盒相交图的功能度

Cl´ement Dallard奥尔良大学，卢瓦尔河谷国立应用科学学院，LIFO EA 4022，法国奥尔良，clement.dallard@univ-orleans.fr

VadimLozin Martin Milani˘c数学研究所，华威大学；FAMNIT 与 IAM，普里莫斯卡大学；V.Lozin@warwick.ac.uk martin.milanic@upr.si

˘Kenny Storgel新梅斯托信息研究学院，
普里莫斯卡大学 FAMNIT，
kennystorgel.research@gmail.com

Viktor Zamaraev计算机科学系，利物浦大学，
Viktor.Zamaraev@liverpool.ac.uk

2023年11月7日

arXiv:2301.09493v2 [math.CO] 3 Nov 2023

摘要

功能度是一种图复杂度度量，可推广多种参数，例如顶点度、退化度、团宽度或孪生宽度。本文证明，在 R^d 中，盒相交图的功能度有界（即区间图的功能度有界）；而在 R^d 中，盒相交图的功能度无界。我们还研究一种称为对称差的参数，它介于孪生宽度与功能度之间，并证明该参数在区间图和 R^d 中的单位盒相交图上均无界。

关键词：区间图；盒相交图；图功能度；对称差；孪生宽度

1 引言

图功能度这一概念为多种图参数提供了一个统一的推广，例如最大顶点度、退化度、团宽度和孪生宽度。就这些参数中任一参数有界都意味着功能度有界而言，反之却未必成立。最初，这一概念以隐含形式出现于[2] 关于图表示的研究中。文献[1], 给出了图功能度的正式定义，并证明了多种图类的功能度有界或无界。特别是，文献 [1]证明了排列图、线图和单位区间图的功能度有界。然而，文献 [1]留下了整个区间图类的功能度是否有界这一开放问题。本文通过证明任意区间图的功能度至多为 8，回答了这一问题。

我们注意到，区间图恰好是 $\mathbb{R}^1$ 中的盒相交图（所有定义见第2节第2节）。这一观察与我们关于区间图的结果结合，自然引出了一个问题：在 $\mathbb{R}^d$ 的$d > 1$中，盒相交图的功能度是有界还是无界？我们通过证明在 $d \geq 3$ 中，功能度是无界的，回答了这个问题。

我们还注意到， [1] 中证明的单位区间图结果，实际上比证明该类图的功能度有界更强。该结果研究了功能度的一个受限版本，称为对称差。从某种意义上说，这一参数介于孪生宽度与功能度之间：有界孪生宽度意味着有界对称差，而有界对称差又意味着有界功能度，但一般而言，反向推论均不成立。文献 [1] 证明了单位区间图的对称差有界。本文通过给出一个明确构造的区间图，其对称差无界（因而孪生宽度也无界），表明这一结果无法推广到区间图。最后，我们证明，在 $\mathbb{R}^1$中，单位区间图类（即单位盒相交图类）的对称差有界这一性质，无法推广到 $\mathbb{R}^2$中的单位盒相交图。不过， $\mathbb{R}^2$ 中单位盒相交图的功能度仍是一个具有挑战性的开放问题。

本文的组织结构如下。与本文主题相关的所有定义和符号均见第2节2Section 。

在第3节3 Section 中，我们证明任意区间图的功能度至多为 8。随后，在第4节4Section 中，我们证明 $\mathbb{R}^3$ 中的盒相交图的功能度无界。最后，在第5节5 Section 中，我们研究对称差，并证明对于区间图以及 $\mathbb{R}^2$中的单位盒交图，这一参数均无界。我们的证明具有构造性，并明确给出了对称差无界、因而孪生宽度和团宽度也无界的图族。第6节6 Section 最后提出若干开放问题。

2 预备知识

对于正整数 k，我们用 $[k]$ 表示集合 $\{1,\ldots,k\}$。本文中的所有图都是有限无向图，且不含环和重边。图 G 的顶点集和边集分别记为 $V(G)$ 和 $E(G)$。顶点 $x \in V(G)$ 的邻域记为 $N(x)$，它是 G中与 x 相邻的顶点集合； x的度记为 $\deg(x)$，即其邻域的大小。我们用 $N[x]$ 表示 x的闭邻域，即集合 $N(x) \cup \{x\}$。若 $N(x) \setminus \{y\} = N(y) \setminus \{x\}$，则称两个顶点 x 和 y为孪生顶点；等价地，若 $N[x] \setminus \{x,y\} = N[y] \setminus \{x,y\}$，它们也是孪生顶点。 G 中的最小顶点度和最大顶点度分别记为 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$。

设 G 为一个图， $A = A_G$ 为 G的邻接矩阵。我们称顶点 $y \in V$（G）是顶点 x_1、x_2、……、$x_k \in V$（G）的一个函数， $\setminus\{y\}$ 如果存在一个以 k个变量为输入的布尔函数 f，使得对于每个不同于 y、x_1、x_2、……、x_k的顶点 $z \in V$（G），都有 A（y，z）$= f$（A（y，x_1）……，A（y，x_k））。我们注意到，每个顶点都是其他某些顶点的函数。特别地，每个顶点都是其邻点的函数，对应的函数为 $f \equiv 0$；也是其非邻点的函数，对应的函数为 $f \equiv 1$。使得 y 是其他 k 个顶点的函数的最小 k，称为 y的功能度，记作 $\mathrm{fun}_G(y)$；若上下文中的图明确，则简记为 $\mathrm{fun}(y)$。G 的功能度定义并表示如下：

$$\mathtt{fun}(G) = \max_{H} \min_{y \in V(H)} \mathrm{fun}(y),$$

其中最大值取遍所有 H 的 G诱导子图。如果在此定义中将 $\mathrm{fun}(y)$ 替换为 $\deg(y)$，就得到了退化度的定义。结合 $\mathrm{fun}(y) \leq \deg(y)$ 这一观察，我们得出结论：图的功能度总是有界于其退化度之上。特别地，有界退化度意味着有界功能度。类似地，某些其他图参数有界也意味着功能度有界。对于团宽度，[1] 通过证明在任何团宽度有界的图中，必定存在两个顶点，其邻域的对称差很小，得出了这一结论。这促使人们研究另一个图参数，该参数在 [2], 中被隐式引入，并在 [1]中称为图的对称差。

