arXiv:2301.09532v1 [math.GT] 23 Jan 2023

着色链环的边界不变量与拓扑保护的三染色

Toni Annala[1, 2*], Hermanni Rajamäki[2] 和 Mikko Möttönen[2]

[1*]数学学院，高等研究院，美国新泽西州普林斯顿市爱因斯坦大道 1 号，邮编 08540。[2]QCD 实验室，QTF 卓越中心，阿尔托大学应用物理系，邮政信箱 13500，阿尔托，芬兰 FI-00076。

通讯作者。电子邮件：tannala@math.ias.edu；贡献作者：hermanni.rajamaki@live.com；mikko.mottonen@aalto.fi；

摘要

我们利用 Conner 和 Floyd 的等变配边群构造着色链环的不变量。我们运用这一配边不变量，找到了首批拓扑涡旋纽结实例；这些纽结的结构受到拓扑支撑介质所允许的局部手术（即重连和股交叉）的保护，不会发生衰变。此外，我们证明，经过上述局部手术，每个三着色链环要么衰变为非链结的简单环，要么可变形成左手或右手三着色三叶结。

关键词 s:拓扑涡旋、纽结与链环、边界　　边界

1 引言

有序介质中拓扑缺陷的理论 [1–3] 为运用几何与拓扑方法研究具体物理现象提供了一个引人入胜的机会，而这些现象往往可以通过数值和实验进行探究。因此，拓扑缺陷持续吸引着来自不同背景的科学家关注。从理论

方面来看，理论宇宙学中的宇宙“爱丽丝”弦 [4, 5] 为重子生成问题提供了一种可能的解答，而各种类型的液晶则带来了丰富多样、令人欣喜的几何理论 [6–8]。在实验方面，近期的成果包括合成狄拉克 [9, 10] 和孤立磁单极子的实验实现 [11], ，以及量子“结”的实现 [12], 。量子“结”是一种三维孤子，与著名的霍普夫纤维化密切相关。

在此，我们研究三维系统中的拓扑涡旋，即奇异缺陷，其奇异轨迹是一维的。为简单起见，我们假设奇异轨迹是光滑嵌入圆的互不相交并集，即一个链环。这类缺陷的局部结构已得到充分理解，因为拓扑涡旋的局部类型对应于$\pi_1(X)$中的共轭类，其中 X 是序参量空间，这是一个用于表征物理系统可能具有的局部构型的拓扑空间 [1, 2]。然而，全局缺陷结构则更为微妙。无结环缺陷及其互不链接的不相交并集，可以根据 π_1 [13, 14]的作用，按照 π_1 和 π_2 电荷对进行分类。然而，大多数类型的有序介质都存在复杂的打结和链接的涡旋构型。即使是最简单的情况之一——向列液晶（其中$\pi_1(X) = C_2$），其分类也不比按同痕对所有链环进行分类更简单 [15, 16]。

为了说明如何使全局缺陷结构更便于分类，我们先简要回顾一段历史。关于打结和互相链接的涡旋环的想法由来已久，可以追溯到开尔文涡旋原子假说 [17], ；该假说基于这样一个观察：在无耗散理想流体的动力学演化过程中，涡旋芯的链环类型保持不变。然而，在现实情形中，这一假设并不成立，因为打结的涡旋结构往往会通过局部重联事件而衰变[18–20]。在拓扑涡旋的背景下考虑重联事件，以及对应于 π_1（X）中一对可交换元素的涡旋交叉事件 [21], ，文献 [22] 探讨了一种框架，用于研究在此类改变芯部拓扑的操作（拓扑允许的局部手术）下的拓扑涡旋构型。从物理角度来说，这一方案模拟了拓扑涡旋构型的中间能量演化：尽管改变芯部拓扑需要能量 [23], ，但如果在远小于涡旋环尺寸的体积内进行，所需能量很少 [22]。

在假设 $\pi_2(X) \cong 0$ 成立的情况下（例如，自旋旋量玻色–爱因斯坦凝聚体的若干相 [24], 以及双轴向列液晶 [1, 2], 均满足这一假设），拓扑涡旋构型的数据可以通过 G-着色链环图忠实地表示，其中 $G := \pi_1(X)$[22, 25]。保持核心拓扑的演化对应于 G-着色的 Reidemeister 变换，而拓扑允许的局部手术也有简单的图示解释 [22]。对于小群 G，这些数据可以用一种特别简单的方式描述，即通过链环图来表示，其中每个

弧按照一种染色方案着色，该方案是著名概念的一种推广，即纽结的三染色 [25, 26], ，其中三种颜色对应于σ_{ij} 对称群 Σ_3中的三种反演。

在先前的工作中， [22], Q_8-着色链环按拓扑允许的局部手术进行了分类：本质上，只有三个非平凡的类别。应当将这一简单的分类与所有可能链环的复杂无穷性作对比。然而，由于四元数群 Q_8不支持拓扑保护纽结，迄今发现的所有拓扑保护结构都是链环。

在这里，我们证明，一般而言，拓扑保护纽结的存在不存在数学上的障碍：对称群 Σ_3 确实支持拓扑保护纽结（定理3.7）。此外，我们证明，利用拓扑允许的局部手术，任何拓扑保护三着色链环都可以变换为左手或右手三着色三叶结（定理3.9）。同样，这一分类不仅是有限的，而且格外简单。

为了研究三染色纽结的拓扑保护，我们在第 2 节（本文的技术核心）中引入 (G, S)-着色链环的配边不变量。这里， G 是一个有限群， $S \subset G$ 是一个在逆元和共轭运算下封闭的子集；(G, S)-着色链环是这样一种 G-着色链环：其染色链环图中出现的 G 元素都属于 S。三染色的情形对应于 $G = \Sigma_3$ 和 $S = I := \{\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}$，其中$\sigma_{ij}$ 是交换 i^{th} 与j^{th} 元素的求逆映射。对于每个(G, S)-着色链环，都可以构造一个 S^3 的分支覆盖M ，群 G 在其上作用。它具有这样的性质： G作用的非平凡稳定子都是循环的，并由 S中的一个元素生成。此外，空间 M 具有典范的定向流形结构，而该链环的配边不变量定义为 M 在第三个 G-等变配边群中的类，其稳定子条件由 S给出。Conner 和 Floyd [27, 28]此前已经研究过这类群。

配边不变量具有许多良好的性质（定理 2.8）：它对链环的无缠结不交并具有可加性，且在简单环上的取值为 0。此外，它在拓扑允许的局部重联下保持不变。对于三染色，所有拓扑允许的局部手术都可以表示为重联和三染色 Reidemeister 变换，因此可以利用配边不变量来检测着色链环的拓扑保护。尽管本文未将配边不变量应用于更一般的情形，但我们相信，它将为今后研究着色链环提供有价值的工具。

约定

本文中所有链环均为可驯的。除非另有说明，所有流形均为光滑闭流形。循环群根据其被视为群还是阿贝尔群，分别记为 C_n 或$\mathbb{Z}_n$。由 n 个字母组成的对称群记为 Σ_n。

致谢
感谢 Keegan Boyle、Cihan Okay、Ben Williams 和 Roberto Zamora Zamora 对本工作的关注，以及他们提出的宝贵讨论和问题。我们获得了欧洲研究委员会第 681311 号拨款（QUESS）以及芬兰科学院卓越中心计划（项目编号 336810）的资助，同时还获得了芬兰科学与文学学院 Vilho、Yrjö 和 Kalle Väisälä 基金会的资助。

2 着色链环的边界不变量

在这里，我们为着色链环构造边界不变量，并将在第3节中利用这些不变量研究拓扑保护的三着色。该不变量背后的思想非常简单：对于一个 G-着色链环，我们赋予其一个定向流形 M，该流形带有群 G的作用。我们证明，M 的等变定向配边类在拓扑允许的局部重联中保持不变。因此，我们得到一个 G-着色链环的不变量，并且该不变量在拓扑允许的局部重联中保持不变。

