arXiv:2301.09529v1 [math.LO] 23 Jan 2023

尖锐拟正交模偏序集与相对拟正交模偏序集中的蕴涵

Ivan Chajda、Davide Fazio、Helmut L¨anger、Antonio Ledda 和 Jan Paseka

摘要

本文证明，若干类具有拟正交模约化的偏序结构，或其截段可视为拟正交模偏序集的结构，都具有一种相当自然的蕴涵概念，并允许定义适当的伴随性概念。在此框架下，我们将著名的 Greechie 关于有限布尔代数粘合的定理平滑地推广到克莱尼格领域。

AMS 主题分类 主题分类：03G12, 03G25, 03G10, 03B47, 03B60, 06A11, 06C15

关键词：旁正交模偏序集、相对拟正交模偏序集、尖锐拟正交模偏序集、正交偏序集、Kleene 偏序集、弱布尔偏序集、Kleene 格、量子力学逻辑、正交模格、正交模偏序集、Kleene 格的粘合、原子粘合、伴随性、Sasaki 蕴涵

1 引言

Janusz Czelakowski 早期的贡献涉及量子逻辑和量子力学基础。更确切地说，他深化了 Kochen 和 Specker 关于部分布尔代数（PBA）的研究成果；部分布尔代数是一类部分代数，用于推广可分希尔伯特空间上的投影算子 [19]。除其他成就外，Czelakowski 的研究一方面为可嵌入布尔代数的 PBA 提供了一种新颖的刻画；另一方面也阐明了为何 PBA 可被视为一种独立逻辑的代数语义。详情请参见例如 [10, 11, 12] 。

人们对部分布尔代数的兴趣，源于它们能够很好地处理考虑不对易可观测量（自伴线性算子）时出现的不确定性。事实上，部分布尔代数带有一种二元运算 $\vee$，它在代数层面对应于一种部分析取，后者定义于可通约可观测量对上。因此，尽管 Kochen 和 Specker 与 Birkhoff 和 von Neumann 的理论都植根于同一个具体模型（即希尔伯特空间上的投影），前者关于量子力学基础的研究路径却不同于后者的量子逻辑 [3]。事实上，前者避免了后者所引发的解释困难；后者假定量子命题的合取/析取始终存在，即使这些命题涉及不相容可观测量也是如此。

引用 Czelakowski 和 Suppes 的话，

> “他们（Birkhoff 和 von Neumann）要求实验命题的结构构成一个格，因此格中两个有意义命题的合取也必须属于该格。然而，当一个命题表达测量位置可能得到的结果，而另一个表达测量动量可能得到的结果时，他们的要求似乎过于严格。在我看来，复可分希尔伯特空间的闭线性子空间构成这样的格，这一事实不足以证明它表达的是范围更受限制的实验命题逻辑，尽管这一子空间格在理论的构建中至关重要。”

事实上，正如 [10, 21], 中所提到的

> “如何赋予两个给定实验命题的交与并以实验意义？”

在部分布尔代数的各类结构中，传递偏布尔代数发挥着重要作用（例如见 [10]）；而传递偏布尔代数又是相容关系正则的正交模偏序集（详情参见 [2, 18, 20] ）。

回顾一下，带有一种补运算的有界偏序集 $\mathbf{P} = (P, \leq, ', 0, 1)$，若该补运算是反单调对合，则称 P 为正交模的，当且仅当它是正交的，即对于 $x, y \in P$，只要 $x \leq y'$， $x \vee y$就存在，并且它满足正交模律

$$(\mathrm{OM})\ \ x \leq y \text{ implies } x \vee (y \wedge x') = y.$$

此外，若 P 是格序的，即它是一个正交模格，那么 (OM) 可表示为一个恒等式

$$(\mathrm{OI}_{\vee})\ \ x \vee \big((x \vee y) \wedge x'\big) \approx x \vee y$$

及其对偶形式

$$(\mathrm{OI}_{\wedge})\ \ x \wedge \big((x \wedge y) \vee x'\big) \approx x \wedge y.$$

在所谓的量子理论非锐化方法中，有人提出了量子事件集合的另一种抽象对应物。这类结构（即效应代数或 MV 代数）是量子效应的一种恰当代数对应物；量子效应指满足玻恩规则的希尔伯特空间上的有界自伴线性算子。然而，由于玻恩规则在希尔伯特空间的效应集上诱导的典范序通常不是格，效应代数并不适合进行深入的逻辑—代数研究。

因此，2016 年，Roberto Giuntini、Francesco Paoli 和本文的一位作者提出了拟正交模格这一概念，将其视为正交模格概念的自然推广。这些结构在配备 Olson谱序的效应集上有具体实现，参见例如 [15] or [16]。然而，尽管拟正交模格能够以非常自然且具有物理动机的方式克服效应代数框架所带来的困难，但它们也可能引发有趣的哲学问题；从某种意义上说，这与它们的“尖锐亲属”所面临的情况相似。

在 [5] 中，拟正交模偏序集被引入为一种框架，使得从正交模格、效应代数，当然还有拟正交模格等量子结构中得到的序—否定约化，能够在共同的背景下加以处理。同一研究还对尖锐旁正交模偏序集进行了初步考察。对于拟正交模格而言，这些结构所起的作用，正如正交模偏序集在正交模格理论中所起的作用。因此，一个自然的问题随之而来：拟正交模偏序集能否被视为某种独立逻辑的语义对应物?

本文探讨一个问题：若干类具有拟正交模约化结构的偏序结构，或其"截段"（按下文第 5 节的含义）可视为拟正交模偏序集的结构，是否具有一种相当自然的蕴涵概念。

具体而言，本文安排如下：第 1 节介绍一些预备概念；第 2 节讨论尖锐旁正交模偏序集中的一种可能的平滑蕴涵概念。第 4 节将 R. Greechie 关于有限布尔代数粘合的著名定理 [17] 推广到克莱尼格领域。第 5 节和第 6 节讨论拟正交模偏序集理论如何在两种不同的自由度下延伸：相对拟正交模偏序集和相对拟正交模并半格。最后，第 7 节探讨是否存在一个二元联结词，能与此前引入的蕴涵构成一个伴随对。

2 基本概念

设 $\mathbf{P} = (P, \leq)$ 是一个偏序集，$A, B \subseteq P$ 和 $a, b \in P$。我们定义 $A \leq B$ 当且仅当对于所有 $x \in A$ 和所有 $y \in B$，都有 $x \leq y$。我们将 $A \leq \{b\}$, $\{a\} \leq B$ 和 $\{a\} \leq \{b\}$ 分别简写为 $A \leq b$, $a \leq B$ 和 $a \leq b$。这些集合

$$L(A) := \{x \in P \mid x \leq A\},$$
$$U(A) := \{x \in P \mid A \leq x\}$$

分别称为 A 的下锥和上锥。我们将 $L(A \cup B)$,$L(A \cup \{b\})$, $L(\{a, b\})$ 和 $L\big(U(A)\big)$ 分别简写为 $L(A, B)$, $L(A, b)$, $L(a, b)$ 和 $LU(A)$。类似地，在相似情形下也按此处理。在 2^P 上，我们引入四个二元关系 $\leq, \leq_1, \leq_2$ 和 $\approx_2$，如下所示:

$$\begin{aligned}
A \leq B &\text{ 当且仅当对于每个 } x \in A \text{ 和每个 } y \in B\text{，都有 } x \leq y,\\
A \leq_1 B &\text{ 当且仅当对于每个 } x \in A\text{，都存在某个 } y \in B \text{ 使得 } x \leq y,\\
A \leq_2 B &\text{ 当且仅当对于每个 } y \in B\text{，都存在某个 } x \in A \text{ 使得 } x \leq y,\\
A \approx_2 B &\text{ 当且仅当 } A \leq_2 B \text{ 且 } B \leq_2 A.
\end{aligned}$$

回顾一下，$A \leq y$ 当且仅当 $A \leq_1 y$，同理，$x \leq B$ 当且仅当 $x \leq_2 B$。若一元运算 $'$ 定义在 P 上，且

$$x, y \in P \text{ and } x \leq y \text{ together imply } y' \leq x'$$

并且满足恒等式

$$x'' \approx x.$$

注意，若 P 具有反单调对合 $'$ 和底元 0，则它也具有顶元 1，即 $0'$。如果 $x \leq y'$，或等价地，如果 $y \leq x'$，我们就称 x与 $y \in P$ 彼此正交，简记为 $x \perp y$。

所谓正交偏序集，是指满足以下条件的有界偏序集 $(P, \leq, ', 0, 1)$，其具有一个反单调对合：

$$x, y \in P \text{ and } x \perp y \text{ together imply that } x \vee y \text{ exists.}$$

这里及下文中，$x \vee y$ 表示 x 和 y的上确界。

拟正交模偏序集的概念由 [5] 提出，作为对 [16]中提出的拟正交模格概念的推广。回顾一下，带有反单调对合的有界偏序集 $\mathbf{P} = (P, \leq, ', 0, 1)$ 若满足以下条件，则称为拟正交模：

$$\text{(P)}\ \ x, y \in P,\ x \leq y \text{ and } x' \wedge y = 0 \text{ together imply } x = y.$$

需要指出，$x' \wedge y = 0$ 等价于 $L(x', y) = 0$。我们在先前的论文 [5]中使用了第二种记法。此外，如果拟正交模偏序集 P 是格序的，则称其为拟正交模格。

给定偏序集 P，若元素 $y \in P$满足 $L(x, y) = L(P)$ 且 $U(x, y) = U(P)$，则称其为 $x \in P$的补元。若 P 中每个元素 P在 P 中都有补元，则称 P 是有补的。此外，若 P 是一个带有反单调对合的有界偏序集，且该反单调对合是正交的，并且 $'$ 是一个补运算，则 P 是正交模偏序集。也就是说，例如，文献[18],表明，对于补运算 $'$，(P) 等价于 (OM)。