给定图 G 以及 G 中的一对顶点 x, y，令 $\mathrm{sd}_G(x,y)$（若上下文中的图明确，也可简写为 $\mathrm{sd}(x,y)$）表示与 x 和 y 不同、且恰好与 x 和 y之一相邻的顶点数。换言之，若 x 和 y 不相邻，则 $\mathrm{sd}(x,y)$ 等于 $N(x)$ 与 $N(y)$ 的对称差的大小；若 x和 y相邻，则 $\mathrm{sd}(x,y)$ 等于 $N[x]$和 $N[y]$ 的对称差的大小。接着， G的对称差记作 $\mathrm{sd}(G)$，并定义为

若 G 是单顶点图，则为 0；否则

$$\mathtt{sd}(G) = \max_{H} \min_{\substack{x,y \in V(H) \\ x \neq y}} \mathrm{sd}(x, y),$$

其中 t he 最大值取遍所有至少含有两个顶点的 H G 的诱导子图。

若 x 和 y 是孪生顶点，则 $\mathsf{sd}(x, y) = 0$，且这两个顶点的功能度至多为 1，即 x 和 y 互为函数。更一般地，任意两个顶点 x 和 y 互为函数，且也是区分它们的顶点的函数；也就是说，$\mathsf{fun}(x) \leq \mathsf{sd}(x, y) + 1$，且 $\mathsf{fun}(y) \leq \mathsf{sd}(x, y) + 1$。[1] 上述讨论表明，对称差是介于团宽度与功能度之间的参数：有界团宽度意味着有界对称差，而有界对称差又意味着有界功能度。

最近引入的参数孪生宽度 [6] 严格介于团宽度与对称差之间，也就是说，有界团宽度意味着有界孪生宽度，而有界孪生宽度又意味着有界对称差。因此，任何构造出对称差无界（即可以任意大）的图的构造，也会得到孪生宽度和团宽度无界的图。

本文研究盒相交图的功能度和对称差。

定义 2.1。$\mathbb{R}^d$ 中的盒是具有平行于坐标轴的边的实心 d 维矩形。单位盒是所有边长均为 1 的盒。如果图 G 的每个顶点都可以在 $\mathbb{R}^d$ 中与一个盒（分别为一个单位盒）相关联，使得图 G 中的两个顶点相邻当且仅当对应的盒相交，则称图 G 是 $\mathbb{R}^d$ 中的盒相交图（分别为 $\mathbb{R}^d$中的单位盒交图）。

盒相交 图在 $\mathbb{R}^1$ 中称为区间图，即区间的交图
在实数轴上。

3 区间图的功能度有界

设 G 是一个具有 n 个顶点的区间图，并给定了它的区间表示。不失一般性，我们假设各区间的端点两两不同。这样便可从左至右依次用 1 到 $2n$ 的数字标记各区间的端点，并用一对数字 (i, j) 表示每个区间（ G 的顶点），其中 i 是区间的左端点， j 是区间的右端点（因此 $i < j$）。因此，我们可以用 $\mathbb{N}^2$ 中对角线 $\{(i, i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ 上方的一个点来表示每个区间（ G 的顶点）。

我们将 G 中对应于点 (i, j) 的顶点记作 $v_{i,j}$。$\mathbb{N}^2$ 中两点 (i, j) 和 (p, q) 之间的曼哈顿距离为 $|i - p| + |j - q|$。此外，我们定义 (i, j) 与 (p, q) 之间的水平距离为 $|i - p|$，并将 (i, j) 与 (p, q) 之间的垂直距离定义为 $|j - q|$。

引理 3.1. 若两点 (i, j) 和 (p, q) 之间的曼哈顿距离为 k，则 $v_{i,j}$ 与 $v_{p,q}$ 的对称差至多为 $k - 2$。

证明。容易验证，若顶点 $v_{s,t}$ 属于 $v_{i,j}$ 和 $v_{p,q}$ 的邻域的对称差，且与这两个顶点不同，那么 (s, t) 的某个端点属于区间 $(\min\{i, p\}, \max\{i, p\})$ 或区间 $(\min\{j, q\}, \max\{j, q\})$。由于所有区间的端点两两不同，且 (i, j) 和 (p, q) 之间的曼哈顿距离为 k，满足这一性质的顶点 $v_{s,t}$ 至多有 $k - 2$ 个。

□

定理 3.2. 任意区间图的功能度至多为 8。

证明。由于区间图类具有遗传性，要证明该定理，只需证明每个区间图都包含一个功能度至多为 8 的顶点。

[1]为了说明任意两个顶点 x 和 y 互为函数，且也是区分它们的顶点的函数，记 Z 为区分 x 和 y 的顶点集合，即 $Z = \{z \in V(G) \setminus \{x, y\} \mid z$ 与 x 和 $y\}$ 中恰有一个相邻。那么 x 是 $\{y\} \cup Z$ 的函数，因为任意顶点 $v \in V(G) \setminus (\{y\} \cup Z)$ 与 x 相邻，当且仅当 v 与 y 相邻（特别地， Z 中的顶点在此函数中并非必要）。类似地，顶点 y 是 $\{x\} \cup Z$ 中顶点的函数。

设 G 是一个区间图。我们使用本节开头所述的 G 点表示法，其中点位于 $\mathbb{N}^2$ 中。表示 G 各顶点的所有点都位于整数网格 $[2n] \times [2n]$ 区域内对角线的上方。该区域内的每条垂直线和每条水平线上， G 至多有一个顶点。我们将该区域内的 $2n$ 条水平线划分为 $\lceil 2n/5 \rceil$ 个条带，每个条带包含连续的 5 条线；如果 $2n$ 不是 5 的倍数，则可能有一个条带包含至多连续的 4 条线。同样，我们将垂直线划分为 $\lceil 2n/5 \rceil$ 个条带。水平条带与垂直条带的交集称为一个块。

首先假设有一个块包含 G中的两个顶点。那么这两个顶点之间的曼哈顿距离至多为 8，因此根据引理 33.11，引理 。这两个顶点的对称差至多为 6，这意味着它们各自的功能度至多为 7。

从现在起，我们假设每个块至多包含 G 中的一个顶点。我们称不包含 G 中任何顶点的块为空。为了找到一个功能度较低的顶点，我们先考虑以下情形：存在两条相邻的水平线，分别为 L_{h} 和 L'_{h}，以及两条相邻的竖直线，分别为 L_{v} 和 L'_{v}，使得