让我们回顾一下必要的背景知识 [22, 25]。如果 G 是一个有限群，那么一个 G-着色链环是一个二元组 $(\mathcal{L}, \psi)$，其中 $\mathcal{L} \subset S^3$ 是一个链环，而 G-着色 ψ 是一个群同态 $\pi_1(S^3 \backslash \mathcal{L}) \to G$。如果 ψ' 可由 ψ 与 G中的某个元素共轭得到，那么两个 G-着色 $\psi, \psi' : \pi_1(S^3 \backslash \mathcal{L}) \to G$被视为等价。给定链环 $\mathcal{L}$ 上的 G-着色 ψ 的等价类，与同伦类集合 $[\mathbb{R}^3 \backslash \mathcal{L}, X]$一一对应，其中 X 是任意满足 $\pi_1(X) \cong G$ 且 $\pi_2(X) \cong 0$的路径连通空间（例如，X 是分类空间 BG [29]）。从物理角度来说，一个 G-着色链环刻画了 $\mathbb{R}^3$中链环 L 补空间上的一个取值于 X的序参量场的同伦信息。一个 G-着色链环的数据可以用一幅 G-着色链环图表示（图 1）。

构造 2.1（着色链环的分支覆盖 $M(\mathcal{L}, \psi)$）。设 $(\mathcal{L}, \psi)$ 是一个 G-着色链环，并记 $U(\mathcal{L}) := S^3 \backslash \mathcal{L}$。令 $\tilde{U}(\mathcal{L}, \psi)$ 为 $U(\mathcal{L})$ 上的主G-丛，其单值化由 ψ [29] 指定。注意，$U(\mathcal{L}, \psi)$ 仅取决于 ψ 的等价类。记 $M(\mathcal{L}, \psi)$ 为将 $\tilde{U}(\mathcal{L}, \psi)$ 完备化为 S^3 [25, 30] 的分支覆盖所得的唯一完备化。空间 $M(\mathcal{L}, \psi)$ 具有典范的定向光滑流形结构，群 G 通过保定向微分同胚作用于其上。图 2 展示了分支覆盖 $M(\mathcal{L}, \psi) \to S^3$ 的局部结构示意图。

G 对 $M(\mathcal{L}, \psi)$ 的作用的稳定子是循环的。

引理 2.2。设 $(\mathcal{L}, \psi)$ 是一个着色链环，且 L 是 $\mathcal{L}$的一个分支。假设 L 的子午线[1] 的（自由）同伦类在 G-着色 $\pi_1(S^3 \backslash \mathcal{L}) \to G$下映射到 $g \in G$ 的共轭类。那么，

[1]绕着 L 环绕一周的小环路。

L 的原像中各点的稳定子群共轭于由 g生成的循环群 $\langle g\rangle$ 。

证明 这可由图 2显然得出。 □

定义 2.3。设 G 是一个有限群， $S \subset G$ 是 允许的稳定子 的一个子集，并假定它在取逆元以及与 G 的元素共轭下封闭。一个 $(G,\ S)$-着色链环是一个 G-着色链环 $(\mathcal{L},\ \psi)$，其 G-着色将 $\mathcal{L}$ 的子午线映射到 S 中的元素。给定一个 $(G,\ S)$-着色链环 $(\mathcal{L},\ \psi)$，我们将其关联到配边不变量

$$\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L},\psi) := [M(\mathcal{L},\psi)] \in \Omega_3^{\mathrm{SO}}(G,\mathscr{F}_S), \tag{1}$$

其中 $\Omega_*^{\mathrm{SO}}(G,\ \mathscr{F}_S)$ 表示闭的、定向光滑 G-流形 X 的同构类构成的群；这些流形满足： X 的每个点的稳定子子群都属于 $\mathscr{F}_S$ ；模去定向的 G-等变配边后，其稳定子均属于第 5] 节中的 $\mathscr{F}_S$ [28, 。

从现在起， G 表示一个有限群，而 $S \subset G$ 是一个对逆元和共轭封闭的子集。我们来研究配边不变量$\mathfrak{B}_{G,\ S}$的基本性质。

定义 2.4。链环 $\mathcal{L} \subset S^3$ 是链环 $\mathcal{L}_1$， $\mathcal{L}_2 \subset S^3$的无缠结不交并，记作

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \uplus \mathcal{L}_2, \tag{2}$$

如果 $\mathcal{L}$ 是不交并 $\mathcal{L}_i \in S^3$，并且链环 $\mathcal{L}_i$ 可以由一个光滑嵌入的 2-球面 $\Omega \in S^3$分隔开。如果 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \uplus \mathcal{L}_2$，$\Omega$ 是一个分隔二球面，且$x \in \Omega$，那么根据范坎彭定理 [29] ，可得到一个规范同一

$$\pi_1(S^3\backslash\mathcal{L}, x) = \pi_1(S^3\backslash\mathcal{L}_1, x) * \pi_1(S^3\backslash\mathcal{L}_2, x), \tag{3}$$

其中 $*$ 表示群的自由积。着色链环（$\mathcal{L},\ \psi$）是着色链环（$\mathcal{L}_1,\ \psi_1$）与（$\mathcal{L}_2,\ \psi_2$）的无缠结不交并，记作

$$(\mathcal{L},\psi) = (\mathcal{L}_1,\psi_1) \uplus (\mathcal{L}_2,\psi_2), \tag{4}$$

如果 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \uplus \mathcal{L}_2$，并且给定一个分离的二球面 $\Omega \subset S^3$，

$$\psi = \psi_1 * \psi_2 \tag{5}$$

作为群同态 $\pi_1(S^3\backslash\mathcal{L},\ x) \to G$。

[2]指数 n 的作用是验证族 $\mathscr{F}_S$ 在包含下封闭，这一条件是 Conner 和 Floyd [28]所假设的。

引理 2.5。配边不变量 $\mathfrak{B}_{G,\ S}(\mathcal{L},\psi)$ 是一个可加不变量，其含义是，若$(\mathcal{L},\psi)=(\mathcal{L}_1,\psi_1)\uplus(\mathcal{L}_2,\psi_2)$，则

$$\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L},\psi)=\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L}_1,\psi_1)+\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L}_2,\psi_2) \tag{6}$$

在$\Omega_3^{\mathrm{SO}}(G,\mathscr{F}_S)$中。

证明 若 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\uplus\mathcal{L}_2$，则流形 $S^3\backslash\mathcal{L}$微分同胚于连通和 $(S^3\backslash\mathcal{L}_1)\#(S^3\backslash\mathcal{L}_2)$。设 P为从 $S^3\coprod S^3$ 到 $S^3\quad S^3\cong S^3$ $P^\circ=P\backslash\ I\times\#$ 的标 $\mathcal{L}_1\coprod I\times\mathcal{L}_2$ $S^3\backslash\mathcal{L}_1\ \coprod\ S^3\backslash\mathcal{L}_2\quad S^3\backslash\mathcal{L}$ 准光滑定向配边（裤形曲面的高维版本），而 ( ) 是由 ( ) ( ) 到 的诱导定向配边。根据范坎彭定理和同伦不变性，$\pi_1(P^\circ)\cong\pi_1(S^3\backslash\mathcal{L}_1)*\pi_1(S^3\backslash\mathcal{L}_2)$，且 ψ_1和 ψ_2定义了一个群同态 $\tilde{\psi}$：$\pi_1(P^\circ)\to G$。设 W为主 G-丛 W°在 P°上的完备化，该丛由群同态 $\tilde{\psi}$定义，并完备化为 P 上的分支覆盖。全空间 W具有自然的定向光滑流形结构，且带有边界。群 G通过保定向微分同胚作用于其上，因此 W给出了一个等变定向配边，从 $M(\mathcal{L}_1,\psi_1)\coprod M(\mathcal{L}_2,\psi_2)$到 $M(\mathcal{L},\psi)$。W上 G-作用的非平凡稳定子群属于 $\mathscr{F}_S$，因此 W证明了所需的等式。□