正交的拟正交模偏序集称为尖锐旁正交模偏序集（见 [5]）。当然，任何拟正交模格都是尖锐旁正交模的。若尖锐旁正交模偏序集 P 满足以下恒等式，则称其为正则的；对任意x、$y \in P$：

$$\text{(reg)}\ \ x \wedge x' \leq y \vee y'.^{1}$$

注意，由于正交性，(2) 是定义良好的。我们将分配的、正则的拟正交模格称为克莱尼格。

若满足以下等价的 LU恒等式之一，则称偏序集 P 为分配的：

$$\begin{aligned}
L\big(U(x,y),z\big) &\approx LU\big(L(x,z),L(y,z)\big),\\
U\big(L(x,z),L(y,z)\big) &\approx UL\big(U(x,y),z\big),\\
U\big(L(x,y),z\big) &\approx UL\big(U(x,z),U(y,z)\big),\\
L\big(U(x,z),U(y,z)\big) &\approx LU\big(L(x,y),z\big),\\
L\big(U(x_1,x_2,\ldots,x_n),z\big) &\approx LU\big(L(x_1,z),L(x_2,z),\ldots,L(x_n,z)\big),\\
U\big(L(x_1,x_2,\ldots,x_n),z\big) &\approx UL\big(U(x_1,z),U(x_2,z),\ldots,U(x_n,z)\big).
\end{aligned}$$

[1]值得注意的是，[15] 中定义的拟正交模格与我们框架中的正则拟正交模格一致。

回顾一下，布尔偏序集是有界分配补偏序集。由于布尔偏序集 P 中的补运算是唯一的且为反单调，因此 P 是一个带有反单调对合的偏序集。

若对每个 a、$b \in P$，条件$a \wedge b = a \wedge b' = 0$ 都蕴含 $a = 0$，则称正交模偏序集 P 为弱布尔的 [22] 。
设 P $=(P, \leq)$ 是一个偏序集。下文中，对 P 的每个子集 A，用 Max A 和 Min A分别表示 A 的所有极大元和极小元所组成的集合。称 P 为

1. 上确界完备 [1] ：若对 P 的有限子集 M 的每个上界 x，都存在一个低于 x 的 M 的极小上界；2. 极大下界完备：若对 P 的有限子集 M 的每个下界 x，都存在一个高于 x 的 M 的极大下界；3. 极小上界与极大下界完备：若同时具有上确界完备性和极大下界完备性。

若 P $=(P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个带有反单调对合的有界偏序集，则 P 上确界完备当且仅当它极大下界完备。
若偏序集 P 不含无限升链，则称其满足升链条件（ACC）。降链条件（DCC）的概念则对偶地定义。若 P 满足 ACC，则 P 的每个非空子集至少有一个极大元。DCC 的对偶命题也成立。

显然，若 P 满足 ACC，则 P 是极大下界完备的；DCC 的对偶命题也成立。此外，每个有限偏序集和每个格都是极小上界与极大下界完备的。
有界偏序集 P 若满足极大性 [22] ，则对任意 a、$b \in P$，集合 $L(a, b)$ 都有一个极大元。显然，每个极大下界完备偏序集都具有极大性。还要回顾的是，每个具有极大性的弱布尔正交模偏序集都是布尔代数 [22, 定理 4.2]。

我们有时将算子 $*\colon P^2 \to 2^P$扩展为 2^P上的二元运算，定义为

$$A * B := \bigcup_{x \in A, y \in B} (x * y)$$

对所有 A、$B \in 2^P$。

3 尖锐拟正交模偏序集的什么蕴涵?

设 $(P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个正交 mlb-完备偏序集。若 $y \in P$ 且 $A \subseteq P$，则在所有元素 $y \vee a$ 都存在的前提下，我们将集合 $\{y \vee a \mid a \in A\}$ 记为 $y \vee A$。类似地，在相似情况下也采用同样的记法。现在我们定义算子 $\to\colon P^2 \to 2^P$ 如下:

(I1) $x \to y := y \vee \operatorname{Max} L(x', y')$.

由于 Max $L(x', y') \leq y'$，因此 $x \to y$ 定义正确。
值得注意的是，每个正交模偏序集（例如参见 [6], [8], [13] 和 [14]）都是拟正交模的，但也存在并非正交模的拟正交模偏序集（甚至确实存在这样的格），参见 [16]。

例3.1。图1所示的拟正交模偏序集既不是正交模的，也不是尖锐旁正交模的：

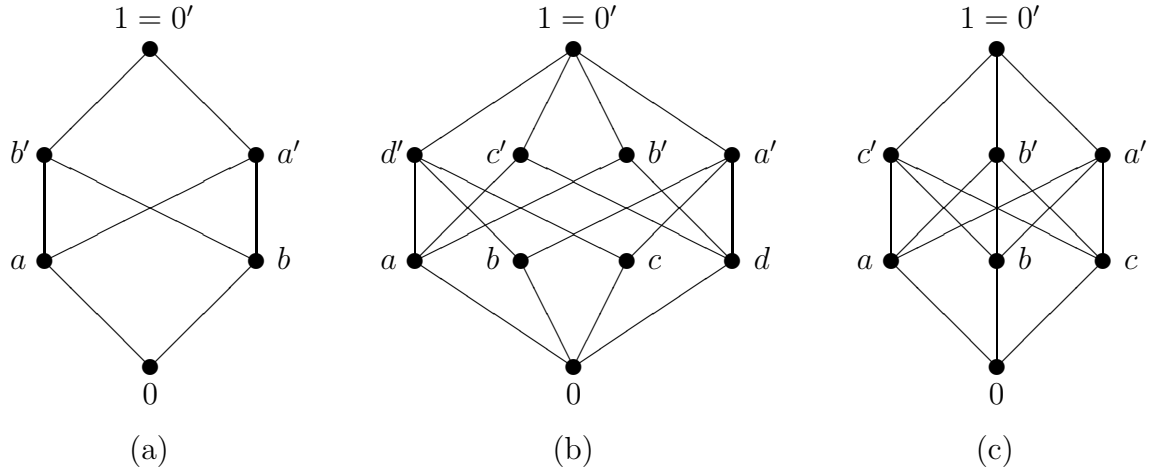


图1 拟正交模偏序集

图2所示的偏序集是尖锐旁正交模的：

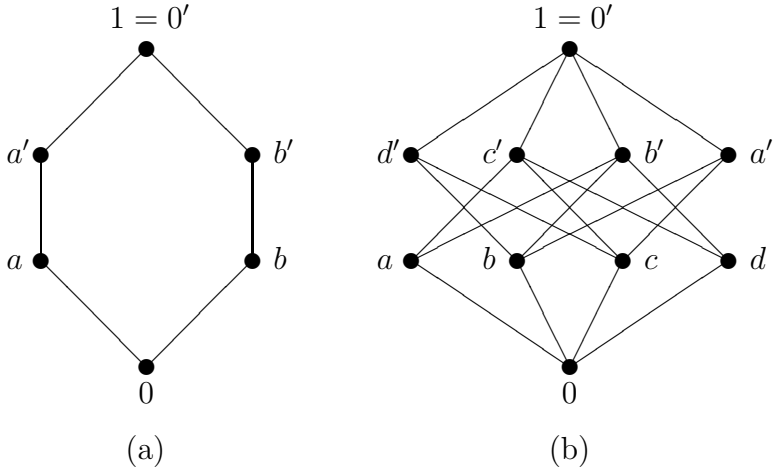


图2 尖锐拟正交模偏序集

第一个是格，第二个不是。此外，第二个不是正交模的，因为 $b \leq d'$，但 $b \vee (d' \wedge b') = b \vee b = b \neq d'$。

我们首先列出由正交偏序集中的 (I1) 定义的算子 $\to$ 的若干基本性质。

定理 3.2. 设 $(P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个正交 mlb-完备偏序集，由 (I1) 和 $x, y \in P$ 定义的 $\to$。则以下结论成立：

(i) $y \le x \to y$,

(ii) $x \le y$ 蕴含 $y \to z \le_1 x \to z$,

(iii) $x \to y \approx \begin{cases} y \vee y' & if\ x \le y, \\ y \vee (x' \wedge y') & if\ x \perp y, \\ x' \vee y & if\ y \le x, \end{cases}$

(iv) $(x \to y) \to y \approx y \vee \big(y' \wedge$最小值 $U(x,y)\big)$,

(v) $\Big((x \to y) \to y\Big) \to y \approx y \vee \Big(y' \wedge \big(y \vee \operatorname{Max} L(x', y')\big)\Big)$.

注意，如果 $'$ 是补运算（例如，当 P 是正交模时），那么 (iii) 的第一行可以写成以下形式

(iii') $x \le y$ 蕴含 $x \to y = 1$。

蕴含 正交模格中的蕴含通常定义为 $x \to y := y \vee (x' \wedge y' \qquad\qquad)$.