- 这四条线的交点中的某一个（即 $L_{\mathsf{h}} \cap L_{\mathsf{v}}$、 $L_{\mathsf{h}} \cap L'_{\mathsf{v}}$、 $L'_{\mathsf{h}} \cap L_{\mathsf{v}}$ 和 $L'_{\mathsf{h}} \cap L'_{\mathsf{v}}$）是 G 的一个顶点，设该顶点为 $x \in L_{\mathsf{h}} \cap L_{\mathsf{v}}$，
- 另一条竖直线上 G的上方有一个顶点 x L'_{v}，设该顶点为 y，
- 另一条水平线上 G的左侧有一个顶点 x L'_{h}，设该顶点为 z。

在这种情况下，我们断言 x 是 y和 z的函数。更确切地说，顶点 $v \in V(G) \setminus \{x, y, z\}$ 与 x 相邻，当且仅当 $A(v, y) = A(v, z) = 1$，其中 A 是 G的邻接矩阵。事实上，根据构造，这四条线只包含顶点 x、 y、 z，而任何其他顶点 v要么与 x相邻，此时它也与 y 和 z都相邻；要么与 x不相邻，此时它至少与 y 或 z之一不相邻。

可以放宽两条竖直线和两条水平线必须相邻的要求，改为要求 x 和 y 之间的水平距离有界，而 x 和 z 之间的垂直距离有界；设这两个距离均至多为 k，即 x 和 y 之间至多有 $k-1$条竖直线， x 和 z之间至多有 $k-1$ 条水平线。于是， x 和 y 之间的竖直线上至多包含 $k-1$ 个顶点 y_1、……、 y_{k-1}，而 x 和 z之间的水平线上至多包含 $k-1$ 个顶点 z_1、……、 z_{k-1}。在这种情况下，出于与上文相同的原因， x是 y、 y_1、……、 y_{k-1}、 z、 z_1、……、 z_{k-1}的函数。唯一的区别是， y_1、……、 y_{k-1}、 z_1、……、 z_{k-1} 是该函数的非本质变量，即该函数不依赖于它们。

为找到满足上述条件的顶点 x，我们引入以下术语。任意水平条带中最靠左的非空块，以及任意垂直条带中最靠上的非空块，称为边缘块。

设 B 是一个非空块，且设 x 是 G 中唯一属于 B 的顶点。如果 B 不是边缘块，那么在同一垂直条带中，存在一个位于 x 上方的顶点 y；在同一水平条带中，也存在一个位于 x 左侧的顶点 z。此时， x 是 y 和 z 的函数，加上 x 与 y 之间的垂直线上的至多 3 个顶点，以及 x 与 z 之间的水平线上的至多 3 个顶点；也就是说， x 的功能度至多为 8。

还需证明存在非空的非边缘块。每个水平条带至多包含一个边缘块，每个垂直条带也至多包含一个边缘块。因此，边缘块至多有 $2\lceil 2n/5 \rceil$ 个。由于非空块的总数恰好为 n，且 $n > 2\lceil 2n/5 \rceil$ 对任意 $n \geq 9$ 都成立，我们可以得出结论：至少存在一个非空的非边缘块，因此对于所有 $n \geq 9$，都存在一个功能度至多为 8 的顶点。在顶点数至多为 8 的图中，每个顶点的功能度至多为 7。

□

4 $\mathbb{R}^3$ 中盒相交图的功能度无界

既然我们已经证明区间图的功能度有界，也就是说， $\mathbb{R}^1$中的盒相交图的功能度有界，那么自然会问：当 d取较大值时， $\mathbb{R}^d$ 中的盒相交图的这一参数是否有界。本节将证明，对于 $d \geq 3$，答案是否定的。我们先给出一个有用的引理，其中$K_{n,m}$ 表示两侧大小分别为 n 和 m的完全二分图。

引理 4.1. 设 $p \geq 2$ 为整数， X 为一类$K_{2,p}$-自由无三角形图，并且存在一个递增函数 $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，以及 X 中的一个图的无限序列 $G_1, G_2, \ldots$，满足$|V(G_n)| = g(n)$，且 $a(n) := \delta(G_n)$属于 $\omega(1)$， $b(n) := \Delta(G_n)$属于 $o(g(n))$。那么 X 的功能度无界。

证明。反设 X 和 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 分别是引理陈述中的一个类和一个序列，但对于某个常数 k， X 的功能度有界于 k。

取一个足够大的整数 n，使得

$$\delta(G_n) \geq kp + 1 \qquad \text{and} \qquad \Delta(G_n) \leq \frac{g(n) - k - 2}{k + 1}.$$

根据函数 a 和 b 的假设，这样的 n 存在。根据假设，存在顶点 x、y_1、y_2、……、$y_k \in V(G_n)$，使得 x 是 y_1、y_2、……、y_k 的函数。要证明该引理，只需找到一对不同于 x、y_1、y_2、……、y_k 的顶点 u、w，使得 u 与 x 相邻， w 与 x 不相邻，但 u、w 无法被 y_1、y_2、……、y_k 区分（即 u 和 w 在 $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ 中具有相同的邻域）。事实上，这将与假设 x 是 y_1、y_2、……、y_k 的函数相矛盾。

首先注意，由于 G_n 是 $K_{2,\ p}$-自由且不含三角形，因此对于每个 $i \in [k]$， x 与 y_i 至多有 $p - 1$ 个共同邻点。因此，由 $\deg(x) \geq kp + 1$ 可知，存在一个 x 的邻点 u，它不同于 $y_1, \ldots, y_k$，且与这些顶点均不相邻。另一方面，由 $\Delta(G_n) \leq {}^{g(n)}{}_{k+1}^{-k-2}$ 可知，存在一个顶点 w，它不同于 $x, y_1, \ldots, y_k$，且与它们均不相邻。 □

我们用 Q_n 表示 n维超立方体，用 $\mathcal{Q}$ 表示超立方体的遗传闭包，即所有超立方体的诱导子图构成的类。作为引理 44.11 引理 。的推论，我们重新得到[1]中的一个结果。

推论 4.2。类 $\mathcal{Q}$具有无界功能度。

证明。将引理 44.11 引理 . 应用于序列 $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$，即可得到该推论。事实上， $\mathcal{Q}$ 中的每个图都是 $K_{2,}$3-自由的 [8], ，且函数 $a(n) = b(n) = \log g(n)$，其中 $g(n) = 2^n$，满足引理 44.11引理 . . 的条件。 □

如果二分图 $G = (P, B, E)$ 中的顶点 P（称为点顶点）可与欧几里得平面（$\mathbb{R}^2$）中的点相关联，且顶点 B（称为盒顶点）可与平面中的盒相关联，并且 $p \in P$ 与 $b \in B$ 相邻当且仅当与 b 相关联的盒包含与 p 相关联的点，那么该图就是点-盒关联图。

引理 4.3。点-盒关联图这一类图的功能度无界 .