鉴于上述可加性性质，为了证明平凡彩色链环的配边不变量为平凡，只需计算简单环的不变量。

引理 2.6. 如果 $\mathcal{L}$ 由一个无结环组成，那么

$$\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L},\psi)=0 \tag{7}$$

在 $\Omega_3^{\mathrm{SO}}(G,\mathscr{F}_S)$ 中。

证明 根据假设，$\pi_1(S^3\backslash\mathcal{L})\cong\mathbb{Z}$。令 $g=\psi(1)\in G$，并令 n为 g在 G中的阶。S^3 沿 $\mathcal{L}$分支的 n重循环覆盖 X与S^3微分同胚。此外，由于 X上的 C_n作用可扩张为 $\mathbb{D}^4$ 上的 C_n作用，X作为一个C_n流形与边界配边。此外，$M(\mathcal{L},\psi)\cong G\times_{C_n}X$与 $G\times_{C_n}\mathbb{D}^4$配边，而 $\mathbb{D}^4\times_{C_n}G$的非平凡稳定子群属于 $\mathscr{F}_S$，从而证明了所需的等式[3]。□

接下来，我们证明配边不变量$\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L},\psi)$在拓扑允许的局部重联中具有守恒性。

引理 2.7. 设 $(\mathcal{L},\psi)$ 和 $(\mathcal{L}',\psi')$ 是 (G,S)-着色链环，它们可以通过一次拓扑允许的局部重联相互转化（图 *1(c)*）。则

$$\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L},\psi)=\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L}',\psi') \tag{8}$$

在 $\Omega_3^{\mathrm{SO}}(G,\mathscr{F}_S)$ 中。

[3]设 H是 G的子群，且 X是一个 H-空间。那么 $G\times_H X$表示由成对空间 $(g,x)\in G\times X$经以下识别得到的 G空间：$(gh,x)\sim(g,h.x)$。

证明 我们将构造一个从 $M(\mathcal{L},\psi)$ 到 $M(\mathcal{L}',\psi')$ 的等变定向配边。

设 $D:=\mathbb{D}^3\subset S^3$ 是重连发生处内部的一个小三维圆盘，并设 $C\subset D\times I$ 为图3所示的鞍形配边。那么

$$\mathcal{U}:=\big(S^3\backslash(\mathrm{Int}(D)\cup\mathcal{L})\big)\times I\cup(D\times I\backslash C) \tag{9}$$

是 S^3 中 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}'$ 的补集之间的定向配边。我们声称群同态

$$\psi^{\circ}:\pi_1\big(\big(S^3\backslash(\mathrm{Int}(D)\cup\mathcal{L})\big)\times I\big)=\pi_1\big(S^3\backslash(\mathrm{Int}(D)\cup\mathcal{L})\big)\to G \tag{10}$$

扩展为群同态

$$\tilde{\psi}:\pi_1(\mathcal{U})\to G \tag{11}$$

满足

$$\tilde{\psi}|_{(S^3\backslash\mathcal{L})\times\{0\}}=\psi \tag{12}$$

$$\tilde{\psi}|_{(S^3\backslash\mathcal{L}')\times\{1\}}=\psi'. \tag{13}$$

事实上，ψ 和 ψ' 分别在 $D\backslash\mathcal{L}$ 和 $D\backslash\mathcal{L}'$上的限制，使我们能够借助范坎彭定理构造一个同态

$$\bar{\psi}:\pi_1\Big(\big(S^3\backslash(\mathrm{Int}(D)\cup\mathcal{L})\big)\times I\cup(D\backslash\mathcal{L})\times\{0\}\cup(D\backslash\mathcal{L}')\times\{1\}\Big)\to G \tag{14}$$

它在 0 和 1 处分别限制为所需的同态。$\partial D\times I\cup D\times\{0\}\cup D\times\{1\}\simeq S^3$ 中鞍点C的补集是一个变形收缩[4]，它收缩到 $D\times I\cong\mathbb{D}^4$中 S的补集，因为该包含映射与 $\partial\mathbb{D}^4\backslash\partial\mathbb{D}^2\hookrightarrow\mathbb{D}^4\backslash\mathbb{D}^2$的标准包含映射同胚。因此，我们得到一个同伦识别

$$\big(S^3\backslash(\mathrm{Int}(D)\cup\mathcal{L})\big)\times I\cup(D\backslash\mathcal{L})\times\{0\}\cup(D\backslash\mathcal{L}')\times\{1\}\simeq\mathcal{U}. \tag{15}$$

由于同伦等价会在基本群上诱导同构，我们得到了所需的群同态 $\tilde{\psi}$。

˜记 $\mathcal{U}$为与群同态 $\tilde{\psi}$相关联的、定义在 $\mathcal{U}$上的 G-主丛。它可唯一延拓为 $S^3\times I$ [25, 30]的一个分支覆盖 W。空间W 具有带边界的定向光滑流形的典范结构：它是 $M(\mathcal{L},\ \psi)$与 $M(\mathcal{L}',\ \psi')$之间的定向配边。此外，群 G 通过保定向微分同胚作用于 W，且此作用限制为在 $M(\mathcal{L},\ \psi)$和 $M(\mathcal{L}',\ \psi')$上的通常作用。由于 W的稳定子属于 $\mathscr{F}_S$，W在等变配边群 $\Omega_3^{\mathrm{SO}}(G,\ \mathscr{F}_S)$中实现了所需的等式。□

本节的结果可以简洁地概括为以下定理。

定理 2.8. 设 G 是一个有限群，$S\subset G$ 是一个在取逆元和被 G 的元素共轭下封闭的子集。那么配边不变量 $\mathfrak{B}_{G,S}$ 满足以下性质：

1. 重联守恒：若$(\mathcal{L},\psi)$ 和$(\mathcal{L}',\psi')$ 是(G,S)-着色链环，且可通过一系列保持颜色的光滑同痕[5] 和拓扑允许的局部重联相互转化，则 $\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L},\psi)=\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L}',\psi')$;

---

[4]所谓 变形收缩，是指连续映射 $i\colon X\to Y$（必然是单射），且存在连续映射 $r\colon Y\to X$ 满足 $r\circ i=\mathrm{Id}_X$（这样的映射称为收缩映射），并且 $i\circ r$ 相对于 X 与 Id_Y 同伦。[5]从图示上看，这些过程可以表示为一系列彩色 Reidemeister 变换 [22, 31]。

2. 平凡链环消去：若 $(\mathcal{L},\psi)$ 是一个 (G,S)-着色链环，且 $\mathcal{L}$ 的链环结构是平凡的，则 $\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L},\psi)=0$；*3.* 可加性：$\mathfrak{B}_{G,S}\big((\mathcal{L}_1,\psi_1)\uplus(\mathcal{L}_2,\psi_2)\big)=\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L}_1,\psi_1)+\mathfrak{B}_{G,S}(\mathcal{L}_2,\psi_2)$。

3 拓扑受保护三着色的分类

这里，我们研究三着色链环的拓扑稳定性。令 Σ_3 表示三个元素的置换群，令 $I:=\{\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_{23}\}\subset\Sigma_3$ 表示反演的集合，其中 σ_{ij} 表示交换第 i^{th} 个和第 j^{th} 个元素的置换。

定义3.1 （参见 [25]）。 三着色链环 是意义下的一个 （Σ_3， I）-着色链环，见定义 2.3。一个 （Σ_3， I）-着色链环图可以用图形表示为一个链环图，其中每条弧都涂成红色、灰色或蓝色，如图4（a）和（b）所示。

定义3.2 （参见 [22]）。 如果一个三着色链环可以通过光滑同痕和拓扑等价变换为另一个，则称二者拓扑等价，且变换过程中使用拓扑允许的局部手术（图4（c）和（d））。若一个三着色链环在拓扑上等价于简单环的无缠结不交并，则称其为拓扑平凡。不属于拓扑平凡的三着色链环称为拓扑受保护。图5（a）展示了一个拓扑平凡纽结的例子。

