arXiv:2301.09551v1 [math.GN] 23 Jan 2023

关于具有星核 Menger 性质的空间*

´JAVIER CASAS-DE LA ROSA, ANGEL TAMARIZ MASCARUA

摘要

给定一个拓扑性质 $\mathcal{P}$，若空间 X 满足：对于该空间 X的任意开覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个具有性质 $\mathcal{P}$ 的集合 $Y \subseteq X$，使得 $St(Y,\mathcal{U}) = X$，则称该空间为 $star$-$\mathcal{P}$；集合 Y称为覆盖 $\mathcal{U}$的星核。本文引入并研究具有星核 Menger 性质的空间，即星 Menger 空间。我们给出一些例子，说明其与先前研究的其他相关性质之间的关系，并考察星 Menger 性质在子空间、乘积、连续像和原像下的表现。此外，我们还对星选择理论作了一些评论。特别地，我们讨论了 Song 在该理论中提出的一些问题。最后，我们引入若干新的性质，并提出了关于这些性质的一些一般性问题。

关键词：星-$\mathcal{P}$ 空间，Menger 性质，星 Lindel¨of 空间，（星）选择原理，星 Menger 空间，胡雷维奇性质。
2020年美国数学会学科分类。主要分类 54D20；次要分类 54A25。

1 引言与预备知识

给定一个性质 $\mathcal{P}$，如果对于空间 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个具有性质 $\mathcal{P}$ 的集合 $Y \subseteq X$，使得 $St(Y,\mathcal{U}) = X$，则称空间 X 为星-$\mathcal{P}$（或由 $\mathcal{P}$ 决定的星）；集合 Y 称为覆盖 $\mathcal{U}$ 的星核。

星-这一术语$\mathcal{P}$ 由 [22] 提出，但在此之前，一些作者已以不同名称研究过某些星性质。例如，Ikenaga（[15]）研究了星可数、星 Lindel¨of 和星 σ-紧空间。另一方面，van Douwen 等人最早研究了星有限和星可数性质（参见 [7]）。关于某些星性质（术语有所不同）的系统研究见 [21]。

Fleischman 在 [11] 中证明，在豪斯多夫空间这一类空间中，星有限性质与可数紧性质等价（另见 [7]）。另一方面，Matveev 在 [21], 中证明，伪紧性与星伪紧性等价。鉴于这些事实，不同作者特别关注的一个问题是：对于某种性质 $\mathcal{P}$，确定一些伪紧空间的真子类，这些空间具有星-$\mathcal{P}$性质，但并非可数紧

*第一作者获得了墨西哥国立自治大学博士后奖学金计划的资助。

（例如参见 [6]）。从这个意义上说，在 [22] 中，作者给出了一些空间的例子：对于某些类似紧致性质，这些空间具有星-$\mathcal{P}$ 性质，但并非可数紧。此外，在 [2], 中，作者对具有 Lindel$\mathcal{P}$ of 型性质的星-¨空间进行了研究并给出了相关例子。此外，随着对星覆盖性质的研究，许多其他具有星-$\mathcal{P}$ 形式的性质也使用 [22]的术语进行了定义。例如，在 [24], 中，作者引入并研究了星可数离散度空间类，以及由可数链条件确定的星- [25], 类星可数延拓空间。

为推动这一研究方向的发展，我们在第2节引入星 Menger 空间这一类空间，并给出若干例子，说明它与其他星-$\mathcal{P}$型空间类之间的关系。在第3节，我们探讨星选择原理理论与星门格尔性质之间的关系，并提及两个有趣的例子，其中一个例子使我们得以探讨 Song 提出的、与星选择性质相关的一些问题。在第4节，我们研究星门格尔性质在子空间、乘积、映射、原像等方面的表现。在第5节，我们列举若干类空间，在这些空间中，星门格尔性质等价于其他一些相关性质。最后，在第6节，我们介绍一些方案，这些方案可能会导出若干与本文所研究性质相似的新性质；并针对这些性质提出一些一般问题。

1.1 符号与术语

本文中，除非特别指出某种分离公理，否则所有空间均假定为正则且满足 T_1。关于符号和术语，请参见 [10]。

通常， $\mathbb{R}$ 是赋予欧几里得拓扑的实数集。我们用 $[X]^{<\omega}$ 表示 X的所有有限子集构成的集合。给定集合 $A \subseteq X$以及由 X的子集组成的族 $\mathcal{U}$ ，相对于 $\mathcal{U}$的 A 的星记作$St(A,\mathcal{U})$，定义为集合 $\bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}$；对于满足 $x \in X$的 $A = \{x\}$ ，我们用$St(x,\mathcal{U})$代替 $St(\{x\},\mathcal{U})$。因此，若 A和 B是 X的子集，且 $A \subseteq B$，而 $\mathcal{U}$是由 X的子集组成的族，则 $St(A,\mathcal{U}) \subseteq St(B,\mathcal{U})$。此外，注意，满足性质 $\mathcal{P}$ 的每个空间都是星-$\mathcal{P}$的。而且，星-$\mathcal{P}$ 空间还满足以下基本事实：

(a) 对任意空间 X，若 D 是 X 的一个满足性质 $\mathcal{P}$的稠密子集，则 X 是一个星-$\mathcal{P}$ 空间。(b) 若 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 是两个拓扑性质，且 $\mathcal{P}$ 蕴含 $\mathcal{Q}$，则任何星-$\mathcal{P}$ 空间都是星-$\mathcal{Q}$空间。

如果空间 X 中的每个由非空开子集组成的局部有限集族都是有限的，则称空间 X 弱紧；如果空间 X 中的每个由非空开集组成的局部有限族都是可数的，则称空间 X 弱 Lindel ¨of。显然，每个

弱紧空间都是弱 Lindel¨of 空间，每个弱紧空间都是伪紧的，但反之不成立。然而，对于 Tychonoff 空间，弱紧与伪紧这两种性质是等价的。

对于空间 X，回顾一下，空间 X 的 Alexandroff 重复空间记作 $A(X)$，其构造如下： $A(X)$ 的底集为$X \times \{0,1\}$，且 $X \times \{1\}$ 中的每个点都是孤立点；点 $(x, 0) \in X \times \{0\}$ 的一个基本开集是形如 $(U \times \{0\}) \cup ((U \times \{1\})\backslash\{(x, 1)\})$ 的集合，其中U 是 X 中包含 x 的开集。众所周知， $A(X)$ 是紧（可数紧、Lindel¨of）当且仅当 X 也是如此；并且 $A(X)$ 是豪斯多夫（正则、吉洪诺夫、正规）当且仅当 X 也是如此。

回顾一下， ω 的无限子集族 $\mathcal{A}$ 是几乎不交的（a.d.），如果任意两个不同的元素 A、$B \in \mathcal{A}$ 都满足 $A \cap B$ 是有限的。此外，如果一个几乎不交族不被真包含于另一个几乎不交族中，则称其为极大的（m.a.d.）。给定一个几乎不交族 $\mathcal{A}$，我们定义由 $\mathcal{A}$ 确定的 Mr ´owka-Isbell 空间（也称为由 $\mathcal{A}$ 生成的 Ψ-空间），记作 $\Psi(\mathcal{A})$；它是底集为 $\omega \cup \mathcal{A}$、配备如下拓扑的空间： ω 中的每个点都是孤立点；对于给定的元素$A \in \mathcal{A}$， A 的局部基为集合 $\mathcal{B}(A) = \{\{A\} \cup (A\backslash F) : F \in [\omega]^{<\omega}\}$。众所周知，几乎不交族 $\mathcal{A}$ 是极大的，当且仅当 $\Psi(\mathcal{A})$ 是伪紧的（见 [12]）。

CH 表示连续统假设。关于扩散度、延展度、胞腔度等基数函数的定义，请参阅 [14] 。回顾一下，Pixley-Roy 拓扑定义在空间 X 的子集所组成的空间上，定义如下：设 $\mathcal{K}$ 是空间 X 的子集类。对于 $K \in \mathcal{K}$ 和 U（它是 X 中 K 的一个开邻域），令 $[K,U] = \{A \in \mathcal{K} : K \subseteq A \subseteq U\}$。那么， $\mathcal{K}$ 上的 Pixley-Roy 拓扑以集合族 $\{[K,U] : K \in \mathcal{K}$（其中 U 在 $X\}$ 中开）为基（参见 [9]）。

2 星 Menger 空间

以下定义由 van Mill 等人于 [22] 提出。

定义 2.1. 给定一个拓扑性质 $\mathcal{P}$，若空间 X 满足：对于该空间的任意开覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个具有性质 $\mathcal{P}$ 的子空间 $Y \subseteq X$，使得 $St(Y,\mathcal{U}) = X$，则称 X 为星-$\mathcal{P}$（或称由 $\mathcal{P}$ 确定的星）。