证明。 为证明该引理，我们将展示存在一个点-盒关联图序列$(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$满足引理 44.11Lemma 。。

我们将使用 [4] 中给出的构造（参见命题 3.5 和引理 3.3），该构造曾用于证明存在 $K_{2,\ 2}$-自由点-盒关联图，且其边数超线性增长。顶点的最小度和最大度对于引理 44.11，Lemma 。的应用十分重要，但 [4]并未对其进行明确分析。为此，下面我们用图论术语描述该构造，从中可以轻松推知这些图的最小度和最大度。

设 n 为正整数。我们将 $H_1^n := (P_1, B_1, E_1)$ 定义为星图 $K_{1,n}$，其中心顶点位于 B_1，并且在 P_1 中有 n 个叶顶点。对于每个 $i = 2, \ldots, n$，我们按如下方式归纳定义 H_i^n。图 $H_i^n = (P_i, B_i, E_i)$ 的构造方法是：取 n 个 H_{i-1}^n 的顶点不相交副本，向B_i添加 $|P_{i-1}|$ 个盒顶点，并在这些顶点与每个副本 H_{i-1}^n中的点顶点之间添加完美匹配。[2] 注意，若 p_i 和 b_i 分别表示 H_i^n 中点顶点和盒顶点的数量，则 $p_1 = n, b_1 = 1$，且 $p_i = n \cdot p_{i-1}, b_i = n \cdot b_{i-1} + p_{i-1}$。由这些递推关系容易推出，对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，都有 $p_i = n^i$ 和 $b_i = i \cdot n^{i-1}$。特别地， $p_n = b_n = n^n$。

[2]为了说明每个图 H_i^n都是点-盒关联图，我们对相应的几何构造作非正式描述。若 $i \geq 2$，并且根据归纳假设， $\mathcal{R}_{i-1}$ 是 H_{i-1}^n 的一个几何实现，其中代表点顶点的所有点具有不同的 y坐标，则 H_i^n的一个几何实现 $\mathcal{R}_i$ 定义如下。取 $\mathcal{R}_{i-1}$ 的 n 个互不相交的副本，这些副本是将 $\mathcal{R}_{i-1}$ 沿 x 轴平移得到的。在这 n 个副本中， $\mathcal{R}_{i-1}$ 的每个点顶点都有 n 个副本；根据假设，它们的 y坐标都相同，且不同于这些点的 y坐标

注意，图 H_i^n 都是 K_2,2-自由的。我们还注意到，每次添加一个新的盒顶点时，其度为 n，且在后续的图中保持不变。来自 H_{i-1}^n 的每个点顶点副本的度在 H_i^n 中增加 1，也就是说， H_i^n 中每个点顶点的度为 i。因此， $G_n := H_n^n$ 是一个 K_2,2-自由的点-盒关联图，含有 $g(n) := 2n^n$ 个顶点，其中每个顶点的度为 $n \in \Theta\left(\log g(n) \log\log g(n)\right)$。将引理 44.11 引理。应用于 $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 即可推出该引理。 □

众所周知，点-盒关联图是 $\mathbb{R}^3$ 中的盒相交图（例如，参见 [9]）。综上，我们得出了本节的主要结果。

T定理 4.4。 $\mathbb{R}^3$ 中的盒相交图类具有无界的函数性 $ty.$

显然，定理 44.44 定理 .意味着，对于所有 $\mathbb{R}^d$， $d \geq 3$中的盒相交图类都具有无界的函数性。

5 区间图类和 $\mathbb{R}^2$中的单位盒相交图类的对称差无界

Bonnet 等人在 [5] 中基于一类能够表示任意排列的区间图的构造，证明了区间图类具有无界孪生宽度。该构造依赖于半图这一概念，即一个有 $2n$ 个顶点的二分图， $n \geq 1$其顶点集可以划分为两个大小相等的独立集 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$和 $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$，并且对所有 i， $j \in [n]$，顶点 x_i与顶点y_j相邻，当且仅当 $i < j$。

定义 5.1。ABC 图是指任意一个具有 $3n$ 个顶点 $n \geq 1$ 的图 G，其顶点集可划分为三个团 A、 B 和 C，每个团的大小均为 n，且 A 与 C 之间没有边， A 与 B 之间的边构成一个半图， B 与 C 之间的边也构成一个半图。更确切地说，存在 A 中顶点的一个排列 a_1、……、a_n，以及 B 中顶点的一个排列 b_1、……、b_n，使得 a_i 与 b_j 相邻当且仅当 $i < j$。类似地，存在 B 中顶点的另一个排列 b'_1、……、b'_n，以及 C 中顶点的一个排列 c_1、……、c_n，使得 b'_i 与 c_j 相邻当且仅当 $i < j$。

需要注意的是， B 中顶点的排列 b_1、……、b_n 和 b'_1、……、b'_n 完全相互独立。特别是，它们可以不同。

ABC 图已在 [7], 中得到研究，并且已证明其团宽度无界。Bonnet 等人进一步拓展了这一结果，证明 ABC 图的孪生宽度无界。然而， [5] 中的证明是非构造性的，并依赖于计数论证。我们现在从两个不同方面改进这一结果。首先，我们证明 ABC 图的对称差无界，这是一个更强的结论。其次，我们的证明是构造性的，并给出了一族 ABC 图的诱导子图，其对称差不断增大。

定理 5.2。ABC 图类的对称差无界。

证明。我们将证明，对于每个整数 $k \geq 2$，都存在一个图 G_k，它是某个 ABC 图的诱导子图，并且 G_k 的对称差至少为 k。构造如下。图 G_k 由三个互不相交的团 A、 B 和 C以及它们之间的一些边组成。两个团 A 和 C 的大小均为 t，其中 $t = k^3$。团 B 的大小为 k^4，其顶点与整数对对应，并被划分为 k^2 个较小的集合，每个集合大小为 k^2，

$$B = \bigcup_{1 \leq i,j \leq k} B_{ij},$$

其中集合 B_{ij} 定义如下：

剩余的 $\mathcal{R}_{i-1}$ 点顶点。因此，我们可以添加 $|P_{i-1}|$ 个新的互不相交的盒子，使每个盒子都包含 $\mathcal{R}_{i-1}$ 中某个点顶点的 n 个副本，且不包含其他点顶点。为了得到 $\mathcal{R}_i$，我们将每个新添加的盒子中所包含的点顶点沿垂直方向移动，使它们的 y 坐标两两不同，并且每个点仍留在其所属的盒子中。