拓扑保护三着色链环是否存在是一个非平凡的问题：事实上，即使要确立一个例子的拓扑保护，也需要能够检测出一个拓扑受保护的纽结。为此，我们采用第 2 节中提出的配边不变量。

定义 3.3. 设 $(\mathcal{L},\psi)$ 是一个三着色纽结。我们将其 i-不变量定义为

$$i(\mathcal{L},\psi):=[M(\mathcal{L},\psi)]\in\Omega_3^{\mathrm{SO}}(C_3,*),\tag{16}$$

其中，$*$ 是由平凡子群 $\{e\}$ 构成的 C_3 的子群族。换言之，我们将 $M(\mathcal{L},\psi)$ 上的 Σ_3 作用限制为 C_3 作用；所得作用是自由的，因为原始 Σ_3 作用中唯一的非平凡稳定子群，是由单个反演 σ_{ij} 生成的子群。

引理 3.4. i-不变量在拓扑允许的局部手术中保持不变。

证明 事实上，三着色链环的所有拓扑允许的局部手术都可以表示为一系列光滑同痕和拓扑允许的局部重联（图 4）。由于 $i(\mathcal{L},\ \psi)$ 是配边不变量 $\mathfrak{B}_{\Sigma_3,\ I}(\mathcal{L},\ \psi)$ 在

作用限制映射 $\Omega_3^{\mathrm{SO}}(\Sigma_3,\ I) \to \Omega_3^{\mathrm{SO}}(C_3,\ *)$下的像，因此根据后者在拓扑允许的局部重联中的守恒性（定理 2.8），结论得证。

□

我们来计算 i-不变量的目标群。首先记录以下观察。

引理 3.5。设 G 是一个有限群，X 是一个同伦型为 *CW* 复形的空间。那么，由下式定义的映射 $\Omega_i^{\mathrm{SO}}(X) \to H_i(X;\ \mathbb{Z})$

$$[M \xrightarrow{f} X] \mapsto f_*([M]), \tag{17}$$

其中，$[M] \in H_i(M;\ \mathbb{Z})$ 是定向流形 M的基本类，该映射在次数 $i \leq 3$上是同构。

证明 这一结论可直接由 Atiyah–Hirzebruch 谱序列以及一点的定向配边群的计算得出。□

引理 3.6。我们有

$$\Omega_3^{\mathrm{SO}}(C_3, *) \cong H_3(C_3;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_3 \tag{18}$$

其中 H_i（C_3,$\mathbb{Z}$）表示 C_3 的群同调，其系数为整数。

证明 由于 C_3在 $M(\mathcal{L},\psi)$ 上的作用是自由的，映射 $M(\mathcal{L},\psi) \to M(\mathcal{L},\psi)/C_3$ 是一个主 C_3- 丛，因此它定义了一个连续映射 $M(\mathcal{L},\psi)/C_3 \to \mathrm{B}C_3$，且在同伦意义下唯一，其中 $\mathrm{B}C_3$ 是群 C_3的分类空间。由此可得同构 $\Omega_3^{\mathrm{SO}}(C_3,*) \cong \Omega_3^{\mathrm{SO}}(\mathrm{B}C_3)$ [27]。根据引理 3.5，$\Omega_3^{\mathrm{SO}}(\mathrm{B}C_3) \cong H_3(\mathrm{B}C_3;\ \mathbb{Z}) = H_3(C_3;\ \mathbb{Z})$。同构 $H_3(C_3;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_3$ 是众所周知的。□

根据定理2.8 和引理3.4，i-不变量对于非拓扑受保护的三着色链环是平凡的。下面我们给出拓扑受保护的三染色纽结的例子。

定理 3.7。设 $(\mathcal{L},\ \psi)$ 是一个三着色三叶结（图 *5(b)*）。那么$i(\mathcal{L},\ \psi) \neq 0 \in \mathbb{Z}_3$。

证明 我们需要证明，对于三着色三叶结（$\mathcal{L}$，ψ），诱导映射

$$f : X := M(\mathcal{L},\psi)/C_3 \to \mathrm{B}C_3 \tag{19}$$

满足 $f_*[X] \neq 0 \in H_3(\mathrm{B}C_3;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_3$。由于 $[X]$ 是 $H_3(X;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$的一个生成元，这等价于 $f_*:\ H_3(X;\ \mathbb{Z}) \to H_3(\mathrm{B}C_3;\ \mathbb{Z})$ 的满射性。

根据参考文献 [31, 第 10D 章], X 与透镜空间 $L(3,\ 1)$微分同胚，而后者又通过在 C_3 上的自由作用与 S^3 微分同胚。根据构造，$\pi_1(f):\ \pi_1(X) \to$

$\pi_1(\mathrm{B}C_3)$ 是满射；由于两个群的阶均为 3，$\pi_1(f)$ 是一个同构。总之，我们得到一个空间的同伦纤维序列

$$S^3 \to X \to \mathrm{B}C_3. \tag{20}$$

Serre谱序列的形式（例如参见 [32, 33]）对于纤维序列（20）为

$$E^2_{p,1} = H_p(\mathrm{B}C_3;\ H_q(S^3;\ \mathbb{Z})) \Rightarrow H_{p+q}(X;\ \mathbb{Z}), \tag{21}$$

微分是同态 $d_r : E^r_{p,\ q} \to E^r_{p-r,\ q+r-1}$。所需的同态 f_* 的满射性等价于等式

$$E^2_{3,0} = E^\infty_{3,0}. \tag{22}$$

由于从维数角度看，胞腔 $E^i_{3,\ 0}$ 不支持任何非平凡微分，结论得证。□

注记 3.8。由于左手三叶结和右手三叶结在反定向微分同胚下彼此等价，左手三叶结和右手三叶结具有相反的 i-不变量。我们对 i-不变量进行归一化，使得右手三叶结的 i-不变量按定义为$[1] \in \mathbb{Z}_3$。

我们已经证明，存在两个不等价的拓扑受保护三着色链环。此外，任何等价于三着色三叶结的无缠结不交并的三着色链环，要么是拓扑平凡的，要么等价于单个三着色三叶结（图 6）。接下来我们证明，每个拓扑受保护的三染色都与单个三叶结拓扑等价。

定理 3.9. 设$(\mathcal{L}, \psi)$ 为一个三着色链环。那么$(\mathcal{L}, \psi)$ 要么是拓扑平凡的，要么与左手或右手三着色三叶结拓扑等价。

证明 根据三叶结添加规则（图 6），只需证明 $(\mathcal{L}, \psi)$ 与简单环和三着色三叶结的无缠结不交并拓扑等价。利用图7(a) 中的局部手术，我们可以将$(\mathcal{L}, \psi)$ 的链环图变换为一种形式，使得每个交叉后面紧接着另一个交叉。将每个双交叉记作一条边后，链环图便转化为由简单环与边连接而成的不交并图（图 7(b) 和 (c)）。下面我们将对边的数量进行归纳论证。

假设 L 是图中的一个最内层环，即在 L 内部没有其他环路。通过拓扑允许的重连，我们可以假设 L 至多连接3 条边（图7（d））。图8 和图9 展示了在 L 周围进行局部手术以减少边数的一般步骤，分别对应 L 连接两条边和三条边的情况。因此，通过拓扑允许的局部手术，$(\mathcal{L}, \psi)$ 可以变换为简单环与三着色三叶结的无缠结不交并，从而证明该结论。□

4 讨论

在第2节中，我们构造了着色链环的配边不变量，并在第3 节中利用它对拓扑允许的局部手术下的三着色链环进行了分类。就物理意义而言，三着色链环刻画了由某种介质支持的拓扑涡旋构型，该介质的序参量空间 X 满足 $\pi_1(X) \cong \Sigma_3$ 和 $\pi_2(X) \cong 0$，且不含对应于三阶循环置换的涡旋。当然，如果给定的 G-染色链环图取值于子群 $H \subset G$，那么由它经过 G-染色 Reidemeister 变换和拓扑允许的局部重连所得到的任意链环图也具有这一性质。因此，要实现物理应用，只需找到一个满足 $\Sigma_3 \subset \pi_1(X)$ 和 $\pi_2(X) \cong 0$的系统。