根据定义 2.1，许多作者研究了若干类星-$\mathcal{P}$ 空间，其中 $\mathcal{P}$ 是一种类似紧致性质；他们还研究了若干类星-$\mathcal{P}$空间，其中 $\mathcal{P}$ 是一种 Lindel¨型性质（例如，参见 [22] 和 [2]）。回顾一下，若对 X 的每个开覆盖序列 $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$，都存在一个序列 $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$，使得对每个 $n \in \omega$， $\mathcal{V}_n$ 都是 $\mathcal{U}_n$ 的有限子族，且 $\bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ 是 X 的一个开覆盖，则称一个空间具有门格尔性质。下面我们再引入一类星-$\mathcal{P}$ 空间，其中 $\mathcal{P}$ 是门格尔性质。

定义 2.2. 若对于空间 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个门格尔子空间 $M \subseteq X$，使得 $St(M,\mathcal{U}) = X$，则称空间 X 具有星 Menger 性质。

在下图（图1）中，我们总结了星$\mathcal{P}$性质（以及其他一些著名的经典性质）之间的蕴含关系。这些关系或者可由一些基本事实直接得出，或者来自文献中的某些结果。该图概述了这些性质与星 Menger 性质之间的关系。值得一提的是，在吉洪诺夫空间类中，伪紧性与弱紧致性等价。因此，对于吉洪诺夫空间，伪紧性显然蕴含弱紧 Lindel¨of。

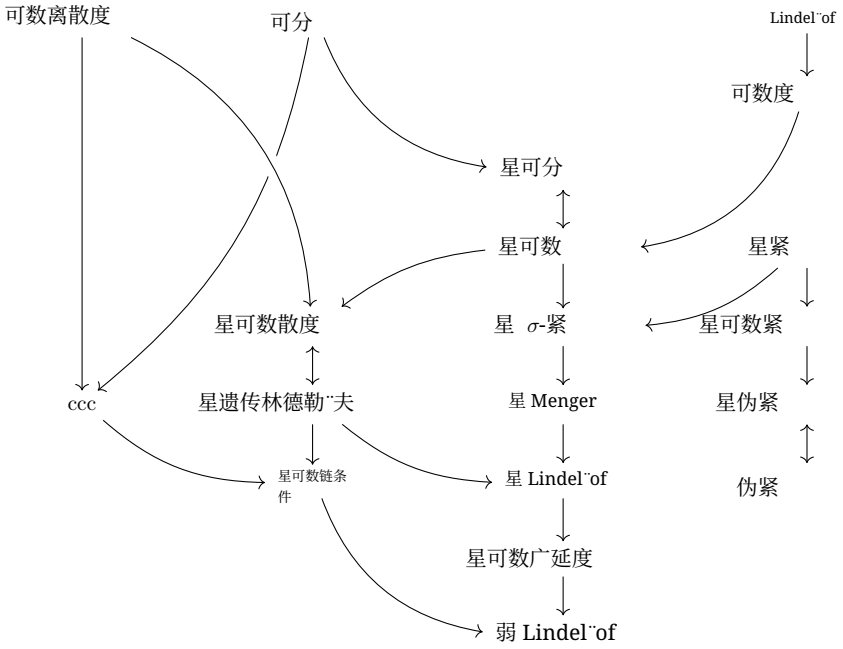


图1：星-$\mathcal{P}$ 性质之间的关系

下面我们将给出一些例子，说明星 Menger 性质不同于先前定义的其他星-$\mathcal{P}$ 性质。为此，我们回顾一下卢津空间的定义。

定义 2.3. 若豪斯多夫空间 X 不可数，且其中每个无处稠密集都可数，则称其为卢津空间。

下面的引理广为人知，并将在下文的例子中发挥作用。

引理 2.4 ([14])。设 $c(X) \leq \kappa$ 且 $\mathcal{U}$ 是 X的开子集族。则存在一个子族 $\mathcal{V}$，它是 $\mathcal{U}$ 的子族，且满足 $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ 以及 $\bigcup \mathcal{U} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{V}}$。

例 2.5. 假设连续统假设成立，则存在一个星 Lindel ¨of 空间，它不是星 Menger。

证明。给定一个拓扑空间（X，τ），我们用 $\mathcal{K}[X]$ 表示 X 中所有紧致无处稠密子集构成的空间，并赋予其 Pixley-Roy 拓扑。在 [8], 的定理 3 中，证明了 $\mathcal{K}[\mathbb{R}]$ 是一个满足可数链条件的不可分第一可数零维贝尔空间，且没有孤立点。容易看出，对 $\mathcal{K}[\mathbb{R}]$ 证明这些性质的类似方法也适用于 $\mathcal{K}[\mathbb{P}]$，其中 $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ 是无理数的子空间。因此，我们可以应用定理1 [8], 的推论，在 连续统假设下，得到一个稠密的卢津子空间 L，它属于 $\mathcal{K}[\mathbb{P}]$。

断言：子空间 L 是林德洛夫空间。
由于 $\mathcal{K}[\mathbb{P}]$ 是满足可数链条件的空间，且 L 是稠密的，因此 L 满足可数链条件。由引理 2.4可知，若 $\mathcal{U}$ 是 L的一个开覆盖，则存在一个可数子集族 $\mathcal{V}_1$，它是 $\mathcal{U}$的子集，并且满足$\bigcup\mathcal{U} \subseteq \overline{\bigcup\mathcal{V}_1}$。由此可知，集合 $L \setminus \bigcup\mathcal{V}_1$ 在 L中无处稠密，因此它是可数的。于是，存在一个可数子集族 $\mathcal{V}_2$，它是 U的子集，并且满足 $L \setminus \bigcup\mathcal{V}_1 \subseteq \bigcup\mathcal{V}_2$。令 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$。那么， $\mathcal{V}$ 是一个可数子覆盖。由此我们得出， L 是林德洛夫空间。

由此断言可知， $\mathcal{K}[\mathbb{P}]$ 是星林德洛夫空间。下面证明 $\mathcal{K}[\mathbb{P}]$不是星 Menger 空间。考虑开覆盖 $\mathcal{U} = \{[\{p\}, \mathbb{P}]: \ p \in \mathbb{P}\}$。我们将证明，若 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{K}[\mathbb{P}]$的一个 Menger 子空间，则 $St(\mathcal{M},\mathcal{U}) \neq \mathcal{K}[\mathbb{P}]$。为此，先证明以下事实：

事实：若 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}[\mathbb{P}]$ 是门格尔空间，则 $M = \bigcup_{K\in\mathcal{M}} K$ 是 $\mathbb{P}$ 的孟格尔子空间。设 $(\mathcal{W}_n)_{n\in\omega}$ 是 M 的一列开覆盖。由于对每个 $K \in \mathcal{M}$， $K \subseteq M$ 在 $\mathbb{P}$ 中是紧的，因此对每个 $n \in \omega$，存在 $\mathcal{V}_n^K$ 的有限子族，使得 $K \subseteq \bigcup\mathcal{V}_n^K$。于是，对每个 $n \in \omega$， $\mathcal{U}_n = \{[K, \bigcup\mathcal{V}_n^K]: \ K \in \mathcal{M}\}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个开覆盖。现在利用 $\mathcal{M}$ 的门格尔性质，对每个 $n \in \omega$，存在 $\mathcal{F}_n$ 的有限子族，使得 $\{\bigcup\mathcal{F}_n: \ n \in \omega\}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个开覆盖。我们对每个 $n \in \omega$ 定义 $\mathcal{K}_n$ 如下：当且仅当 $[K, \bigcup\mathcal{V}_n^K] \in \mathcal{F}_n$ 时， $K \in \mathcal{K}_n$。然后，对每个 $n \in \omega$，令 $\mathcal{H}_n = \{V \in \mathcal{V}_n^K: \ K \in \mathcal{K}_n\}$。因此， $\mathcal{H}_n$ 是 $\mathcal{W}_n$ $(n \in \omega)$ 的一个有限子族。下面证明，族 $\{\bigcup\mathcal{H}_n: \ n \in \omega\}$ 是 M 的一个开覆盖。取 $x \in M$。存在 $K_0 \in \mathcal{M}$ 使得 $x \in K_0$。那么，对这样的 K_0，存在 $n_0 \in \omega$ 使得 $K_0 \in \bigcup\mathcal{F}_{n_0}$。我们取满足 $K_0 \in [K, \bigcup\mathcal{V}_{n_0}^K]$ 的 $[K, \bigcup\mathcal{V}_{n_0}^K] \in \mathcal{F}_{n_0}$。因此， $K \in \mathcal{K}_{n_0}$，进而 $\mathcal{V}_{n_0}^K \subseteq \mathcal{H}_{n_0}$。由此可得 $x \in K_{n_0} \subseteq \bigcup\mathcal{V}_{n_0}^K \subseteq \bigcup\mathcal{H}_{n_0}$。这证明了 $\{\bigcup\mathcal{H}_n: \ n \in \omega\}$ 是 M 的一个开覆盖。因此， M 是门格尔空间。