- $B_{11} = \{(pk - q, qk + p) \mid 1 \le p \le k, 0 \le q \le k - 1\}$
- 对于所有的 $(i, j) \in [k]^2 \setminus \{(1, 1)\}$，集合 B_{ij} 是集合 B_{11} 的一个平移：

$$B_{ij} = B_{11} + ((i-1)k^2, (j-1)k^2) = \{(x + (i-1)k^2, y + (j-1)k^2) \mid (x, y) \in B_{11}\}.$$

参见图1图 1，其中给出了 G_k 和 $k = 4$的一个例子。注意，对于每个顶点 $b = (b_x, b_y)$ 属于 B，都有$1 \le b_x \le t$ 且 $1 \le b_y \le t$。为了描述团 A, B 和 C之间的边，我们固定 A和 C中顶点的排列，分别记为 $A = \{a_1, \ldots, a_t\}$和 $C = \{c_1, \ldots, c_t\}$。于是，团 A, B 和 C 之间的边如下。

- 对于每个顶点 $a_i \in A$ 以及每个顶点 $b = (b_x, b_y) \in B$，顶点 a_i 与 b 相邻，当且仅当 $i < b_x$。
- 对于每个顶点 $b = (b_x, b_y) \in B$ 以及每个顶点 $c_j \in C$，顶点 b 与 c_j 相邻，当且仅当 $b_y < j$。
- 在 A 和 C之间没有边。

至此，图 G_k的描述完成。

接下来，我们证明 G_k 的对称差至少为 k，也就是说，对于任意两个不同的顶点 $u, v \in V(G_k)$，都有 $\mathsf{sd}(u, v) \ge k$。根据顶点 u和 v所属的团 A, B和 C，我们分几种情形讨论（并考虑到 $\mathsf{sd}(u, v) = \mathsf{sd}(v, u)$ 这一事实）。

我们首先注意到，对于任意固定的 $i \in [t]$，B 中满足 $b_x = i$ 的顶点 (b_x, b_y) 的数量为 k。类似地，B 中满足 $b_y = i$ 的顶点数量也为 k。

情形1：$u, v \in A$。设 $u = a_i$ 和 $v = a_j$ 是 A 中满足 $1 \le i < j \le t$的任意两个顶点。根据构造，我们有 $\{(b_x, b_y) \in B \mid b_x = j\} \subseteq N(u) \setminus N(v)$。因此，根据上述观察，$\mathsf{sd}(u, v) \ge k$。

情形2：u、$v \in C$。令 $u = c_i$ 和 $v = c_j$ 为 C 中满足 $1 \le i < j \le t$ 的任意两个顶点。同样，根据构造可知，$\{(b_x, b_y) \in B \mid b_y = i\} \subseteq N(v) \setminus N(u)$。因此，我们再次得到 $\mathsf{sd}(u, v) \ge k$。

情形3：$u \in A$ 和 $v \in C$。根据构造可知，$A \setminus \{u\} \subseteq N(u)$，且 $(A \setminus \{u\}) \cap N(v) = \emptyset$。因此，$\mathsf{sd}(u, v) \ge t - 1 = k^3 - 1 \ge k$（这里我们使用了 $k \ge 2$ 的假设）。

情形 4：$u \in A$ 和 $v \in B$。令 $u = a_i \in A$、$i \in [t]$，并令 $v = (b_x, b_y) \in B$。注意，根据定义，A 中没有顶点与 $b \in B$ 中第一坐标等于 1 的任何顶点相邻。正如我们已经观察到的，B 中恰有 k 个这样的顶点。因此，如果 $b_x \ge 2$，那么由于 B 是一个团，$\mathsf{sd}(u, v) \ge k$，从而结论成立。因此，我们可以假设 $b_x = 1$。但是，此时 $N(v) \cap A = \emptyset$，而 $A \setminus \{u\}$ 是包含于 $N(u)$ 中的、大小为 $t - 1$ 的集合。因此，我们再次得到 $\mathsf{sd}(u, v) \ge t - 1 \ge k$。

情形 5：$u \in B$ 和 $v \in C$。在这种情形下，论证与情形 4 中的类似。设 $u = (b_x, b_y) \in B$ 和 $v = c_j \in C$，$j \in [t]$。C 中没有顶点与第二坐标等于 t 的任何顶点 $b \in B$ 相邻，并且 1 中恰有 k 个这样的顶点。因此，若 $b_y \le t - 1$，则由于 B 是一个团，$\mathsf{sd}(u, v) \ge k$，结论得证。因此，我们可以假设 $b_y = t$。但此时 $N(u) \cap C = \emptyset$，而 $C \setminus \{v\}$ 是包含在 $N(v)$ 中、大小为 $t - 1$ 的集合，并且 $\mathsf{sd}(u, v) \ge k$。

情形 6：$u, v \in B$。设 $u = (u_x, u_y) \in B_{ij}$ 和 $v = (v_x, v_y) \in B_{i'j'}$ 是 B 中两个不同的顶点。根据图 G_k 的构造，A 中恰有 $|u_x - v_x|$ 个顶点与 u 和 v 中恰有一个相邻；同样，C 中恰有 $|u_y - v_y|$ 个顶点与 u 和 v 中恰有一个相邻。因此，只要 u 和 v 之间的曼哈顿距离 $|u_x - v_x| + |u_y - v_y|$ 至少为 k，就有 $\mathsf{sd}(u, v) \ge k$。若 $|i' - i| \ge 2$，则 $|u_x - v_x| \ge k^2 + 1$。由此，只要 $|i' - i| \ge 2$，就有 $\mathsf{sd}(u, v) \ge k^2 + 1 \ge k$；若 $|j' - j| \ge 2$，也可得出类似结论。