是否存在具体的物理系统，使得 $\pi_1(X)$ 包含 Σ_3 作为子群？遗憾的是，这不可能是自旋子玻色–爱因斯坦凝聚态或液晶，因为 Σ_3 不会作为离散子群出现在 SU(2) [34]中。相反，出现在 SU(2) 子群中的，是其对应的 12 阶双覆盖 Dic_3，二重循环群。然而，仍可利用三着色链环研究涡旋构型的稳定性：若存在一个（满射）群同态 $\psi: G \to \Sigma_3$，并且某个 G-染色链环经 ψ 映射后成为拓扑保护的三着色链环，那么原链环也受到拓扑保护。然而，目前尚不清楚这一策略对 Dic_3是否有效：三叶结的非平凡三染色无法提升为 Dic_3-染色，因为将三股辫映射到其在三个字母上的诱导置换的群同态 $B_3 \to \Sigma_3$，无法通过二阶同态 $\mathrm{Dic}_3 \to \Sigma_3$进行分解。

在纯理论层面上，不难构造出合理的模型，其序参量空间 X 满足 $\pi_1(X) \cong \Sigma_3$ 和$\pi_2(X) \cong 0$。例如，由于 Σ_3 是单连通李群 SU(6) 的离散子群，并且根据 Mostow–Palais 定理 [35, 36]，存在一种自发对称性破缺过程，可将 SU(6) 破缺至 Σ_3，因此存在一种杨–米尔斯理论，使得真空结构的序参量空间与 $\mathrm{SU}(6)/\Sigma_3$同胚。或许可以在实验室环境中将此类系统实现为人工规范场理论 [37]。

本文的结果自然引出了更多问题。例如，考虑 $\mathbb{Z}_n$值 Fox n着色的不变量 [25]，：它们可由第 2 节的配边不变量得到，方式类似于第 3 节中得到 i不变量的做法。这个不变量是否能对 n着色给出完全分类，也就是说，对于该不变量的每个非平凡取值 $[m] \in \mathbb{Z}_m$，是否都只有一个 Fox n着色（相差拓扑等价除外）？对于奇素数$p > 2$，环面结 $T_{2,p}$ 存在一个 Fox p着色 [38]。此外，由于 $T_{2,p}$ 的分支双覆盖等价于透镜空间 $L(p,1)$ [31]，，仿照定理 3.7 的证明可知，该 p着色的不变量是 $\mathbb{Z}_p$的一个生成元。因此，利用可加性，存在一些 Fox p着色链环，其不变量可以取到所有可能的值。

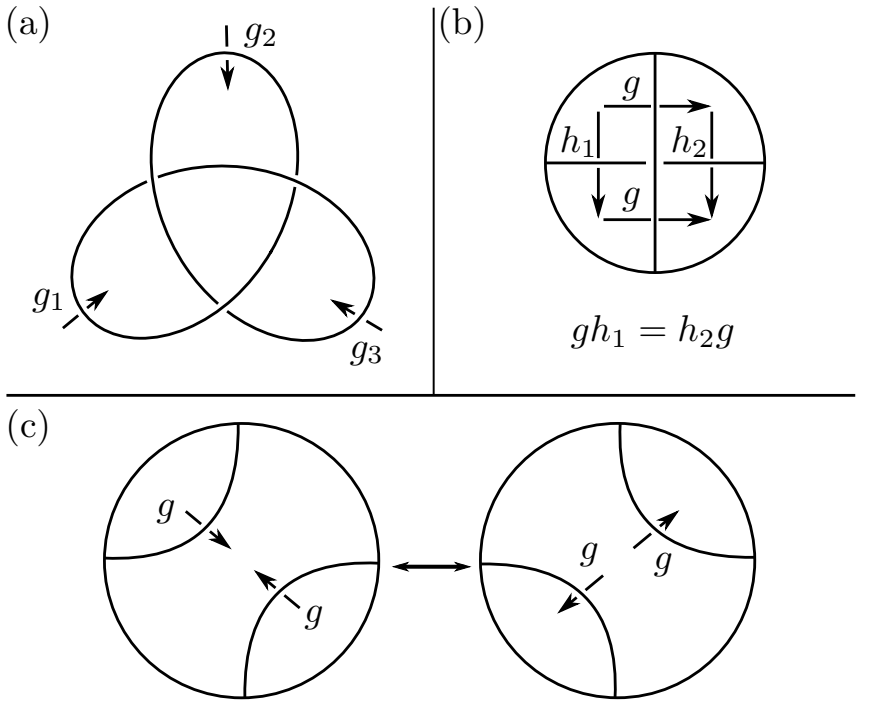

图 1 G着色链环图与拓扑允许的重连。(a) 在 G着色链环图中，每条弧都配有一个箭头和一个元素 $g \in G$。这些附加数据用于表示一个群同态 $\psi:\ \pi_1(S^3\backslash\mathcal{L}, s_0) \to G$ 其中 $\mathcal{L}$ 表示链环，基点 s_0 取在纸面上方。也就是说，如果 γ 是这样一条环路：从 s_0出发，向下经过箭头后方，沿着箭头从弧下方穿过，再返回 s_0，那么 $\psi([\gamma]) = g$。当且仅当图中每个交叉处都满足*Wirtinger*关系(b)时，这条规则才定义了一个良定义的群同态 $\psi:\ \pi_1(S^3\backslash\mathcal{L}, s_0) \to G$ 。箭头的方向完全任意：任何箭头都可以反向，只要将相应的 G 替换为其逆元。(c) 拓扑允许的局部重连是指不改变 G着色的涡旋核重连。

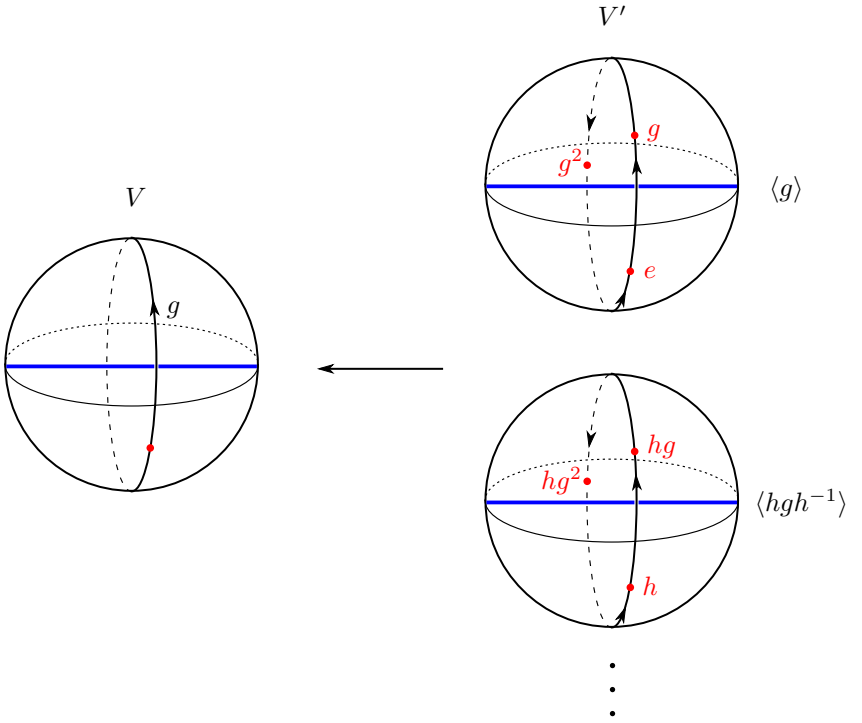

图 2 分支覆盖 $M(\mathcal{L},\psi) \to S^3$（构造 2.1）的局部结构。左侧显示了链环 $\mathcal{L}$（蓝色）上一个点的一个小闭邻域 V。绕核心 $\mathcal{L}$ 一周的环路 γ 的同伦类（γ 的基点以红点表示）在 G-着色 ψ 下被映射到 $g \in G$。右侧显示了分支覆盖 $M(\mathcal{L},\psi) \to S^3$ 下 V 的原像 V'。$\mathcal{L}$ 中各点的原像以蓝色表示。在这些点的补集上，分支覆盖是一个主 G-丛。基点的原像以红点表示；对于 G 中的每个元素，都存在一个这样的点。此外，从对应于 $h \in G$ 的点出发的环路 γ 的唯一提升，终止于对应于 $hg \in G$ 的点。群 G 作用于 $M(\mathcal{L},\psi)|_U$；在红点上，该作用被认定为 G 通过左乘作用于自身的作用。每个分支上的蓝色点的稳定子群始终共轭于由 g 生成的循环群 $\langle g \rangle$。图中描绘的两个分支的稳定子群已标出。$M(\mathcal{L},\psi)|_U$ 的各个分支与陪集 $G/\langle g \rangle$ 之间存在双射对应。

