\lim_{n\to\infty} u_{2n} = 0$，因此

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \log a_k^2 = \log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \log(1 - u_k^2)\,. \tag{3.21}$$

另一方面，由于 $\log(1 - u_{2n+2}) \leq \log 2$，(3.20) 蕴含

$$\sum_{k=1}^{2n} -\log(1 - u_k^2) \leq 2\log 2 - \sum_{k=1}^{n} \log a_k^2$$

并且当左端的和发散时，$-\sum_{k=1}^{\infty} \log a_k^2$ 也发散，因此该结论在任何情况下都成立。 (3.21)

3.2. 单位圆上的测度。类比实数情形，我们对 $0 \leq \theta^- < \theta^+ \leq 2\pi$ 引入集合 $\mathcal{S}_1^{\mathbb{T}}(\theta^-, \theta^+)$，它由支撑在 $I \cup E$ 上的概率测度 $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T})$ 构成，其中 I 是圆弧的一个子集

$$\{z = e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{T} \,|\, \theta \in [\theta^-, \theta^+]\} \tag{3.22}$$

并且 $E = E(\nu)$ 是集合 (3.22) 补集的至多可数子集。

3.2.1. 均匀分布。我们用 UNIF 表示单位圆上的归一化勒贝格测度

$$\mathrm{UNIF}(d\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

其 V 系数为

$$\alpha_k = 0, \quad k \geq 0\,.$$

经典的 Szeg˝o-Verblunsky 定理（见 [41], 定理 1.8.6）是如下恒等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \log g_\nu(e^{\mathrm{i}\theta}) d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \log(1 - |\alpha_k|^2)\,, \tag{3.23}$$

其中 $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T})$ 是非平凡的，具有 V 系数 α_k，且其勒贝格分解为

$$d\nu = g_\nu d\,\mathrm{UNIF} + d\nu_s$$

相对于 UNIF。将此方程两边的符号都改变后，得到

$$\mathcal{K}(\mathrm{UNIF}\,|\nu) = -\sum_{k=0}^{\infty} \log(1-|\alpha_k|^2). \tag{3.24}$$

3.2.2. Gross-Witten。Gross-Witten测度是随机矩阵分布的一类平衡测度，其势为

$$\mathcal{V}_{\mathsf{g}}(z) = -\mathsf{g}\,\mathrm{Re}(z)\,, \tag{3.25}$$

参数为 $\mathsf{g} \in \mathbb{R}$。关于该分布的详情和应用，请参阅[30] 第 203, [29], 页和 [42]。

若 $-1 \leq \mathsf{g} \leq 1$（无间隙相或强耦合相），则 Gross-Witten测度 GW(g) 的支撑为 $\mathbb{T}$，且定义为:

$$\mathrm{GW}(\mathsf{g})(dz) = \frac{1}{2\pi}(1+\mathsf{g}\cos\theta)\,d\theta, \tag{3.26}$$

其中 $z = e^{\mathrm{i}\theta}$，$\theta \in [-\pi,\pi)$。注意，τ_π(GW(g)) = GW(−g)，其中

$$\int f(\theta) d\tau_\pi(\mu)(\theta) = \int f(\theta+\pi) d\mu(\theta)\,. \tag{3.27}$$

由于[1]

$$\alpha_k(\tau_\pi(\mu)) = (-1)^{k+1}\alpha_k(\mu), \tag{3.28}$$

见 [39], 我们仅在 $\mathsf{g} < 0$ 的情形下给出 V 系数。

对于 $-1 \leq \mathsf{g} < 0$，测度 GW(g) 的 V 系数为

$$\alpha_n^{\mathsf{g}} = \alpha_n(\mathrm{GW}(\mathsf{g})) = \begin{cases} -\dfrac{x_+ - x_-}{x_+^{n+2} - x_-^{n+2}} & \text{if } -1 < \mathsf{g} < 0, \\ -\dfrac{1}{n+2} & \text{if } \mathsf{g} = -1\,, \end{cases} \tag{3.29}$$

（见 Simon [39], 第 86 页），其中 $x_\pm = -\mathsf{g}^{-1} \pm \sqrt{\mathsf{g}^{-2}-1}$ 是方程的根

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{2}{\mathsf{g}}\,.$$

我们注意到，测度 GW(g) 仅有阶数为 ± 1 的非平凡矩。

对于 $|\mathsf{g}| \geq 1$（有隙相或弱耦合相），令 $\theta_g \in [0,\pi]$ 为以下方程的解

$$\sin^2(\theta_{\mathsf{g}}/2) = |\mathsf{g}|^{-1}\,. \tag{3.30}$$

当 $\mathsf{g} \leq -1$ 时，Gross-Witten测度为 $z = e^{\mathrm{i}\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$

$$\mathrm{GW}(\mathsf{g})(dz) = \frac{|\mathsf{g}|}{\pi}\sin(\theta/2)\sqrt{\sin^2(\theta/2) - \cos^2(\theta_{\mathsf{g}}/2)}\,1_{[\pi-\theta_{\mathsf{g}},\pi+\theta_{\mathsf{g}}]}\,d\theta\,. \tag{3.31}$$

将 Zhedanov [43], 中的公式 (7.22) 概括如下：在 $\mathsf{g} < -1$ 的情形下，V 系数为

$$\alpha_{n-1}^{\mathsf{g}} = \alpha_{n-1}(\mathrm{GW}(\mathsf{g})) = 1 - \frac{2}{1+q}\frac{1-q^{n+2}}{1-q^{n+1}}\,, \tag{3.32}$$

[1]下文中，当上下文需要指出所用测度的名称时，我们将使用记号 $\alpha_k(\nu)$ 或 $u_k(\mu)$。

其中

$$q = \left(\sqrt{|\mathsf{g}|} - \sqrt{|\mathsf{g}|-1}\right)^2 . \tag{3.33}$$

由于 $0 < q < 1$，可得

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\mathsf{g}} = -\sqrt{1-|\mathsf{g}|^{-1}} = -\cos(\theta_{\mathsf{g}}/2)\,. \tag{3.34}$$

当 $g \geq 1$ 时，平衡测度为

$$\mathrm{GW}(\mathsf{g})(dz) = \frac{|\mathsf{g}|}{\pi}\cos(\theta/2)\sqrt{\sin^2(\theta_{\mathsf{g}}/2) - \sin^2(\theta/2)}\,1_{[-\theta_{\mathsf{g}},\theta_{\mathsf{g}}]}\,d\theta\,. \tag{3.35}$$

注意，再次有 τ_π(GW(g)) =GW(−g)，因此根据 (3.28)，此时的 V 系数可由 (3.32) 得到。

注 2. 我们可以像 [38] 中那样旋转 GW，并考虑将 GW(g) 旋转角度 η 后推前所得的平衡测度，而不是 (3.27) 中的 π。

关于 Gross-Witten 平衡测度 GW(g) 的第一个求和规则由 Simon 在 $\mathsf{g} = -1$ 时发现（见 [39, 定理 2.8.1]），随后 Breuer、 Simon 和 Zeitouni [11] 使用概率方法给出了证明。它很容易推广到$|\mathsf{g}| \leq 1$ （ [24, 推论 5.4]）。对于 $-1 \leq \mathsf{g} \leq 0$ 且 $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T})$ 非平凡的情形，有恒等式

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\mathrm{GW}(\mathsf{g}) \mid \nu) = H(\mathsf{g}) + \frac{\mathsf{g}}{2} - \frac{\mathsf{g}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k - \alpha_{k-1}|^2 \\ + \sum_{k=0}^{\infty} -\log(1-|\alpha_k|^2) + \mathsf{g}|\alpha_k|^2\,,\end{aligned} \tag{3.36}$$

其中

$$H(\mathsf{g}) = \mathcal{K}(\mathrm{GW}(\mathsf{g}) \mid \mathrm{UNIF}) = 1 - \sqrt{1-\mathsf{g}^2} + \log\frac{1+\sqrt{1-\mathsf{g}^2}}{2}. \tag{3.37}$$

我们回顾一下，在 (3.36) 中， $\alpha_{-1} = -1$。求和规则 (3.36) 蕴含了以下重要结论，即 Kullback-Leibler 散度有限的条件。式 (3.36) 的右端有限，当且仅当

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^2 < \infty \text{ if } -1 < \mathsf{g} \leq 0, \tag{3.38}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|^4 < \infty \text{ and } \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k - \alpha_{k-1}|^2 < \infty \text{ if } \mathsf{g} = -1\,. \tag{3.39}$$

注 3. 在 $\sum_k |\alpha_k|^2 < \infty$ 的前提下，我们可以将求和规则改写为

$$\mathcal{K}(\mathrm{GW}(\mathsf{g}) \mid \nu) = H(\mathsf{g}) + \mathsf{g}\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\bar{\alpha}_{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty}\log(1-|\alpha_k|^2), \tag{3.40}$$

[39, 第 174], 页，对于 $\mathsf{g} = -1$ 的情形，并将其推广到 $-1 < \mathsf{g} \leq 0$ [24, 推论 5.4]。实际上，由于左端在 ν =GW(g) 时为零，我们也可以将求和规则 (3.36) 改写为

$$\mathcal{K}(\mathrm{GW}(\mathsf{g}) \mid \nu) = \mathsf{g}\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k\bar{\alpha}_{k-1} - \alpha_k^{\mathsf{g}}\bar{\alpha}_{k-1}^{\mathsf{g}}) - \sum_{k=0}^{\infty}\log\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-|\alpha_k^{\mathsf{g}}|^2}\,, \tag{3.41}$$

其中 α_k^{g} 见 (3.29)。这个右端也是 g| 下 GW(g) 的一个求和规则的右端$|>1$ （见 [25]）。

3.2.3. Hua-Pickrell。Hua-Pickrell 分布出现在与以下势相对应的随机矩阵研究中

$$\mathcal{V}_{\mathsf{d}}(z) = -2\mathsf{d}\log|1-z|\,, \tag{3.42}$$

该势在 $z\mapsto\bar{z}$ 下保持不变。这里，d 是一个复参数。它在 [31] 中被引入，后来又出现在 [36] 中。另请参见 [34], [7] 和 [8]。这里我们只考虑实参数 $\mathsf{d}>0$ 的情形。

平衡测度是如下测度

$$\mathrm{HP}(\mathsf{d})(dz) = (1+\mathsf{d})\frac{\sqrt{\sin^2(\theta/2)-\sin^2(\theta_{\mathsf{d}}/2)}}{2\pi\,\sin(\theta/2)}\,\mathbb{I}^{(\theta_{\mathsf{d}},2\pi-\theta_{\mathsf{d}})}(\theta)d\theta\,, \tag{3.43}$$

其中 $z=e^{\mathrm{i}\theta}$、$\theta\in[0,2\pi]$，且 $\theta_{\mathsf{d}}\in(0,\pi)$ 满足

$$\sin(\theta_{\mathsf{d}}/2) = \frac{\mathsf{d}}{1+\mathsf{d}}\,. \tag{3.44}$$

相对于 HP(d) 的正交多项式是具有常数 V 系数的 Geronimus 多项式

$$\alpha_k \equiv \gamma_{\mathsf{d}} := -\frac{\mathsf{d}}{1+\mathsf{d}}\ ,\ k\geq 0\,. \tag{3.45}$$