因此，我们可以假设 $|i' - i| \le 1$ 且 $|j' - j| \le 1$。下面验证在这种情况下，u 与 v 之间的曼哈顿距离至少为 k。我们有 $u = (x + (i-1)k^2, y + (j-1)k^2)$，其中 $x = pk - q$ 且 $y = qk + p$，对于某些 $1 \le p \le k$ 和 $0 \le q \le k - 1$ 成立；类似地，$v = (x' + (i'-1)k^2, y' + (j'-1)k^2)$，其中 $x' = p'k - q'$ 且 $y' = q'k + p'$，对于某些 $1 \le p' \le k$ 和$0 \le q' \le k - 1$成立。因此我们有

$$|u_x - v_x| = |(i - i')k^2 + (p - p')k + q' - q|$$

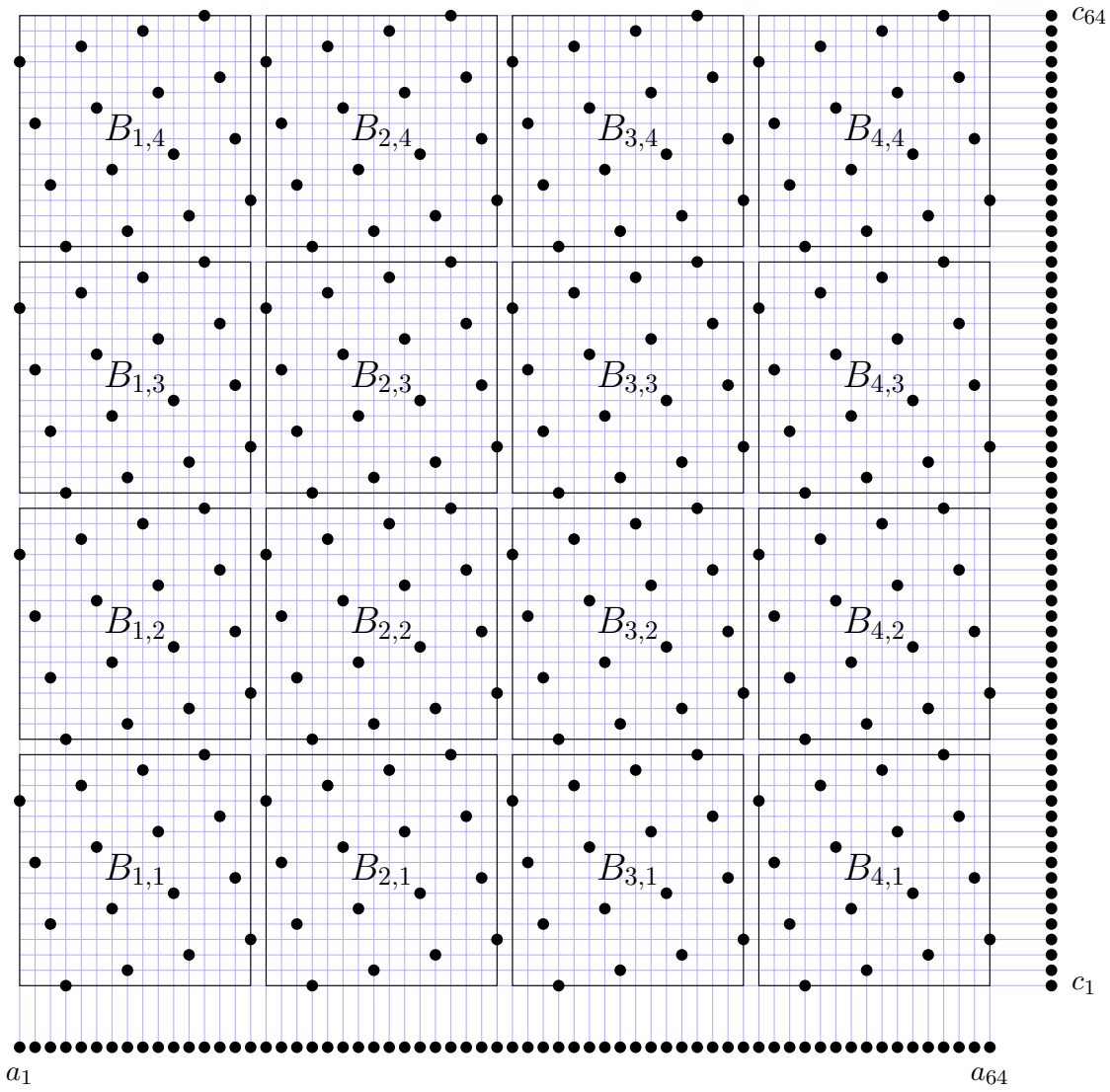


图1：图 G_k，对于 $k = 4$，如定理55.22定理 .. 最下方的顶点属于团 A；最右侧的顶点属于团 C；网格上的顶点属于团 B。对于每个 $i \in [t]$，顶点 a_i （位于第 i 列）与 B 第 $j > i$ 列上的所有顶点相邻。类似地，对于每个 $i \in [t]$，顶点 c_i （位于第 i 行）与 B 第 $j < i$ 行上的所有顶点相邻。

and

$$|u_y - v_y| = |(j - j')k^2 + (q - q')k + p - p'|\,.$$

首先考虑 $i' = i$ 且 $j' = j$的情况。在这种情况下， u与 v 之间的曼哈顿距离等于 $|(p - p')$ $k + q' - q| + |(q - q')k + p - p'|$。若 $p' = p$，则 $q' \neq q$，该表达式可化简为 $(k+1)|q - q'| \geq k + 1$。类似地，若 $q' = q$，则 $p' \neq p$，上述表达式可化简为 $(k + 1)|p - p'| \geq k + 1$。若 $p' \neq p$ 且 $q' \neq q$，则不失一般性，我们可以假设$p > p'$。反设 u 与 v 之间的曼哈顿距离小于 k，即

$$|(p - p')k + q' - q| + |(q - q')k + p - p'| < k\,.$$

由于 $p - p' \in [k - 1]$ 和 $q' \neq q$，由不等式左侧的第二项可得$q - q' = -1$。因此，我们有 $q' > q$；由不等式左侧的第一项可得 $p - p' = -1$，这与假设 $p > p'$ 矛盾。