定理 3.2 的证明。(i) 直接由 (I1) 得出。

(ii) 假设 $x \le y$ and $z \in P$。则 $y' \le x'$。令 $u \in y \to z$。于是存在某个 $w \in \operatorname{Max} L(y', z')$, 使得 $z \vee w = u$。由于 $y' \le x'$，我们有 $w \in L(x', z')$。因此，存在某个 $t \in \operatorname{Max} L(x', z')$，使得 $w \le t$。现在

$$u = z \vee w \le z \vee t \in x \to z$$

证明 $y \to z \le_1 x \to z$。

(iii) $x \to y \approx y \vee \operatorname{Max} L(x', y') \approx \begin{cases} y \vee y' & \text{if } x \le y, \\ y \vee (x' \wedge y') & \text{if } x \perp y, \\ y \vee x' = x' \vee y & \text{if } y \le x. \end{cases}$

(iv)

$$\begin{aligned} (x \to y) \to y &\approx \bigcup_{z \in x \to y} (z \to y) \approx \bigcup_{z \in y \vee \operatorname{Max} L(x', y')} \big(y \vee \operatorname{Max} L(z', y')\big) \approx \\ &\approx \bigcup_{w \in \operatorname{Max} L(x', y')} \big(y \vee \operatorname{Max} L(y' \wedge w', y')\big) \approx \bigcup_{w \in \operatorname{Max} L(x', y')} \big(y \vee (y' \wedge w')\big) \approx \\ &\approx y \vee \big(y' \wedge \operatorname{Min} U(x, y)\big). \end{aligned}$$

（v）根据（iv）和（iii），我们得到

$$\begin{aligned} \Big((x \to y) \to y\Big) \to y &\approx \Big(y \vee \big(y' \wedge \operatorname{Min} U(x, y)\big)\Big) \to y \approx \\ &\approx \bigcup_{w \in \operatorname{Min} U(x, y)} \Big(\big(y \vee (y' \wedge w)\big) \to y\Big) \approx \\ &\approx \bigcup_{w \in \operatorname{Min} U(x, y)} \Big(\big(y' \wedge (y \vee w')\big) \vee y\Big) \approx \\ &\approx y \vee \Big(y' \wedge \big(y \vee \operatorname{Max} L(x', y')\big)\Big). \end{aligned}$$

□

此外，如果 P 是尖锐旁正交模的，我们还可以进一步证明。

引理 3.3. 设 $(P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个尖锐旁正交模极大下界完备偏序集，$\to$由 (I1) 定义，且满足 $a, b \in P$。则有以下结论：

(i) $b' \to b = b$。

(ii) 若 $a \perp b$ 且 $b \wedge b' = 0$，则 $a \to b = b$ 当且仅当 $a = b'$。

(iii) $a \to b = 1$ 蕴涵 $a \leq b$。

证明. (i) $b' \to b = b \vee (b \wedge b') = b$。

(ii) 假设 $a \perp b$ 且 $b \wedge b' = 0$。先设 $a \to b = b$。则 $b \vee \mathrm{Max}\, L(a', b') = a \to b = b$。因此 $\mathrm{Max}\ L(a', b') \leq b$。这表明 $\mathrm{Max}\, L(a', b') \leq b \wedge b' = 0$，即 $\mathrm{Max}\ L(a', b') = 0$，从而 $L(a', b') = 0$，即 $a' \wedge b' = 0$；结合 $a \leq b'$ 和 (P) 可得 $a = b'$。反向蕴涵由 (i) 可得。

(iii) 假设 $a \to b = 1$。令 $c \in \mathrm{Max}\, L(a', b')$。则 $c \leq b'$ 且 $b \vee c = 1$，即 $c' \wedge b' = 0$。应用 (P)，我们得出 $c = b'$。因此

$$b' = c \in \mathrm{Max}\, L(a', b') \subseteq L(a', b') \subseteq L(a')$$

从而 $b' \leq a'$，即 $a \leq b$。

□

如上所示，尖锐旁正交模偏序集中的算子 $\to$ 具有若干良好性质，因此可以将其视为由拟正交模偏序集形式化的逻辑中的联结词蕴涵（关于这种逻辑与量子力学逻辑之间的联系，见 [5]；关于其格版本，另见 [13] 和 [16]）。因此，一个自然的问题是：这种逻辑能否仅以这个联结词为基础？与从这一角度研究正交模偏序集的情形不同（见 [8],），这是不可能的，因为我们无法仅通过蕴涵 $\to$ 推出序关系 $\leq$。不过，我们可以用这种语言为配备了 $\to$ 的正交偏序集 P 给出一个条件，使得 P 成为尖锐旁正交模偏序集。

定理 3.4. 设 $\mathbf{P} = (P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个正交 mlb-完备偏序集，且 $\to$ 由 (I1) 定义。则以下命题等价：

(i) P 是拟正交模的。

(ii) 若 $x \to y = 1$，则 $x \leq y$。

证明. (i) $\Rightarrow$(ii):
假设 $x \to y = 1$。令 $z \in \mathrm{Max}\, L(x', y')$。则 $y \vee z = 1$，即 $y' \wedge z' = 0$。由于 $z \leq y'$，根据 (P) 可得 $z = y'$，即 $y' \leq x'$。因此 $x \leq y$。(ii) $\Rightarrow$ (i):
若 $x \leq y$ 且 $x' \wedge y = 0$，则

$$y \to x = y' \vee x = (x' \wedge y)' = 0' = 1$$

根据 (ii)，这意味着 $y \leq x$，并与 $x \leq y$ 一起得到 $x = y$。 □

对于格，(I1) 化简为

(I2) $x \to y := y \vee (x' \wedge y')$.

下一个引理表明，只要所讨论的偏序集是格，由 (I2) 定义的 $\to$ 关于第一个变量是反序的。

引理 3.5. 设 $(L, \vee, \wedge, ')$ 是一个格，带有反序映射 $'$，且 $\to$ 由 (I2) 定义。那么 $x \leq y$ 蕴含 $y \to z \leq x \to z$。

证明。 $x \leq y$ 蕴含 $y' \leq x'$，因而 $y \to z = z \vee (y' \wedge z') \leq z \vee (x' \wedge z') = x \to z$。 □

4 克莱尼格的粘合

本节将 R. Greechie 关于有限布尔代数粘合的著名定理 [17] 推广到克莱尼格领域。具体而言，我们将展示如何通过将两两共享一个至多含四个元素的公共原子子代数的克莱尼格粘合在一起，得到尖锐拟正交模偏序集和拟正交模格。有趣的是，我们将证明，任意克莱尼格的粘合 $\mathscr{K}$ 都会产生一个拟正交模偏序集 K。如果构成该结构的克莱尼块不形成三阶环（3阶或4阶环），那么该结构也会是尖锐旁正交模偏序集（拟正交模格）。关于（格）效应代数，已有基于 MV代数粘合的类似结果，参见例如 [9, 23]。

设 $\mathscr{K} = \{\mathbf{K}_i\}_{i \in I}$ 是一个有限克莱尼格族，满足：对任意 $i \in I$，均有 $|K_i| \geq 6$。此外，设 $K_i \cap K_j$ $(i \neq j)$ 或为 $\{0, 1\}$，或为 K_i 与 K_j 的原子克莱尼子代数（其上的运算一致），且满足 $|K_i \cap K_j| \leq 4$。我们还假设，任意 $x \in K_i \cap K_j \setminus \{0, 1\}$ 在 K_i 和 K_j 中均为原子或余原子。称 $\mathscr{K}$ 为克莱尼格的粘合族，并称任意 $\mathbf{K}_i \in \mathscr{K}$ 为初始块。注意，$\mathbf{K}_i \cap \mathbf{K}_j \ncong \mathbf{K}_3$, ，其中 $\mathbf{K}_3$ 是三元素克莱尼格，否则便会有 $\mathbf{K}_i \cong \mathbf{K}_3 \cong \mathbf{K}_j$。事实上，反设 $\mathbf{K}_i \cap \mathbf{K}_j \cong \mathbf{K}_3$；令 $a \in K_i \setminus K_3$。显然，必有 $a \parallel b$，其中 b 是 $\mathbf{K}_3$ 的不动点。由正则性可知，必有 $0 = a \wedge a' < b$，因此 $\mathbf{K}_i$ 含有一个与 $\mathbf{N}_5$, 同构的子格，这不可能。因此，$\mathbf{K}_i \cap \mathbf{K}_j$ 必正交同构于二元素布尔代数 $\mathbf{B}_2$, 、四元素布尔代数 $\mathbf{B}_4$, 或四元素克莱尼格：



图 3

设 $\mathscr{K}=\{\mathbf{K}_i\}_{i\in I}$ 是一个克莱尼格的粘合族。令 $K=\bigcup_{i\in I}K_i$，并设 $\leq\subseteq K^2$ 满足：对任意 x，$y\in K$，

$$x\leq y \text{ if and only if there exists } i\in I \text{ such that } x\leq^{\mathbf{K}_i} y.$$

通过常规论证可得

引理 4.1. 设 $\mathscr{K}=\{\mathbf{K}_i\}_{i\in I}$ 是一个克莱尼格的粘合族。那么 $(K,\leq,0,1)$ 是一个有界偏序集。

下述引理显然

引理 4.2. 设 $\mathscr{K}=\{\mathbf{K}_i\}_{i\in I}$ 是一个克莱尼格的粘合族。定义：对于任意 $x\in K$, $x'=x'^{\mathbf{K}_i}$，取某个 $i\in I$ 使得 $x\in K_i$，则 $(K,\leq,',0,1)$ 是一个带有反单调对合的有界偏序集。

给定一个克莱尼格的粘合族 $\mathscr{K}=\{\mathbf{K}_i\}_{i\in I}$，我们将按照引理 4.1 和引理 4.2，由克莱尼格的粘合族$\mathscr{K}=\{\mathbf{K}_i\}_{i\in I}$ 构造得到的带有反单调对合的有界偏序集 $(K,\leq,',0,1)$ 称为克莱尼格的原子粘合。注意，若任意一个 $\mathbf{K}_i\in\mathscr{K}$ 是布尔代数（对于任意 $i\in I$），则我们的概念与 R. Greechie 提出的概念一致（参见 [2,第 144] 页）。下述结果表明，事实上，任意克莱尼格的原子粘合都导出一个旁正交模偏序集。

引理 4.3. 设 $\mathscr{K}$ 是克莱尼格的粘合族，则 $\mathbf{K}=(K,\leq,',0,1)$ 是一个旁正交模偏序集。

证明. 根据引理 4.1 和引理 4.3，显然 $(K,\leq,',0,1)$ 是一个带有反单调对合的有界偏序集。现在，反设 $\mathbf{K}$ 不是旁正交模的。于是根据 [5, 定理 2.5], ，$\mathbf{K}$ 含有一个与苯环 $\mathbf{B}_6$正交同构的强子偏序集。

