arXiv:2301.09526v1 [math.FA] 23 Jan 2023

关于双圆盘上 Mitiagin-DeLeeuw-Mirkhil 非不等式的解析版本

Krystian Kazaniecki[1,2] 和 Michał Wojciechowski[3]

[1]林茨约翰内斯·开普勒大学分析研究所[2]华沙大学数学研究所[3]波兰科学院数学研究所

2023年1月24日

摘要

利用 Rudin-Shapiro 多项式的方法，我们证明了双圆盘上具有常系数的复偏微分算子所满足的 Mitiagin-DeLeeuw-Mirkhil 不等式的解析版本。

1 引言

Mitiagin、Mirkhil、DeLeeuw 和 Ornstein 的经典结果（[4, 12, 13], 另见 [2, 8, 10]）指出，对于 $p = 1$ 或 $p = \infty$，以及具有常系数且次数相同的齐次微分算子 $P_0(D)$、$P_1(D)$、.....、$P_k(D)$，不等式

$$\|P_0(D)f\|_p \lesssim \sum_{i=1}^{k} \|P_i(D)f\|_p \tag{1}$$

对每个具有有界支集的光滑函数 f 成立，当且仅当

$$P_0 \in \operatorname{span}\{P_1, \dots, P_k\}.$$

文献 [11] 研究了具有变系数的微分算子的类似问题。对于环面上的函数，也有类似的刻画。本文讨论最简单的情形 $d = 2$、$P_0(x、y) = xy$、$P_1(x、y) = x^2$ 和 $P_2(x、y) = y^2$，并附加限制条件：f是解析函数，即当 n 在集合 $\{n \in \mathbb{Z}^2$之外时，$\widehat{f}(n) = 0$；$n_1 \geqslant 0$、$n_2 \geqslant 0\}$。在此限制下，对于 $p = 1$，不等式（1）成立。事实上，$D^2_{xy}f = T_m(D^2_{x^2}f + D^2_{y^2}f)$，其中 T_m 是由乘子 $m(n_1、n_2) = \frac{n_1 n_2}{n_1^2+n_2^2}$给出的不变算子。根据（[16], 另见 [5], [1]），它在解析函数的 L^1 范数下有界。令人惊讶的是，本文将表明，在 L^∞ 范数下情况有所不同。具体而言，我们有：

定理 1。对于每个 $C > 0$，在环面$\mathbb{T}^2$ 上都存在一个解析三角多项式 f，使得

$$\|D^2_{xx}f\|_\infty + \|D^2_{yy}f\|_\infty \leqslant 1$$

but

$$\|D^2_{xy}f\|_\infty > C.$$

本研究部分获得波兰国家科学中心与奥地利科学基金会 FWF 联合 CEUS 计划的资助。波兰国家科学中心项目编号 2020/02/Y/ST1/00072，FWF 项目编号 I5231。

不难看出， $D^2_{xx}f$、 $D^2_{yy}f$ 和 $D^2_{xy}f$ 在单位双圆盘上的泊松延拓分别为 $z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)F$、$\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)^2F$和 $\big(z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big)^2F$，其中 F是 f的泊松延拓。利用最大值原理，我们可以将定理 1重新表述为:

The定理 2. 对于每个 $c>0$，都存在一个定义在单位双圆盘上的解析多项式 F，使得 at

$$\left\|\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2F\right\|_{A(D^2)}\leqslant 1\ and\ \left\|\left(z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^2F\right\|_{A(D^2)}\leqslant 1$$

but

$$\left\|z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right)F\right\|_{A(D^2)}\geqslant c.$$

此外，我们给出了上述常数 c 对 F 次数的依赖关系（定理 3 和推论 4）。定理 1 中常数增长的双对数界（不要求解析性）可由 Curc˘a 的构造推导得到（参见[3] 第 5.1 和 5.2 节；）。我们的构造不仅给出了一个解析例子，还提供了（几乎）对数界。

定理 3. 存在一个关于两个复变量、次数为 n 的解析多项式 P_n，使得

$$\|\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)^2P_n\|_{A(D^2)}\leqslant 1\quad and\quad \|\big(z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big)^2P_n\|_{A(D^2)}\leqslant 1$$

but

$$\|z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)P_n\|_{A(D^2)}\gtrsim\log^{1/8}n.$$