现在，假设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{K}[\mathbb{P}]$中的一个孟格尔子空间。根据前面的结论， $M = \bigcup\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{P}$ 中的门格尔空间。众所周知， $\mathbb{P}$ 不是门格尔空间。因此，存在一点 $x \in \mathbb{P} \setminus M$。于是 $\{x\} \in \mathcal{K}[\mathbb{P}] \setminus St(\mathcal{M},\mathcal{U})$，因为 $[\{x\}, \mathbb{P}]$ 是 $\mathcal{U}$中唯一包含 $\{x\}$ 且 $[\{x\}, \mathbb{P}] \cap \mathcal{M} = \emptyset$ 的元素（如果存在 $C \in [\{x\}, \mathbb{P}] \cap \mathcal{M}$，那么$\{x\} \subseteq C \subseteq \bigcup\mathcal{M}$，这意味着 $x \in M$，矛盾）。 □

众所周知且易于证明，空间 X 是星可数的，当且仅当 X 是星可分的。类似地，利用萨皮罗夫斯基定理——该定理指出，每个离散度至多为 κ 的空间都有一个稠密子空间，且其所有子空间的 Lindelöf 数至多为 κ——可得以下有趣的结果

得自 [24]。

定理 2.6（[24]）。空间 X 是星可数散度的，当且仅当 X 是遗传林德洛夫¨。

利用定理 2.6，文献 [24]中给出了一个豪斯多夫星可数散度空间的例子，该空间不是星可数的。此外，在 连续统假设 下，文献中还给出了一个吉洪诺夫星可数散度空间的例子，该空间不是星可数的。由于每个星可数空间都是星 σ-紧的，且每个星 σ-紧空间都是星 Menger 的，我们可以提出下面的问题，以寻求一个更强的例子。

问题 2.7。是否存在一个星可数散度空间的例子，它不是星 σ-紧的（星 Menger）？

我们通过指出下面这条注释来回答这个问题。

注 2.8。 例 L 中的子空间 *2.5* 是遗传林德洛夫¨的

证明。设 Z 是 L的一个不可数子集。注意，若 A 是 Z的无处稠密子集，则 A 是 L 的无处稠密子集。因此， Z 的任何无处稠密子集都是可数的。这意味着 Z 是卢津集。

断言：一个y Z 中的非孤立 p点的离散子集是无处稠密的。
事实上，设 D 是非孤立点的一个离散子集，并假设 U是包含于 $\overline{D}$中的非空开集。令 $d \in U \cap D$ ，并取 d 的一个开邻域 V，使得 $V \cap D = \{d\}$。令 $W = U \cap V$。那么 W是 d的一个开邻域。由于 d 不是孤立点，存在一点 $y \in W \setminus \{d\}$。注意， y 是 $\overline{D}$ 的一个元素，且 $W \setminus \{d\}$ 是它的一个开邻域。因此，存在一点 $d' \in D \setminus \{d\}$ 使得 $d' \in V$，矛盾。因此， D 是无处稠密的。

注意， L 至多有可数多个孤立点，因为它满足可数链条件。因此， Z 没有不可数的离散子集。换言之， Z 的离散度为 ω，因此 Z 满足可数链条件。要证明 Z 是 Lindel¨of，只需仿照例2.5 中证明 L 是 Lindel¨of 的断言的证明来论证。这就证明了 L 是遗传 Lindel¨of。

□

例 2.9. 假设连续统假设成立，则存在一个吉洪诺夫星可数离散度空间，它不是星 Menger（因此也不是星 σ-紧）。
证明。 利用备注 2.8，空间 $\mathcal{K}[\mathbb{P}]$ 是星遗传林德洛夫¨的。因此，$\mathcal{K}[\mathbb{P}]$ 由定理 2.6可知， $\mathcal{K}[\mathbb{P}]$ 是星可数散度，$\mathcal{K}[\mathbb{P}]$ 也不是星 σ-紧。

□

注意，由例 2.9 可知，在假设 连续统假设 的情况下，还存在一个吉洪诺夫星可数链条件空间，它不是星 Menger（因此也不是星 σ-紧空间）。不过，我们提到，文献 [24]，在不假设附加公理的情况下，利用 Pixley-Roy 拓扑给出了一个吉洪诺夫星可数链条件空间的例子，该空间不是星可数广延度。因此，我们也得到以下结论。

例 2.10。存在一个吉洪诺夫星可数链条件空间，它不是星 Menger。

证明。令 $X = [\mathbb{R}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ 赋予 Pixley-Roy 拓扑。那么，X 是一个满足可数链条件的 Moore 空间，因此它具有星可数链条件。此外，X 不是星 Menger 空间，因为它不是星可数延拓空间（参见 [24] 或 [25]）。 □

另一方面，利用 [24], 中命题 2.6 给出的空间，我们还可以得到以下例子。为求完整起见，我们在此提及这个空间，详情请参见 [24] 。

例 2.11。存在一个吉洪诺夫星 Menger 空间，它不具有星可数链条件。

证明。令 $\mathcal{A}$ 为 ω 上的一个基数为 $\mathfrak{c}$ 的极大几乎不交族，并令 $X = \Psi(\mathcal{A})$。令 $Y = D(\mathfrak{c}) \cup \{\infty\}$为基数为 $\mathfrak{c}$的离散空间的一点紧化。那么，乘积空间 $X \times Y$是一个星 σ-紧（因此是星 Menger）空间，但不具有星可数链条件（参见 [24]） □

再次，作为例2.11的推论，我们还得到如下结论。

例 2.12. 存在一个吉洪诺夫星 Menger空间，它不是星可数散度。

我们回顾一下，若空间 X 中所有 G_δ 集都是开集，则称 X 为 P-空间。一个众所周知的事实是，P-空间是 Lindel¨of 空间当且仅当它是门格尔空间（参见 [38]）。此外，另一个众所周知且易于证明的事实是，门格尔空间与紧空间的积是门格尔空间（参见 [37]）。

例 2.13. 存在一个吉洪诺夫星 Menger空间，它不是星σ-紧的。

证明. 令 $X = [0, \omega_2]$ 配备序拓扑，$Y = D(\omega_1) \cup \{\infty\}$ 为离散空间 $D(\omega_1) = \{d_\alpha$ 的单点 Lindel¨of 化：$\alpha \in \omega_1\}$，其大小为 ω_1，且$Z = (X \times Y) \setminus \{\langle \omega_2, \infty \rangle\}$。

下面证明空间 Z 是星 Menger。设 $\mathcal{U}$ 是 Z 的一个开覆盖。对于每个 $\alpha \in \omega_1$，固定一个 $U_\alpha \in \mathcal{U}$，使得 $\langle \omega_2, d_\alpha \rangle \in U_\alpha$。因此，对于每个$\alpha \in \omega_1$，存在 $\beta(\alpha) \in \omega_2$，使得$(\beta(\alpha), \omega_2] \times \{d_\alpha\} \subseteq U_\alpha$。我们定义 $\beta = sup\{\beta(\alpha) : \alpha \in \omega_1\} \in \omega_2$。由于 Y 是一个 P-空间，子空间 $[0, \beta + 1] \times Y$ 是 Menger 的。此外，注意到 $[\beta + 1, \omega_2) \times \{\infty\}$ 是可数紧的，因此它是星有限的。于是，对于开覆盖 $\mathcal{U}$，存在 F 的有限子集 $[\beta + 1, \omega_2) \times \{\infty\}$，使得 $[\beta + 1, \omega_2) \times \{\infty\} \subseteq St(F, \mathcal{U})$。令 $M = ([0, \beta + 1] \times Y) \cup F$。那么，$M$ 是 Z 的一个孟格尔子空间，因此 $St(M, \mathcal{U}) = Z$。由此可得，Z 是一个星 Menger 空间。

接下来只需证明 Z 不是星 σ-紧的。对于每个 $\alpha \in \omega_1$，令$U_\alpha = X \times \{d_\alpha\}$。我们定义 $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \cup \{[0, \omega_2) \times Y\}$。显然，$\mathcal{U}$ 是 Z 的一个开覆盖。现在注意，若 K_n 是Z的一个紧子空间，则 $\pi_Y[K_n]$ 在 Y中是紧的，因此是 Y的一个有限子集。因此，若 K是 Z的一个 σ-子空间，假设为 $K = \bigcup_{n \in \omega} K_n$，且每个 K_n 都紧，那么对于每个 $n \in \omega$，我们可以固定一个 $\beta_n \in \omega_1$，使得 $K_n \cap (X \times \{d_\alpha : \alpha \geq \beta_n\}) = \emptyset$。如果

$\beta = sup\{\beta_n : n \in \omega\}$，那么 $K \cap (X \times \{d_\alpha : \alpha \geq \beta\}) = \emptyset$。因此，若 $\alpha > \beta$，那么$\langle \omega_2, d_\alpha \rangle \notin St(K, \mathcal{U})$，因为 U_α 是 $\mathcal{U}$中唯一包含 $\langle \omega_2, d_\alpha \rangle$ 的元素，并且$U_\alpha \cap K = (X \times \{d_\alpha\}) \cap K = \emptyset$。这证明了 Z不是星 σ-紧的。 □