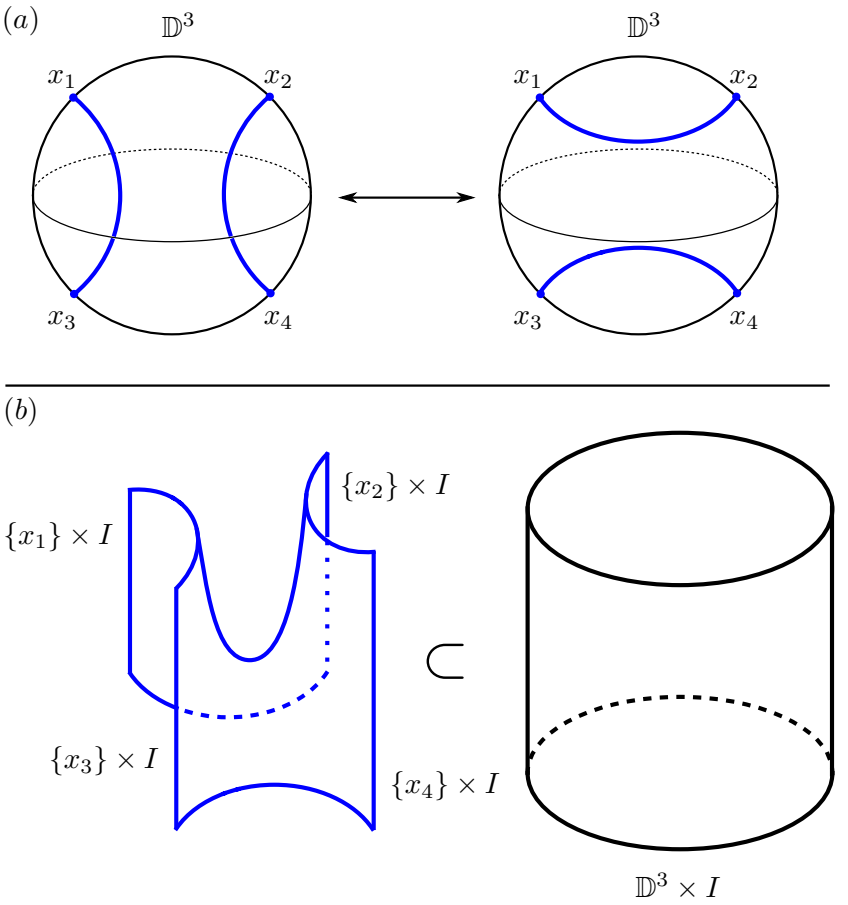

图3 鞍形配边（引理 2.7 的证明）。(b) $\mathbb{D}^3 \times I$ 中鞍点（蓝色）的补集在 $\mathbb{D}^3$ 内给出了两个弧构型（蓝色）之补集之间的一个配边，与 (a) 中相同。两个弧构型具有相同的端点 x_i，它们位于边界球面 $\partial\mathbb{D}^3$ 上；鞍点在边界上为常数，即 $S \cap (\partial\mathbb{D}^3 \times I) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \times I$。

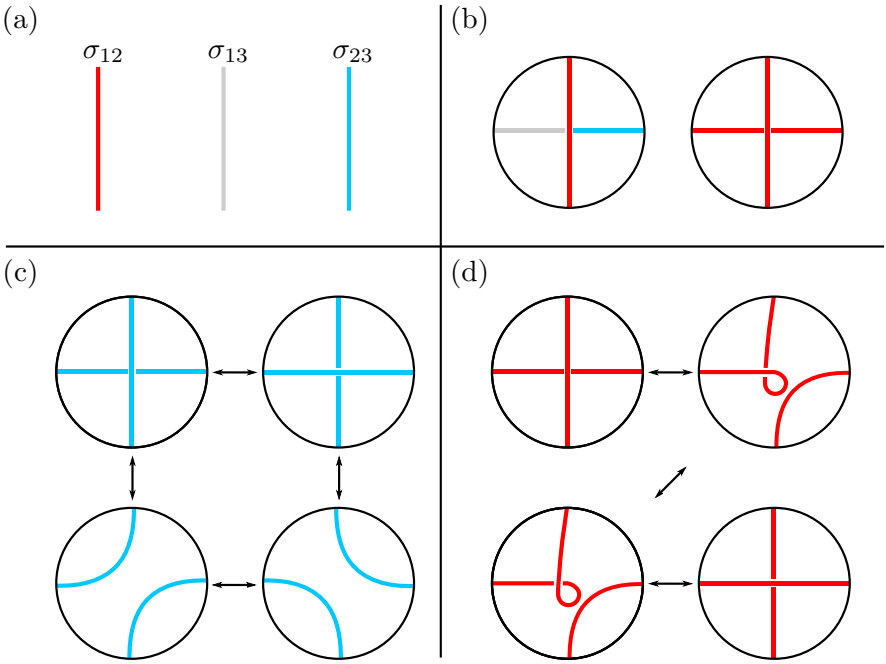

图4 三着色链环的图示表示（定义 3.1）。(a) 三着色链环图可以采用比图 1 所示更直观的图示表示：无需为每条弧标注箭头和群元素，只需将每条弧分别染成红色、绿色或蓝色，对应于反演 σ_{12}、σ_{13} 和 σ_{23}。(b) Wirtinger关系可以用图示表示：在每个交叉处，所有弧要么颜色相同，要么颜色各不相同。(c) 三着色链环的拓扑允许的局部手术发生在颜色相同的股之间。带星号标记的手术是鞍点重连接。(d) 在链环同痕意义下，所有拓扑允许的局部手术都可化约为一次鞍点重连接。上图以股交叉为例进行了说明。

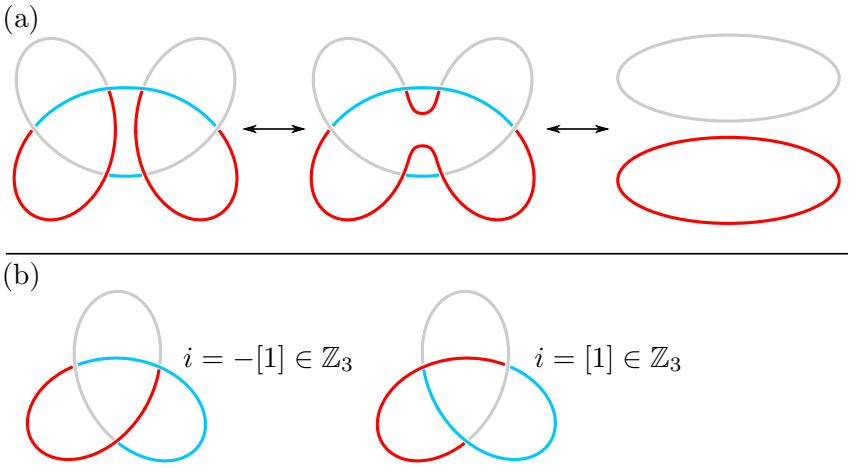

图 5 拓扑平凡与拓扑保护三着色结的示例。(a) 一个拓扑平凡三着色结及其衰变示例。(b) 两个拓扑保护的三着色结示例（定理 3.7），以及它们的 i 不变量值（采用备注 3.8中的归一化约定）。每个拓扑保护链环都可以通过光滑同痕和拓扑允许的局部手术转化为这些结构之一（定理3.9）。