对于解析函数的边界值，在环面上也立即得到类似的定量结果。

推论 4. 存在一个关于两个复变量、次数为 n 的解析三角多项式 P_n，使得

$$\|D^2_{xx}f\|_\infty+\|D^2_{yy}f\|_\infty\leqslant 1$$

but

$$\|D^2_{xy}f\|_\infty\gtrsim\log^{1/8}n.$$

关于导数范数下界的定量估计所涉及的其他问题，见 [15]。

稍加努力，我们就可以将定理 2 中的欧拉导数替换为普通导数（此处出现低阶导数，是为了弥补缺少紧嵌入支集的问题）：

定理 5。对于每个 $c>0$，在单位双圆盘上都存在一个解析多项式 F，使得

$$\|F\|_{A(D^2)}\leqslant 1,\ \left\|\frac{\partial}{\partial z_1}F\right\|_{A(D^2)}\leqslant 1,\ \left\|\frac{\partial}{\partial z_2}F\right\|_{A(D^2)}\leqslant 1,$$

and

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}F\right\|_{A(D^2)}\leqslant 1,\ \left\|\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}F\right\|_{A(D^2)}\leqslant 1$$

but

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}F\right\|_{A(D^2)}\geqslant c.$$

尽管我们主要关注定量估计，但在本文最后一节中，我们还给出了另一种纯定性的证明。

注 6. 我们的方法具有定性意义（定理 1，第 3 节），可推广到一般情形，即具有常系数的同阶齐次微分算子 $P_0(D),P_1(D),\dots,P_k(D)$，使得 $P_0\notin$ 张成$\{P_1,\dots,P_k\}$。然而，对于定量结果（定理 3，推论 4），我们目前只知道如何在某些几何条件下推广这些结果，例如 [9, 定理2]中的条件。

受定理 5 启发，我们提出以下定义。

定义 7. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$，且 $z \in \partial\Omega$ 是其边界点。若存在一个以 z 为中心的球 B，使得对于每个 $c > 0$，都存在一个定义在 $\Omega \cap B$ 上的解析多项式 F，满足

$$\|F\|_{A(\Omega\cap B)} \leqslant 1, \quad \left\|\frac{\partial}{\partial z_1}F\right\|_{A(\Omega\cap B)} \leqslant 1, \quad \left\|\frac{\partial}{\partial z_2}F\right\|_{A(\Omega\cap B)} \leqslant 1$$

and

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}F\right\|_{A(\Omega\cap B)} \leqslant 1, \quad \left\|\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}F\right\|_{A(\Omega\cap B)} \leqslant 1$$

but

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}F(z)\right| \geqslant c.$$

类似地，对于有界域 Ω，我们将上述定义中的 B 替换为 $\mathbb{C}^2$，从而定义全局 MDM 点。利用这一概念，我们可以重新表述定理 5：点 $\mathbf{1} := (1,1)$ 是单位双圆盘的（全局）MDM 点（事实上，很容易看出，双圆盘的任何 Shilov边界点都是其 MDM 点）。注意，MDM性质在包含关系下具有继承性，即若 $z \in \Omega \subset \Omega'$ 是 Ω' 的 MDM 点，则 z 是 Ω 的 MDM 点。对于 $z \in \partial\Omega$ˆ成为 MDM 点，有一些自然的限制。事实上，设 $z \in \partial\Omega$ 是 Ω 的内部点——即 Ω 的多项式凸包 ˆ 的内部点。那么存在一个包含于 Ω、以 z 为中心的球 B。对于每个解析多项式 f，我们有

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}f(z)\right| \leqslant C_B \sup_{\omega\in B}|f(\omega)| \leqslant C_B \sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|.$$

第一个不等式由柯西公式 [14, 1.2.2. (v)] 推出，第二个不等式则根据多项式凸包的定义 [6, p. 53] 得出。我们猜想，上述障碍是唯一阻碍 MDM 性质成立的因素。然而，即使对于 $\mathbb{C}^2$ 的单位球，我们也不知道是否存在 MDM 点。

致谢 我们感谢 Paul F.X. M¨uller 和 Fedor Nazarov 提供宝贵的意见与建议。

2 定量结果的证明

定理 *2* 的证明。 设 $(n_k) \subset \mathbb{Z}_+^2$ 为一个稍后定义的稀疏序列。设 $(a_k)_{k=1}^n$为一个标量序列。定义 Rudin-Shapiro 多项式序列：

$$p_0(z) = a_0 z^{n_0} \qquad q_0 = 1$$

且对于 $n > 0$

$$p_n(z) = p_{n-1}(z) + a_n z^{n_k} q_{n-1}(z^{-1})$$
$$q_n(z) = q_{n-1}(z) - \bar{a}_n z^{n_k} p_{n-1}(z^{-1})$$