在 [28], 文献中，作者给出了一个伪紧 Tychonoff 空间的例子，它不是星 Lindel¨of。我们注意到，这个空间甚至是星可数紧的。因此，我们得到以下例子。

例 2.14。存在一个吉洪诺夫星可数紧空间，它不是星 Menger。

证明。令 $D = \{d_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ 为基数为 $\mathfrak{c}$ 的离散空间，并令

$$X = (\beta(D) \times (\mathfrak{c} + 1)) \setminus ((\beta(D) \setminus D) \times \{\mathfrak{c}\})$$

为 $\beta(D) \times (\mathfrak{c} + 1)$的子空间。由于 $\beta(D) \times \mathfrak{c}$ 是可数紧的，且它在 X中稠密，因此 X 是星可数紧的。另一方面，X 不是星 Menger，因为它甚至不是星 Lindel¨of 空间（见 [28]） □

另一方面，要给出一个星 Menger 但不是星可数紧的例子，只需取任意一个非伪紧的 Lindel¨of 空间。此外，也可以给出另一个这类例子（星 Menger 但非星可数紧）；不过在这种情况下，该空间是伪紧而非 Lindel¨of。

例 2.15. 存在一个吉洪诺夫星 Menger 空间，它不是星可数紧的。

证明。设 $\mathcal{A}$ 是 ω 上一个基数为 $\mathfrak{c}$ 的极大几乎不交族，并且 $X = \Psi(\mathcal{A})$。那么空间 X 是一个伪紧空间，但不是 Lindel¨of。此外，由于 X 可分，X 是星 Menger。最后，空间 X 不是星可数紧的（见 [6]）。

□

我们通过建立一个图示（图 2），来结束本节。该图展示了星门格尔性质与其他一些星性质之间的否定蕴含；$\mathcal{P}$ 这些性质是本节所举例子的推论。为便于查阅，我们在下列清单中汇总了图中涉及的例子：

1. 例 2.5 是一个星 Lindel¨of 空间，但不是星 Menger。2. 例 2.9 是一个星可数离散度空间，但不是星 Menger。3. 例 2.10是一个星可数链条件空间，但不是星 Menger。4. 例 2.11是一个星 Menger 空间，但不是星可数链条件空间。5. 例 2.12是一个星 Menger 空间，但不是星可数离散度空间。6. 例 2.13是一个星 Menger 空间，但不是星 σ-紧。7. 例 2.14是一个星可数紧空间，但不是星 Menger

8. 例子 2.15是一个星 Menger 空间，但不是星可数紧空间

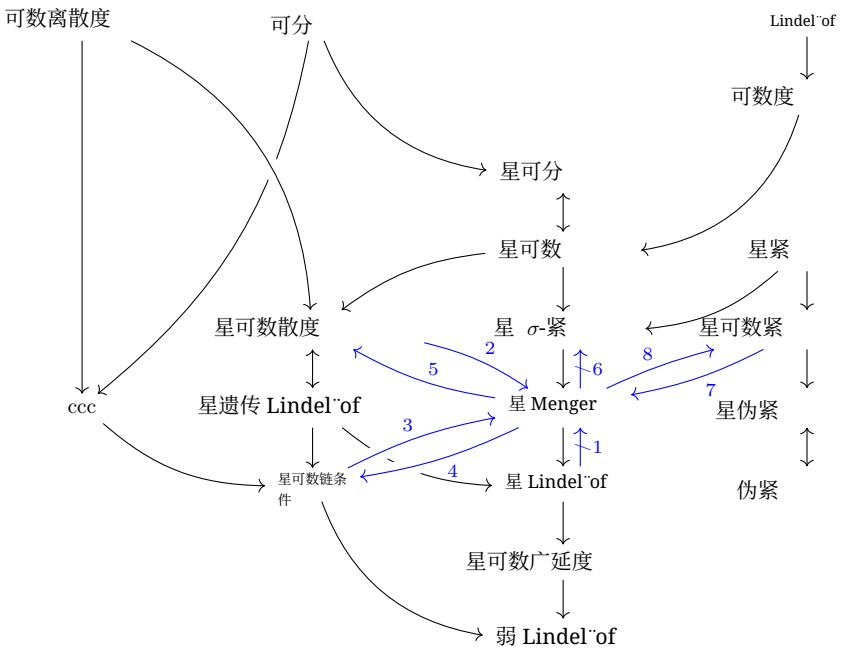


图 2：涉及星门格尔性质的否定蕴含

3 关于星选择原理理论的评注

本节中，我们对一些星选择原理与星门格尔性质之间的关系作出若干评述，并给出一些例子，说明星门格尔性质并不等同于本理论中定义的相关性质。此外，我们还讨论了 [29], [30]和 [33]中的一些问题。

我们先介绍 Koˇcinac 在[18] 和 [19]中提出的一些星选择原理。在此之前，需要指出的是，这一理论中的一种性质与本文研究的性质同名（star-Menger property）。不过，为避免符号混淆，我们将其称为 SM 性质。设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是 X的子集族的集合，并设 $\mathcal{K}$ 是 X的子集族：

$\mathrm{S}^*_{\mathbf{fin}}(\mathscr{A},\mathscr{B})$：对于 $\mathscr{A}$中元素的任意序列 $\{\mathcal{A}_n:\ n\in\omega\}$，都存在一个序列 $\{\mathcal{B}_n:\ n\in\omega\}$，使得 $\mathcal{B}_n$ 是 $\mathcal{A}_n$的有限子集，$n\in\omega$，且$\bigcup_{n\in\omega}\{St(B,\mathcal{A}_n):\ B\in\mathcal{B}_n\}\in\mathscr{B}$。

$\mathrm{SS}^*_{\mathcal{K}}(\mathscr{A},\mathscr{B})$：对于任意序列 $\{\mathcal{A}_n:\ n\in\omega\}$ $\mathscr{A}$中的元素，存在一个序列 $\{K_n:\ n\in\omega\}$ $\mathcal{K}$ 中的元素，使得 $\{St(K_n,\mathcal{A}_n):\ n\in\omega\}\in\mathscr{B}$。

当 $\mathcal{K}$ 是 X的所有有限子集（分别为紧子集）的集族时，记作 $\mathbf{SS^*_{fin}}(\mathscr{A},\mathscr{B})$（分别为 $\mathbf{SS^*_{comp}}(\mathscr{A},\mathscr{B})$），而不记作 $\mathbf{SS^*_{\mathcal{K}}}(\mathscr{A},\mathscr{B})$。给定一个拓扑空间 X，若 $\mathscr{O}$ 表示 X的所有开覆盖的集族，那么$S^*_{fin}(\mathscr{O},\mathscr{O})$定义了星-Menger性质（$SM$），$SS^*_{fin}(\mathscr{O},\mathscr{O})$定义了强星-Menger性质（$SSM$）。此外，$SS^*_{comp}(\mathscr{O},\mathscr{O})$定义了星-K-Menger性质（$S$-$K$-$M$）。明确地说，空间 X 是强星-Menger（SSM），如果对于 X的每个开覆盖序列 $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$，存在一个 X 的有限子集序列 $\{F_n : n \in \omega\}$，使得 $\{St(F_n,\mathcal{U}_n): n \in \omega\}$是 X的一个开覆盖；空间 X 是星-Menger（SM），如果对于 X的每个开覆盖序列$\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$，存在一个序列 $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$，使得对于每个 $n \in \omega$，$\mathcal{V}_n$ 是 $\mathcal{U}_n$ 的有限子集，并且 $\bigcup_{n\in\omega}\{St(V,\mathcal{U}_n): V \in \mathcal{V}_n\}$ 是 X的一个开覆盖；空间 X 是星-K-Menger（S-K-M），如果对于 X的每个开覆盖序列$\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$，存在一个 X 的紧子集序列 $\{K_n : n \in \omega\}$，使得 $\{St(K_n,\mathcal{U}_n): n \in \omega\}$ 是 X的一个开覆盖。关于以往性质的当前研究状况以及其他一些星选择原理，参见 [20] 。属于这一理论、且多位作者以不同术语进行了广泛研究的另一性质，是星-Lindel¨of性质（见 [7]），其定义如下：如果对于 X 的每个开覆盖 $\mathcal{U}$，存在 $\mathcal{U}$的一个可数子集族 $\mathcal{V}$，使得 $St(\bigcup\mathcal{V},\mathcal{U}) = X$，则空间 X 是星-Lindel¨of的，简记为 SL；同样地，为避免记号混淆，我们将其仅记为 SL 性质。

遵循一般的星选择假设 $\mathbf{SS^*_{\mathcal{K}}}(\mathscr{A},\mathscr{B})$，我们也可以同样考虑星-$M$-门格尔这一类，正如星-$K$-门格尔和星-$C$-门格尔这两类的定义与研究方式（见 [30] y [35]）。具体而言，

定义 3.1. 若对 X 的任意序列$\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ 个开覆盖，都存在一个序列 $\{M_n : n \in \omega\}$ 个 X 的门格尔子集，使得 $\{St(M_n,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ 是 X 的一个开覆盖，则称空间 X 为星-M-门格尔空间。