接下来，考虑 $i' \neq i$ 的情形。不妨设 $i' > i$，因此 $i' = i + 1$ （回顾 $|i' - i| \leq 1$）。 u 与 v 之间的曼哈顿距离因此等于$|k^2 + (p' - p)k + (q - q')| + |(j' - j)k^2 + (q' - q)k + (p' - p)|$。反设

u 与 v 之间的曼哈顿距离小于 k。在这种情况下，我们必有 $(p'-p) = -(k-1)$ 且 $(q-q') < 0$。回顾 $|j'-j| \le 1$。首先，如果 $j'-j=0$，则必有 $q'-q=1$，但此时 u 与 v 之间的曼哈顿距离等于 $|k^2-(k-1)k-1|+|k-(k-1)| = k$，矛盾。其次，如果 $j'-j=1$，那么由于 $(q-q') < 0$，我们有 $|v_y-u_y| \ge k^2$，矛盾。第三，如果 $j'-j=-1$，则必有 $(q-q') = -(k-1)$。然而，在这种情况下，u 与 v 之间的曼哈顿距离等于 $|k^2-(k-1)k-(k-1)|+|-k^2+(k-1)k-(k-1)|=1+|-2k+1|=2k$，再次矛盾。

最后，考虑 $i'=i$ 和 $j' \ne j$的情形。与前一种情形类似，不妨假设 $j'>j$，于是 $j'=j+1$。 u 和v 之间的曼哈顿距离等于 $|(p'-p)k+(q-q')|+|k^2+(q'-q)k+(p'-p)|$。反设 u 和 v 之间的曼哈顿距离小于 k。与前一种情形类似，必有 $(q'-q) = -(k-1)$ 且 $(p'-p) < 0$。此外，必有 $p'-p=-1$，否则第一项 $|(p'-p)k+(q-q')| = |(p'-p)k+(k-1)|$ 将超过 k。但此时 u 和 v 之间的曼哈顿距离等于 $|-k+(k-1)|+|k^2-(k-1)k-1| = k$，矛盾。

最后，我们证明 G_k 是 ABC 图的一个诱导子图。为此，我们证明可以向团 A 和团 C 添加顶点，使得所得团 A' 和 C' 的基数都等于 B 的基数，即 k^4；A' 与 B 之间的边构成一个半图，B 与 C' 之间的边构成一个半图，并且 A' 与 C' 之间没有边。

由对称性可知，只需证明可以向团 C 添加顶点，从而得到一个满足 $|C'| = k^4$ 的团 C'，使得 B 与 C' 之间的边构成一个半图。首先注意，对于 B 中的每个顶点 $b = (b_x, b_y)$，它在 C 中的邻域仅取决于 b_y 的值。对于每个 $j \in [t]$，记 B_j 为 B 中所有满足 $b_y = j$ 的顶点 (b_x, b_y) 组成的集合，则有 $|B_j| = k$。任取 B 的一个顶点排列 $B = \{b_1, \dots, b_{k^4}\}$，使得同一部分 B_j 中的顶点连续出现，并且对于所有 $j \in [t-1]$，B_j 中的顶点都先于 B_{j+1} 中的顶点出现。由构造可知，对于每个 $j \in [t]$，c_j 在 B 中的邻域等于并集 $\bigcup_{i<j} B_i = \{b_\ell : \ell \le k \times (j-1)\}$。特别地，$C$ 中任意两个相邻顶点在 B 中的邻域彼此包含，且恰好相差 k 个顶点。我们通过对每个 $j \in [t]$ 添加一组 $k-1$ 个新顶点 $c_j^1, \dots, c_j^{k-1}$，将团 C 扩展为更大的团 C'；记 $c_j^0 = c_j$，则对于每个 $i \in \{0, \dots, k-1\}$，c_j^i 在 B 中的邻域等于 $\{b_\ell : \ell \le k \times (j-1) + i\}$。这意味着 C' 的 k^4 个顶点在 B 中的邻域两两不同，但彼此可比较，其中 $N(c_1) \cap B = \emptyset$ 且 $N(c_t^{k-1}) \cap B = B \setminus \{b_{k^4}\}$。特别地，$B$ 与 C' 之间的边构成一个半图，证毕。

□

Bonnet 等人观察到，[5], 每个 ABC 图都是区间图。因此，定理 5.2 定理 。推出以下结论。

推论 5.3。区间图类的对称差无界。

Th定理 5.2 对 R² 中的单位盒相交图类还有另一个推论 $\mathbb{R}^2$.

命题 5.4。每个 ABC 图都是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位盒相交图。

证明。 Bonnet 等人在 [5], 中通过图示证明表明，每个 ABC 图都是单位圆盘图。我们调整他们的方法（以及他们的图）来证明，每个 ABC 图都是 $\mathbb{R}^2$中的单位盒相交图。令 G 为任意一个具有 $3n$ 个顶点的 ABC 图，$n \ge 1$，其团为 A，B 和 C，排列为a_1、……、a_n，b_1、……、b_n，b'_1、……、b'_n，以及 c_1、……、c_n 如 ABC 图的定义所述。我们说明如何将 G 表示为 $\mathbb{R}^2$中的单位盒相交图；参见图 2 的右侧图 2。

在 $\mathbb{R}^2$ 中放置 n 个单位盒，表示 A 的顶点，使它们的中心彼此接近，并按 $a_1, \dots, a_n$ 的顺序在两个坐标上都递减。然后，在这些 A 盒上方的 $\mathbb{R}^2$ 中放置 n 个其他单位盒，表示 B 的顶点，使它们的中心彼此接近，并使 A 盒与 B 盒之间的交集实现由 A 与 B 之间的边构成的半图，同时考虑排列 $b_1, \dots, b_n$。注意，这会对 B 盒中心的垂直位置（即 y 坐标的值）施加限制，但在水平方向移动 B 盒时仍有一定自由度。接下来，在表示 B 顶点的盒的右侧，于 $\mathbb{R}^2$ 中放置额外的 n 个单位盒，表示 C 的顶点，使 C 盒的中心彼此接近，并递减

在两个坐标上都递减，顺序为 $c_1, \ldots, c_n$，并且没有任何 C 盒与任何 A 盒相交。最后，如有必要，水平移动 B 盒，使 B 盒与 C 盒之间的交集实现由 B 与 C 之间的边构成的半图，同时考虑排列 $b'_1, \ldots, b'_n$。□