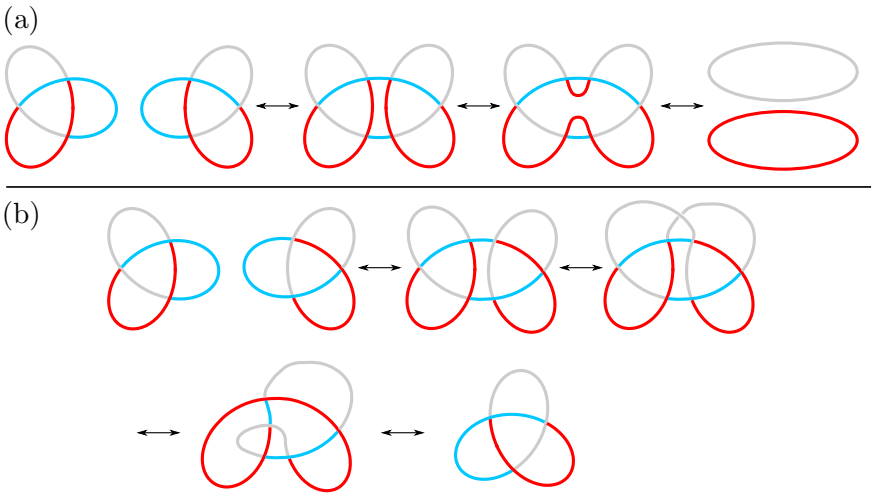

图 6 三着色三叶结的加法规则。(a) 一个左手三着色三叶结与一个右手三着色三叶结的组合，可以通过拓扑允许的局部手术转化为两个非链结的简单环。(b) 两个左手三着色三叶结的组合，可以通过拓扑允许的局部手术转化为一个右手三着色三叶结。同样，两个右手三着色三叶结的组合可以转化为一个左手三叶结。

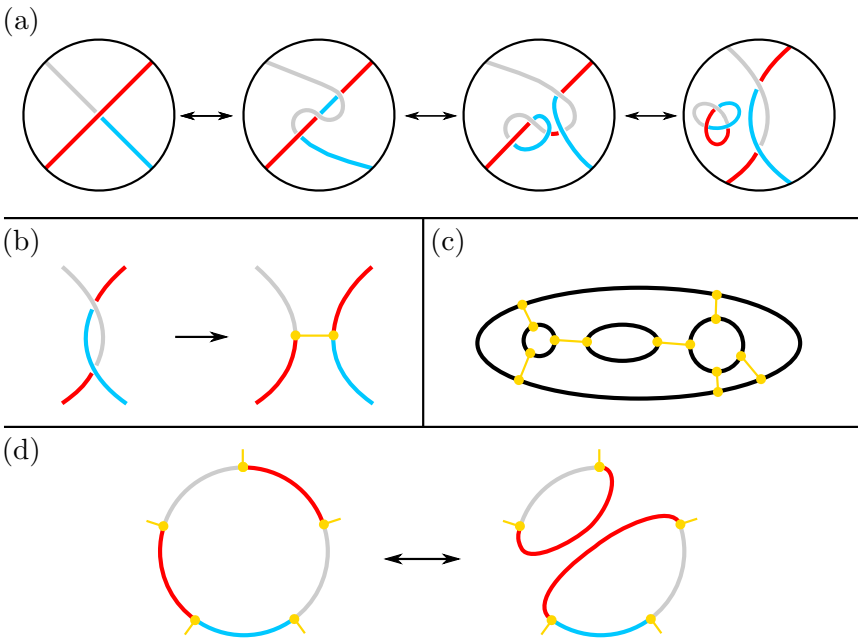

图7 将三着色链环变换为特殊形式（定理 3.9 的证明）。（a）通过实施拓扑允许的局部手术，可将链环图中的每个交叉变换为上交叉紧接着下交叉的形式。在此过程中，会从链环中分离出一个三着色三叶结。（b）为简化图示，我们用连接弧的黄色边表示每个由此得到的双交叉。（c）使用（b）中所述的记法，可采用（a）中所示的手术，将三着色链环图变换为由互不重叠的简单环组成、并由边连接的图。为简洁起见，此处省略了弧的颜色。（d）与多于三条边相连的最内层环（即内部不含其他环的环路）可以拆分成多个环，使每个环至多与三条边相连。

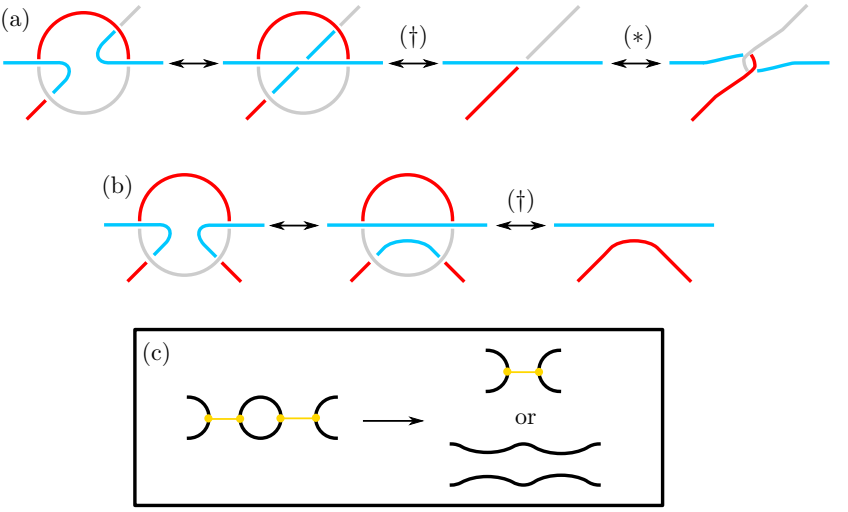

图 8 消去与两条边相连的最内层环（定理 3.9 的证明）。(a)、(b) 除了颜色置换和图示平面的等距变换外，与两条边相连的最内层环周围只有两种可能的结构。(c) 在这两种情况下，边的数量都至少可以减少一条，但代价是可能会分离出一个简单环 (†) 或一个三着色三叶结 (∗)。

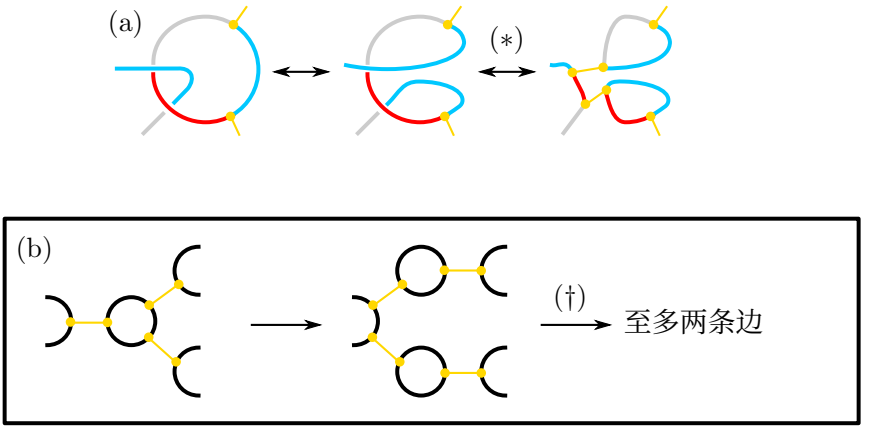

图 9 消去与三条边相连的最内层环（定理3.9 的证明）。(a) 除了颜色置换和图示平面的等距变换外，只需考虑一种相关结构。标记 (∗) 表示一个分离出两个三叶结的过程。(b) 执行 (a) 中所示的手术后，我们可以化归到两边情形 (†)，这一情形已在图 8 中讨论。因此，边的数量至少可以减少一条，但代价是可能会分离出简单环和三着色三叶结。