对于 $\gamma\in\mathbb{D}$，令

$$H_{\mathsf{d}}(\gamma) = -\log\frac{1-|\gamma|^2}{1-\gamma_{\mathsf{d}}^2} - 2\mathsf{d}\log\frac{|1-\gamma|}{1-\gamma_{\mathsf{d}}}\,. \tag{3.46}$$

求和规则中函数 H_{d} 的自变量是变形 V 系数（见 [8, 第 2 节.2]）。对于非平凡测度 $\nu\in\mathcal{M}_1(\mathbb{T})$，它们构成参数序列 $\gamma_k\in\mathbb{D}, k\geq 0$，定义为

$$\gamma_k = \bar{\alpha}_k\frac{\Phi_k^*(1)}{\Phi_k(1)},\quad (k\geq 0). \tag{3.47}$$

并且可以通过递归定义计算

$$\gamma_0=\bar{\alpha}_0,\quad \gamma_k=\bar{\alpha}_k\prod_{j=0}^{k-1}\frac{1-\bar{\gamma}_j}{1-\gamma_j},\quad (k\geq 1). \tag{3.48}$$

当然，当 ν 对称时，$\Phi_k^*(1)=\Phi_k(1)$，且 α_k 为实数，因此变形 V 系数就是真正的 V 系数。

此外，定义函数 $\mathcal{F}_{\mathrm{HP}}$，其中 $\theta\notin(\theta_{\mathsf{d}},2\pi-\theta_d)$:

$$\mathcal{F}_{\mathrm{HP}}(e^{\mathrm{i}\theta}) := \int_{I(\theta)}(1+\mathsf{d})\frac{\sqrt{\sin^2\left(\theta_{\mathsf{d}}/2\right)-\sin^2(\varphi/2)}}{\sin(\varphi/2)}\,d\varphi \tag{3.49}$$

其中，若 $\theta\in(0,\theta_{\mathsf{d}}]$，则 $I(\theta)=[\theta,\theta_{\mathsf{d}}]$；若 $\theta\in[2\pi-\theta_{\mathsf{d}},2\pi)$，则 $I(\theta)=[2\pi-\theta_{\mathsf{d}},\theta]$。

于是，以下求和规则成立。

定理 3.4. [24, 定理 5.1] 设 $\mathsf{d} \geq 0$ 和 $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T})$ 非平凡，且 $(\gamma_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ 是其变形 V 系数序列。那么，若 $\nu \in \mathcal{S}_1^{\mathbb{T}}(\theta_{\mathsf{d}}, 2\pi - \theta_{\mathsf{d}})$,

$$\mathcal{K}(\mathrm{HP}(\mathsf{d})|\nu) + \sum_{\lambda\in E(\nu)} \mathcal{F}_{\mathrm{HP}}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} H_{\mathsf{d}}(\gamma_k)\,, \tag{3.50}$$

其中两边可能同时为无穷大。若 $\mu \notin \mathcal{S}_1^{\mathbb{T}}(\theta_{\mathsf{d}}, 2\pi - \theta_{\mathsf{d}})$，则右端等于 $+\infty$。

3.2.4. 泊松。泊松核是定义在 $\mathbb{T}$ 上的概率测度，给定为

$$\mathrm{Pois}(\zeta)(dz) = \frac{1-|\zeta|^2}{2\pi|z-\zeta|^2}dz\,. \tag{3.51}$$

它是势为.....的随机矩阵的平衡测度

$$\mathcal{V}_\zeta(z) = \log|z\bar{\zeta} - 1|^2, \tag{3.52}$$

关于随机矩阵系综的研究，参见 [30, 命题 5.3。9], 或 [31] 以及 [2] 。注意，Pois(0) = UNIF。

Pois(ζ) 的 V 系数为

$$\alpha_0 = \zeta, \quad \alpha_k = 0 \ (k \geq 1)\,. \tag{3.53}$$

我们知道，相对于泊松测度 Pois(ζ)，有两条求和规则。第一条（ [39]中的定理 2.5.1 和公式 (2.2.77)）为

$$\mathcal{K}(\mathrm{Pois}(\zeta)|\nu) = -\log\lambda_\infty(\zeta),$$

其中， φ_n 是关于 ν的第 n个正交归一多项式,

$$\lambda_\infty(\zeta) = (1-|\zeta|^2)\lim_{n\to\infty}|\varphi_n^*(\zeta)|^{-2}\,.$$

第二条见命题 6.3。其表述需要用到本文后文给出的一些记号。我们在定理 6.2 中陈述一条新的第三求和规则。

4. 映射

除了最后一个之外，这里介绍的所有映射都将 $\mathbb{T}$ 映到 $\mathbb{R}$。它们将单位圆上的概率测度 ν 推前为实数轴上的概率测度 μ ，这意味着 μ 的 J 系数可能与 ν的 V 系数有关。这可能在 J_μ 与 $\mathcal{C}_\nu$ 之间建立联系，也可能形成求和规则之间的对应关系，或称“桥梁”。

4.1. Szeg˝o。Szeg˝o 映射将 $\mathbb{T}$ 映到 $[-2,2]$ ，其定义为

$$z \mapsto \mathrm{Sz}(z) = z + z^{-1}\,, \tag{4.1}$$

或以角坐标表示,

$$\mathrm{Sz}(e^{\mathrm{i}\theta}) = 2\cos\theta\,. \tag{4.2}$$

映射 Sz 是从 $\mathbb{T}$ 到 $[-2,2]$的二对一映射。对于对称的 $\nu \in \mathcal{M}_{1,\,s}(\mathbb{T})$，我们令 Sz($\nu$) $= \nu \circ \mathrm{Sz}^{-1}$ 表示 ν 在 Szeg˝o 映射下的推前；该映射在 $\mathcal{M}_{1,\,s}(\mathbb{T})$ 与 $\mathcal{M}_1([-2,2])$ 之间建立了双射，后者是定义在

$[-2,2]$ 上的概率测度集合。关于 ν 的单位圆上的正交多项式 $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ 与关于 $\mathrm{Sz}(\nu)$ 的实直线上正交多项式 $(p_n)_{n\geq 0}$ 之间的关系为

$$p_n(z) = z^{-n}\frac{\varphi_{2n}(z)+\varphi_{2n}^*(z)}{\sqrt{2(1-\alpha_{2n-1})}}, \tag{4.3}$$

其中，α_{2n-1} 是 ν的实 V 系数。Geronimus 关系 [40, 定理 13.1.7]和方程 (2.5) 给出了以下显著恒等式

$$u_k(\mathrm{Sz}(\nu)) = \alpha_{k-1}(\nu) \tag{4.4}$$

对于 $k\geq 1$，$\mathrm{Sz}(\nu)$ 的典范矩与 ν的 V 系数之间的关系。

4.2. Delsarte-Genin（DG）。对于 $\mathfrak{d}>0$，我们考虑点 $z\in\mathbb{T}$ 与 $x\in[-2\mathfrak{d},2\mathfrak{d}]$ 之间的以下关系

$$x = \mathfrak{d}\left(z^{1/2}+z^{-1/2}\right) \quad \text{or} \quad x = 2\mathfrak{d}\cos(\theta/2)\,. \tag{4.5}$$

以下计算主要来源于 [18], [19], [17]。其中，参数 $\mathfrak{d}$ 固定为 $1\ 2$。请注意，关于平方根分支的问题已在 [20, 第 518] 页中处理。选择恰当时，此映射是从 $\mathbb{T}\setminus\{1\}$ 到 $(-2\mathfrak{d},2\mathfrak{d})$ 的双射，我们将其记为 $\mathrm{DG}_{\mathfrak{d}}$；点 $1\in\mathbb{T}$ 同时对应于$-2\mathfrak{d}$和 $2\mathfrak{d}$。

令 $\nu\in\mathcal{M}_{s,\ 1}(\mathbb{T})$，并固定 $\mathfrak{d}=1$。我们令 $\mathrm{DG}_1(\nu)$ 表示 ν 在 DG_1，下的推前，其中约定 $\mathrm{DG}_1(\nu)(\{-2\}) = \mathrm{DG}_1(\nu)(\{2\}) = \frac{1}{2}\nu(\{1\})$。它是定义在 $[-2,2]$ 上的对称测度。相对于 ν 的首一正交多项式 $(\Phi_n)_{n\geq 0}$ 与相对于 $\mathrm{DG}_1(\nu)\mu =$ 的首一正交多项式 $(P_n)_{n\geq 0}$ 满足

$$P_n(x) = \frac{z^{-n/2}(\Phi_n(z)+\Phi_n^*(z))}{\sqrt{2(1-\alpha_{n-1})}}\,, \tag{4.6}$$

其中 α_{n-1} 是 ν 的实 V 系数。μ 的 J 系数为

$$a_n^2 = (1+\alpha_{n-1})(1-\alpha_{n-2}), \quad b_n = 0 \qquad (n\geq 1). \tag{4.7}$$

由对称性，μ 的奇数阶典范系数为零，因此比较 (2.5) 和 (4.7)，可得

$$u_{2n}(\mathrm{DG}_1(\nu)) = \alpha_{n-1}(\nu)\ (n\geq 1), \qquad u_0 = \alpha_{-1} = -1\,. \tag{4.8}$$

Φ_n 与 P_n 之间的逆关系为

$$\Phi_n(z) = \frac{z^{n/2}\left(z^{1/2}P_{n+1}(x)-\sigma_n P_n(x)\right)}{z-1}, \tag{4.9}$$

with

$$\sigma_n = \frac{P_{n+1}(2)}{P_n(2)} = 1-\alpha_{n-1}. \tag{4.10}$$

考虑一般情形 $\mathfrak{d}\neq 1$ 时，进行一次简单的重新缩放会很有帮助。事实上，将与 $\mathrm{DG}_{\mathfrak{d}}(\nu)$ 正交的多项式写作 $P_n(x;\mathfrak{d}) = \mathfrak{d}^n P_n(x/\mathfrak{d})$。那么，它们的 V 系数满足

$$a_n^2 = \mathfrak{d}^2(1+\alpha_{n-1})(1-\alpha_{n-2})\,. \tag{4.11}$$

有时使用映射会更方便

$$x = -i\mathfrak{d}(z^{1/2}-z^{-1/2})\,, \tag{4.12}$$

或 $x = 2\mathfrak{d}\sin\theta$。在这种情况下，我们用 $\mathrm{DG}_{\mathfrak{d}}^{-}$表示该映射，用 $\mathrm{DG}_{\mathfrak{d}}^{+}$表示经典映射。

4.3. Derevyagin-Vinet-Zhedanov (DVZ)。该映射由 [20]引入，并在 [14]中推广。它揭示了单位圆上的对称测度与 $\mathbb{R}$上的测度之间的一种显著关系，这种关系由 CMV 矩阵与雅可比矩阵之间的代数关系所导出；[14]也称之为 Schur-Delsarte-Genin (SDG) 映射。

设$\nu \in \mathcal{M}_{s,1}(\mathbb{T})$为一个对称测度。其 V 系数均为实数；当相应的 CMV 矩阵按 (2.11) 写成 $\mathcal{C} = \mathcal{L}\mathcal{M}$的形式时，在此情形下，对于所有 k，都有 $\Theta_k^2 = I_2$ （ $\mathbb{R}^2$中的恒等式）。这意味着 $\mathcal{L}^2 = \mathcal{M}^2 = I$，且矩阵 $J_+ := \mathcal{L} + \mathcal{M}$ 满足以下性质：