（此处我们采用记号 $z^{-1} = (z_1^{-1}、\ z_2^{-1})$ 表示 $z = (z_1、\ z_2) \in \mathbb{C}^2$）。通过简单的归纳法可知，$p_k$和 q_k 都是全纯多项式。根据对任意 $x、\ y、\ a \in \mathbb{C}$均成立的初等恒等式，

$$|x + ay|^2 + |y - \bar{a}x|^2 = (1 + |a|^2)(|x|^2 + |y|^2)$$

对于任意 $|z_1| = |z_2| = 1$，我们有

$$|p_n(z)|^2 + |q_n(\bar{z})|^2 = \prod_{k=0}^{n}(1 + |a_k|^2)$$

事实上，这可通过归纳法得出，因为对于 $|z_1| = |z_2| = 1$,

$$\begin{aligned}|p_k(z)|^2 + |q_k(\bar{z})|^2 &= |p_{k-1}(z) + a_n z^{n_k} q_{k-1}(z^{-1})|^2 \\ &\quad + |q_{k-1}(\bar{z}) - \bar{a}_n \bar{z}^{n_k} p_{k-1}(\bar{z}^{-1})|^2 \\ &= |p_{k-1}(z) + a_k z^{n_k} q_{k-1}(z^{-1})|^2 \\ &\quad + |z^{n_k} q_{k-1}(z^{-1}) - \bar{a}_k p_{k-1}(z)|^2 \\ &= (1 + |a_k|^2)(|p_k(z)|^2 + |q_k(\bar{z})|^2)\end{aligned}$$

由此构造可得

$$p_n(z) = a_0 z^{n_0} + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{n_k} q_{k-1}(z^{-1})$$

and

$$q_n(z) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k z^{n_k} p_{k-1}(z^{-1})$$

对于任意复数序列 $\{\omega_k\}_{k=1}^n$，都存在一个子集 $A \subset \{0, 1, 2, \ldots, n\}$，使得

$$|\sum_{k\in A} \omega_k| \geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} |\omega_n|$$

注意， $p_k(\mathbf{1})$ 和 $q_k(\mathbf{1})$ 的取值与序列 (n_k)的选取无关，只取决于序列 $(a_k)_{k=1}^n$的选取。对于固定序列 (a_k)，我们取两个和 $\sum_{k=0}^n |a_k q_{k-1}(\mathbf{1})|$、 $\sum_{k=1}^n |\bar{a}_k p_{k-1}(\mathbf{1})|$中较大的一个。不失一般性，假设第一个较大，并令 $\omega_k = a_k q_{k-1}(\mathbf{1})$。因此，存在 $A := A((a_k)) \subset \{0, 1, 2, \ldots, n\}$，使得

$$\begin{aligned}&|\sum_{k\in A} a_k q_{k-1}(\mathbf{1})| + |\sum_{k\in A} \bar{a}_k p_{k-1}(\mathbf{1})| \\ &\qquad \geqslant \frac{1}{2\pi}\Big(\sum_{k=0}^{n} |a_k q_{k-1}(\mathbf{1})| + \sum_{k=1}^{n} |\bar{a}_k p_{k-1}(\mathbf{1})|\Big) \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} |a_k|\big(|q_{k-1}(\mathbf{1})| + |p_{k-1}(\mathbf{1})|\big) \\ &\qquad \geqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} |a_k|\big(|q_{k-1}(\mathbf{1})|^2 + |p_{k-1}(\mathbf{1})|^2\big)^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad \geqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \prod_{j=0}^{k-1} (1 + |a_j|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

另一方面，对于 $|z_1| = |z_2| = 1$

$$\begin{aligned}&|\sum_{k\in A} a_k z^{n_k} q_{k-1}(z^{-1})| + |\sum_{k\in A} \bar{a}_k \bar{z}^{n_k} p_{k-1}(\bar{z}^{-1})| \\ &\qquad \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |q_{k-1}(z^{-1})| + \sum_{k=0}^{n} |\bar{a}_k| \cdot |p_{k-1}(\bar{z}^{-1})| \\ &\qquad \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot \big(|q_{k-1}(z^{-1})| + |p_{k-1}(\bar{z}^{-1})|\big) \\ &\qquad \leqslant \sqrt{2} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \prod_{j=0}^{n} (1 + |a_j|^2)^{1/2}\end{aligned}$$