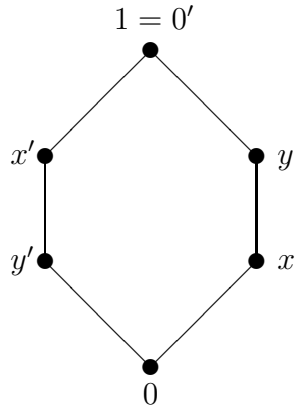


图 4

由于 $x\leq^{\mathbf{K}_i} y$，对于某个 $i\in I$，有 $\mathbf{K}_i$ 含有一个与 $\mathbf{N}_5$,同构的子格，这是不可能的。□

注 4.4. 设 $\mathscr{K}=\{\mathbf{K}_i\}_{i\in I}$ 是一族粘合的布尔代数，且 $J\subseteq I$。那么 $(\bigcup_{j\in J}K_j,\leq,',0,1)$ 是 $\mathbf{K}$ 的一个带反序对合的子偏序集。

引理 4.5. 设 $K = \bigcup_{i\in I} K_i$ 是一族粘合的克莱尼格 $\{\mathbf{K}_i\}_{i\in I}$ 的原子粘合。那么，对于任意的 $i, j \in I$，使得 $i \neq j$, $K_i \cup K_j$ 是一个拟正交模格的底集，该格同构于沿着粘合子格 $(K_i \cap K_j, \wedge, \vee)$ 粘合拼接格 $(K_i, \wedge, \vee)$ 和 $(K_j, \wedge, \vee)$ 所得到的偏序集。

证明。注意，由于 $K_i \cap K_j$ 是有限的，因此按照 $[2, \text{p.}139]$ 的意义，它是一个闭合丛。此外， $K_i \cup K_j$ 是一个由格构成的正则粘合，根据$[2,$ 定理 3.4]的第一部分，在按引理 $[2,$ 3.3] 的证明中定义最大下界和最小上界后，它是一个格的论域。此外，根据引理 4.3，$(K_i \cup K_j, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ 是一个拟正交模格。 □

设 $\mathbf{A} = (A, \leq)$ 是一个偏序集。对于任意 $x, y \in A$，若对任意 $z \in A$， $x \leq z \leq y$ 蕴含 $x = z$ 或 $y = z$，则称 x 覆盖 y，记作 $x \lessdot y$。

引理 4.6。设 $\mathscr{K} = \{\mathbf{K}_i\}_{i\in I}$ 是一个由克莱尼格构成的粘合族，并设 $x, y \in K$ 满足：对某个 $i \in I$，有 $x \leq^{\mathbf{K}_i} y$。则以下结论成立：

(i) 若 $x \lessdot y$ 属于 K，则 $x \lessdot^{\mathbf{K}_i} y$ 属于 $\mathbf{K}_i$。

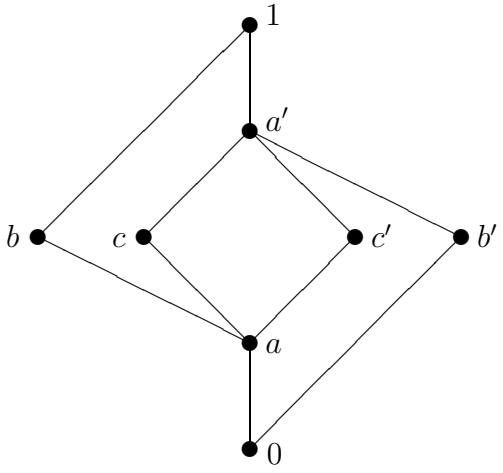
(ii) 若 $y \neq x'$，则 $x \lessdot y$ 属于 K 当且仅当 $x \lessdot^{\mathbf{K}_i} y$ 属于 $\mathbf{K}_i$。

证明。(i) 若 $x \lessdot y$ 属于 K 且 $x <^{\mathbf{K}_i} z <^{\mathbf{K}_i} y$，则 $x < z < y$ 也会在 K 中成立，这就产生了矛盾。

(ii) 假设 $x \lessdot^{\mathbf{K}_i} y$ 但 $x < z < y$。因此，对某些 j， $k \in I$，有 $x <^{\mathbf{K}_j} z <^{\mathbf{K}_k} y$。我们有 $x \in K_i \cap K_j$、 $z \in K_j \cap K_k$ 和 $y \in K_i \cap K_k$。还需注意， $i \neq j$ 且 $i \neq k$。根据 x 和 y 的性质，我们分几种情况讨论。若 $x = 0$，则 y 是 $\mathbf{K}_i$ 中的原子，因此也是 $\mathbf{K}_k$ 中的原子。同样，若 $y = 1$，则 x 是 $\mathbf{K}_i$ 和 $\mathbf{K}_j$ 中的余原子。这意味着 $z = x$ 或 $z = y$，矛盾。因此，不失一般性，假设 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$。于是， x 既是 $\mathbf{K}_i$ 也是 $\mathbf{K}_j$ 中的原子，而 y 既是 $\mathbf{K}_i$ 也是 $\mathbf{K}_k$ 中的余原子。现在，若 $j \neq k$，则 z 必定是 $\mathbf{K}_k$ 中的原子，因而也是 $\mathbf{K}_j$ 中的原子，此时 $z = x$；或者是 $\mathbf{K}_j$ 中的余原子，因而也是 $\mathbf{K}_k$ 中的余原子，于是 $z = y$，这不可能。因此，必有 $j = k$。但这意味着 $\mathbf{K}_i \cap \mathbf{K}_j = \{0, x, y = x', 1\}$，与我们的假设矛盾。

□

备注 4.7。请注意，在讨论克莱尼格的一般情形时，引理 4.6(ii) 的假设是必要的。事实上，考虑克莱尼格的粘合 K



图

注意，在 $\mathbf{K}_3 \times \mathbf{B}_2$ $\{0,1,a,a',b,b'\}$ 的同构副本中，$a \lessdot a'$，但在 $\mathbf{K}$ 中，$a < c < a'$。

借鉴布尔代数中的类似概念，给定自然数 $n \geq 3$，如果原子粘合 $\mathbf{K}$ 中的初始块 $\mathbf{K}_{i_1}, \ldots, \mathbf{K}_{i_n}$ 满足以下条件，我们就称它们构成 $\mathbf{K}$ 的 n 阶原子环：

1. 对任意 $1 \leq j < n$, $|K_{i_j} \cap K_{i_{j+1}}| = 4$。此外，$|K_{i_n} \cap K_{i_1}| = 4$。
2. 对于上述条目中未提及的任意其他指标对 $1 \leq j,k \leq n$，$K_{i_j} \cap K_{i_k} = \{0,1\}$。
3. 对任意 $1 \leq j < k < l < n$, $K_{i_j} \cap K_{i_k} \cap K_{i_l} = \{0,1\}$。

注意，条件 (3) 保证了：对任意 $1 \leq j < n$，$\{0,1\} = K_{i_j} \cap K_{i_{j+1}} \cap K_{i_{j+2}} = \{0,1,a_j,a'_j\} \cap \{0,1,a_{j+1},a'_{j+1}\}$。类似地推理可知，原子$a_1, \ldots, a_n$必定两两不同。

引理 4.8. 设 $\mathscr{K} = \{\mathbf{K}_i\}_{i \in I}$ 是一个不包含原子 3 阶环的克莱尼格粘合族。若 $x, y \in K_i$, 则 $x \vee^{\mathbf{K}_i} y$ 是 $\mathbf{K}$ 中 x 和 y 的最小上界。

证明. 不失一般性，设 $x \parallel y$。令 $z \in K$ 满足 $x, y \leq z$。若 $z = 1$，则 $x \vee^{\mathbf{K}_i} y \leq z$。现在假设 $z \neq 1$。那么存在 $j,k \in I$，使得 $x <^{\mathbf{K}_j} z$，且 $y <^{\mathbf{K}_k} z$, x 是 $\mathbf{K}_j$ 和 $\mathbf{K}_i$ 中的原子，y 是 $\mathbf{K}_k$ 和 $\mathbf{K}_i$ 中的原子，而 z 是 $\mathbf{K}_j$ 和 $\mathbf{K}_k$ 中的余原子。若 j,i,k 两两不同，则 ($\mathbf{K}_i$, $\mathbf{K}_j$, $\mathbf{K}_k$) 构成一个原子 3 阶环。因此，必有 $i = j$ 或 $j = k$。因此，根据引理 4.5，$K_i \cup K_j \cup K_k$ 构成一个拟正交模格，故我们再次得到 $x \vee^{\mathbf{K}_i} y \leq z$。

□

注 4.9. 回想一下，在任意克莱尼格 $\mathbf{K}$ 中，都有

$$x \wedge y = 0 \text{ implies } x \leq y'.$$

定理 4.10. 克莱尼格的原子粘合是尖锐旁正交模偏序集，当且仅当它不包含任何 3 阶原子环。

证明. 假设克莱尼格的原子粘合 $\mathbf{K}$ 不包含 3 阶原子环。对于任意 $x, y \in K$，若 $x \leq y'$, 则存在 $i \in I$，使得 $x, y \in K_i$。但根据引理 4.8，$x \vee y$ 存在且等于 $x \vee^{\mathbf{K}_i} y$。此外，根据引理 4.3，$\mathbf{K}$ 是一个旁正交模偏序集，因此它是尖锐旁正交模的。反过来，假设 $\mathbf{K}$ 包含一个 3 阶原子环，记为 ($\mathbf{K}_1$,$\mathbf{K}_2$,$\mathbf{K}_3$)。假设 $K_1 \cap K_2 = \{0,1,a_1,a'_1\}$, $K_2 \cap K_3 = \{0,1,a_2,a'_2\}$, $K_3 \cap K_1 = \{0,1,a_3,a'_3\}$，其中 a_1, a_2, a_3 是两两不同的原子。我们证明 $a_1 \vee a_3$ 不存在。反设这个上确界存在。由于 $a_1 \wedge a_2 = 0 = a_2 \wedge a_3$，根据注 4.9，必有 $a_1 \vee a_3 \leq a'_2$。