(1) J_+ 为实对称三对角矩阵。(2) $J_+^2 - 2I = \mathcal{C} + \mathcal{C}^t$(3) J_+ 中的 J 系数为

$$a_k = \rho_{k-1}, \quad b_{k+1} = \alpha_k - \alpha_{k-1} \quad (k \geq 1) \tag{4.13}$$

以及 $b_1 = \alpha_0 + 1$。

(4) 其谱测度为

$$d\mu(x) = \frac{1}{2}(2+x)\, d\,\mathrm{DG}_1(\nu), \tag{4.14}$$

支撑于 $[-2, 2]$。注意，这个测度并不对称。

由 (4.14) 定义的测度 μ 记作 $\mathrm{DVZ}^{+}(\nu)$。

若考虑 $J_- = \mathcal{L} - \mathcal{M}$，则谱测度满足

$$d\mu(x) = \frac{1}{2}(2-x)\, d\,\mathrm{DG}_1(\nu)\,, \tag{4.15}$$

并记作 $\mathrm{DVZ}^{-}(\nu)$。

4.4. 莫比乌斯变换。M¨obius 变换 m_{z_0} （其中 $z_0 \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ ）定义为

$$m_{z_0}(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}\,. \tag{4.16}$$

它是 $\mathbb{D}$ 的一个自同构，将 z_0 映到 0；也可以视为 $\mathbb{T}$ 的自同构。其逆变换为 m_{-z_0}。

5. Pushing forward measures

5.1. UNIF 的变换。由定义可容易看出

$$\mathrm{Sz}(\mathrm{UNIF}) = \mathrm{DG}_1(\mathrm{UNIF}) = \mathrm{Arcsine} \tag{5.1}$$

为计算 UNIF 的 DVZ 变换，我们引入以下记号。对于 $a < b$，测度 $\mathcal{D}(a, b)$（分别为 $\mathcal{D}(b, a)$）支撑在 (a, b) 上，其密度为

$$\frac{2}{\pi(b-a)}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} \quad \left(\text{resp.} \quad \frac{2}{\pi(b-a)}\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}\right). \tag{5.2}$$

这些测度是参数为1_2的贝塔分布的仿射推前，$-\frac{1}{2}$（分别为参数 $-\frac{1}{2}$、1_2）。测度 $\overline{\mathcal{D}}(2, -2)$ 也是硬边情形下 Marchenko-Pastur 分布的平移。

与之对应的正交归一多项式（经过仿射变换后）是第三类切比雪夫多项式（分别为第四类）。于是我们有

$$\mathrm{DVZ}^{+}(\mathrm{UNIF}) = \mathcal{D}(-2,2) \quad \text{and} \quad \mathrm{DVZ}^{-}(\mathrm{UNIF}) = \mathcal{D}(2,-2).$$

$\mathcal{D}(-2, 2)$ 的 J 系数由 (4.13) 给出

$$a_k = 1, \quad b_{k+1} = 0 \ (k \geq 1), \tag{5.3}$$

以及 $b_1 = 1$。

5.2. GW 变换。由密度 (3.31)，我们推得对于 $\mathsf{g} \leq -1$

$$\mathrm{Sz}(\mathrm{GW}(\mathsf{g}))(dx) = \frac{|\mathsf{g}|}{2\pi}\sqrt{\frac{4|\mathsf{g}|^{-1} - 2 - x}{x+2}}\, \mathbb{I}^{(-2,4|\mathsf{g}|^{-1}-2)}(x)\ dx$$

或者换句话说

$$\mathrm{Sz}(\mathrm{GW}(\mathsf{g})) = \mathcal{D}(4|\mathsf{g}|^{-1} - 1, -2)\,. \tag{5.4}$$

对于 $|\mathsf{g}| \leq 1$，注意到 Gross-Witten 密度 (3.26) 是以下混合分布：

$$\mathrm{GW}(\mathsf{g}) = |\mathsf{g}|\,\mathrm{GW}(\epsilon(g)) + (1 - |\mathsf{g}|)\,\mathrm{UNIF}\,, \tag{5.5}$$

其中 $\epsilon(\mathsf{g})$ 是 g 的符号。由于 Szeg˝o 映射对测度是线性的，我们得到了完整的图景

$$\mathrm{Sz}(\mathrm{GW}(\mathsf{g})) = \mu_{\mathsf{g}} =: \begin{cases} \mathcal{D}(-2 + 4|\mathsf{g}|^{-1}, -2) & \text{if } \mathsf{g} \leq -1, \\ |\mathsf{g}|\mathcal{D}(2,-2) + (1-|\mathsf{g}|)\,\mathrm{Arcsine} & \text{if } -1 \leq \mathsf{g} \leq 0, \\ \mathsf{g}\mathcal{D}(-2,2) + (1-\mathsf{g})\,\mathrm{Arcsine} & \text{if } 0 \leq \mathsf{g} \leq 1, \\ \mathcal{D}(2 - 4\mathsf{g}^{-1}, 2) & \text{if } \mathsf{g} \geq 1. \end{cases} \tag{5.6}$$

5.2.1. 当 $|\mathsf{g}| \geq 1$ 时使用 DG。对于 $\mathsf{g} < -1$，变量代换

$$x = 2\sqrt{|\mathsf{g}|}\cos(\theta/2)$$

得到

$$\mathrm{DG}_{\sqrt{|\mathsf{g}|}}(\mathrm{GW}(\mathsf{g})) = \mathrm{SC} \tag{5.7}$$

当 $\mathsf{g} > 1$ 时，变量代换

$$x = 2\sqrt{\mathsf{g}}\sin(\theta/2)$$

也得到 $\mathrm{DG}^{-}_{\sqrt{\mathsf{g}}}(\mathrm{GW}(\mathsf{g})) = \mathrm{SC}$。

5.2.2. 当 $|\mathsf{g}| \leq 1$ 时使用 DG。从 (5.5) 出发，并且由于 DG 是线性的，对于 $-1 \leq \mathsf{g} < 0$，我们得到

$$\mathrm{DG}_1(\mathrm{GW}(\mathsf{g})) = \rho_{\mathsf{g}} := |\mathsf{g}|\,\mathrm{SC} + (1-|\mathsf{g}|)\,\mathrm{Arcsine}\,. \tag{5.8}$$

相应的典范矩为

$$u_{2k} = \alpha^{\mathsf{g}}_{k-1}, \quad u_{2k+1} = 0 \quad (k \geq 0)\,, \tag{5.9}$$

其中α^{g}_k 见（3.29）。

同样，应用 DG^{-}_1可得，当 $0 < \mathsf{g} \leq 1$ 时，得到混合分布

$$\mathrm{DG}^{-}_1(\mathrm{GW}(\mathsf{g})) = \mathsf{g}\,\mathrm{SC} + (1-\mathsf{g})\,\mathrm{Arcsine}\,. \tag{5.10}$$

5.3. HP 的变换。对 (3.43) 进行变量代换 $x = 2\cos\theta$，可得

$$\frac{\mathrm{Sz}(\mathrm{HP}(\mathtt{d}))(dx)}{dx} = \frac{2(1+\mathtt{d})}{2\pi}\frac{\sqrt{x_{\mathtt{d}}-x}}{(2-x)\sqrt{2+x}} = \frac{1+\mathtt{d}}{\pi}\frac{\sqrt{(x_{\mathtt{d}}-x)(2+x)}}{(4-x^2)}\,.$$

其中

$$x_{\mathtt{d}} = \frac{2(1+2\mathtt{d}-\mathtt{d}^2)}{1+2\mathtt{d}+\mathtt{d}^2}\,. \tag{5.11}$$

由此我们得出

$$\mathrm{Sz}(\mathrm{HP}(\mathtt{d})) = \mathrm{KMK}(2\mathtt{d},0)\,, \tag{5.12}$$

（回想一下，KMK(2d, 0) 的支撑为 $[-2, x_{\mathtt{d}}]$。）

在 (3.43) 中作变量代换 $x = 2\cos(\theta/2)$，可得 DG_1(HP(d)) 的密度

$$(1+\mathtt{d})\frac{\sqrt{\cos^2(\theta_{\mathtt{d}}/2)-\cos^2(\theta/2)}}{2\pi\sin^2(\theta/2)} = (1+\mathtt{d})\frac{\sqrt{4\cos^2(\theta_{\mathtt{d}}/2)-x^2}}{\pi(4-x^2)}\,,$$

因此我们得出

$$\mathrm{DG}_1(\mathrm{HP}(\mathtt{d})) = \mathrm{KMK}(\mathtt{d})\,. \tag{5.13}$$

其支撑为 $[-\hat{}x_{\mathtt{d}}、\hat{}x_{\mathtt{d}}]$，其中

$$\hat{x}_{\mathtt{d}} = 2\frac{\sqrt{1+2\mathtt{d}}}{1+\mathtt{d}}. \tag{5.14}$$

注意，HP(d) 的 V 系数恒等于 $\gamma_{\mathtt{d}}$，因此由 (4.7) 可得 KMK(d) 的 J 系数为

$$a_1^2 = 2(1+\gamma_{\mathtt{d}}),\quad a_n^2 = (1-\gamma_{\mathtt{d}}^2)\ \ (n\geq 2),\quad b_n = 0\ \ (n\geq 1)\,,$$

这与 (3.12) 一致。

我们用下面两个表格总结上述结果：

	Sz
UNIF	反正弦分布
GW(g) $\lvert\mathtt{g}\rvert \leq 1$	$\lvert\mathtt{g}\rvert\mathcal{D}(-2\epsilon(\mathtt{g})\ 2\epsilon(g))$ +(1 − |g|) 反正弦分布
GW(g) $\lvert\mathtt{g}\rvert > 1$	$\mathcal{D}(2\epsilon(\mathtt{g})\ -4\mathtt{g}^{-1}, 2\epsilon(\mathtt{g}))$
HP(d)	KMK(2d, 0)

	DG_1^+	DG_1^-
UNIF	反正弦分布	反正弦分布
GW(g) $-1 \leq \lvert\mathtt{g}\rvert \leq 0$	|g| SC +(1 − |g|) 反正弦分布	
GW(g) $0 \leq \lvert\mathtt{g}\rvert \leq 1$		|g| SC +(1 − |g|) 反正弦分布
GW(g), g ≤ -1	SC（∗）	
GW(g), g > 1		SC（∗）
HP(d)	KMK(d)	

此处（∗）表示应用 $\mathrm{DG}^{\pm}_{\sqrt{|\mathtt{g}|}}$。

6. Gateways

本节重点介绍测度经由第 4 节中的映射变换时，不同求和规则之间的联系。与 [23], 中提出的大偏差技术不同，这种构造新求和规则的方法纯粹是解析性的。不过，它需要以现有的求和规则为基础。在大多数情况下，目标是从单位圆上的正交多项式求和规则推导出实直线上正交多项式求和规则。

度量空间之间的可测映射 $\varphi : X \to Y$ 会通过 $\mu \mapsto \varphi(\mu) = \mu \circ \varphi^{-1}$，诱导出一个从 $\mathcal{M}_1(X)$ 到 $\mathcal{M}_1(Y)$ 的映射。在 $\mathcal{M}_1(Y)$ 上的测度求和规则，可能通过对 $\varphi(\mu)$ 应用该求和规则并计算等式两边，导出关于 $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ 上测度的恒等式（反之亦然）。