稍微修改前面的定义，我们可以建立以下概念：

定义 3.2. 若对 X 的任意序列$\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ 个开覆盖，存在一个门格尔子空间 $M \subseteq X$，使得$\{St(M,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ 是 X 的一个开覆盖，则称空间 X 为星-M_f-门格尔空间。

注意，定义 3.1 和 3.2可以视为新的星选择性质。不过，下面这个容易证明的注记表明，这两个概念与定义 2.2中给出的星门格尔性质相同。

注记 3.3. 设 X 是一个拓扑空间。那么，以下命题等价：

(i) X 满足星门格尔性质；(ii) X 满足星-M_f-门格尔性质；(iii) X 满足星-M-门格尔性质。

证明。为证明 $(i) \to (ii)$，设 $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ 是 X 的一列开覆盖。对开覆盖 $\mathcal{U}_0$应用 X 的星门格尔性质，可取 X 的一个孟格尔子空间，使得 $St(M,\mathcal{U}_0) = X$。显然，集族 $\{St(M,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ 是 X 的一个开覆盖。因此， X 满足星-M_f-门格尔性质。

为证明 $(ii) \to (iii)$，设 $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ 是 X 的一列开覆盖。于是根据假设，存在 X 的一个孟格尔子空间，使得集族 $\{St(M,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ 是 X 的一个开覆盖。对每个 $n \in \omega$ 定义 $M_n = M$，即可得到集族 $\{St(M_n,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ 是 X 的一个开覆盖。因此，X 满足星-M-门格尔性质。

为证明 $(iii) \to (i)$，设 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个开覆盖。对每个 $n \in \omega$，令$\mathcal{U}_n = \mathcal{U}$。然后，将 X 的星-M-门格尔性质应用于序列 $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$，可得一列 $(M_n)_{n\in\omega}$ ，其中各项均为 X 的孟格尔子空间，且集族 $\{St(M_n,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ 是 X 的一个开覆盖。定义$M = \bigcup_{n\in\omega} M_n$。则 M 是门格尔的。此外，对每个 $n \in \omega$，有$St(M_n, \mathcal{U}_n) \subseteq St(M,\mathcal{U}_n)$。因此，集族 $\{St(M,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$是 X 的一个开覆盖。注意，对每个 $n \in \omega$， $St(M,\mathcal{U}_n) = St(M,\mathcal{U})$。于是，$X = St(M,\mathcal{U})$。这表明 X 满足星门格尔性质。 □

前面的观察使我们能够建立某些星选择原理与某些星$\mathcal{P}$ 性质之间的联系。接下来，我们给出一个图（图 3），展示星选择性质及相关星$\mathcal{P}$性质之间的直接蕴含关系。

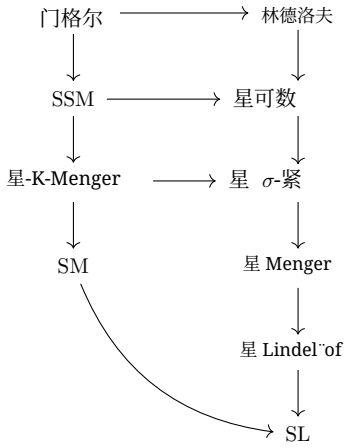


图3：一些星选择原理和星-$\mathcal{P}$ 性质

与第 2节中一样，我们不妨思考星门格尔性质是否与星选择理论中的某些性质相一致。特别是，我们想知道 SM 性质与星门格尔性质之间是否存在联系。为此，我们接下来给出一些例子。

回顾一下，定义在集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ 上的涅米茨基平面记为 $N(X)$，其底集为 $X \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times (0,\infty)$。开上半平面 $\mathbb{R} \times (0,\infty)$

具有欧几里得拓扑，而集合 $X \times \{0\}$ 具有由所有形如 $\{(x, 0)\} \cup B$ 的集合生成的拓扑，其中 $x \in X$，且 B 是 $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ 中与 $X \times \{0\}$ 在点 $(x, 0)$ 相切的开圆盘。众所周知，$N(\mathbb{R})$ 是完全正则、可分的，但不是正规空间，不是林德洛夫空间，不是第二可数的，也不是仿紧的。

例 3.4。存在一个吉洪诺夫星 Menger 空间，它不是 SM。此外，还存在一个模型，其中确实存在一个不是 SM 的正规星 Menger 空间。

证明。由于 $N(\mathbb{R})$ 是可分的，因此它是一个星 Menger 空间。在 [4], 中指出，$N(X)$ 对任何大小为 $\mathfrak{c}$ 的 $X \subseteq \mathbb{R}$ 都不是 SM。因此，特别地，$N(\mathbb{R})$ 不是 SM。另一方面，回顾一下，如果集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ 对每个 $A \subseteq X$ 都满足 A 在 X 中是 F_σ 且 $|X| > \aleph_0$, 那么它就是一个 Q-集。众所周知，Q-集的存在与 ZFC 相容（且独立于 ZFC）（例如参见 [23]）。此外，涅米茨基平面 $N(X)$ 是正规的，当且仅当 X 是一个 Q-集（参见 [36]）。同样，在 [4], 中指出，Judah 和 Shelah 在 [16], 中构造了一个含有大小为 $\mathfrak{d}$ 的 Q- 集的模型。因此，在这样的模型中，$N(X)$ 是一个正规星 Menger 空间，但依据 [26] 中的命题 2.12，它不是 SM；其中 X 是这样一个大小为 $\mathfrak{d}$ 的 Q-集。

□

另一方面，我们还有一个例子表明，SM 性质并不蕴含星 Menger 性质。在 Tall 的例 E 中，假设 $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$，给出了一个正规可分空间的例子，其中有一个不可数的闭离散集。为完整起见，我们给出这一例子的构造细节：

构造：设 L 是一个基数为 $\aleph_1$ 且与 ω 不相交的集合，并设 $\mathcal{F}$ 是 ω 的一个强独立子集族，其大小为 $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$。
记 $\mathcal{F} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$。由于 $|L| = \aleph_1$，$|\mathcal{P}(L)| = 2^{\aleph_1}$。由于我们假设 $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$，因此可以构造一个函数 $f : \mathcal{P}(L) \to \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{\omega \setminus A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$，它是双射且保持补集（对每个$B \subseteq L$，$f(L \setminus B) = \omega \setminus f(B)$）。

现在，令 $X_0 = L \cup \omega$ 带有子基 φ，其拓扑由以下条件定义：

1. 若 $M \subseteq L$，则 $M \cup f(M) \in \varphi$；
2. 若 $n \in \omega$，则 $\{n\} \in \varphi$；3. 若 $p \in X$，则 $X \setminus \{p\} \in \varphi$。

那么，X_0 是一个正规可分空间，并含有一个不可数闭离散子空间。

在[31], Song 对 Tall 的例子进行了修改，从而在 $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$下得到了一个正规而弱 Lindel¨of 空间的例子，该空间不是星 Lindel¨of[1]；最近，[5], 作者利用 Song 的例子得到了一个例子，

[1]Song 给出了这个例子，以部分回答 [2] 中提出的一个问题。

假设 $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ 并且 $\omega_1 < \mathfrak{d}$，一个正规 SM 空间，该空间不是 SSM （不是道克空间）[1]。综上，我们有以下

例 3.5. 假设$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ 和 $\omega_1 < \mathfrak{d}$，则存在一个正规 SM空间，它不是星 Menger。

证明. 令 $X_0 = L \cup \omega$ 表示上文给出的空间。令 $X = L \cup (\omega_1 \times \omega)$，其拓扑如下：基本开集为
(i) $x \in L$ 是形如 $V_\alpha^U(x) = (U \cap L) \cup \big((\alpha, \omega_1) \times (U \cap \omega)\big)$ 的集合，其中 U是 $x \in X_0$ 的一个邻域，且 $\alpha < \omega_1$。(ii) $\langle \alpha, n\rangle \in (\omega_1 \times \omega)$是形如 $V_W(\langle \alpha, n\rangle) = W \times \{n\}$ 的集合，其中 W是 ω_1 （赋予通常拓扑）中 α 的一个邻域。

那么 X 是一个正规 SM 空间（详情见 [5] ），但不是星 Lindel¨of（见[31]），因此也不是星 Menger。 □

根据 [2], 中的定理 2.7，已知每个星 Lindel¨of 空间都是弱 Lindel¨of 的，而且很容易证明，每个星 Lindel¨of 空间也具有 SL。然而，这些蕴含的逆命题一般并不成立； [2] 给出了一个弱 Lindel¨of 但非星 Lindel¨of 空间的例子，而 [29] 中可以找到一个非星 Lindel¨of 的 SL空间（采用了不同的术语）。尽管如此，人们或许会想知道，这两种性质同时成立是否意味着具有星 Lindel¨of 性质，也就是说，弱 Lindel¨of 的 SL 空间是否为星 Lindel¨of；结果表明，一般而言并非如此。在 [32], 中，Song 证明，例 3.5 所描述的空间 X是 SL。因此，这样的空间就是一个弱 Lindel¨of SL 空间，但不是星 Lindel¨of 空间的例子。