现在令 $\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)^2F=p_n$ 和 $\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)^2G=q_n-1$。显然

$$\begin{aligned}\max\{\|\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)^2F\|_{A(D^2)},\|\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)^2G\|_{A(D^2)}\}&\leqslant\max\{\|p_n\|_{A(D^2)},\|q_n\|_{A(D^2)}\}+1\\&\leqslant\left(\sup_{z\in D^2}|p_n(z)|^2+|q_n(z)|^2\right)^{\frac{1}{2}}+1\\&=\left(\sup_{|z_1|=|z_2|=1}|p_n(z_1,z_2)|^2+|q_n(z_1,z_2)|^2\right)^{\frac{1}{2}}+1\\&\leqslant\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n^2)^{\frac{1}{2}}+1.\end{aligned}\tag{2}$$

函数 p_k 2^k $b_Mz^{m(M)}$ $M=$是一 $\{i_0\ i_1\ \dots\ i_{2s}\}\subset\{0\ 1\ 2\ \dots\ n\}$ $m(M)=\sum_{j=0}^{2s}(-1)^jn_{i_j}$ $|b_M|=\prod_{j\in M}|a_{n_j}|$ 个多项式，由形如 的单项式相加而成，其中，，，，，，，且 和。类似地q_k是一个多项式，由 1 和 2^k-1个形如 $b_Mz^{m(M)}$的单项式相加而成，其中 $M=\{i_0、\ i_1、\ .....、\ i_{2s+1}\}\subset\{0、\ 1、\ 2、\ .....、\ n\}$以及 $m(M)=\sum_{j=0}^{2s+1}(-1)^{j+1}n_{i_j}$和 $|b_M|=\prod_{j\in M}|a_{n_j}|$。因此

$$z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)F(z)=\sum_{2\not|\#M}b_M\frac{m(M)_2}{m(M)_1}z^{m(M)}$$

and

$$\big(z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big)^2F(z)=\sum_{2\not|\#M}b_M\left(\frac{m(M)_2}{m(M)_1}\right)^2z^{m(M)}$$

类似地

$$z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)G(z)=\sum_{2|\#M}b_M\frac{m(M)_2}{m(M)_1}z^{m(M)}$$

and

$$\big(z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big)^2G(z)=\sum_{2|\#M}b_M\left(\frac{m(M)_2}{m(M)_1}\right)^2z^{m(M)}$$

假设序列 (n_k) 的选取方式使得对于 $0<b<1$

$$\begin{aligned}&(i)\qquad\sum_{\max M\in A}|\frac{m(M)_2}{m(M)_1}-\kappa|<1\\&(ii)\qquad\sum_{\max M\in A}|\left(\frac{m(M)_2}{m(M)_1}\right)^2-\kappa^2|<1\\&(iii)\qquad\sum_{\max M\notin A}|\frac{m(M)_2}{m(M)_1}|<1\\&(iv)\qquad m(M)\in\mathbb{Z}_+^2\qquad\text{for } M\subset\{0,1,2,\dots,n\}\end{aligned}$$

如果比值 $\frac{(n_k)_2}{(n_k)_1}$的选取适当（无论事实 $k\in A$是否成立），且 $\frac{|n_{k+1}|}{|n_k|}$ 足够大，则上述条件均能满足。简单计算表明，对于合适的 λ，可以取 $|n_k|\simeq 3^{\lambda nk}$，参见 [9]。对于这一选取

$$\log\deg F\simeq\log\deg G\simeq n^2.\tag{3}$$

从现在起，我们假设

$$|a_k|\leqslant 1$$

因此 $|b_M| \leqslant 1$。然后，根据三角不等式，

$$\begin{aligned}
&\big|z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)F(\mathbf{1})\big| + \big|z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)G(\mathbf{1})\big| \\
&\qquad > \big|\kappa\sum_{k\in A} a_k q_{k-1}(\mathbf{1})\big| + \big|\kappa\sum_{k\in A}\bar{a}_k p_{k-1}(\mathbf{1})\big| \\
&\qquad - \sum_{\max M\in A}^{n} |b_M|\cdot\big|\frac{m(M)_2}{m(M)_1} - \kappa\big| - \sum_{\max M\notin A} |b_M|\cdot\big|\frac{m(M)_2}{m(M)_1}\big| \\
&\qquad \geqslant \frac{\kappa}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}|a_k|\prod_{j=0}^{k-1}(1+|a_j|^2)^{1/2} - 2
\end{aligned} \tag{4}$$