现在，假设 $a_1 \vee^{\mathbf{K}_1} a_3$ 等于 a'_1 或 a'_3。不妨设 $a_1 \vee^{\mathbf{K}_1} a_3 = a'_1$。于是有 $a_1 \leq^{\mathbf{K}_i} a_1 \vee a_3 \leq^{\mathbf{K}_j} a'_1$。若 $i = 1$ 或 $j = 1$，则必有 $a_1 \vee a_3 = a'_1$，从而 $a'_1 \leq a'_2$，即 $a_1 = a_2$，这显然荒谬。因此，我们必须

有 $i \neq 1$ 和 $j \neq 1$。但这样一来， $a_1 \vee a_3$ 必定是原子或余原子，这同样不可能。因此，不妨假设 $a_1 \vee^{\mathbf{K}_1} a_3$ 不等于 a_1' 或 a_3'。注意， $a_1 \prec^{\mathbf{K}_1} a_1 \vee^{\mathbf{K}_1} a_3$。事实上，若 $a_1 < x < a_1 \vee^{\mathbf{K}_1} a_3$，则以下对象将是 $\mathbf{K}_1$的一个子格：

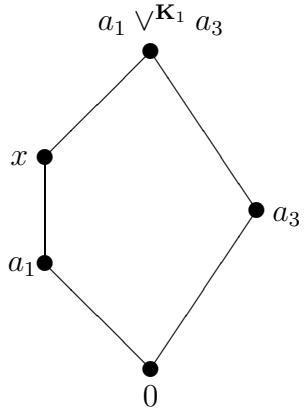


图 6

但这与 $\mathbf{K}_1$ 的分配律矛盾。同理， $a_3 \prec^{\mathbf{K}_1} a_1 \vee^{\mathbf{K}_1} a_3$。因此，根据引理 4.6，必有 $a_1, a_3 \prec a_1 \vee^{\mathbf{K}_1} a_3 \in \mathbf{K}$。于是，对于某个 $j \in I$，有 $a_1 \vee^{\mathbf{K}_1} a_3 = a_1 \vee a_3 \leq^{\mathbf{K}_j} a_2'$。若 $j = 1$，则 $a_2' \in K_1 \cap K_2 \cap K_3 = \{0, 1\}$，但这是不可能的，因为 a_2' 是余原子。若 $i \neq 1$，则 $a_1 \vee^{\mathbf{K}_1} a_3 \neq a_2'$，且它必定是余原子；但这是不可能的，因为这样会有 $a_2' = 1$，这显然荒谬。□

定理 4.11. 克莱尼格的原子粘合是拟正交模格，当且仅当它不包含阶为 3 或 4 的原子环。

证明。若 $\mathbf{K}$ 含有一个 3阶环，则根据定理 4.10，$\mathbf{K}$ 不是格。因此，不失一般性，我们可以假设 $\mathbf{K}$ 不含三阶环。假设 $\mathbf{K}$ 含有一个 4 阶环 $(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3, \mathbf{K}_4)$。设 $K_i \cap K_{i+1} = \{0, 1, a_i, a_i'\}$ and$K_4 \cap K_1 = \{0, 1, a_4, a_4'\}$, a_1, a_2, a_3, a_4 为原子。反设 $a_1 \vee a_3$ 存在。注意

$(*)$ $a_1 \vee a_3 \leq a_2', a_4'$.

因此，存在 $i, j \in I$ 使得 $a_1 \vee a_3 \leq^{\mathbf{K}_i} a_2'$ 且 $a_1 \vee a_3 \leq^{\mathbf{K}_j} a_4'$。若 $i \neq j$，则 $a_1 \vee a_3$ 或为原子，或为余原子，或为 1。但由于 $(*)$，这是不可能的。因此我们得出 $i = j$。现在，我们有 $a_1 \leq^{\mathbf{K}_k} a_1 \vee a_3$。因此，按照上述推理，我们得出 $k = i$。但这样一来，$(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_i, \mathbf{K}_4)$ 就是一个 3阶环，这是不可能的。

反过来，假设 $\mathbf{K}$ 不含 3阶或4阶环。为导出矛盾，假设 $\{x, y\} \subseteq K$ 不存在最小上界。这进一步意味着 $x \parallel y$也不存在最小上界（当然， x和$y \notin \{0, 1\}$也一样）。我们来考虑以下几种情况。

1. 存在 $i \in I$ 使得 $x, y \in K_i$。根据假设，存在 $z \in K$ 使得$x \vee^{\mathbf{K}_i} y \not\leq z$。显然，$z \neq 1$。此外，我们还有 $x \leq^{\mathbf{K}_j} z$ 和 $y \leq^{\mathbf{K}_k} z$。若$j = i = k$，则 $x \vee^{\mathbf{K}_i} y \leq z$，这是不可能的。例如，若 $i \neq j$ 且 $k = i$，则 y 必为原子。因此 $x \wedge y = 0$，并且根据注 4.9，$x \leq y'$。但根据定理 4.10，存在 $x \vee y$，这就产生了矛盾。因此，必有 $i \neq j$ 且 $i \neq k$，从而很容易看出 $(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j, \mathbf{K}_k)$ 构成一个 3阶环，这与我们的假设相悖。

2. 若 x 和 y 属于不同的块，则令 $x \leq^{\mathbf{K}_i} z$ 和 $y \leq^{\mathbf{K}_j} z$ 满足 $z \neq 1$，并考虑 $u \in K$ 使得 $x \leq^{\mathbf{K}_k} u$, $y \leq^{\mathbf{K}_l} u$但 $z \not\leq u$ （因此 $u \neq 1$）。根据假设，有 $i \neq j$。因此， z 必为余原子。现在，若 $j \neq l$ 且 $i \neq k$，由于必然有 $k \neq l$，可知 $(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j, \mathbf{K}_l, \mathbf{K}_k)$ 是一个 4 阶环，这与我们的假设相悖。因此，必有 $j = l$ 或 $i = k$。在这两种情况下，都可以看出必有 $u = z$。再次产生矛盾。

□

5 相对拟正交模偏序集

下文将引入与拟正交模偏序集密切相关的偏序集。
相对拟正交模偏序集是一个有序五元组 $\big(P, \leq, (^x;\ x \in P), 0, 1\big)$，满足 $(P, \leq, 0, 1)$ 是有界偏序集，并且对于每个 $x \in P$，$([x, 1], \leq, ^x, x, 1)$ 都是拟正交模偏序集。因此，有界偏序集 $(P, \leq, 0, 1)$ 是相对拟正交模的，当且仅当每个主滤子 $[x, 1]$ 中都存在一个反单调对合 ^{x}，使得

(RP) $x \leq y \leq z$ 和 $y^x \wedge z = x$ 蕴含 $y = z$。

例 5.1。图 7 展示了一个偏序集（甚至是一个格）的例子，其中每个真区间 $[x, 1]$ 都可以赋予一个反单调对合，但它不是相对拟正交模的。

显然，可以在每个区间 $[x, 1]$ 中引入对合；例如，在 $[a, 1]$ 中，我们有 $a^a := 1$、$(b')^a := b'$ 和 $1^a := a$。然而，这个偏序集不是拟正交模的，因此也不是相对拟正交模的，因为 $a \leq b'$ 和 $a' \wedge b = 0$，但 $a \neq b'$。不过，如果按照图 2 中的方式定义 $[0, 1]$ 中的对合，那么这个偏序集就是相对拟正交模的。

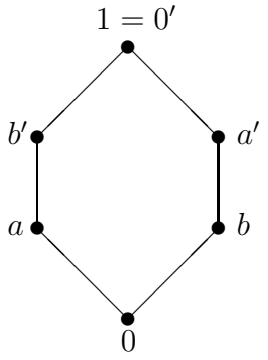


图 7 非拟正交模格

例 5.2 图 1 展示了不是格的相对拟正交模偏序集的例子。

相对拟正交模格和偏序集是否也能转化为某种逻辑，这是一个问题；也就是说，我们能否引入具有某些预期性质的联结词蕴涵 $\rightarrow$。

对于上确界完备的相对拟正交模偏序集，我们可以定义

(I3) $x \rightarrow y := \big(\operatorname{Min} U(x, y)\big)^y$

其中 $A^y := \{a^y \mid a \in A\}$。由于 $y \le U(x,y)$，我们有 Min $U(x,y) \subseteq [y,1]$，因此$x \to y$ 定义良好。
在相对旁正交模偏序集中，由 (I3) 定义的算子 $\to$ 具有若干有趣的性质，列于以下结果中。

定理 5.3. 设 $\mathbf{P} = \big(P, \le, (^z;\ z \in P), 0, 1\big)$ 是一个相对旁正交模的 mub 完备偏序集，$\to$ 由 (I3) 定义，且 $x, y \in L$。则有以下结论：

(i) $y \le x \to y$,

(ii) $x \le y$ 当且仅当 $x \to y = 1$,

(iii) $x \to y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \le y, \\ (x \vee y)^y & \text{if } x \vee y \text{ exists}, \\ x^y & \text{if } y \le x, \end{cases}$

(iv) $(x \to y) \to y \approx$最小值 $U(x,y)$,

(v) $\big((x \to y) \to y\big) \to y \approx x \to y$.

证明。(i) 直接由 (I3) 得出。
(ii) 以下各项等价：$x \le y$, Min $U(x,y) = y$, $\big(\text{Min } U(x,y)\big)^y = 1$, $x \to y = 1$.