下图（图4）展示了星门格尔性质与 SM 性质之间的否定蕴含。这些蕴含是本节给出的两个例子的推论；例子如下：

1. 例子3.4 是一个星梅格尔空间，但不是 SM。
2. 例子3.5 是一个 SM 空间，但不是星 Menger。

为结束本节，我们讨论 Song 提出的一些问题。在 [29], Song 举例说明（采用不同的术语）存在一个吉洪诺夫 SL 空间，它不是星 Lindel¨of，并且他询问（见 [29]中的注 1）正规 SL 空间是否为星 Lindel¨of；答案是否定的。例 3.5 中的空间是一个（相容的）正规SL 空间（[32]），但不是星 Lindel¨of（[31]）。另一方面，在 [30], Song 举了一个 T_1 SM 并非星-K-门格尔[2] 空间的例子，并询问（见 [30]中的注 2.5）是否存在豪斯多夫（或吉洪诺夫）例子。此后，在 [33], 中，作者给出了一个豪斯多夫例子，并再次询问是否存在正则或吉洪诺夫例子（见 [33]中的问题 2.1），也就是说，是否存在一个正则（或

[1][5] 的作者给出了这个例子，以回答 [4]中提出的几个问题。这个例子存在一个错误；不难证明，该例中的空间实际上是星-K-门格尔空间。

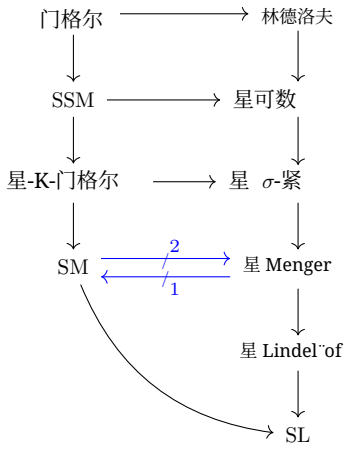


图 4：星选择原理中的否定蕴含

吉洪诺夫） SM 空间，它并非星-K-门格尔？要回答这个问题，很容易证明，若一个空间 X 是星-K-门格尔的，那么它就是星 X -紧的（因此也是星 Lindel¨of）。因此，例3.5 为这个问题给出了一个相容的肯定答案，因为该例是一个正规 SM 空间，却不是星 Lindel¨of（因而也不是星-K-门格尔）。

4 星 Menger 性质的行为

本节研究星 Menger 性质的行为。具体而言，我们考察该性质能遗传到哪类子空间、两个星 Menger 空间的积何时仍具有这一性质，以及在什么条件下连续函数会使其成为直像不变或逆像不变性质。

虽然很容易证明 Menger 性质可遗传到闭子空间，但星 Menger 性质的行为并非如此。若 $X = \Psi(\mathcal{A})$ 中 $\mathcal{A}$ 为 ω上的一个极大几乎不交族，则 X 是一个星 Menger 空间（因为该空间可分）。然而，显然子集 $\mathcal{A}$ 不是星 Menger。由于该子集是闭的 G_δ （甚至是一个零集），我们得出：

命题4.1。星 Menger 性质不一定能遗传到闭子集、闭 G_δ-集或零集。

另一方面，若我们将 $X = L(D(\omega_1))$ 视为大小为 ω_1 的离散空间 $D(\omega_1)$ 的单点林德洛夫化，则 X 是星梅格尔空间，而 $D(\omega_1)$ 是一个并非星 Menger 的开稠密子集。因此，我们得到：

命题4.2. 星门格尔性质不一定能由开集或稠密集继承，甚至开稠密集也不例外。

以下结果见于 [24],

命题 4.3（[24]）。设 $\mathcal{P}$ 是一个对可数并封闭的性质。若 $\mathcal{P}$ 对开子集遗传，或若 $\mathcal{P}$ 对闭子集遗传，则星 $\mathcal{P}$ 性质对开 F_σ-子集遗传。

众所周知，Menger 性质对可数并封闭，且对闭子集遗传。因此，我们有以下事实：

命题 4.4。星 Menger 性质对开 F_σ-子集遗传。特别地，星 Menger 性质对开闭集和余零集均具有遗传性。

另一类值得探讨星 Menger 性质是否对其遗传的子集，是正则闭子集和正则开子集。与上述情形不同，星 Menger 性质在这些子集上的表现并不理想。

命题 4.5。星 Menger 性质不一定对正则闭子集遗传。

证明。设 $\mathcal{A}_1$ 是 ω 上的一个几乎不交族，且具有 $|\mathcal{A}_1| = \omega_1$。我们考虑带有如下基本开集所生成拓扑的 $X_1 = \mathcal{A}_1 \cup (\omega_1 \times \omega)$：集合 $\omega_1 \times \omega$ 具有通常的积拓扑（其中 ω_1 赋予序拓扑），并且是 X_1的一个开子集。对于每个 $a \in \mathcal{A}_1$，一个基本开集具有如下形式：$B_{\beta,\ F}(a) = [(\beta,\omega_1) \times (a \setminus F)] \cup \{a\}$，其中 $\beta \in \omega_1$和F 是 a的有限子集。

我们证明 X_1 不是星 Menger。我们枚举 $\mathcal{A}_1 = \{a_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$。于是，对于每个 $\alpha \in \omega_1$，令 $U_\alpha = [(\alpha,\omega_1) \times a_\alpha] \cup \{a_\alpha\}$。因此，集族$\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \cup \{\omega_1 \times \omega\}$ 是 X_1的一个开覆盖。令 M为 X_1的任意孟格尔子空间。由于 $\mathcal{A}_1$ 是 X_1的一个闭离散子集，因此 $M \cap \mathcal{A}_1$ 至多可数。所以，我们可以取 $\beta_1 \in \omega_1$，使得对于每个 $\alpha > \beta_1$，$a_\alpha \notin M$。另一方面，注意到对于每个 $n \in \omega$，集合 $\omega_1 \times \{n\}$ 是 X_1的一个闭子集。因此，$(\omega_1 \times \{n\}) \cap M$ 是 $\omega_1 \times \{n\}$ 的一个孟格尔子集，进而存在 $\gamma_n \in \omega_1$，使得 $[(\gamma_n, \omega_1) \times \{n\}] \cap M = \emptyset$。令 $\beta_2 = sup\{\gamma_n : n \in \omega\}$。然后，我们定义 $\beta = max\{\beta_1, \beta_2\}$。由此可得，对于任意 $\alpha > \beta$，$U_\alpha \cap M = \emptyset$。由于 U_α 是 $\mathcal{U}$ 中包含 a_α的唯一元素，因此 $a_\alpha \notin St(M,\mathcal{U})$，其中$\alpha > \beta$。我们得出结论：$X_1$ 不是星 Menger。

现在，令 $X_2 = \Psi(\mathcal{A}_2)$，其中 $\mathcal{A}_2$ 是 ω 上大小为 ω_1 的几乎不交族。注意，由于 X_2 是可分的，因此它是星 Menger。假设 $X_1 \cap X_2 = \emptyset$。取一个双射 $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$，并令 X 为商空间，它由离散和 $X_1 \oplus X_2$ 通过对每个 $\alpha \in \omega_1$将 $\mathcal{A}_1$ 中的 a_α 与 $\mathcal{A}_2$ 中的 $a_\alpha(f)$ 识别而得到。也就是说，

$$X = (\omega_1 \times \omega) \cup \{(a_\alpha, f(a_\alpha)) : \alpha \in \omega_1\} \cup \omega.$$

令 $q : X_1 \oplus X_2 \to X$ 为商映射，并考虑 $Y = q[X_1]$。由于$Y = \overline{\omega_1 \times \omega}$，可知 Y 是 X 中的正则闭子集。然而，Y 不是星 Menger，因为它与 X_1 同胚。事实上，$q\restriction_{X_1}$ 是连续双射。为证明它是开映射，设 $a_\alpha \in \mathcal{A}_1$ 和 F 是 a_α 的有限子集。那么，

$q[\{a_\alpha\} \cup ((\beta,\omega_1) \times a_\alpha \setminus F)] = U \cap Y$，其中 $U = \{(a_\alpha, f(a_\alpha))\} \cup ((\beta,\omega_1) \times (a_\alpha \setminus F)) \cup f(a_\alpha)$ 是 X 中的开集。因此，$U \cap Y$ 是 Y 中的开集，进而 $q\restriction_{X_1}$ 是开集。这表明 $q\restriction_{X_1}$ 是一个同胚。最后，我们来证明 X 是星 Menger。设 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个开覆盖。由于对每个 $n \in \omega$，$\omega_1 \times \{n\}$ 都是可数紧的，因此存在 $q[\omega_1 \times \{n\}]$ 的有限子集 F_n，使得 $q[\omega_1 \times \{n\}] \subseteq St(F_n, \mathcal{U})$。令 $C_1 = \bigcup_{n\in\omega} F_n$。于是，$q[\omega_1 \times \omega] \subseteq St(C_1, \mathcal{U})$。另一方面，由于 $q[X_2]$ 是可分的，我们可以取 $q[X_2]$ 的一个可数子集 C_2，使得 $q[X_2] \subseteq St(C_2, \mathcal{U})$。令 $C = C_1 \cup C_2$。可知 $X = St(C, \mathcal{U})$。这表明 X 甚至是星可数的，因而是星 Menger。