此外，对于 $|z_1| = |z_2| = 1$,

$$\begin{aligned}
&\big|\big(z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big)^2 F(z)\big| + \big|\big(z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big)^2 G(\bar{z})\big| \\
&\qquad < \big|\kappa^2\sum_{k\in A} a_k z^{n_k} q_{k-1}(z)\big| + \big|\kappa^2\sum_{k\in A}\bar{a}_k\bar{z}^{n_k} p_{k-1}(\bar{z})\big| \\
&\qquad + \sum_{\max M\in A}^{n} |b_M|\cdot\big|\frac{m(M)_2}{m(M)_1} - \kappa^2\big| + \sum_{\max M\notin A} |b_M|\cdot\big|\frac{m(M)_2}{m(M)_1}\big| \\
&\qquad \leqslant \sqrt{2}\kappa^2\sum_{k=1}^{n}|a_k|\prod_{j=0}^{k-1}(1+|a_j|^2)^{1/2} + 2
\end{aligned} \tag{5}$$

设 $a_k = k^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\kappa = n^{-\frac{1}{4}}$。将上述数值代入 (2)，得到

$$\begin{aligned}
\max\{\|\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)^2 F\|_{A(D^2)}, \|\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)^2 G\|_{A(D^2)}\} &\leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{\frac{1}{2}} + 1 = \prod_{k=1}^{n}(\frac{k+1}{k})^{\frac{1}{2}} + 1 \\
&= \sqrt{n+1} + 1.
\end{aligned}$$

由 (5) 得

$$\begin{aligned}
\max\{\|\big(z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big)^2 F\|_{A(D^2)}, \|\big(z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big)^2 G\|_{A(D^2)}\} &\leqslant \sqrt{2}n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=0}^{k-1}(1+\frac{1}{j})^{1/2} + 2 \\
&\leqslant \sqrt{2n} + 2.
\end{aligned}$$

最后，由 (4) 可得混合导数

$$\begin{aligned}
\max\{\|z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)F\|_{A(D^2)}, \|z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\big(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}\big)G\|_{A(D^2)}\} &\geqslant \frac{n^{\frac{1}{4}}}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}}\prod_{j=0}^{k-1}(1+\frac{1}{j})^{1/2} - 2 \\
&\geqslant \frac{n^{\frac{3}{4}}}{2\pi} - 2.
\end{aligned}$$

因此，对于固定的 n，由定理 2 可得

$$c = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\pi} + o(1)\right) n^{\frac{1}{4}}$$

□

现在考虑 $F(z)$ 或 $G(z)$，以及满足 $(i)-(iv)$ 和 (3) 的序列 $\{n_k\}$，即可得到定理 3。

现在我们可以由定理 2 的证明推导出定理 5。

定理 *5* 的证明。根据构造 $(n_k)_1 > 2^{k^2}$。于是

$$\begin{aligned}|F(z)| + |G(z)| \leqslant \sum_{M\subset\{1,\dots,n\}} |b_M| \frac{1}{m(M)_1^2} &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{\max M=k} \frac{1}{(n_k)_1^2} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{2^{2k^2}} < 2.\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}\left|z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} F(z)\right| + \left|z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} G(z)\right| &\leqslant \sum_{M\subset\{1,\dots,n\}} |b_M| \frac{1}{m(M)_1} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{\max M=k} \frac{1}{|(n_k)_1|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{2^{k^2}} < 2.\end{aligned}$$

由于我们可以假设 $\frac{m(M)_2}{m(M)_1} \leqslant 1$，因此得到

$$\begin{aligned}\left|z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} F(z)\right| + \left|z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} G(z)\right| &\leqslant \sum_{M\subset\{1,\dots,n\}} |b_M| \frac{m(M)_2}{m(M)_1^2} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{\max M=k} \frac{1}{|(n_k)_1|} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{2^{k^2}} < 2.\end{aligned}$$

现在，由于 $\frac{\partial}{\partial z_2} F(z)$ 是解析函数，我们有如下恒等式

$$\left\|\frac{\partial}{\partial z_2} F(z)\right\|_\infty = \sup_{|z_1|=|z_2|=1} \left|\frac{\partial}{\partial z_2} F(z)\right| = \sup_{|z_1|=|z_2|=1} \left|z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} F(z)\right| < 2.$$

另一方面，对于 $j \in \{1、\ 2\}$

$$z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right) F(z) = z_j^2 \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} F(z) + z_j \frac{\partial}{\partial z_j} F.$$

再次，由于偏导数是解析的，我们有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^2}{\partial z_i^2} F(z)\right\|_\infty &= \sup_{|z_1|=|z_2|=1} \left|\frac{\partial^2}{\partial z_i^2} F(z)\right| = \sup_{|z_1|=|z_2|=1} \left|z_i^2 \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} F(z)\right| \\ &\leqslant \left\|z_i \frac{\partial}{\partial z_i}\left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right) F\right\|_\infty + \left\|z_i \frac{\partial}{\partial z_i} F\right\|_\infty < 1 + 2 = 3.\end{aligned}$$