假设映射 $\varphi : X \to Y$ 是一个双射。那么 $\mu \mapsto \varphi(\mu)$ 是一个从 $\mathcal{M}_1(X)$ 到 $\mathcal{M}_1(Y)$ 的双射。于是，求和规则中的熵部分可直接由可逆熵原理得到：

$$\mathcal{K}(\mu_0 \mid \mu) = \mathcal{K}(\varphi(\mu_0) \mid \varphi(\mu)). \tag{6.1}$$

第 4 节介绍的映射中，只有 M¨obius 映射是一一映射。不过，Szeg˝o 映射是单位圆上的对称测度与 $[-2, 2]$ 上测度之间的双射，而且 (6.1) 对 $\varphi = \mathsf{Sz}$ 和 μ, $\mu_0 \in \mathcal{M}_{1,\ s}(\mathbb{T})$ 仍然成立。$\mathsf{DG}_{\mathfrak{d}}^{\pm}$ 映射限制在 $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ 上时是双射。按照将质量映射到 1 处的约定，(6.1) 对 $\varphi = \mathsf{DG}_{\mathfrak{d}}^{\pm}$ 也成立。因此，(6.1) 对 $\varphi = \mathsf{DVZ}^{\pm}$ 也成立，进而对本文讨论的所有映射都成立。

对求和规则右端进行变换不那么直接，但如果 $\varphi(\mu)$ 的系数与 μ 的系数之间存在一种便利的联系，这一过程或许可以简化。

6.1. 从 UNIF 到反正弦分布。利用 (6.1)，我们得到，对于满足 $\mathsf{Sz}(\nu) = \mu$ 的 $\nu \in \mathcal{M}_{1,s}(\mathbb{T})$,

$$\mathcal{K}(\mathrm{Arcsine} \mid \mu) = \mathcal{K}(\mathrm{UNIF} \mid \nu).$$

Szeg˝o 公式 (3.24) 与 (4.4) 结合，给出

$$\mathcal{K}(\mathrm{UNIF} \mid \nu) = -\sum_{k=0}^{\infty} \log(1 - |\alpha_k|^2(\nu)) = -\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 - u_k^2(\mu)),$$

于是我们得到关于反正弦律 (3.18) 的求和规则。注意，UNIF 是下列分布中的一种特殊情形，

$$\mathrm{UNIF} = \mathrm{HP}(0) = \mathrm{GW}(0).$$

因此，可以从关于这些分布中任意一种的求和规则，推导出关于反正弦分布的求和规则。

6.2. 从 HP 到 KMK。Kesten-McKay定律可以由 Hua-Pickrell分布如下得到：

$$\mathrm{Sz}(\mathrm{HP}(\mathtt{d})) = \mathrm{KMK}(2\mathtt{d}, 0), \quad \mathrm{DG}_1(\mathrm{HP}(\mathtt{d})) = \mathrm{KMK}(\mathtt{d}).$$

这些分布恒等式使我们能够恢复参考测度为 KMK(2d, 0) 或 KMK(d) 的求和规则。若 ν 是 $\mathcal{S}_1^{\mathbb{T}}(\theta_{\mathtt{d}}, 2\pi - \theta_{\mathtt{d}})$ 中的对称分布，则 Sz(HP(d))（分别为 $\mathrm{DG}_1(\nu)$）支撑于 $[-2, 2]$，且属于 $\mathcal{S}_1^{\mathbb{R}}(-2, x_{\mathtt{d}})$（分别为 $\mathcal{S}_1^{\mathbb{R}}(-\hat{}x_{\mathtt{d}}, \hat{}x_{\mathtt{d}})$）。

我们来考察求和规则 (3.50) 的 Szeg˝o 映射。设 μ 支撑于 $[-2,2]$。若 $\mu \in \mathcal{S}_1^{\mathbb{R}}(-2, x_{\mathtt{d}})$，则具有 Sz($\nu$) $= \mu$ 的对称测度 ν 属于 $\mathcal{S}_1^{\mathbb{T}}(\theta_{\mathtt{d}}, 2\pi - \theta_{\mathtt{d}})$。求和规则 (3.50) 在 ν 处取值时的左端为

$$\mathcal{K}(\mathrm{HP}(\mathtt{d})|\nu) + \sum_{\lambda \in E(\nu)} \mathcal{F}_{\mathrm{HP}(\mathtt{d})}(\lambda) = \mathcal{K}(\mathrm{KMK}(2\mathtt{d}, 0)|\mu) + 2 \sum_{\lambda \in E(\mu)} \mathcal{F}(\lambda) \tag{6.2}$$

其中因子 2 来自 $E(\nu)$ 中与 $E(\mu)$ 中一个支撑点相对应的两个支撑点，并且

$$2\mathcal{F}(x) = 2\mathcal{F}_{\mathrm{HP}(\mathtt{d})}(e^{\mathrm{i}\arccos(x/2)}) = 2\int_{x_{\mathtt{d}}}^{x} (1+\mathtt{d}) \frac{\sqrt{t - x_{\mathtt{d}}}}{(2-t)\sqrt{2+t}}\, dt = \mathcal{F}_{\mathrm{KMK}(2\mathtt{d},0)}(x). \tag{6.3}$$

因此，我们得到 (3.17) 左端的一个特例。考察在对称测度 ν 处取值的 (3.50) 右端，可以看到，变形 V 系数 γ_k 就是常规 V 系数 α_k。但根据关系式 (4.4)，它们是 $\mu =$Sz(ν) 的典范矩 u_k。因此，右端变为

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1-u_k^2}{1-\gamma_{\mathtt{d}}^2} - 2\mathtt{d} \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1-u_k}{1-\gamma_{\mathtt{d}}} = -(1+2\mathtt{d}) \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1-u_k}{1-\gamma_{\mathtt{d}}} - \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1+u_k}{1+\gamma_{\mathtt{d}}}\,. \tag{6.4}$$

测度 KMK(2d, 0) 的所有典范矩都等于 $\gamma_{\mathtt{d}}$，因此 (6.4) 等于 (3.15) 中给出的 $I_J(\mu)$。我们得到了与 KMK(2d, 0) 对应的求和规则。

考虑 DG 映射，并设 μ 支撑于 $[-2,2]$ 且为对称测度。若 ν 是支撑于 $\mathbb{T}$ 的对称测度，满足 $\mathrm{DG}_1(\nu) = \mu$ 和 $\nu \in \mathcal{S}_1^{\mathbb{T}}(\theta_{\mathtt{d}}, 2\pi - \theta_{\mathtt{d}})$，则 $\mu \in \mathcal{S}_1^{\mathbb{R}}(-\hat{}x_{\mathtt{d}}, \hat{}x_{\mathtt{d}})$。随后可将 (3.50) 的左端变换为

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}(\mathrm{HP}(\mathtt{d})|\nu) + \sum_{\lambda \in E(\nu)} \mathcal{F}_{\mathrm{HP}(\mathtt{d})}(\lambda) \\ &= \mathcal{K}(\mathrm{KMK}(\mathtt{d})|\mu) + \sum_{\lambda \in E(\mu)} \mathcal{F}(\lambda). \end{aligned} \tag{6.5}$$

其中 $x > \hat{}x_{\mathtt{d}}$

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_{\mathrm{HP}(\mathtt{d})}(e^{2\mathrm{i}\arccos(x/2)}) = \mathcal{F}_{\mathrm{KMK}(\mathtt{d})}(x),$$

由此得到 KMK 求和规则 (3.17) 的左端。转而考察右端，我们首先注意到，根据 (4.8)，μ 的典范矩满足

$$u_{2k+1}(\mu) = 0\ ,\ u_{2k}(\mu) = \alpha_{k-1}(\nu)\,,$$

因此

$$\begin{aligned} H_{\mathtt{d}}(\gamma_{k-1}) = H_{\mathtt{d}}(\alpha_{k-1}) &= -\log \frac{1-\alpha_{k-1}^2}{1-\gamma_{\mathtt{d}}^2} - 2\mathtt{d} \log \frac{1-\alpha_{k-1}}{1-\gamma_{\mathtt{d}}} \\ &= -(1+2\mathtt{d}) \log \frac{1-u_{2k}}{1-\gamma_{\mathtt{d}}} - \log \frac{1+u_{2k}}{1+\gamma_{\mathtt{d}}} \\ &= \mathcal{H}_e^{\kappa,\kappa}(u_{2k}) \end{aligned}$$

由于 $\gamma_{\mathtt{d}} = u^{\mathtt{d}, \ {}_e{}^{\mathtt{d}}}$。对于奇数指标，我们有 $\mathcal{H}^{\mathtt{d}, \ {}_o{}^{\mathtt{d}}}(u_{2k-1}) = \mathcal{H}^{\mathtt{d}, \ {}_o{}^{\mathtt{d}}}(0) = 0$，因为$\mu$ 和参考测度都是对称的。由此可知，DG 求和规则的右端恰好变换为对称测度的 KMK 求和规则的右端。

6.3. 从 GW 出发。现在我们讨论如何从关于 GW(g) 的求和规则 (3.41) 出发，得到新的求和规则，其中 $-1 \le \mathsf{g} \le 0$。应用 Szeg˝o 映射可得到关于 (5.6) 中μ_{g} 的求和规则，即贝塔分布的混合分布。另一方面，映射 DG_1 可得到关于 SC 与反正弦分布的混合分布的求和规则。

6.3.1. 采用 Sz。设 μ 是 $[-2,2]$ 上的一个测度，且 $\nu \in \mathcal{M}_{1,s}(\mathbb{T})$ 满足 Sz(ν) $= \mu$。那么，将 (3.36) 的左端应用于 ν，由 (6.1) 得

$$\mathcal{K}(\mathrm{GW}(\mathsf{g})|\nu) = \mathcal{K}(\mu_{\mathsf{g}}|\mu). \tag{6.6}$$

在 (3.36) 的右端取 ν 的值时，只出现实 V 系数。由关系式 (4.4)，我们得到支撑为 $[-2,2]$的 μ 的求和规则:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\mu_{\mathsf{g}}|\mu) = H(\mathsf{g}) + \frac{\mathsf{g}}{2} - \frac{\mathsf{g}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(u_k - u_{k-1})^2 \\ + \sum_{k=1}^{\infty} -\log(1-u_k^2) + \mathsf{g}u_k^2,\end{aligned} \tag{6.7}$$

其中 u_k 是 μ 的典范矩。

注4。当 $\mathsf{g} = -1$ 时，(6.7) 变为

$$\mathcal{K}(\mu_{-1}|\mu) = \frac{1}{2} - \log 2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(u_{k+1} - u_k)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} -\log(1-u_k^2) - u_k^2, \tag{6.8}$$

这是 [39, 公式 (2.8.6)] 的一个版本。但

$$\mu_{-1} = \mathcal{D}(2,-2) = T(\mathrm{MP}_1)\,, \tag{6.9}$$

其中 $T\colon \xi \mapsto \xi - 2$，因此根据 (6.1)

$$\mathcal{K}(\mu_{-1}|\mu) = \mathcal{K}(\mathrm{MP}_1\,|T^{-1}(\mu)) \tag{6.10}$$