定理5$5.22$ 定理 .以及命题5$5.44$ 命题 .可推出以下结论。

推论5.5。 $\mathbb{R}^2$ 中的单位盒相交图类具有无界的对称差 $e.$

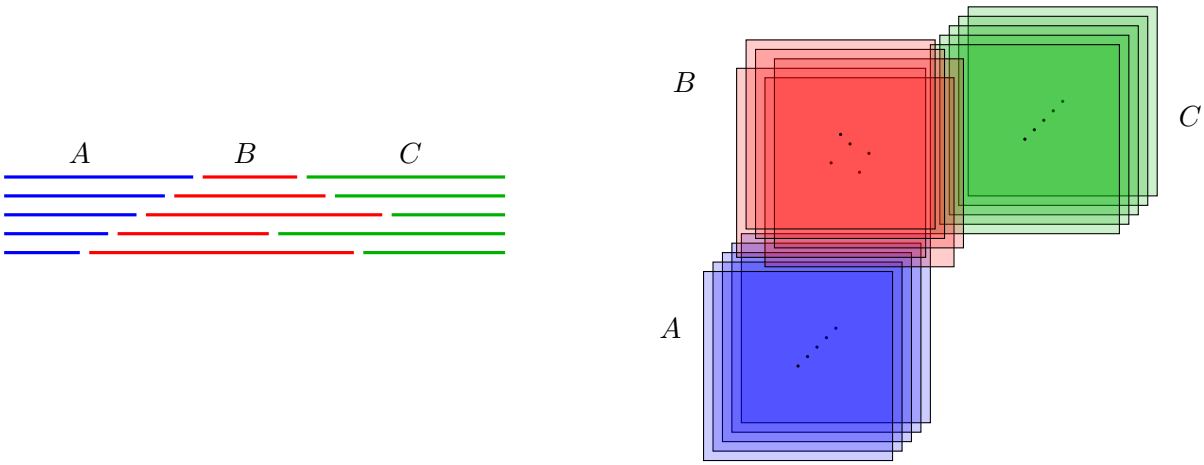


图 2：左侧是一个有15个顶点、由区间表示的ABC图。右侧是同一个图，这次表示为 $\mathbb{R}^2$中的单位盒交图。

6 结论

本文证明了关于盒相交图的功能度和对称差的一系列结果。表1总结了我们的研究结果1表 。

		$\mathbb{R}^1$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^{\geq 3}$
对称差异	单位盒	有界 [1]	无界（推论 5$5.55$推论 .）	
	一般	无界（推论 5$5.33$推论 。）		
功能度	单位盒	有界 [1]	open	
	一般	有界 (定理 3$3.22$定理 .)	open	无界 (定理 4$4.44$定理 .)

表1： $\mathbb{R}^d$中盒相交图的功能度与对称差。

如表中所示， $\mathbb{R}^2$ 中盒相交图的功能度仍是一个开放问题。对于任意固定的 $d \geq 2$， $\mathbb{R}^d$ 中的单位盒相交图的功能度是否有界，也仍是一个开放问题。

在其他功能度行为尚不明确的图类中，我们特别关注区间图的以下两种重要推广：圆弧图和梯形图。

最后，我们提出一个与图功能度相关的开放问题：如何刻画并识别图功能度较小的图。根据定义，功能度为 0 的顶点要么是孤立顶点，要么是支配顶点，因此功能度为 0 的图就是阈值图，即每个诱导子图都含有一个孤立顶点或支配顶点。然而，图功能度至多为 1 的图类仍是个谜。它包括

- 所有森林（因为每个森林都含有一个度至多为 1 的顶点）及其补图 ，
- 所有余图，因为每个至少含有两个顶点的余图都包含一对孪生顶 ns,

- 所有距离遗传图，因为该类中的每个图都可以从单个顶点开始，通过依次添加一个悬挂顶点或一个孪生顶点来构造[3]。

请注意，功能度至多为 1 的图类要复杂得多，因为其中还包含带有反孪生顶点的图，也就是邻域互为补集的顶点。与孪生顶点类似，反孪生顶点彼此是函数。更一般地，任意两个顶点彼此都是函数，也都是无法将它们区分开的顶点的函数。不能区分它们。[3] 这一观察引出了一个类似于对称差的新概念，也开辟了与图功能度相关的新研究方向。

致谢。本研究部分由斯洛文尼亚研究与创新署资助（I0-0035、研究计划 P1-0285 和 P1-0383、研究项目 J1-3001、J1-3002、J1-3003、J1-4008、J1-4084、N1-0102 和 N1-0160，以及青年研究人员资助），并由普里莫斯卡大学的 CogniCom 研究计划（0013103）资助。

参考文献

[1] Bogdan Alecu、Aistis Atminas 和 Vadim Lozin。图功能度。《组合理论杂志B辑》147：139–158，2021。[2] Aistis Atminas、Andrew Collins、Vadim Lozin 和 Viktor Zamaraev。图的隐式表示与阶乘性质。《离散数学》，338(2)：164–179，2015。[3] Hans-J¨urgen Bandelt 和 Henry Martyn Mulder。距离遗传图。《组合理论杂志B辑》，41(2)：182–208，1986。[4]Abdul Basit、Artem Chernikov、Sergei Starchenko、陶哲轩和 Chieu-Minh Tran。半线性超图的扎兰凯维奇问题。《Forum Math. Sigma》，9：论文编号 e59，23，2021。[5] ´Edouard Bonnet、Colin Geniet、Eun Jung Kim、St´ephan Thomass´e 和 R´emi Watrigant。孪生宽度 II：小类。《组合理论》，2(2)：论文编号 10，42，2022。[6] ´Edouard Bonnet、Eun Jung Kim、St´ephan Thomass´e 和 R´emi Watrigant。孪生宽度 I：易处理的一阶逻辑模型检测。《ACM 汇刊》，69(1)：文章 3，46，2022。[7] Andreas Brandst¨adt、Joost Engelfriet、Ho`ang-Oanh Le 和 Vadim V. Lozin。禁用四顶点子图的团宽度。《理论计算机系统》，39(4)：561–590，2006。[8] Michael R. Garey 和 Ronald L. Graham。论立方图。《组合理论杂志B辑》，18(1)：84–95，1975。[9] Istv´an Tomon 和 Dmitriy Zakharov。盒交图的 Tur´an 型结果。《组合学、概率与计算》，30(6)：982–987，2021。

[3]令 Z 为不能区分 x 和 y的顶点集合，即 $Z = \{z \in V(G) \setminus \{x, y\} \mid z$ 要么同时与 x 和 y 相邻，要么都不与它们相邻$\}$。那么 x 是 $\{y\} \cup Z$的函数，因为任意顶点 $v \in V(G) \setminus (\{y\} \cup Z)$与 x 相邻，当且仅当 v 不与 y 相邻（特别地，Z 中的顶点在这个函数中是无关紧要的）。类似地，顶点 y 是 $\{x\} \cup Z$中顶点的函数。