最后，对于混合偏导数，我们有

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right) F\right\|_\infty &= \sup_{|z_1|=|z_2|=1} \left|\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right) F\right| \\ &= \sup_{|z_1|=|z_2|=1} \left|z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) F\right| \\ &= \left\|z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\right) F\right\|_\infty .\end{aligned}$$

By a通过类似的论证，我们得到了函数 G 的估计。函数 F 或 G 之一 is the 所需的多项式。 □

3 定性方法

本节给出定理 1 的定性证明。这个证明更简单，但与定理 3 的证明不同，它没有给出常数对所涉及多项式次数的依赖关系。与 Mirkhil 和 DeLeeuw 的证明一样 [4], ，本证明基于 Hahn-Banach 定理。新的关键在于使用维纳奇异性判别准则。

定理 *1* 的定性证明。记 $C^{\{\partial_1^2,\ \partial_2^2\},\ \mathbb{Z}_+^2}(\mathbb{T}^2)$ 为零均值解析三角多项式在以下范数下的闭包

$$\|\!|f|\!\| = \|D_{xx}^2 f\|_\infty + \|D_{yy}^2 f\|_\infty$$

该空间通过公式等距嵌入为 $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^2)$ 中的闭子空间

$$f \to (D_{xx}^2 f, D_{yy}^2 f)$$

假设定理 1 的断言不成立，那么由公式给出的泛函 $\Lambda:\ C^{\{\partial_1^2,\ \partial_2^2\},\ \mathbb{Z}_+^2}(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{C}$

$$\Lambda(f) = D_{xy}^2 f(0,0)$$

是连续的。根据 Hahn-Banach 定理，它可延拓到 $C(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^2)$。因此，存在一对有界测度 μ 和 ν，使得

$$D_{xy}^2 f(0,0) = \int_{\mathbb{T}} D_{xx}^2 f \,\mathrm{d}\,\mu + \int_{\mathbb{T}} D_{xx}^2 f \,\mathrm{d}\,\mu$$

将上述公式应用于特征函数 $(t,s) \to e^{i(nt+ms)}$，得到

$$\frac{nm}{n^2+m^2} = \frac{n^2}{n^2+m^2}\,\widehat{\mu}(n,m) + \frac{m^2}{n^2+m^2}\,\widehat{\nu}(n,m). \tag{6}$$

Let

$$K_r(n,m) = \{(k,l) \in \mathbb{Z}_+^2 : \max\{|n-k|, |m-l|\} < r\}.$$

由 (6) 可知

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(k,l) + \widehat{\nu}(k,l) &= 1 + o(1) && \text{for } (k,l) \in K_n(n^2,n^2), \\ \widehat{\mu}(k,l) &= o(1) && \text{for } (k,l) \in K_n(n^2,n), \\ \widehat{\nu}(k,l) &= o(1) && \text{for } (k,l) \in K_n(n,n^2). \end{aligned} \tag{7}$$

Then

$$\begin{aligned} A &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\#K_n(n^2,n^2)} \sum_{(k,l)\in K_n(n^2,n^2)} |\widehat{\mu}(k,l)|^2 + |\widehat{\nu}(k,l)|^2 \geqslant \frac{1}{4}, \\ B &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\#K_n(n^2,n)} \sum_{(k,l)\in K_n(n^2,n)} |\widehat{\mu}(k,l)|^2 = 0, \\ C &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\#K_n(n,n^2)} \sum_{(k,l)\in K_n(n,n^2)} |\widehat{\nu}(k,l)|^2 = 0. \end{aligned}$$

根据维纳定理关于测度离散部分的结论 [7, p. 45], A 是一个真正的极限，由此得到以下矛盾

$$A = \sum_{\tau\in\mathbb{T}^2} |\mu(\{\tau\})|^2 + |\nu(\{\tau\})|^2 = \sum_{\tau\in\mathbb{T}^2} |\mu(\{\tau\})|^2 + \sum_{\tau\in\mathbb{T}^2} |\nu(\{\tau\})|^2 = B + C.$$

□

最后，我们提出了另一种证明定理 1 的方法，也可用于指明更广泛的 MDM 点类别。

命题 8. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ 和 $(z_0, w_0) \in \partial\Omega$ 满足

1. 在 (z_0, w_0)处有两个不同的支撑超平面 L, K；
2. $L \cap K$ 不是一条复直线;
3. $L \cap \overline{\Omega} = \{(z_0,\ w_0)\}$。