对应于 $\mathcal{K}(\mathrm{MP}_1\,|T^{-1}(\mu))$ 的求和规则右端使用与 $T^{-1}(\mu)$ 相关联的系数 (z_k)。为了得到关于 (u_k) 的表达式，我们注意到，若a_k, b_k 是 μ 的 J 系数，则 $T^{-1}(\mu)$ 的 J 系数为

$$\tilde{a}_k = a_k, \quad \tilde{b}_k = b_k + 2. \tag{6.11}$$

根据 (2.5)，将 a_k 和 b_k 分解为 μ 的典范矩 u_k，并使用 (2.4) 中定义的参数 (z_k)，我们得到以下关系

$$z_1(T^{-1}(\mu)) = 2(1+u_1)(\mu), \quad z_k(T^{-1}(\mu)) = (1-u_{k-1}(\mu))(1+u_k(\mu)), \quad (k \ge 1). \tag{6.12}$$

结合关于 MP_1 的求和规则 (3.7) 与 (6.12)，我们得到恒等式

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}(2,-2)|\mu) = \sum_{k=1}^{\infty}\big((1-u_{k-1})(1+u_k) - \log[(1-u_{k-1})(1+u_k)] - 1\big) \tag{6.13}$$

对于 μ，其支撑为 $[-2,2]$。

我们通过直接计算来比较式 (6.13) 和式 (6.8) 的右端。用 S_N 表示式 (6.13) 右端截至 N 的部分和。显然，我们可以写出

$$S_N = \frac{1}{2} - \log 2 + u_N - \log(1+u_N) - \frac{u_N^2}{2} \tag{6.14}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(u_k - u_{k-1})^2 + \sum_{k=1}^{N-1}(-\log(1-u_k^2) - u_k^2) \tag{6.15}$$

（回想一下 $u_0 = -1$）。若（6.7）的右端有限，则引理（3.39）保证

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^4 < \infty \ , \ \sum_{k=1}^{\infty}(u_{k+1} - u_k)^2 < \infty \ . \tag{6.16}$$

因此，特别是 $u_N \to 0$ ，且（6.15）中的两个求和收敛。由此我们得到（6.7）。反之，若（6.16）中的某个条件不成立，则有$S_N \to \infty$，因为（6.14）的右端有下界 $-2\log 2 - 1$

6.3.2. 使用 DG。回想 $\mathrm{DG}_1(\mathrm{GW}(\mathsf{g})) = \rho_{\mathsf{g}}$ ，如（5.8）所示。若 μ 在 $[-2,2]$ 上对称且支撑于 $[-2,2]$ ，并且 ν 在 $\mathbb{T}$ 上对称，使得 $\mathrm{DG}_1(\nu) = \mu$，则由（6.1）

$$\mathcal{K}(\rho_{\mathsf{g}}|\mu) = \mathcal{K}(\mathrm{GW}(\mathsf{g})|\nu) \tag{6.17}$$

现在，在求和规则（3.36）中， ν 的 V 系数为实数；利用（4.8），我们可以将最后一个恒等式改写为

$$\mathcal{K}(\rho_{\mathsf{g}}|\mu) = H(\mathsf{g}) + \frac{\mathsf{g}}{2} - \frac{\mathsf{g}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(u_{2k} - u_{2k-2})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} -\log(1-u_{2k}^2) + \mathsf{g}u_{2k}^2. \tag{6.18}$$

这里， u_k 是 μ的第 k个典范矩。以下定理给出了右端的一种替代表达形式，它是将关于 SC 和反正弦分布的两个求和规则合并得到的。

定理6.1. 对于关于 μ 对称且支撑在 $[-2,2]$ 和 $-1 \le \mathsf{g} \le 0$上的情形，

$$\mathcal{K}(\rho_{\mathsf{g}}|\mu) = C_{\mathsf{g}} + |\mathsf{g}|\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 - 1 - \log a_k^2) + (1-|\mathsf{g}|)\sum_{k=1}^{\infty}\log a_k^2 \tag{6.19}$$

其中

$$C_{\mathsf{g}} = -|\mathsf{g}|(1-\log 2) + 1 - \sqrt{1-\mathsf{g}^2} + \log\frac{1+\sqrt{1-\mathsf{g}^2}}{2}\,. \tag{6.20}$$

证明。由 (5.8)， $\rho_{\mathsf{g}} = |\mathsf{g}|\,\mathrm{SC} + (1-|\mathsf{g}|)$ 反正弦分布，再应用命题 8.2，得到

$$\mathcal{K}(\rho_{\mathsf{g}} \mid \mu) = |\mathsf{g}|\big(\mathcal{K}(\mathrm{SC}\,|\mu) - \mathcal{K}(\mathrm{SC}\,|\rho_{\mathsf{g}})\big) + (1-|\mathsf{g}|)\big(\mathcal{K}(\mathrm{Arcsine}\,|\mu) - \mathcal{K}(\mathrm{Arcsine}\,|\rho_{\mathsf{g}})\big) \tag{6.21}$$

由 Killip-Simon 求和规则（定理 3.1）和 (3.19)，我们分别知道 $\mathcal{K}(\mathrm{SC}\,|\mu)$ 和 $\mathcal{K}($反正弦分布 $|\mu)$ 是 J 系数的函数。这给出了 (6.19) 右端中依赖于系数的部分。为计算常数 C_{g} ，我们使用 (6.1)，于是

$$\begin{aligned} C_{\mathsf{g}} &= -|\mathsf{g}|\mathcal{K}\left(\mathrm{SC}\,|\rho_{\mathsf{g}}\right) - (1-|\mathsf{g}|)\mathcal{K}\left(\mathrm{Arcsine}\,|\rho_{\mathsf{g}}\right) \\ &= -|\mathsf{g}|\mathcal{K}(\mathrm{GW}(-1)|\,\mathrm{GW}(\mathsf{g})) - (1-|\mathsf{g}|)\mathcal{K}(\mathrm{UNIF}\,|\,\mathrm{GW}(\mathsf{g})). \end{aligned}$$

随后借助公式（7.5）]计算 C_{g} 的最终值。 □

注5. 当 $\mathsf{g} \in (-1,1]$ 时，我们可以使用替代表述（3.41），并利用（4.7）和（4.8）计算右端。

6.3.3. 使用 DVZ。让我们再次将讨论限制在 $\mathsf{g} = -1$ 的情形。

由于 $\mathrm{DG}_1(\mathrm{GW}(-1)) = \mathrm{SC}$，根据 (4.14)，测度 $\hat{}\mu = \mathrm{DVZ}(\mathrm{GW}(-1))$ 在 $[-2,2]$ 上为

$$d\hat{\mu}(x) = \frac{2+x}{2} d\,\mathrm{SC}(x) = \frac{1}{2\pi}(2+x)^{3/2}(2-x)^{1/2}dx\,.$$

于是，我们可以如下改写求和规则 (3.36)。假设 μ 是一个由 $[-2,2]$ 支撑的非平凡测度，并且存在 $\nu \in \mathcal{M}_{s,1}(\mathbb{T})$，使得 $\mu = \mathrm{DVZ}(\nu)$。由 (6.1) 可得

$$\mathcal{K}(\hat{\mu}|\mu) = \mathcal{K}(\mathrm{GW}(-1)|\nu) \tag{6.22}$$

与之前一样，ν 的 V 系数为实数，并且根据 (4.13) 与 μ 的 J 系数 a_k, b_k 相关。相对于 $\mathcal{K}(\mathrm{GW}(-1)|\nu)$ 的求和规则可改写为

$$\mathcal{K}(\hat{\mu}|\mu) = H(-1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 - \log(a_k^2) - 1, \tag{6.23}$$

因此，右端为 $\mathcal{I}_H(\mu)$，与 Killip-Simon 求和规则（定理 3.1）中一样，再加上负常数 $H(-1) - \frac{1}{2} = 1/2 - \log 2$。请注意，这并不意味着右端可能为负；实际上，该公式对受限类中的 μ 成立。

或者，也可以直接由定理 3.1 得到关于 $\hat{}\mu$ 的求和规则，因为

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\hat{\mu}|\mu) &= \mathcal{K}(\mathrm{GW}(-1)|\nu) = \mathcal{K}(\mathrm{DG}_1(\mathrm{GW}(-1))|\,\mathrm{DG}(\nu)) \\
&= \int \log \frac{d\,\mathrm{SC}}{d\,\mathrm{DG}(\nu)} d\,\mathrm{SC} \\
&= \int \log \frac{d\,\mathrm{SC}}{d\,\mathrm{DVZ}(\nu)} d\,\mathrm{SC} + \int \log\left(1+\frac{x}{2}\right) d\,\mathrm{SC}(x) \\
&= \mathcal{K}(\mathrm{SC}\,|\,\mathrm{DVZ}(\nu)) + \int \log\left(1+\frac{x}{2}\right) d\,\mathrm{SC}(x)
\end{aligned}$$

并且，如 [1, 练习 2.6 所示。4],

$$\int \log\left(1+\frac{x}{2}\right) \mathrm{SC}(dx) = -\log 2 + \frac{1}{2}.$$

6.4. 从 UNIF 到泊松测度。本节研究相对于测度 $\mathrm{Pois}(\zeta)$ 的求和规则，其中 $\zeta \in \mathbb{D}$ 如 (3.51) 所给出。关于泊松测度的（反向）熵称为 Arov-Krein 熵（见 [37]）。(4.16) 中定义的莫比乌斯变换 m_ζ 将 $\mathrm{Pois}(\zeta)$ 映射到均匀测度 UNIF。利用 (6.1) 和 Szeg˝o 求和规则 (3.24) 可得

$$\mathcal{K}(\mathrm{Pois}(\zeta)|\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} -\log(1 - |\alpha_k(m_\zeta(\nu))|^2)\,. \tag{6.24}$$

下文中，我们将分析这一求和规则，并得出右端的其他表达式。

我们先回顾测度的 V 系数与 Schur 函数之间的联系 [39, 第 1] 章。首先，概率测度 ν 在 $\mathbb{T}$ 上的 Carathéodory函数定义为

$$F(z) = \int \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + z}{e^{\mathrm{i}\theta} - z} d\nu(\theta) = 1 + 2z \int \frac{d\nu(\theta)}{e^{\mathrm{i}\theta} - z}\,.$$

它在 $\mathbb{D}$ 上是解析的。因此，Schur 函数由 Carathéodory函数定义如下：

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{F(z) - 1}{F(z) + 1} = \frac{1}{z} - \frac{2}{z(F(z) + 1)} \tag{6.25}$$

反过来，我们有

$$F(z) = \frac{1 + zf(z)}{1 - zf(z)}, \quad \frac{F(z) - 1}{z} = \frac{2f(z)}{1 - zf(z)}\,. \tag{6.26}$$

V 系数可通过经典的 Schur 算法由 f 得到：

$$S(g)(z) = \frac{1}{z}\frac{g(z) - g(0)}{1 - \overline{g(0)}g(z)} \tag{6.27}$$

$$S^{[0]}(g) = g\ ,\ S^{[k+1]}(g) = S \circ S^{[k]} \tag{6.28}$$

$$\alpha_k = S^{[k]} f(0)\,. \tag{6.29}$$

为处理泊松情形，我们使用 Schur 算法的一个扩展，称为 Nevanlinna-Pick 算法，其定义如下。

对于 $\rho \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$，按 [35] 中的设定

$$S_\rho(g) = \frac{\omega(\rho)}{m_\rho}\frac{g - g(\rho)}{1 - \overline{g(\rho)}g}\ ,\ \omega(\rho) = -\frac{\rho}{|\rho|} \tag{6.30}$$

$$S_\rho^{[0]}(g) = g\ ,\ S_\rho^{[k+1]} = S_\rho \circ S_\rho^{[k]} \quad (k \geq 0)\,, \tag{6.31}$$