(iii) $x \to y = \big(\operatorname{Min} U(x,y)\big)^y = \begin{cases} y^y = 1 & \text{if } x \le y, \\ (x \vee y)^y & \text{if } x \vee y \text{ exists}, \\ x^y & \text{if } y \le x. \end{cases}$

(iv)

$$(x \to y) \to y \approx \bigcup_{z \in x \to y} (z \to y) \approx \bigcup_{z \in \left(\operatorname{Min} U(x,y)\right)^y} \big(\operatorname{Min} U(z,y)\big)^y \approx$$
$$\approx \bigcup_{w \in \operatorname{Min} U(x,y)} \big(\operatorname{Min} U(w^y, y)\big)^y \approx \bigcup_{w \in \operatorname{Min} U(x,y)} w^{yy} \approx \operatorname{Min} U(x,y).$$

(v) 根据 (iv) 和 (iii)，我们有

$$\big((x \to y) \to y\big) \to y \approx \operatorname{Min} U(x,y) \to y \approx \bigcup_{z \in \operatorname{Min} U(x,y)} (z \to y) \approx \bigcup_{z \in \operatorname{Min} U(x,y)} z^y \approx$$
$$\approx \big(\operatorname{Min} U(x,y)\big)^y \approx x \to y.$$

□

令人惊讶的是，如 (I3) 所定义的蕴涵可用于刻画旁正交模性，参见下一个定理。

定理 5.4. 设 $(P, \le, 0, 1)$ 是有界 mub-完备偏序集，对于所有 $x \in P$，设 $([x,1], {}^x, x, 1)$ 是带有反单调对合的有界偏序集，并设 $\to$ 由 (I3) 定义。则下列条件等价：

(i) $(P, \leq, {}^0, 0, 1)$ 是拟正交模的。

(ii) $x \leq y^0$ 与 $x \to y = y$ 共同推出 $x = y^0$。

证明。以下命题等价： $x \to y = y$, $\big(\text{Min } U(x,y)\big)^y = y$, Min $U(x,y) = 1$,$U(x,y) = 1$, $x \vee y = 1$, $x^0 \wedge y^0 = 0$。因此，(ii) 等价于 (ii')：

(ii') $x \leq y^0$ and $x^0 \wedge y^0 = 0$ imply $x = y^0$.

但这不过是 $(P, \leq, {}^0, 0, 1)$ 满足 (P)。 □

以下例子可以阐明我们的结果。

例5.5。考虑图1(a)所示的相对拟正交模偏序集。在各截段中定义反单调对合如下：

$[a,1]$: $(a')^a := b'$, $(b')^a := a'$, $a^a := 1$, $1^a := a$,
$[b,1]$: $(a')^b := b'$, $(b')^b := a'$, $b^b := 1$, $1^b := b$
并且在两个元素的区间 $[a',1]$ 和 $[b',1]$中显然也成立。于是，由 $x \to y := \big(\text{Min } U(x,y)\big)^y$ 定义的算子$\to$ 的表如下：

$\to$	0	a	b	a'	b'	1
0	1	1	1	1	1	1
a	a'	1	$\{a', b'\}$	1	1	1
b	b'	$\{a', b'\}$	1	1	1	1
a'	a	b'	b'	1	b'	1
b'	b	a'	a'	a'	1	1
1	0	a	b	a'	b'	1

如果我们假设某个相容条件，就可以证明一个更强的结果。

定理 5.6. 设 $(P, \leq, 0, 1)$ 是一个有界 mub-完备偏序集，并且对每个 $x \in P$，^{x} 都是 $([x,1], \leq)$ 上的反单调对合，满足以下相容条件：

(C) $x \leq y \leq z$ *implies* $z^y = z^x \vee y$.

此外，令 $\to$ 由 (I3) 定义。则下列命题等价：

(i) $\mathbf{P} = \big(P, \leq, ({}^x;\ x \in P)\ 0, 1\big)$ 是相对旁正交模的。 (ii) $x \to y = 1$ 蕴含 $x \leq y$。

证明。 (i) $\Rightarrow$(ii)：
这由定理 5.3 得出。
(ii) $\Rightarrow$(i)：
我们要证明 $([x,1], {}^x, x, 1)$ 是拟正交模的。如果 $x \leq y \leq z$和 $y^x \wedge z = x$

$$z \to y = \big(\text{Min } U(z,y)\big)^y = z^y = z^x \vee y = (z \wedge y^x)^x = x^x = 1$$

根据 (C)，因此 $z \leq y$ 根据 (ii)，这与 $y \leq z$ 共同得出$y = z$。

□

6 相对旁正交模并半格

如果假设我们的拟正交模偏序集是并半格，则可以得到更有趣的结果。此时，蕴涵的定义 (I3) 可简化为以下形式：

(I4) $x \to y := (x \vee y)^y$

其中，$(x \vee y)^y$表示在区间 $[y,1]$中对 $x \vee y$应用对合 ^{y}所得的结果。由于 $x \vee y \in [y,1]$，$(x \vee y)^y$ 是良定义的。

例 6.1。考虑图 8 所示的格 $\mathbf{L} = (L, \leq, ', 0, 1)$：

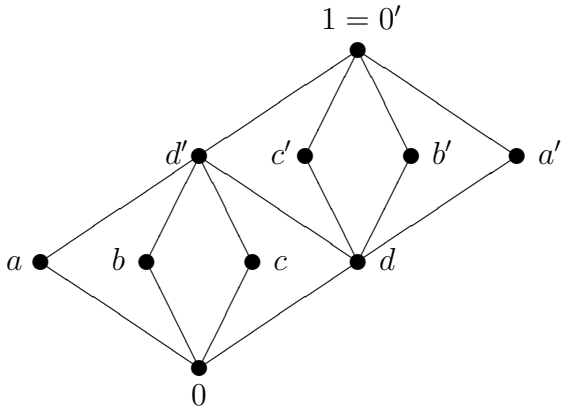


图 8 相对旁正交模格

显然，该偏序集是拟正交模的。例如，考虑区间 $[a,1]$。于是我们定义对合 ^{a} 如下：$a^a := 1$，$(d')^a := d'$，$1^a := a$；区间$[b,1]$、$[c,1]$上的定义类似，而对于二元区间 $[d',1]$、$[c',1]$、$[b',1]$和 $[a',1]$则可平凡地定义。对于 $[d,1]$，我们定义

$$d^d := 1, (a')^d := d', (b')^d := c', (c')^d := b', (d')^d := a' \text{ and, of course, } 1^d := d.$$

容易验证，任何形如 $[x,1]$ 的区间都是拟正交模偏序集，因此 $\mathbf{L}$ 是相对旁正交模格。

注 6.2. 假设 $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是正交模格，且 $a, b \in L$满足 $a \leq b$。众所周知（例如参见 [18]），此时 $\big([a,b], \vee, \wedge, x \mapsto (x' \vee a) \wedge b, a, b\big)$也是正交模格。因此，$\mathbf{L}$ 是相对旁正交模的，并满足 (C)，因为

$$x \leq y \leq z \text{ implies } z^y = z' \vee y = z' \vee x \vee y = z^x \vee y$$

且 (I4) 的形式为

$$x \to y = (x \vee y)^y = \big(y \vee (x \vee y)'\big) \wedge 1 = y \vee (x' \wedge y')$$

因为 $x \vee y \in [y,1]$。我们看到，这个 $x \to y$ 的定义与 (I2) 一致。

引理 6.3. 设 $\big(L, \vee, (^x;\ x \in L), 0, 1\big)$ 是一个相对旁正交模半格，且 $\to$ 由 (I4) 定义。那么 $x \leq y$ 蕴含 $y \to z \leq x \to z$。

证明。 $x \leq y$ 蕴涵 $x \vee z \leq y \vee z$，因此 $y \to z = (y \vee z)^z \leq (x \vee z)^z = x \to z$。 □

7 伴随性

定义联结词蕴涵 $\to$（例如，如前面几节所示）后，便会产生这样一个问题：是否存在一个二元联结词 $\odot$，使它们构成所谓的伴随对，即

$$x \odot y \leq z \text{ if and only if } x \leq y \to z.$$

值得注意的是，如果 $\odot$ 和 $\to$ 是二元运算，那么两个运算 $\odot$ 和 $\to$ 中的任意一个都能唯一确定另一个。也就是说，对于给定的 x 和 y，元素 $x \odot y$ 是满足 $x \leq y \to z$的最小元素 z；对于给定的 y 和 z，元素 $y \to z$ 是满足 $x \odot y \leq z$的最大元素 x。

请注意，我们不要求 $\odot$ 满足结合律或交换律。我们将证明，要求 $\odot$ 和 $\to$ 构成伴随对，对于拟正交模格或偏序集而言并不现实，因此我们只考虑以下两组较弱条件（A）和（B），以及分别对应的（A）$_{21}$ 和（B）$_{12}$：

(A) $x \odot y \leq z$ implies $x \leq y \to z$,　　$(\mathrm{A})_{21}$ $x \odot y \leq_2 z$ implies $x \leq_1 y \to z$,

（B） $x \leq y \to z$ 蕴含 $x \odot y \leq z$。　　$(\mathrm{B})_{12}$ $x \leq_1 y \to z$ implies $x \odot y \leq_2 z$.