□

对于正则开子集，情况也是如此。事实上，存在一个正规星 Menger 空间，它有一个不是星 Menger 的正则开子集。

命题 4.6. 星门格尔性质不一定能由正则开子集继承。

证明. 令 $L = D(\omega_1) \cup \{\infty\}$ 为大小为 ω_1 的离散空间 $D(\omega_1)$ 的单点林德洛夫化。那么，L 是一个星 Menger 空间。令 $D(\omega_1) = \{d_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$，并取 $\omega_1 = A \cup B$ 的一个划分，使得 $|A| = |B| = \omega_1$。令 $D(A) = \{d_\alpha : \alpha \in A\}$。注意，$D(A)$ 是 L 的正则开子集，并且它不是星 Menger，因为它是 L 的一个不可数离散子集。

□

现在，关于乘积，事实证明，星 Menger 性质不一定在乘积下保持，甚至在有限乘积下也不一定保持。事实上，我们将看到，某些空间具有比星 Menger 性质更强的性质，但它们的乘积却不是星 Menger。我们先考虑可数紧性。这些空间的构造是标准且广为人知的。为方便读者，我们回顾一下这样的构造。

命题 4.7. 存在两个可数紧空间（因而也是星 Menger 空间），它们的积不是星 Menger。

证明. 令我们定义 $\beta(D)$ 的两个子空间 X, Y，其中 D 是大小为 $\mathfrak{c}$ 的离散空间，使得 $X \cap Y = D$, $X \cup Y = \beta(D)$ 和 X, Y 都是可数紧的。令 $X_0 = D$。通过超限归纳，很容易对每个 $\alpha \in \omega_1$ 定义，

$$X_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} X_\gamma \cup f\left[\left[\bigcup_{\gamma<\alpha} X_\gamma\right]^\omega\right]$$

其中 $f : [\beta(D)]^\omega \to \beta(D)$ 是一个函数，它将 $\beta(D)$ 的每个可数无限子集 A 映射为 A 在 $\beta(D)$ 中的一个聚点。令 $X = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} X_\alpha$ 和 $Y = D \cup [\beta(D) \setminus X]$。因此，$X \cap Y = D$ 和 $X \cup Y = \beta(D)$。此外，根据构造，很容易证明 X 和 Y 是可数紧的，因而是星 Menger 空间。然而，$X \times Y$ 不是星 Menger，因为它包含离散既开又闭集 $\Delta = \{(x, x) : x \in D\}$，而该集合不是星 Menger。

□

空间 X 和 Y 在命题 4.7 中使用的例子表明，甚至可数紧空间的积也未必是星 Menger。接下来，我们将看到

可数紧空间与林德洛夫¨空间的积也未必是星Menger。

命题 4.8. 存在一个可数紧空间和一个 Lindel ¨of 空间，它们的积不是星 Menger。

证明. 令 $X = [0, \mathfrak{c})$ 带有通常的序拓扑，并令 $Y = D(\mathfrak{c}) \cup \{\infty\}$ 为离散空间 $D(\mathfrak{c})$ 的一点 Lindel¨of 化，其基数为 $\mathfrak{c}$。我们来证明积 $X \times Y$ 不是星 Menger。设 $D(\mathfrak{c}) = \{d_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$。对每个 $\alpha \in \mathfrak{c}$，令 $U_\alpha = [0, \alpha] \times (\{d_\beta : \beta \geq \alpha\} \cup \{\infty\})$ 和 $V_\alpha = (\alpha, \mathfrak{c}) \times \{d_\alpha\}$。于是，集族 $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\} \cup \{V_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ 是 $X \times Y$的一个开覆盖。令 $M \subseteq X \times Y$为任意一个门格尔子空间。由于 $\pi_X[M]$是门格尔的，因此存在$\gamma \in \mathfrak{c}$ 使得 $M \cap [(\gamma, \mathfrak{c}) \times Y] = \emptyset$。因此，若 $\alpha > \gamma$, $V_\alpha \cap M = \emptyset$，则 $\langle \alpha + 1, d_\alpha \rangle \notin St(M, \mathcal{U})$，因为 V_α 是包含 $\langle \alpha + 1, d_\alpha \rangle$的 $\mathcal{U}$的唯一元素。由此可知， $X \times Y$ 不是星 Menger。 □

除了上述两个命题外， [13], Hiremath 给出了两个 Lindel¨of 空间的例子，它们的积不是星 Lindel¨of。因此，Lindel¨of 空间的积也未必是星 Menger。

命题 4.9（[13]）。存在两个 Lindel ¨of 空间，它们的积不是星 Menger。

一方面，命题4.7 表明，特别是，星 Menger 空间与可数紧空间的积未必是星 Menger。另一方面，命题4.8 表明星 Menger 空间与 Lindel¨of 空间的积未必是星 Menger。与这些结果相反，星 Menger 空间与紧空间的积确实是星 Menger。在 [2], 作者将一种性质 $\mathcal{P}$ 称为紧积性的，若只要 X 具有性质 $\mathcal{P}$ 且 Y 是紧的，那么 $X \times Y$ 就具有性质 $\mathcal{P}$。此外，他们还证明，若 $\mathcal{P}$ 是紧积性性质，则星-$\mathcal{P}$ 性质也具有紧积性。因此，星门格尔性质具有紧积性。此外，由于门格尔空间的可数并仍是门格尔空间，显然星门格尔性质也在可数并下保持不变。因此，我们得到

命题 4.10. 若 X 是星梅格尔空间，且 Y 是 σ-紧的，则积 $X \times Y$ 是星梅格尔空间。特别地，星梅格尔空间与紧空间的积是星 Menger。

我们还可以对上一个命题作一个小小的推广。

命题 4.11. 若 X 是星梅格尔空间，且 Y 是一个 Lindel ¨的局部（σ-）紧空间，则积 $X \times Y$ 是星 Menger。

证明。 设 $\mathcal{U}$ 是 $X \times Y$的一个开覆盖。对每个 $y \in Y$，固定一个开邻域 V_y，使其包含 y，且 $\overline{V_y}$ 是（σ-）紧的。由命题 4.10， $X \times \overline{V_y}$ 对每个 $y \in Y$ 都是星 Menger。因此，对每个 $y \in Y$，存在一个孟格尔子空间M_y，它包含于 $X \times \overline{V_y}$，并且 $X \times \overline{V_y} \subseteq St(M_y, \mathcal{U})$。另一方面，由于 Y是

一个 Lindel¨of 空间，并且集合族 $\{V_y : y \in Y\}$ 是 Y的一个开覆盖，因此存在 $\{V_y$ 的一个可数子覆盖 $\mathcal{V} : y \in Y\}$。记 $\mathcal{V} = \{V_{y_n} : n \in \omega\}$，并定义 $M = \bigcup\{M_{y_n} : n \in \omega\}$。那么 M 是 $X \times Y$的一个孟格尔子空间，并且$X \times Y = St(M, \mathcal{U})$。因此， $X \times Y$是星 Menger。 □

值得一提的是，命题4.11 也可以通过注意到下面这个显然的注记来得到。

注4.12. 设 X 是一个局部（σ-）紧空间。那么 X 是 Lindel ¨of 空间，当且仅当 X 是 σ-紧的。

关于连续映射，[2], 中指出，如果 $\mathcal{P}$ 是一种在连续像下保持不变的拓扑性质，那么星-$\mathcal{P}$性质在连续像下也保持不变。由于 Menger 性质在连续映射下保持不变（见 [38]），因此我们得到以下结论：

命题4.13. 星 Menger 空间的连续像是星 Menger 空间。

现在，我们可以探讨星 Menger 空间在完美映射、开映射或闭映射下的逆像。对于开映射和闭映射的情形，如下文所示，该性质在取逆像时并不保持不变。

命题4.14. 星 Menger 空间在连续开闭映射下的逆像未必是星 Menger 空间。

证明。设 $D(\omega_1)$ 是一个基数为 ω_1 的离散空间，且 ∞ 是不属于 $D(\omega_1)$ 的一点。我们考虑函数 $f : D(\omega_1) \to \{\infty\}$，使得对每个 $\alpha \in \omega_1$，都有 $f(d_\alpha) = \infty$。显然，f 是连续、开且闭的映射，并且空间 $\{\infty\}$ 是星 Menger 空间。然而，原像 $f^{-1}[\{\infty\}]$（即 $D(\omega_1)$）不是星 Menger 空间，因为它是一个不可数离散空间。 □