这里回顾一下， m_ρ 定义于 (4.16) 中。为简化起见，令 $S_0 = S$。

于是我们得到以下新的求和规则，其证明推迟到第 7 节。

定理 6.2. 对于 $\mathbb{T}$ 上具有 Schur 函数 f 的非平凡测度 ν，

$$\mathcal{K}(\mathrm{Pois}(\zeta)|\nu) = -\log(1 - |m_{\bar{\zeta}} \circ f(\zeta)|^2) + \sum_{k=1}^{\infty} -\log(1 - |S_\zeta^{[k]}(f)(\zeta)|^2)\,. \tag{6.32}$$

注 6. 出于无穷乘积收敛方面的技术原因，Nevanlinna-Pick 理论中引入的前因子 ω 在此可以省略。注意到 $S_\zeta(\omega g) = \omega S_\zeta(g)$，我们可以令

$$\hat{S}_\zeta = \omega^{-1} S_\zeta$$

并递归地得到

$$\hat{S}_\zeta^{[2k]} = S_\zeta^{[2k]}\ , \hat{S}_\zeta^{[2k+1]} = \omega S_\zeta^{[2k+1]}$$

因此，(6.32) 中的求和对于用 $\hat{S}_\zeta^{[k]}$ 代替 $S_\zeta^{[k]}$ 也成立。

还有另一条泊松求和公式，它是 Bessonov [6] 最近一个公式的直接推论。我们既无法对它给出任何概率解释，也无法通过某条其他求和规则的推前来得到它。这条泊松求和公式的证明也推迟到第 7 节。

命题 6.3. 对于 ν 上一个具有 Schur 函数 f 的非平凡测度 $\mathbb{T}$，

$$\mathcal{K}(\mathrm{Pois}(\zeta)|\nu) = \log \frac{|1-\zeta f(\zeta)|^2}{(1-|\zeta|^2)(1-|f(\zeta)|^2)} + \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1-|\zeta S_0^{[k]}(f)(\zeta)|^2}{1-|S_0^{[k]}(f)(\zeta)|^2}\,. \tag{6.33}$$

上述级数的各项均为正，因为

$$|1-\zeta f|^2 - (1-|\zeta|^2)(1-|f|^2) = |\bar{\zeta} - f|^2 \geq 0,$$

且 $1-|\zeta f|^2 > 1-|f|^2$，因此 (6.33) 的右端中的所有项均为正。最后，我们给出与上述求和规则相对应的结论。

注 7. 由 (6.32) 和 (6.33) 可推出，Kullback-Leibler 散度$\mathcal{K}$(泊松测度(ζ)|ν) 有限，当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} |S_{\zeta}^{[k]}(f)(\zeta)|^2 < \infty,$$

或者等价地,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |S_0^{[k]}(f)(\zeta)|^2 < \infty\,.$$

7. Proofs of Theorem 6.2 and Prop. 6.3

7.1. 定理 6.2 的证明。单位圆正交多项式理论在许多方面都是一种逼近理论。V 系数所携带的信息，与在 0 处取值的迭代舒尔函数所携带的信息相同。这依赖于 Schur 函数及其在 0 处的导数。如果我们关注 Schur 函数及其在另一点 $\zeta \in \mathbb{D}$ 处的导数，就会进入单位圆正交多项式理论的扩展，即正交有理函数（ORF）理论。以下论述主要依据 [35]（另见 [12]）。

我们从有理函数序列开始

$$1, m_{\zeta}, (m_{\zeta})^2, ..., (m_{\zeta})^n, ...$$

并在 $L^2(\nu)$ 中应用格拉姆-施密特正交化，得到

$$1, \varphi_1^o, \varphi_2^o, ...$$

我们加上上标 o，以强调正交有理函数这一方面。令 (Φ_n^o) 表示相应的首一正交有理函数。

实际上，我们有

$$\int \overline{\Phi_j^o(z)}\Phi_k^o(z)d\nu(z) = \kappa_k\delta_{jk}$$

如果令 $z = m_{-\zeta}(\tau)$，则得到

$$\int \overline{\Phi_j^o \circ m_{-\zeta}(\tau)}\Phi_k^o \circ m_{-\zeta}(\tau)d\nu^o(\tau) = \kappa_k\delta_{jk},,$$

其中，$\nu^o = \nu \circ m_{-\zeta} = m_{\zeta}(\nu)$是 ν 经由 m_{ζ}得到的推前。当然，$\Phi_k^o \circ m_{-\zeta}$是相对于 ν^o的首一正交多项式（单位圆）。

在 V 系数层面，我们有

$$\Phi_k^o \circ m_{-\zeta}(0) = \Phi_k^o(\zeta), \quad \alpha_{k-1}(m_{\zeta}(\nu)) = -\overline{\Phi_k^o(\zeta)}\,. \tag{7.1}$$

现在，让我们研究这些舒尔函数之间的关系。我们将 F 和 f分别记为 ν和 F^o的 Carathéodory 函数与 Schur 函数，并将 f^o 记为$\nu^o = m_\zeta(\nu)$的函数。由 $\tau = m_{-\zeta}(z)$，我们得到

$$\begin{aligned} F^o(z) &= 1 + 2z \int \frac{d\nu^o(\theta)}{e^{\mathrm{i}\theta} - z} = 1 + 2z \int \frac{1 - \bar{\zeta} e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta}(1 - \bar{\zeta} z) - \zeta - z} d\nu(\theta) \\ &= \frac{1 - z\bar{\zeta}}{1 + z\bar{\zeta}} + \frac{2z(1 - \tau\bar{\zeta})}{(1 + z\bar{\zeta})} \int \frac{d\nu(\theta)}{e^{\mathrm{i}\theta} - \tau} \,. \end{aligned} \tag{7.2}$$

由于

$$\int \frac{d\nu(\theta)}{e^{\mathrm{i}\theta} - \tau} = \frac{F(\tau) - 1}{2\tau} \,, \tag{7.3}$$

我们得到关系式

$$F^o(z) = \frac{1 - z\bar{\zeta}}{1 + z\bar{\zeta}} + \frac{z(1 - \tau\bar{\zeta})}{\tau(1 + z\bar{\zeta})}(F(\tau) - 1). \tag{7.4}$$

由 (6.25) 可知，这意味着

$$f^o(z) = \frac{-\bar{\zeta} + (1 - \tau\bar{\zeta})\frac{f(\tau)}{1 - \tau f(\tau)}}{1 + z(1 - \tau\bar{\zeta})\frac{f(\tau)}{1 - \tau f(\tau)}} = \frac{f(\tau) - \bar{\zeta}}{1 + f(\tau)(z - \tau z\bar{\zeta} - \tau)} = \frac{f(\tau) - \bar{\zeta}}{1 - \bar{\zeta} f(\tau)} \tag{7.5}$$

换言之

$$f^o = m_{\bar{\zeta}} \circ f \circ m_{-\zeta} \,. \tag{7.6}$$

因此，第一个 V系数为

$$\alpha_0^o = f^o(0) = \left(m_{\bar{\zeta}} \circ f\right)(\zeta) = \frac{f(\zeta) - \bar{\zeta}}{1 - \bar{\zeta} f(\zeta)} \,.$$

为计算高阶系数，我们先从两个辅助结果入手。注意到

$$\begin{aligned} S_\alpha(m_\beta \circ h)(z) &= \frac{\omega(\alpha)}{m_\alpha(z)} \frac{m_\beta \circ h(z) - m_\beta \circ h(\alpha)}{1 - \overline{m_\beta \circ h(\alpha)} m_\beta \circ h(z)} = \frac{\omega(\alpha)}{m_\alpha(z)} \frac{\frac{h(z) - \beta}{1 - \bar{\beta} h(z)} - \frac{h(\alpha) - \beta}{1 - \bar{\beta} h(\alpha)}}{1 - \frac{\overline{h(\alpha)} - \bar{\beta}}{1 - \beta \overline{h(\alpha)}} \frac{h(z) - \beta}{1 - \bar{\beta} h(z)}} \\ &= \varepsilon(\alpha, \beta, h) \frac{\omega(\alpha)}{m_\alpha(z)} \frac{h(z) - h(\alpha)}{1 - \overline{h(\alpha)} h(z)} \end{aligned} \tag{7.7}$$

with

$$\varepsilon(\alpha, \beta, h) = \frac{1 - \beta\overline{h(\alpha)}}{1 - \bar{\beta} h(\alpha)} \in \mathbb{T}.$$

由此，我们得到了第一个辅助结果

$$S_\alpha(m_\beta \circ h) = \varepsilon(\alpha, \beta, h) S_\alpha(h) \,. \tag{7.8}$$

第二个辅助结果如下

$$S_0(h \circ m_\gamma)(z) = \frac{-1}{z} \frac{h \circ m_\gamma(z) - h(-\gamma)}{1 - \overline{h(-\gamma)} h \circ m_\gamma(z)} = -\overline{\omega(\gamma)} S_{-\gamma}(h)(m_\gamma(z)) \,. \tag{7.9}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} S_0(f^o) = S(m_{\bar{\zeta}} \circ f \circ m_{-\zeta}) &\overset{(7.9)}{=} -\overline{\omega(-\zeta)} \left[S_\zeta(m_{\bar{\zeta}} \circ f)\right] \circ m_{-\zeta} \\ &\overset{(7.8)}{=} \varepsilon_1 S_\zeta(f) \circ m_{-\zeta}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

¯其中 $\overline{\varepsilon_1 = \omega}(\zeta)\varepsilon(\zeta,\zeta,f) \in \mathbb{T}$，因此

$$\alpha_1^o = S_0(f^o)(0) = \varepsilon_1 S_\zeta(f)(\zeta)\,. \tag{7.11}$$

这一表示可以迭代。假设

$$S_0^{[k]}(f^o) = \varepsilon_k \left[S_\zeta^{[k]}(f)\right] \circ m_{-\zeta}, \quad \text{with } |\varepsilon_k| = 1\,, \tag{7.12}$$

当 $\varepsilon \in \mathbb{T}$ 时，我们有 $S_\alpha(\varepsilon h) = \varepsilon S_\alpha(h)$

$$\begin{aligned} S_0^{[k+1]}(f^o) &= S_0\left[S_0^{[k]}(f^o)\right] = \varepsilon_k S\left[\left[S_\zeta^{[k]}(f)\right] \circ m_{-\zeta}\right] \\ &\overset{(7.9)}{=} -\overline{\omega(-\zeta)}\varepsilon_k \left[S_\zeta\left[S_\zeta^{[k]}(f)\right]\right] \circ m_{-\zeta} = \varepsilon_{k+1}\left[S_\zeta^{[k+1]}(f)\right] \circ m_{-\zeta}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

归纳可得，对每个 $k \geq 0$，(7.12) 都成立，并且

$$\alpha_k(m_\zeta(\nu)) = \alpha_k^o = S_0^{[k]}(f^0)(0) = \varepsilon_k S_\zeta^{[k]}(f)(\zeta)\,. \tag{7.14}$$