当我们讨论偏序集而非格时， $x \odot y$ 和 $y \to z$可以是相关偏序集的子集，因此有时我们使用关系 $\leq_1$ 和$\leq_2$ 来代替偏序关系 $\leq$。

接下来，我们还将考察另一种 $\to$，即所谓的 Sasaki 蕴涵。
为简化论证，对于正交 mlb-完备偏序集 P 或带有对合的格 L，我们采用以下记号： $'$

$$x \to_I y = y \vee \operatorname{Max} L(x', y'), x \to_S y = x' \vee \operatorname{Max} L(x, y), x \odot_S y = y \wedge \operatorname{Min} U(x, y').$$

注意，在 L 是带有反单调对合的格的情况下， $x \odot_S y$ 是所谓的 Sasaki投影，而 $x \to_S y$ 是所谓的 Sasaki 蕴涵。此外，$x \to_I y = y' \to_S x'$。

事实上，我们有以下引理。

引理 7.1. 设 $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, ')$ 是带有反单调对合 $'$的格。则联结词 $\odot_S$ 和 $\to_S$ 分别满足 (A) 与 (B) 等价。

证明。假设 (A) 成立。设 $a, b, c \in L$，并假设 $a \leq b \to_S c$。则 $a \leq b' \vee (c \wedge b)$。令 $x = c'$, $y = b$, 且 $z = a'$。因此 $z' \leq y' \vee (x' \wedge y)$。我们得到$x \odot_S y = y \wedge (x \vee y') \leq z$。根据 (A)，有 $x \leq y \to_S z = y' \vee (z \wedge y)$，即 $c' \leq b' \vee (a' \wedge b)$。由此可得 $a \odot_S b = b \wedge (a \vee b') \leq c$，且 (B) 成立。反向蕴涵可类似证明。 □

此外，对于 Sasaki 蕴涵 $\to_S$，只要相关格满足更弱的条件，我们就能得到一个伴随对；见下述结果。

定理 7.2. 设 $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, ')$ 是带有对合 $'$的格。则以下条件等价。

(i) L 中成立正交模恒等式 $(\mathrm{OI}_\vee)$ 和 $(\mathrm{OI}_\wedge)$。

(ii) $x \odot_S y \leq z$ 当且仅当 $x \leq y \to_S z$。

证明。（i）$\Rightarrow$（ii）：
$a \odot_S b \leq c$ 蕴含

$$a \leq a \vee b' \overset{(\mathrm{OI}_\vee)}{=} b' \vee \big((a \vee b') \wedge b\big) = b' \vee \big(b \wedge (a \vee b') \wedge b\big) = b' \vee \big((a \odot_S b) \wedge b\big) \leq$$
$$\leq b' \vee (c \wedge b) = b \to_S c.$$

同理，$a \leq b \to_S c$ 蕴含

$$a \odot_S b = b \wedge (a \vee b') \leq b \wedge \big((b \to_S c) \vee b'\big) = b \wedge \big(b' \vee (c \wedge b) \vee b'\big)$$
$$= b \wedge \big((c \wedge b) \vee b'\big) \overset{(\mathrm{OI}_\wedge)}{=} c \wedge b \leq c.$$

（ii）$\Rightarrow$（i）：
设 a、$b \in L$。由于 $a \odot_S b' \leq a \odot_S b'$，我们得到

$$a \leq b' \to (a \odot b') = b \vee \big(b' \wedge [b' \wedge (a \vee b)]\big) = b \vee \big(b' \wedge (a \vee b)\big).$$

因此 $a \vee b \leq b \vee \big(b' \wedge \ (a \vee b)\ \big)$。由于反向不等式显然成立，我们有

$$a \vee b = b \vee \big(b' \wedge (a \vee b)\big).$$

同理，由于 $a \to_S b \leq a \to_S b$，我们得到

$$b \geq (a \to_S b) \odot_S a = a \wedge \big(a' \vee [a' \vee (a \wedge b)]\big) = a \wedge \big(a' \vee (a \wedge b)\big).$$

显然，$a \wedge \big(a' \vee (a \wedge b)\big) \leq a \wedge b$，反向不等式也显而易见。由此可得

$$a \wedge \big(a' \vee (a \wedge b)\big) = a \wedge b.$$

□

对于格，我们可以陈述并证明以下结果，它表明联结词 $\odot_S$ 和 $\to_I$ 满足条件 (A) 就足以推出正交模性。

定理 7.3. 设 $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是一个带有反单调对合的有界格，并假设 $\odot_S$ 和 $\to_I$ 满足 (A)。则 $\mathbf{L}$ 是正交模的。

证明. 对于 $a, b \in L$，以下每个陈述都蕴含其后的陈述：

$$\begin{aligned} a \odot_S b' &\leq a \odot_S b', \\ a &\leq b' \to_I (a \odot_S b'), \\ a &\leq \big(b' \wedge (a \vee b)\big) \vee \Big(b \wedge \big(b \vee (a' \wedge b')\big)\Big), \\ a &\leq \big(b' \wedge (a \vee b)\big) \vee b, \\ a \vee b &\leq \big(b' \wedge (a \vee b)\big) \vee b. \end{aligned}$$

反向不等式显然成立。因此 $a \vee b = \big(b' \wedge (a \vee b)\big) \vee b$。

□

我们的下一个目标是获得一个类似于定理 7.2、但针对偏序集表述的结果。这里我们处理的是给定偏序集 P 的子集，而非其元素，因此应使用等号“$\approx_2$”，而不是“$=$”。

定理 7.4. 设 P $=(P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个正交最大下界完备偏序集。那么，以下条件等价：

(i) P 是正交模偏序集。

(ii) P 满足恒等式

(OM_U) $x \vee \big(\operatorname{Min} U(x,y) \wedge x'\big) \approx \operatorname{Min} U(x,y)$.

(iii) P 满足条件

(OM_{UE}) $x \vee \big(\operatorname{Min} U(x,y) \wedge x'\big) \approx_2 \operatorname{Min} U(x,y)$.

证明. (i) $\Rightarrow$(ii):
这立即由对所有 $z \in \mathrm{Min}\ U(x,y)$, $x \vee (z \wedge x') = z$ 得出。(ii) $\Rightarrow$(iii)：显然。(iii) $\Rightarrow$(i)：假设 $x \leq y$。则 Min $U(x,y) = \{y\}$ 且 $x \vee \big(\mathrm{Min}\ U(x,y) \wedge x'\big) = \{x \vee (y \wedge x')\}$。因此 $x \vee (y \wedge x') \leq y \leq x \vee (y \wedge x')$。由此可得 $y = x \vee (y \wedge x')$。

□

现在我们可以给出偏序集的结果了。请注意，原先为格定义的运算现在由一个二元算子取代。

引理 7.5. 设 P $=(P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个正交 mlb-完备偏序集。那么，对于联结词 $\odot_S$ 和 $\to_S$，(A) 与 (B)，以及 $(\mathrm{A})_{21}$ 和 $(\mathrm{B})_{12}$ 分别等价。

证明. 我们只证明 (A) 与 (B) 等价。其余等价关系的证明步骤相同。

假设 (A)。设 $a, b, c \in P$。假设 $a \leq b \to_S c$。那么 $a \leq b' \vee$Max $L(c,b)$。令 $x = c'$, $y = b$, 且 $z = a'$。因此 $z' \leq y' \vee$Max $L(x', y)$。我们得到 $x \odot_S y = y \wedge$Min $U(x, y') \leq z$。由 (A) 可得 $x \leq y \to_S z = y' \vee$ Max $L(z,y)$，即 $c' \leq b' \vee$Max $L(a', b)$。于是 $a \odot_S b = b \wedge$Min $U(a, b') \leq c$，且 (B) 成立。

按照相同的推理，我们可以得到其逆命题，即 (B) 蕴含 (A) . □

与定理 7.2 中的格一样，对于正交 mlb-完备偏序集，我们得到以下定理：

定理 7.6. 设 P $=(P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个正交 mlb-完备偏序集。那么以下条件等价：

(i) P 是正交模的。

(ii) $x \odot_S y \leq_2 z$ 当且仅当 $x \leq_1 y \to_S z$。

证明。(i) ⇒(ii):
令 $a, b, c \in P$。假设 $a \leq_1 b \to_S c$。则 $a \leq_1 b' \vee \text{Max } L(c, b)$。存在$z \in \text{Max } L(c, b)$，使得 $a \leq b' \vee z \in U(a, b')$。我们计算：

$$a \odot_S b = b \wedge \operatorname{Min} U(a, b') \leq_2 b \wedge (b' \vee z) = z \leq c.$$

我们得出 $(B)_{12}$ 成立，而由引理 7.5，$(A)_{21}$ 对于 $\odot_S$ 和 $\to_S$也成立。因此我们得出 (ii)。

(ii) ⇒(i):
假设 $a \leq b$, $a, b \in P$。我们来计算：

$$b \odot_S a' = a' \wedge \operatorname{Min} U(a, b) = \{a' \wedge b\} \leq_2 b.$$

因此 b y $(A)_{21}$ 我们得到 $b \leq_1 a' \to_S b = \{a \vee (a' \wedge b)\} \leq b$，即 $b = a \vee (a' \wedge b)$。 □

下一个结果与定理 7.3 类似，但其表述针对偏序集。

定理 7.7. 设 P $= (P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个正交偏序集，并假设 $(A)_{21}$ 对 $\odot_S$和 $\to_I$成立。那么 P 是正交模的。

证明. 设 $a, b \in L$和 $a \leq b$。则 $b \odot_S a' = a' \wedge (b \vee a) = a' \wedge b$且 $\{b \odot_S a'\} \leq_2 \{b \odot_S a'\}$。因此 $b \leq_1 a' \to_I (a' \wedge b) = (a' \wedge b) \vee \text{Max } L(a, a \vee b') = \{a \vee (a' \wedge b)\} \leq b$。由此得出 $a \vee (a' \wedge b) = b$。 □

推论 7.8. (i) 若 L $= (L, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是拟正交模格，且 $\odot_S$和$\to_I$ 满足 (A)，则 L 是正交模的。

(ii) 若 P $= (P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个尖锐旁正交模偏序集，且 $\odot_S$和 $\to_I$满足 $(A)_{21}$，则 P 是正交模偏序集。

命题 7.9. 设 P $= (P, \leq, ', 0, 1)$ 是一个正交 mlb-完备偏序集，并假设存在一个定义在 P 上的二元算子 $\odot_I$，使得对于所有 $x, y, z \in P$，$x \odot_I y \leq z$ 当且仅当 $x \leq y \to_I z$。那么