那么 $(z_0,\ w_0)$ 是 Ω 的 *MDM* 点。

证明。 由于点 (z_0处有两个支撑超平面，因此存在两个不同的仿射函数 $\gamma_i\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ ，满足

$$\gamma_j(z,w) = x_j(z-z_0) + y_j(w-w_0), \qquad j \in \{1,2\}$$

使得

$$\operatorname{Re}(\gamma_j(z,w)) \geqslant 0 \qquad \text{for } (z,w) \in \overline{\Omega}.$$

注意，如果有两个这样的函数，那么还存在另一个具有上述性质的函数 γ_3 （事实上有无穷多个）。由于 $K \cap L$ 不是一条复直线，我们可以假设

$$x_j \neq 0, \quad y_j \neq 0, \qquad \frac{x_i}{y_i} \neq \frac{x_j}{y_j} \qquad \text{for } i \neq j, \quad i,j \in \{1,2,3\}. \tag{8}$$

考虑全纯函数

$$f_{j,N}(z,w) = N^{-2}e^{-N\gamma_{j(z,w)}}, \qquad j = \{1,2,3\}.$$

我们验证

$$\begin{aligned}
\partial_z f_{j,N}(z,w) &= -N^{-1}x_j e^{-N\gamma_{j(z,w)}}, \quad \partial_z^2 f_{j,N}(z,w) = x_j^2 e^{-N\gamma_{j(z,w)}},\\
\partial_w f_{j,N}(z,w) &= -N^{-1}y_j e^{-N\gamma_{j(z,w)}}, \quad \partial_w^2 f_{j,N}(z,w) = y_j^2 e^{-N\gamma_{j(z,w)}},
\end{aligned}$$

and

$$z\partial_z(w\partial_w) f_{j,N}(z,w) = x_j y_j e^{-N\gamma_{j(z,w)}}.$$

因此得到

$$\lim_{N\to\infty} \partial_z f_j^N(z,w) = \lim_{N\to\infty} \partial_w f_j^N(z,w) = \lim_{N\to\infty} f_j^N(z,w) = 0 \qquad \forall (z,w) \in \overline{\Omega}$$

and

$$\lim_{N\to\infty} \partial_z^2 f_j^N(z,w) = \begin{cases} x_j^2 & (z,w) = (z_0,w_0);\\ 0 & (z,w) \neq (z_0,w_0); \end{cases} \quad \lim_{N\to\infty} \partial_w^2 f_j^N(z,w) = \begin{cases} y_j^2 & (z,w) = (z_0,w_0);\\ 0 & (z,w) \neq (z_0,w_0). \end{cases}$$

与双圆盘的情形类似，借助 Hahn-Banach 定理可得：如果 (z_0,w_0)不是 MDM 点，则存在有界博雷尔测度 $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ ，使得

$$\begin{aligned}
\partial_z\partial_w f_{j,N}(z_0,w_0) = &\int_{\partial\Omega} \partial_z^2 f_{j,N}(z,w)\,\mathrm{d}\,\mu_1 + \int_{\partial\Omega} \partial_w^2 f_{j,N}(z,w)\,\mathrm{d}\,\mu_2\\
&+ \int_{\partial\Omega} \partial_z f_{j,N}(z,w)\,\mathrm{d}\,\nu_1 + \int_{\partial\Omega} \partial_w f_{j,N}(z,w)\,\mathrm{d}\,\nu_2 + \int_{\partial\Omega} f_{j,N}(z,w)\,\mathrm{d}\,\nu_3.
\end{aligned}$$

令 $\mu_1 = \alpha\delta_{(z_0,\ w_0)} + \tilde{\mu}_1$和 $\mu_2 = \beta\delta_{(z_0,\ w_0)} + \tilde{\mu}_2$，其中 $\delta_{(z_0,\ w_0)} \perp \tilde{\mu}_1$和 $\delta_{(z_0,\ w_0)} \perp \tilde{\mu}_2$。根据勒贝格控制收敛定理，对于 $j \in \{1、2、3\}$ ，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} \partial_z^2 f_{j,N}(z,w)\,\mathrm{d}\,\mu_1 + \int_{\partial\Omega} \partial_w^2 f_{j,N}(z,w)\,\mathrm{d}\,\mu_2\\
&\qquad = \alpha\partial_z^2 f_{j,N}(z_0,w_0) + \int_{\partial\Omega} \partial_z^2 f_{j,N}(z,w)\,\mathrm{d}\,\tilde{\mu}_1\\
&\qquad\quad + \beta\partial_w^2 f_{j,N}(z_0,w_0) + \int_{\partial\Omega} \partial_w^2 f_{j,N}(z,w)\,\mathrm{d}\,\tilde{\mu}_2 \overset{N\to\infty}{\to} \alpha x_j^2 + \beta y_j^2.
\end{aligned}$$

and

$$\int_{\partial\Omega} \partial_z f_{j,N}(z,w)\,\mathrm{d}\,\nu_1 + \int_{\partial\Omega} \partial_w f_{j,N}(z,w)\,\mathrm{d}\,\nu_2 + \int_{\partial\Omega} f_{j,N}(z,w)\,\mathrm{d}\,\nu_3 \overset{N\to\infty}{\to} 0$$