由于 $|\varepsilon_k| = 1$，证明至此完成。 □

7.2. 命题 6.3 的证明。回顾一下 [6, 定理1]中的 Bessonov 公式。设 ν 是定义在 $\mathbb{T}$ 上的一个概率测度，其勒贝格分解为

$$d\nu = g_\nu dz + d\nu_s$$

（相对于均匀测度）。Bessonov 公式为

$$\log \int \frac{d\,\mathrm{Pois}(\zeta)}{dz}\, d\nu - \int (\log g_\nu)\, d\,\mathrm{Pois}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \log \frac{1-|\zeta f_k(\zeta)|^2}{1-|f_k(\zeta)|^2}\,.$$

这里，我们令 $f_k = S_0^{[k]}(f)$。由此可作如下微小变换。由于 UNIF 与 泊松测度(ζ) 彼此绝对连续，因此 g_ν $_{d}$ $_{\text{泊松测度 }(\zeta)}$ 是 ν 相对于泊松测度 (ζ) 的绝对连续部分的密度。因此我们得到，

$$\begin{aligned} -\int (\log g_\nu)\, d\,\mathrm{Pois}(\zeta) &= -\int (\log g_\nu)\, \frac{dz}{d\,\mathrm{Pois}(\zeta)} d\,\mathrm{Pois}(\zeta) - \int \log \frac{d\,\mathrm{Pois}(\zeta)}{dz} d\,\mathrm{Pois}(\zeta) \\ &= \mathcal{K}(\mathrm{Pois}(\zeta)|\nu) - \mathcal{K}(\mathrm{Pois}(\zeta)|\,\mathrm{UNIF})\,. \end{aligned}$$

此外，利用 [6]，中引理 1 证明的开头部分，我们有

$$\int \frac{d\,\mathrm{Pois}(\zeta)}{dz}\, d\nu = \frac{1-|\zeta f(\zeta)|^2}{|1-\zeta f(\zeta)|^2},$$

根据 (6.1)，通过 M¨obius 映射 m_ζ 对 Kullback–Leibler 距离进行变换，并利用 (3.24) 和 (3.53)，我们还得到

$$\mathcal{K}(\mathrm{Pois}(\zeta)|\,\mathrm{UNIF}) = \mathcal{K}(\mathrm{UNIF}\,|\,\mathrm{Pois}(\zeta)) = -\log(1-|\zeta|^2).$$

因此，我们可以写成

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathrm{Pois}(\zeta)\mid\nu) &= -\log(1-|\zeta|^2) - \log\frac{1-|\zeta f(\zeta)|^2}{|1-\zeta f(\zeta)|^2} + \sum_{k=0}^{\infty}\log\frac{1-|\zeta f_k(\zeta)|^2}{1-|f_k(\zeta)|^2} \\ &= \log\frac{|1-\zeta f(\zeta)|^2}{(1-|\zeta|^2)(1-|f(\zeta)|^2)} + \sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{1-|\zeta f_k(\zeta)|^2}{1-|f_k(\zeta)|^2}\,, \end{aligned}$$

这就是所声称的求和规则。 □

8. Appendix

8.1. HP 求和规则弱形式的解析证明。据我们所知，尚无关于求和规则 (3.4) 的解析证明。尽管如此，我们可以用极限正交多项式来表示系数侧，然后利用正交多项式文献中的一些极限定理，尝试恢复谱侧的熵，至少在没有离群值的情况下如此。

命题 8.1. 若概率测度 $\mu = h\mathrm{HP}_{\mathtt{d}}$ 满足：存在一个多项式 Q，使得 Qh 和 Qh^{-1} 在圆弧（$\theta_{\mathtt{d}}, 2\pi - \theta_{\mathtt{d}}$）上有界，则

$$\mathcal{K}(\mathrm{HP}(\mathtt{d}) \mid \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} H_{\mathtt{d}}(\gamma_k) < \infty\,. \tag{8.1}$$

这是 (3.4) 的较弱形式，因为我们对 μ施加了更强的条件。

证明。我们将在所有相对于参考测度的量上标记上标 d。

步骤 1：重写系数侧。Szeg˝o 递推式 (2.7) 与 (3.47) 蕴含：

$$\Phi_n(1) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \gamma_k)\,, \tag{8.2}$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n-1} \log|1 - \gamma_j| = \log|\Phi_n(1)|\,,$$

然后

$$\sum_{k=0}^{n-1} \log \frac{|1 - \gamma_j|}{1 - \gamma_{\mathtt{d}}} = \log \frac{|\Phi_n(1)|}{|\Phi_n^{\mathtt{d}}(1)|}\,. \tag{8.3}$$

回到正交归一多项式，我们有

$$\Phi_n(t) = \kappa_n^{-1}\varphi_n(t), \quad \kappa_n^{-2} = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - |\alpha_k|^2)$$

并且由于 $|\gamma_k| = |\alpha_k|$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} -\log \frac{1 - |\gamma_k|^2}{1 - \gamma_{\mathtt{d}}^2} = 2\log \frac{\kappa_n}{\kappa_n^{\mathtt{d}}}\,. \tag{8.4}$$

因此

$$\mathcal{S}_n := \sum_{k=0}^{n-1} H_{\mathtt{d}}(\gamma_k) = 2\log \frac{\kappa_n}{\kappa_n^{\mathtt{d}}} - 2\mathtt{d}\log \frac{|\Phi_n(1)|}{|\Phi_n^{\mathtt{d}}(1)|}\,. \tag{8.5}$$

回到归一化多项式，我们由此得到,

$$\mathcal{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} H_{\mathtt{d}}(\gamma_k) = 2(1 + \mathtt{d})\log \frac{\kappa_n}{\kappa_n^{\mathtt{d}}} - 2\mathtt{d}\log \frac{|\varphi_n(1)|}{|\varphi_n^{\mathtt{d}}(1)|}. \tag{8.6}$$

步骤 2：计算极限。我们使用经典 Mat´e-Nevai-Totik 定理关于完整单位圆 [40, 上结果的推广，该推广适用于支撑在圆弧上的测度。

9.4.1]。关于圆弧的结果归功于 Bello Hernandez 和 Lopez Lagomasino [4]。其中的定理 2 表明，如果

$$\mu = h\,\mathrm{HP}_{\mathtt{d}}$$

满足存在一个多项式 Q，使得 Qh 和 Qh^{-1} 在圆弧 $a = (\theta_{\mathtt{d}}, 2\pi - \theta_{\mathtt{d}})$ 上有界，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(\zeta)}{\varphi_n^{\mathtt{d}}(\zeta)} = D_a(h,\zeta), \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\kappa_n}{\kappa_n^{\mathtt{d}}} = D_a(h,\infty)\,,$$

在 $\mathbb{C}\setminus a$ 的紧子集上一致收敛。这里，下标 $\mathtt{a}$ 表示“圆弧”。为了理解这个极限，我们还需要一些记号（详见 [3, 第 2 节。2] ）。

Let

$$\eta(\tau) = \tau + \sqrt{\tau^2 - 1}$$

（根满足 $|\eta(\tau)| > 1$）是从 $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ 到 $\mathbb{C}\setminus\{z$ 的保角映射：$|z| \le 1\}$ 满足 $\eta(\infty) = \infty$ 且 $\eta'(\infty) > 0$。令

$$\mathtt{c} = \cot(\theta_{\mathtt{d}}/2)\,.$$

另外令

$$\nu(\zeta) = \eta\left(\frac{i}{\mathtt{c}}\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right),$$

是从 $\mathbb{C}\setminus a$ 到 $\mathbb{C}\setminus\{z$ 的保角映射：$|z| \le 1\}$。特别地

$$\nu(1) = \infty\,,\ \nu(\infty) = \eta(i/\mathtt{c}) = i\sqrt{1+2\mathtt{d}}\,.$$

根据 [3, 公式（10）], 或 [4, 引理 9], ，我们得到恒等式

$$D_a(h,\zeta) = \frac{D(h,\nu(\zeta))|D(h,\eta(i/\mathtt{c}))|}{D(h,\eta(i/\mathtt{c}))}\,,$$

其中，D 是著名的 Szeg˝o 函数的一个变体：

$$D(h,z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log[h(\tau)]\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta\right\}$$

with

$$\cot\frac{\tau}{2} = \mathtt{c}\cos\theta\,. \tag{8.7}$$

由此分别得到

$$\begin{aligned}
|D_a(h,1)| &= \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log h(\tau)d\theta\right\},\\
|D_a(h,\infty)| &= \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log[h(\tau)]\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\theta}+i\sqrt{1+2\mathtt{d}}}{e^{i\theta}-i\sqrt{1+2\mathtt{d}}}d\theta\right\}\\
&= \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log[h(\tau)]\frac{\mathtt{d}}{1+\mathtt{d}-\sqrt{1+2\mathtt{d}}\sin\theta}d\theta\right\}.
\end{aligned}$$

回到（8.6），我们看到当 $n \to \infty$ 时极限存在，且其值为

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\infty &= \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_n = 2(1+\mathtt{d})\log|D_a(h,\infty)| - 2\mathtt{d}\log|D_a(h,1)| \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log[h(\tau)]\frac{\mathtt{d}\sqrt{1+2\mathtt{d}}\sin\theta}{1+\mathtt{d}-\sqrt{1+2\mathtt{d}}\sin\theta}\,d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log[h(\tau)]\frac{\mathtt{d}\cos(\theta_\mathtt{d}/2)\sin\theta}{1-\cos(\theta_\mathtt{d}/2)\sin\theta}\,d\theta\,, \end{aligned} \tag{8.8}$$

其中 τ 和 θ 由 (8.7) 相连。实际上，将这个积分拆分成两部分，并利用 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$，可得:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\infty &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \log[h(\tau)]\mathtt{d}\cos(\theta_\mathtt{d}/2)\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos(\theta_\mathtt{d}/2)\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{1+\cos(\theta_\mathtt{d}/2)\sin\theta}\right)d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \log[h(\tau)]\frac{2\mathtt{d}\cos^2(\theta_\mathtt{d}/2)\sin^2\theta}{1-\cos^2(\theta_\mathtt{d}/2)\sin^2\theta}\,d\theta\,.\end{aligned}$$

现在，我们依次得到

$$\begin{aligned} d\theta &= \left(2\mathtt{c}\sin^2(\tau/2)\sin\theta\right)^{-1} d\tau\,, \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{\sin^2(\tau/2)-\sin^2(\theta_\mathtt{d}/2)}}{\cos(\theta_\mathtt{d}/2)\sin(\tau/2)}\,, \\ 1-\cos^2(\theta_\mathtt{d}/2)\sin^2\theta &= \frac{\sin^2(\theta_\mathtt{d}/2)}{\sin^2(\tau/2)}\,, \end{aligned}$$

因此，利用 $\mathtt{c}$ 和 $\sin(\theta_\mathtt{d}/2)$ 的值:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\infty &= -\int_{\theta_\mathtt{d}}^{2\pi-\theta_\mathtt{d}} \log[h(\tau)](1+\mathtt{d})\frac{\sqrt{\sin^2(\tau/2)-\sin^2(\theta_\mathtt{d}/2)}}{2\pi\sin(\tau/2)}\,d\tau \\ &= -\int \log h(\tau)\,\mathrm{HP}(d\tau) = \mathcal{K}(\mathrm{HP}(\mathtt{d}) \mid \mu)\,.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