参考文献

[1] Volovik, G.E., Mineev, V.P.：通过同伦拓扑方法研究液晶中超流氦^3 的奇点。苏联物理学—JETP（英文译本）；（美国）45:6（1977年）[2] Mermin, N.D.：有序介质中的缺陷拓扑理论。《现代物理评论》51(3), 591–648（1979年）。https://doi.org/10.1103/ revmodphys.51.591[3] Mineev, V.：《有序介质中的拓扑稳定缺陷与孤子》（1998年）[4] Bucher, M., Lo, H.-K., Preskill, J.：爱丽丝电动力学的拓扑方法。《核物理B》386(1)，3–26（1992年）。https://doi.org/10.1016/0550-3213(92)90173-9[5]Bucher, M., Lee, K.-M., Preskill, J.：关于探测离散柴郡荷。《核物理B》386(1)，27–42（1992年）。https://doi.org/10.1016/ 0550-3213(92)90174-a[6] Kamien, R.D., Selinger, J.V.：手性液晶中的有序与受挫。《物理学杂志：凝聚态》13(3), 1–22（2000年）。https: //doi.org/10.1088/0953-8984/13/3/201[7] Beller, D.A., Machon, T., Čopar, S., Sussman, D.M., Alexander, G.P., Kamien, R.D., Mosna, R.A.：胆甾相的几何。《物理评论X》4(3), 031050（2014年）。https://doi.org/10.1103/physrevx.4. 031050[8] Machon, T., Aharoni, H., Hu, Y., Kamien, R.D.：近晶液晶缺陷拓扑的若干方面。《数学物理通讯》372(2)，525–542（2019年）。https://doi.org/10.1007/s00220-019-03366-y[9] Pietilä, V., Möttönen, M.：在自旋or玻色-爱因斯坦凝聚体中产生狄拉克磁单极子。《物理评论快报》103(3)，030401（2009年）。https://doi.org/10.1103/physrevlett.103.030401

[10] Ray, M.W., Ruokokoski, E., Kandel, S., Möttönen, M., Hall, D.S.：在合成磁场中观测狄拉克磁单极子。《自然》**505**（7485），657–660（2014年）。https://doi.org/10.1038/nature12954

[11] Ray, M.W., Ruokokoski, E., Tiurev, K., Mottonen, M., Hall, D.S.：在量子场中观测到孤立磁单极子。《科学》**348**(6234), 544–547(2015)。https://doi.org/10.1126/science.1258289

20 拓扑保护的三着色[12] Hall, D.S., Ray, M.W., Tiurev, K., Ruokokoski,E.,Gheorghe, A.H.,Möt- tönen, M.: 系结量子结。《自然·物理》 **12**(5), 478–483(2016).https://doi.org/10.1038/nphys3624[13] Nakanishi, H., Hayashi, K., Mori, H.: 无结环形缺陷的拓扑分类。《数学物理通讯》 **117**(2),203–213(1988). https://doi.org/10.1007/bf01223590[14] Annala, T., Möttönen, M.: 电荷歧义与磁单极子分裂。《物理评论研究》 **4**(2), 023209(2022) https://arxiv.org/abs/arXiv:2109.02892. https://doi.org/10.1103/physrevresearch.4.023209[15] Machon, T., Alexander, G.P.: 手性向列相中的结与不可定向曲面。《美国国家科学院院刊》 **110**(35),14174–14179(2013). https://doi.org/10.1073/pnas.1308225110

[16] Machon, T., Alexander, G.P.: 向列液晶中的打结缺陷。《物理评论快报》 **113**(2), 027801 (2014年)。https://doi.org/10.1103/physrevlett.113.027801

[17] Thomson, W.: 《涡旋原子论》。爱丁堡皇家学会学报 **6**，94–105（1869年）。https://doi.org/10.1017/s0370164600045430[18] Kleckner, D., Irvine, W.T.M.: 《打结涡旋的产生与动力学》。《自然·物理》 **9**(4)，253–258（2013年）。https://doi.org/10.1038/nphys2560[19]Kleckner, D., Scheeler, M.W., Irvine, W.T.M.: 《涡旋结的生命历程》。《流体物理学》 **26**(9)，091105（2014年）。https://doi.org/10. 4893590[20] Kleckner, D., Kauffman, L.H., Irvine, W.T.M.: 《超流体涡旋结如何解开》。《自然·物理》 **12**(7)，650–655（2016年）。https://doi.org/10.1038/nphys3679 [21] Poenaru, V., Toulouse, G.: 《有序介质中缺陷的交叉与三维流形拓扑》。《物理学杂志》 **38**(8)，887–895（1977年）。https://doi.org/10.1051/jphys:01977003808088700[22]Annala, T., Zamora-Zamora, R., Möttönen, M.: 《拓扑保护的涡旋结与链环》。《通讯·物理》 **5(1)**（2022）https://arxiv.org/abs/2204.03612 [凝聚态物理·量子气体]。https://doi.org/10.1038/s42005-022-01071-2[23] Monastyrsky, M.I., Retakh, V.S.: 《凝聚态物质中链接缺陷的拓扑》。《数学物理通讯》 **103**(3)，445–459（1986年）。https://doi.org/10.1007/bf01211760

[24] Kawaguchi, Y., Ueda, M.：自旋旋量玻色–爱因斯坦凝聚体。《物理学报告》**520** (5), 253–381 (2012年)。https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.07.005

[25]Fox, R.H.：纽结和链环的元循环不变量。《加拿大数学杂志》**22**(2), 193–201 (1970年)。https://doi.org/10.4153/cjm-1970-025-9[26] Crowell, R.H., Fox, R.H.：《纽结理论导论》。施普林格，??? (1977年)。https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9935-6

[27] Conner, P.E., Floyd, E.E.：《可微周期映射》。施普林格，??? (1964年)。https://www.ebook.de/de/product/33674784/pierre_e_conner_e_e_floyd_可微_周期的_maps.html

[28] Conner, P.E., Floyd, E.E.：《奇周期映射》。《数学年刊》 **84**(2), 132(1966年)。 https://doi.org/10.2307/1970515

[29] Hatcher, A.：《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥、纽约（2002年）

[30] Fox, R.H.：带奇点的覆盖空间。载于：《代数几何与拓扑》，第243–257页。普林斯顿大学出版社，???（1957年）。https://doi.org/10.1515/9781400879915-019

[31] Rolfsen, D.：《纽结与链环》。AMS Chelsea 出版社，罗得岛州普罗维登斯（2003年）

[32] Hatcher, A.：谱序列。在线笔记

[33] Boardman, J.M.：条件收敛谱序列。美国数学会（1999年）。https://doi.org/10.1090/conm/239/03597[34] McKay, J.：图、奇点与有限群。载于：圣克鲁兹有限群会议。《纯数学研讨会论文集》，第183–186页。美国数学会，???（1981年）。https://doi.org/10.1090/pspum/037/604577
[35] Mostow, G.D.：欧几里得空间中的等变嵌入。《数学年刊》**65**(3)，432（1957年）。https://doi.org/10.2307/1970055[36] Palais, R.：紧致可微变换群在正交表示中的嵌入。《印第安纳大学数学杂志》**6**(4)，673–678（1957年）。https://doi.org/10.1512/iumj.1957.6.56037[37] Dalibard, J., Gerbier, F., Juzeliűnas, G., Öhberg, P.：专题综述：中性原子的人工规范势。《现代物理学评论》**83**(4)，1523–1543（2011年）。https://doi.org/10.1103/revmodphys.83.1523

[38]Breiland, A.-L., Oesper, L., Taalman, L.: p环面结的三染色类别。《密苏里数学科学杂志》**21**(2)（2009年）。https://doi.org/10.35834/mjms/1316027244