另一方面

$$\lim_{N\to\infty} \partial_z\partial_w f_{i,N}(z_0,w_0) = x_j y_j.$$

因此

$$x_j y_j = \alpha x_j^2 + \beta y_j^2 \qquad \text{for } j \in \{1,2,3\}. \tag{9}$$

由 (8) 可得 $p_j = x_j y_j^{-1} \neq 0$ 且

$$1 - \alpha p_j - \beta p_j^{-1} = 0, \qquad j \in \{1,2,3\} \tag{10}$$

因此， p_1、 p_2、 p_3 是二次方程 $x - \alpha x^2 - \beta = 0$ 的根，这与 (8) 矛盾。因此， $(z_0$、 $w_0)$ 是 Ω 的一个 MDM 点。 □

参考文献

[1] L. Carleson. 关于 H^1 和 BMO 的两点注记。《数学进展》，22(3):269–277，1976 .

[2] S. Conti、D. Faraco 和 F. Maggi。《估计的新方法：Korn 不等式、几何刚性，以及分别凸函数梯度的正则性》。该文探讨了对 L^1 估计的反例。刊于《理性力学与分析档案》，175(2):287–300，2004 年 12 月。[3] E. Curc˘a。关于傅里叶乘子在 $\dot{W}^{l,1}(\mathbb{R}^d)$ 和 $\dot{W}^{l,\infty}(\mathbb{R}^d)$上的连续性。《泛函分析杂志》，第 109573 页，2022 年。[4] K. de Leeuw 和 H. Mirkil。关于 L_∞ 范数下微分算子的先验估计。《伊利诺伊数学杂志》，8(1)，1964 年 3 月。[5] R. A. Fefferman。调和分析与偏微分方程中的若干主题。载于《纪念 Elias M. Stein 的傅里叶分析论文集》（新泽西州普林斯顿，1991），普林斯顿数学丛书第 42 卷，第 175–210 页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1995 年。[6] L. H¨ormander。《多变量复分析导论》。D. Van Nostrand Co., Inc.，普林斯顿，新泽西州—多伦多，安大略省—伦敦，1966 年。[7] Y. Katznelson。《调和分析导论》。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，剑桥，第三版，2004 年。[8] K. Kazaniecki、D. M. Stolyarov 和 M. Wojciechowski。各向异性 Ornstein 非不等式。《分析与偏微分方程》，10(2):351–366，2017 年 2 月。[9] K. Kazaniecki 和 M. Wojciechowski。关于 Ornstein 非不等式的 Bernstein 型定量估计。https://arxiv.org/abs/2206.13666，2022 年。[10] B. Kirchheim 和 J. Kristensen。关于一次齐次的秩一凸函数。《理性力学与分析档案》，221(1):527–558，2016 年 2 月。[11] D. V. Limanskiĭ 和 M. M. Malamud。关于 de Leeuw 和 Mirkil 定理在变系数算子上的类比。《数学札记》，83(5):783–786，2008 年。[12] B. S. Mityagin。关于二阶混合偏导数。《苏联科学院院刊》，123:606–609，1958 年。[13] D. Ornstein。关于 L_1 范数下微分算子的一个非等式。《理性力学与分析档案》，11:40–49，1962 年。[14] W. Rudin。《 $\mathbb{C}^n$单位球中的函数论》。数学经典丛书。施普林格出版社，柏林，2008 年。1980 年版重印。[15] S. A. Teljakovskiĭ。多变量三角多项式导数的界。西伯利亚数学杂志，4:1404–1411，1960 年。[16] M. Wojciechowski。乘积区域上 H^1 空间的 Marcinkiewicz 型乘子定理。《数学研究》，140(3):273–287，2000 年。

Krystian Kazaniecki，分析研究所，JKU 林茨；
数学研究所，华沙大学；
krystian.kazaniecki@jku.at

Michał Wojciechowski 波兰科学院数学研究所
miwoj@impan.pl