8.2. 混合分布的 Kullback–Leibler 距离。设 μ_1 和 μ_2 是某个可测空间 S 上的概率测度。下述命题有助于研究相对于 μ_1 和 μ_2 的混合分布的求和规则。

命题 8.2. 设 $\tau_1, \tau_2 > 0$ 满足 $\tau_1 + \tau_2 = 1$。那么，

$$\mathcal{K}(\mu_i \mid \tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2) < \infty, \quad (i = 1, 2). \tag{8.9}$$

此外，对于 S 上的任意概率测度 μ，

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2|\mu) &= \tau_1\mathcal{K}(\mu_1|\mu) + \tau_2\mathcal{K}(\mu_2|\mu) \\ &\quad - \tau_1\mathcal{K}(\mu_1|\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2) - \tau_2\mathcal{K}(\mu_2|\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2),\end{aligned} \tag{8.10}$$

其中两边同时为有限值或无穷大。

证明。由于对于 $i = 1,\ 2$, $\mu_i \ll \tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2$ 以及

$$\frac{d\mu_i}{d(\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2)} \le \frac{1}{\tau_i}\,,$$

我们得到（8.9）。

为了证明（8.10），先来说明一个有用（但显而易见）的观察。若 ν_1 和 ν_2 是两个概率测度，且 $\nu_1 \ll \nu_2$，那么

$$K(\nu_1 \mid \nu_2) < \infty \Longleftrightarrow \int \left| \log \frac{d\nu_1}{d\nu_2} \right| d\nu_1 < \infty.$$

这由不等式 $u(\log u)_- \leq 1/e$ for $u > 0$ 得出。现在，若 $\mathcal{K}($ $\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2 \mid \mu) < \infty$，则

$$\int \left| \log \frac{d(\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2)}{d\mu} \right| d(\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2) < \infty$$

因此，对于 $i = 1$，2

$$\int \left| \log \frac{d(\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2)}{d\mu} \right| d\mu_i < \infty$$

and

$$\int \log \frac{d(\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2)}{d\mu} d\mu_i < \infty$$

最终

$$\mathcal{K}(\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2 \mid \mu) = \sum_{i=1}^{2} \tau_i \int \log \frac{d(\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2)}{d\mu} d\mu_i$$

将 $\sum_{i=1}^{2} \tau_i \mathcal{K}(\mu_i \mid \tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2)$ 相加，得到

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}(\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2 \mid \mu) + \sum_{i=1}^{2} \tau_i \mathcal{K}(\mu_i \mid \tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2) \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{2} \tau_i \int \log \left(\frac{d(\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2)}{d\mu} \times \frac{d\mu_i}{d(\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2)} \right) d\mu_i \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{2} \tau_i \mathcal{K}(\mu_i \mid \mu)\,. \end{aligned}$$

反过来，若对于 $i = 1$，2，$\mathcal{K}(\mu_i \mid \mu)$ 有限，则由凸性可知 $\mathcal{K}(\tau_1\mu_1 + \tau_2\mu_2 \mid \mu)$ 有限。□

致谢。谨此感谢 ANR-3IA 图卢兹人工与自然智能研究所的支持。

References

[1] G. Anderson、A. Guionnet 和 O. Zeitouni。 *An introduction to random matrices*。剑桥大学出版社，剑桥，2010年。[2] T.H. Baker、P.J. Forrester 和 P.A. Pearce。具有有效广延外部电荷的随机矩阵系综。 *J. Phys. A*，31(29):6087，1998年。[3] M. Bello Hernandez 和 E. Mi˜na Diaz。单位圆圆弧上正交多项式的强渐近行为与弱收敛。 *J. Approx. Th.*，111(2):233–255，2001年。[4] M. Bello Hernandez 和 G. Lopez Lagomasino。单位圆圆弧上正交多项式的比值渐近与相对渐近。 *J. Approx. Th.*，92(2):216–244，1998年。[5] D. Bessis 和 P. Moussa。迭代多项式映射的正交性质。

Comm. , ( ): – 。

Math. Phys. 88 4 503 529, 1983

[6] R. Bessonov 和 S. Denisov。正交多项式的零点集、熵与逐点渐近性质。 *J. Funct. Anal.*, 280(12):109002，2021年。[7] A. Borodin 和 G. Olshanski。无限随机矩阵与遍历测度。

Comm. Math. , ( ): *Phys.* 223 1 87 123, 2001 – 。[8] P. Bourgade 、 A. Nikeghbali 和 A. Rouault。圆形 Jacobi 系综与变形的 Verblunsky 系数。 *Int. Math. Res. Not.*, 23:4357–4394，2009年。[9] C. F. Bracciali、X. Li 和 A. Sri Ranga。频率分析中的实正交多项式。*Mathematics of computation*，74(249):341–362，2005年。[10] J. Breuer、B. Simon 和 O. Zeitouni。谱理论中的大偏差与求和规则——一种教学方法。 *J. Spectr. Theory*, 8(4):1551–1581，2018年。[11] J. Breuer、B. Simon 和 O. Zeitouni。大偏差与 Lukic 猜想。

Duke Math. , ( ): *J.* 167 15 2857 –2902，2018 年。[12] A. Bultheel 、 P. Gonz´alez-Vera 、 E. Hendriksen 和 O. Njastad。 *Orthogonal rational functions*。剑桥大学出版社，1999年。[13] M. J. Cantero、F. Marcell´an、L. Moral 和 L. Vel´azquez。CMV 矩阵的 Darboux 变换。 *Adv. Math.*，298:122–206，2016年。[14] M.J. Cantero、F. Marcell´an、L. Moral 和 L. Vel´azquez。连接单位圆与实数轴上正交多项式的 CMV 关系。 *J. Approx. Th.*，266:105579，2021年。[15] T. S. Chihara。 *An introduction to orthogonal polynomials*。《数学及其应用》，第13卷。Gordon and Breach 科学出版社，纽约-伦敦-巴黎，1978年。[16] M. S. Costa、H. M. Felix 和 A. Sri Ranga。单位圆上的正交多项式与链序列。 *J. Approx. Th.*，173:14–32，2013年。[17] P. Delsarte 和 Y. Genin。分裂 Levinson 算法。

IEEE Trans. Acoust. Speech Signal , ( ): *Process.* 34 3 470 478, 1986 – 。[18] Ph. Delsarte 和 Y. Genin。Toeplitz 矩阵代数结构的三对角方法，第一部分：基本结果。 *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*，12(2):220–238，1991年。[19] Ph. Delsarte 和 Y. Genin。Toeplitz 矩阵代数结构的三对角方法，第二部分：零点与特征值问题。 *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*，12 448, 1991 3 432( ): – 。[20] M. Derevyagin、L. Vinet 和 A. Zhedanov。CMV 矩阵与小型及大型 1 J acobi 多项式。 *Constr. Approx.*，36(3):513–535，2012年。[21] H. Dette 和 W. Studden。 *The theory of canonical moments with applications in statistics, probability and analysis* 1997 ，。Wiley 概率论与统计学丛书，[22] 。*Ann. Probab.*F. Gamboa 和 L.-V. Lozada-Chang。随机幂矩问题的大偏差。*Ann. Probab.*，32(3B):2819–2837，2004年。[23] F. Gamboa、J. Nagel 和 A. Rouault。通过大偏差得到的求和规则。 *J. Funct. Anal.*，270 509: –559，2016年。[24] F. Gamboa、J. Nagel 和 A. Rouault。单位圆上谱测度的求和规则与大偏差。 *Random Matrices. Theory Appl.*，6(1):1750005，49，2017年。[25] F. Gamboa、J. Nagel 和 A. Rouault。有隙情形下的高阶 Szeg˝o 定理。准备中，2023年。[26] F. Gamboa 和 A. Rouault。典范矩与随机谱测度。

J. Theoret. , : – *Probab.* 23 1015 2015 10 1007 10959 015 1038，2010年。同一刊物中的勘误 ( ) doi . /s - - 0653-5。[27] F. Gamboa 和 A. Rouault。随机谱测度与求和规则的大偏差。*Appl. Math. Res. Express*，2011(2):281–307，2011年。[28] L. Golinskii、A. Kheifets、F. Peherstorfer 和 P. Yudistkii。关于与 Guseinov 类 Jacobi 参数相对应的一类 Verblunsky 参数。 *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*，6 3 277 290，338，341，2010 ( ): – 。[29] D.J. Gross 和 E. Witten。大 N 格点规范理论中可能存在的三阶相变。 *Phys. Rev. D*，21(2):446–453，1980年。[30] F. Hiai 和 D. Petz。 *The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy*，第77卷，丛书名为 *Mathematical Surveys and Monographs*。美国数学学会，普罗维登斯，2000年。[31] L.K. Hua。 *Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains* 6 ，丛书第 卷， *Translations of Mathematical Monographs*。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1963年。[32] R. Killip 和 B. Simon。Jacobi 矩阵的求和规则及其在谱理论中的应用。 *Ann. of Math. (2)*，158(1):253–321，2003年。

[33] R. Killip 和 B. Simon。Jacobi 矩阵的求和规则及其在谱理论中的应用。 *Ann. of Math.*, 158(1):253–321, 2003. [34] Y.A. Neretin。酉群及酉群射影极限上的华型积分。 *Duke Math. J.*, 114(2), 2002. [35] O. Nj ̊astad 和 L. Vel ´azquez。Wall有理函数与正交有理函数的Khrushchev公式。 *Constr. Approx.*, 30(2):277–297, 2009. [36] D. Pickrell。无限维格拉斯曼流形上的测度。 *J. Funct. Anal.*, 70 2 323 356, 1987 ( ): – . [37] I. Roitberg 和 A.L. Sakhnovich。Arov–Krein熵泛函与不定插值问题。 *Integr. Equ. Oper. Theory*, 91(6):50, 2019. [38] A. Rouault。高阶Sz eg ″ 266 105578, o定2021
理的矩阵版本。 *J. Approx. Theory*, : .[39] B. Simon。
Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 1: Classical theory. 专题出版物。美国数学会第54卷，第1部分。美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2005。[40] B. Simon。
Orthogonal polynomials on the unit circle. Part 2: Spectral theory. 专题出版物。美国数学会第51卷，第2部分。美国罗德岛州普罗维登斯：美国数学会，2005。[41] B. Simon。
Szegő's theorem and its descendants。M. B. Porter讲座。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，2011。[42] S. Wadia。关于 2 *arXiv preprint* 维
arXiv:1212.2906 2012
U(N)格点规范理论的研究。，。[43] A. Zhedanov。关于若干类定义在单位圆弧上的多项式，它们与区间上的对称正交多项式相关。 *J. Approx. Theory*, 94 106, 1998 1 73( ): – .

Université Paul Sabatier, Institut de Mathématiques de Toulouse, 31062-Toulouse Cedex 9, France and ANITI,*Email address*: fabrice.gamboa@@math.univ-toulouse.fr
Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, 44227 Dortmund, Germany*Email address*: jan.nagel@tu-dortmund.de
Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Université Paris-Saclay, 78035-Versailles Cedex France*Email address*，通讯作者： alain.rouault@uvsq.fr