(i) $x \odot_I x' = \{0\}$ *for all* $x \in P$,

(ii) P 是一个正交模偏序集,

(iii) $x \odot_I y \leq_1 \operatorname{Max} L(x, y) \leq x, y$ *for all* $x, y \in P$,

(iv) P 是弱布尔的。

证明. (i) 设 $x \in P$。则 $x \leq \{x\} = 0 \vee \text{Max } L(x, 1) = x' \to_I 0$。因此也有 $x \odot_I x' \leq \{0\}$，即 $x \odot_I x' = \{0\}$。

(ii) 设 $x, y \in P$, $x \leq y$。由 (i) 可知 $y \odot_I y' = \{0\} \leq x$。因此$y \leq y' \to_I x = x \vee \text{Max } L(y, x') = \{x \vee (y \wedge x')\}$。故 $y \leq x \vee (y \wedge x') \leq y$，即$y = x \vee (y \wedge x')$。

(iii) 设 $x, y \in P$。由 (ii)、定理 3.2、(i) 和 (iii)，以及每个正交模偏序集都有补元这一事实，我们知道 $x \leq y \to_I x$和 $x \leq y \to_I y = \{y \vee y'\} = \{1\}$。因此 $x \odot_I y \leq x$ 和 $x \odot_I y \leq y$。我们得出结论 $x \odot_I y \leq_1 \text{Max } L(x, y)$。

(iv) 设 $x, y \in P$，满足 $x \wedge y = 0$ 和 $x \wedge y' = 0$。由 (iii) 可得 $x \odot_I y = \{0\}$ 和 $x \odot_I y' = \{0\}$。根据伴随性和定理 3.2 (iii)，我们有 $x \leq y \to_I 0 = \{y'\}$ 和 $x \leq y' \to_I 0 = \{y\}$。由于 P 有补元，我们得到 $x \leq y \wedge y' = 0$。

□

命题 7.10. 设 $\mathbf{P} = (P, \leq, ', 0, 1)$ 是具有极大性的正交布尔偏序集。那么 P 是一个布尔代数。

证明. 回忆一下，P 是正交模的。也就是说，设 $x, y \in P$, $x \leq y$。由于 P 是分配偏序集，我们可以计算：

$$LU\big(x, L(x', y)\big) = L\big(U(x, x'), U(x, y)\big) = L\big(\{1\}, U(y)\big) = LU(y).$$

我们来证明 P 是弱布尔偏序集。设 $x, y \in P$，使得 $x \wedge y = 0$ 且 $x \wedge y' = 0$。再次利用分配律可得

$$L(x) = L\big(x, U(y, y')\big) = LU\big(L(x, y), L(x, y')\big) = LU\big(\{0\}, \{0\}\big) = L(0).$$

由 [22, 定理 4.2] 可知，P 是一个布尔代数。 □

最后，我们将证明，只有在非常特殊的情形下，即所讨论的偏序集是布尔代数时，$\odot_I$ 和 $\to_I$ 才能在正交 mlb-完备偏序集中构成伴随对。

定理 7.11. 设 $\mathbf{P} = (P, \leq, ', 0, 1)$ 是正交 mlb-完备偏序集。那么以下条件等价：

(i) 存在一个作用于 $\odot_I$ P 上的二元算子，使得

$$x \odot_I y \leq z \text{ if and only if } x \leq y \to_I z$$

对所有 x、y、$z \in P$ 均成立。

(ii) P 是一个布尔代数。

证明。(i) ⇒(ii)：
由命题 7.9 可知，P 是一个具有极大性的弱布尔偏序集。由 [22, 定理 4.2] 可得，P 是一个布尔代数。
(ii) ⇒ (i)：
显然，$x \to_I y = y \vee (x' \wedge y') = (y \vee x') \wedge (y \vee y') = y \vee x' = (x' \vee x) \wedge (y \vee x') = x' \vee (x \wedge y) = x \to_S y$ 以及 $x \odot_S y = y \wedge (x \vee y') = (y \wedge x) \vee (y \wedge y') = x \wedge y$。
由定理 7.2 可知，P 是一个正交模格，因此我们立即得到

$$x \odot_S y \leq z \text{ if and only if } x \leq y \to_S z \text{ if and only if } x \leq y \to_I z$$

对所有 x、y、$z \in P$ 均成立。因此 $\odot_I$ 存在，且 $\odot_I = \odot_S = \wedge$ 和 $x \to_I y = x \to_S y = y \vee x'$ 实现了所需的伴随性。 □

推论 7.12. 设 $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是一个带有反单调对合的有界格。则以下条件等价：

(i) 存在一个二元运算 $\odot_I$，使得对所有 x、y、$z \in L$, $x \odot_I y \leq z$ 当且仅当 $x \leq y \to_I z$。

(ii) L 是布尔代数。

致谢

Ivan Chajda 和 Helmut L¨anger 衷心感谢奥地利科学基金（FWF）项目 I 4579-N 以及捷克科学基金会（GAˇCR）项目 20-09869L 的资助；项目题为“正交模性的诸多方面”。Antonio Ledda 衷心感谢意大利大学与研究部通过 PRIN 2017 项目“逻辑与认知：理论、实验与应用”提供的支持，项目编号为 CUP：2013YP4N3。

参考文献

[1] S. Abramsky 和 A. Jung，域理论。载于《计算机科学逻辑手册》第三卷，Oxford Univ. Press，1994，1–168。[2] L. Beran，《正交模格：代数方法》。Reidel，多德雷赫特，1985。ISBN 90-277-1715-X。[3] G. Birkhoff 和 J. von Neumann，量子力学的逻辑。Annals of Math- ematics，37 (4)，(1936)，823–843。[4] I. Chajda 和 D. Fazio，拟正交模格上的剩余运算。《软计算》24 (2020)，10295–10304。[5] I. Chajda、D. Fazio、H. L¨anger、A. Ledda 和 J. Paseka，拟正交模偏序集的代数性质。Logic J. IGPL 30 (2022)，840–869。[6] I. Chajda 和 H. L¨anger，如何在正交模偏序集中引入联结词蕴涵。Asian-Eur. J. Math. 14 (2021)，2150066-1 – 2150066-8。[7] I. Chajda 和 H. L¨anger，有限偏序集上的剩余运算。Math. Slovaca 71 (2021)，807–820。[8] I. Chajda 和 H. L¨anger，有限高度正交模偏序集的逻辑。Log. J. IGPL 30 (2022)，143–154。[9] F. Chovanec 和 M. Jureˇckov´a，MV-代数粘合。International Journal of The- oretical Physics. 42 (2003)，1913–1926。[10] J. Czelakowski，基于部分布尔代数的逻辑。I。Studia Logica，33 (4)，(1974)，371–396。[11] J. Czelakowski，基于部分布尔代数的逻辑。II。Studia Logica，34 (1)，(1975)，69–86。[12] J. Czelakowski，广义部分布尔代数。Studia Logica，38 (1)，(1979)，1–16。[13] D. Fazio、A. Ledda 和 F. Paoli，关于正交模偏序集完备化的Finch条件。Found. Sci. (2020)。[14] P. D. Finch，关于正交模偏序集。J. Austral. Math. Soc. 11 (1970)，57–62。

[15] R. Giuntini、A. Ledda 和 F. Paoli，希尔伯特空间中效应的新观点。Studia Logica 104 (2016)，1145–1177。[16] R. Giuntini、A. Ledda 和 F. Paoli，关于 PBZ*格的一些性质。Internat. J. Theoret. Phys. 56 (2017)，3895–3911。[17] R.J. Greeehie，不存在状态的正交模格。Journ. Comb. Theory 10 (1971)，119–132。[18] G. Kalmbach，《正交模格》，Academic Press，伦敦，1983。ISBN 0-12-394580-1。[19]S. Kochen 和 E.P. Specker，量子理论中产生的逻辑结构，载于 J.W. Addison、L. Henkin 和 A. Tarski（编），《模型理论》，收入《逻辑与数学基础研究》，North-Holland，阿姆斯特丹，1965，177–189。[20] S, Pulmannov´a，量子逻辑中的相容性与部分相容性，Annales de l'I. H. P.，A辑，34 (1981)，391–403。[21] P. Suppes，适用于经验理论的逻辑，载于《模型理论专题讨论会》，1963年伯克利国际专题讨论会论文集，North-Holland，阿姆斯特丹，1965，364–375[22] J. Tkadlec，迫使正交模偏序集成为布尔代数的条件。Tatra Mountains Mathematical Publications 10 (1997)，55–62。[23] Y. Xie、Y. Li 和 A. Yang，格序效应代数的粘合构造，Information Sciences，180(12) (2010)，2476–2486。

作者地址：
Ivan Chajda 帕拉茨基大学奥洛穆茨
校区 理学院 代数与几何系
17.listopadu 12 771 46 奥洛穆茨 捷
克共和国 ivan.chajda@upol.cz

Davide Fazio 特拉莫大学 传播科学学
院 “Aurelio Saliceti”校区 Via
R.Balzarini 1 64100 特拉莫 意大利
dfazio2@unite.it

Helmut L¨anger 维也纳工业大学 数学与
地理信息学院

离散数学与几何研究所，维德纳大街 8-10 号，
1040 维也纳，奥地利；帕拉茨基大学奥洛穆茨
理学院 代数与几何系，17. listopadu 12，
771 46 奥洛穆茨，捷克共和国
helmut.laenger@tuwien.ac.at

Antonio Ledda 卡利亚里大学
A. Lo. P. Hi. S 研究组 伊斯 · 米
里奥尼斯街 1号 09123 卡利亚
里 意大利
antonio.ledda@unica.it

Jan Paseka 马萨里克大学 科学学院 数学
与统计系 Kotl´aˇrsk´a 2号 611 37 布尔
诺 捷克共和国 paseka
@math.muni.cz