事实证明，对于完美映射，我们也有相同的结论。

命题4.15。星 Menger 性质未必在完美映射的原像下保持。

证明。设 $\mathcal{A}$ 是 ω 上的一个不可数几乎不交族。我们考虑空间 $X = A(\Psi(\mathcal{A})) \setminus (\omega \times \{1\})$，并令 $\pi : X \to \Psi(\mathcal{A})$ 为到第一坐标的投影。那么， π 是一个完美映射。现在，由于 $\Psi(\mathcal{A})$ 是可分的，它是星 Menger 空间。然而，它的原像 $\pi^{-1}[\Psi(\mathcal{A})],$，即 X，不是星 Menger 空间。事实上，注意到子集 $\mathcal{A} \times \{1\}$ 是一个由 X 中的孤立点组成的不可数开闭集。因此， $\mathcal{A} \times \{1\}$ 不是星 Menger 空间，并且根据命题 4.4，我们得出 X 也不是星 Menger 空间。 □

然而，我们可以为完美映射增加一个额外条件，使得原像确实保留星门格尔性质。在给出这样的条件之前，先证明以下引理。

引理 4.16. 门格尔空间的完美原像是门格尔的。

证明. 设 $f\colon X\to Y$是一个完美映射，且 Y是一个门格尔空间。令 $(\mathcal{U}_n)_{n\in\omega}$ 为 X 的一个开覆盖序列。对每个 $n\in\omega$，记作$\mathcal{U}_n=\{U_\alpha\colon \alpha\in I_n\}$。因此，对每个 $n\in\omega$ 及每个 $y\in Y$，存在 I_n的有限子集 F_y^n，使得 $f^{-1}(y)\subseteq\bigcup_{\alpha\in F_y^n}U_\alpha$。对每个 $n\in\omega$及每个 $y\in Y$，令 $V_y^n=Y\setminus f[X\setminus\bigcup_{\alpha\in F_y^n}U_\alpha]$。注意，对每个 $n\in\omega$及每个 $y\in Y$，V_y^n是 y的一个开邻域。现在，对每个 $n\in\omega$，定义$\mathcal{W}_n=\{V_y^n\colon y\in Y\}$。因此，每个 $\mathcal{W}_n$ 都是 Y的一个开覆盖。由于 Y是门格尔的，对每个 $n\in\omega$，存在 $\mathcal{W}_n$ 的一个有限子族 $\mathcal{G}_n$，使得 $\bigcup\{\mathcal{G}_n\colon n\in\omega\}$是 Y的一个开覆盖。对每个 $n\in\omega$，记作 $\mathcal{G}_n=\{V_{y_i}^n\colon i\le k(n)\}$。因此，我们有如下结论

$$\begin{aligned}
X=f^{-1}[Y]&=f^{-1}\left[\bigcup\{V_{y_i}^n:i\le k(n),n\in\omega\}\right]\\
&=\bigcup\{f^{-1}[V_{y_i}^n]:i\le k(n),n\in\omega\}\\
&=\bigcup\{f^{-1}[Y\setminus f[X\setminus\bigcup_{\alpha\in F_{y_i}^n}U_\alpha]]:i\le k(n),n\in\omega\}\\
&=\bigcup\{X\setminus f^{-1}[f[X\setminus\bigcup_{\alpha\in F_{y_i}^n}U_\alpha]]:i\le k(n),n\in\omega\}\\
&\subseteq\bigcup\{\bigcup_{\alpha\in F_{y_i}^n}U_\alpha:i\le k(n),n\in\omega\}.
\end{aligned}$$

因此，若对每个 $n\in\omega$, $\mathcal{V}_n=\{U_\alpha\colon \alpha\in F_{y_i}^n, i\le k(n)\}$ 进行定义，则对于每个 $n\in\omega$，$\mathcal{V}_n$ 是 $\mathcal{U}_n$ 的有限子族，并且满足 $\bigcup\{\mathcal{V}_n\colon n\in\omega\}$ 是 X 的一个开覆盖。由此可得，X 是星梅格尔空间。 □

命题4.17. 若 $f\colon X\to Y$ 是一个开完美映射，且 Y 是星梅格尔空间，则 X 是星 Menger。

证明. 设 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个开覆盖。对于每个 $y\in Y$，取 $\mathcal{U}_y$ 为 $\mathcal{U}$ 的一个有限子族，使得 $f^{-1}(y)\subseteq\bigcup\mathcal{U}_y$，且具有如下性质：对于每个 $U\in\mathcal{U}_y$，$f^{-1}(y)\cap U\neq\emptyset$。由于 f 是一个闭映射，我们可以选取 y 的一个开邻域 V_y，使得对于每个 $y\in Y$，都有 $f^{-1}[V_y]\subseteq\bigcup\mathcal{U}_y$。此外，由于 f 是一个开映射，我们可以选择每个 V_y，使得 $V_y\subseteq\bigcap_{U\in\mathcal{U}_y}f[U]$。族 $\mathcal{V}=\{V_y\colon y\in Y\}$ 是 Y 的一个开覆盖，且 Y 是一个星梅格尔空间。因此，存在 $N\subseteq Y$ Menger，使得 $St(N,\mathcal{V})=Y$。根据引理 4.16，集合 $M=f^{-1}[N]$ 是 X 的一个孟格尔子空间。下面证明 $St(M,\mathcal{U})=X$。设 $x\in X$。则存在 $y\in Y$，使得$f(x)\in V_y$ 且 $V_y\cap N\neq\emptyset$。由于 $x\in f^{-1}[V_y]\subseteq\bigcup\mathcal{U}_y$，存在 $U_0\in\mathcal{U}_y$使得 $x\in U_0$。此外，考虑到对于每个 $U\in\mathcal{U}_y$都有 $V_y\subseteq f[U]$，特别地，$V_y\subseteq f[U_0]$，因此 $f[U_0]\cap N\neq\emptyset$。由此可得$U_0\cap f^{-1}[N]=U_0\cap M\neq\emptyset$。因此，$x\in St(M,\mathcal{U})$。这表明 X 是星 Menger。

□

最后，我们提及一些关于 Alexandroff 重复空间的事实，以结束本节。众所周知且易于证明，对于门格尔性质，我们

有：空间 X 是门格尔空间，当且仅当它的 Alexandroff 重复空间 $A(X)$ 是门格尔空间。因此，我们不妨探究 Alexandroff 重复空间上的星 Menger 性质。为回答这个问题，我们给出以下例子：

例 4.18. 存在一个吉洪诺夫（伪紧）星 Menger 空间X，使得其 Alexandroff 重复空间 $A(X)$ 不是星 Menger。

证明。令 $X = \Psi(\mathcal{A})$ 满足 $\mathcal{A}$ 是 ω上的一个极大几乎不交族。显然，X 是一个吉洪诺夫伪紧星 Menger 空间。此外，由于 $\mathcal{A}$是 X的一个闭离散子集，因此 $\mathcal{A} \times \{1\}$ 是 $A(X)$ 的一个由孤立点组成的不可数开闭子集。因此，$\mathcal{A} \times \{1\}$ 不可能是星 Menger。于是，$A(X)$ 也不是星 Menger 空间，因为星门格尔性质对开闭子集遗传（见命题 4.4）。 □

尽管有前面的例子，逆命题确实成立。也就是说，如果 $A(X)$ 是星 Menger，那么 X 也是星 Menger。事实上，正如下一个结果所示，还有更强的结论；详细信息请参阅 [34] 。

定理 4.19. 设 X 是一个拓扑空间。以下条件等价：

(a) $e(X) \leq \omega$; (b) $e(A(X)) \leq \omega$;
(c) $A(X)$ 是星可数的；(d) A
(X) 是星 σ-紧的；(e) $A(X)$ 是
星 Menger；(f) $A(X)$ 是星
Lindel¨of；(g) $A(X)$ 是 SL
（见第 3 节）。

5 某些类上的等价性

本节指出文献中一些与星门格尔性质相关结果的直接推论。其中一些推论说明，在某些类中，星门格尔性质与其他某些性质相同。

回顾一下，若空间 X 的每个开覆盖都存在一个 σ-局部可数开加细，则称 X 为 σ-paraLindel¨of。Hiremath 在 [13], 中证明，在 σ-paraLindel¨of 空间这一类中，Lindel¨of 性质与星 Lindel¨of 性质相同。因此，我们有以下结论，

命题 5.1. 设 X 为一个 σ-paraLindel ¨空间。则以下各项等价：

(a) X 是林德勒夫的；

(b) X 是星 Menger 的;

(c) X 是星 Lindel¨of。

回顾一下，空间 X 的一个发展族是由开覆盖组成的序列（$\mathcal{U}_n$）$_{n\in\omega}$，满足对每个 $x \in X$，族 $\{St（x，\ \mathcal{U}_n）：\ n \in \omega\}$ 是 x处的一个局部基。因此，Moore 空间是具有发展族的正则空间。在[1], 中，作者证明，在 Moore 空间这一类中，可分性与星 Lindel¨of 性质等价。因此，我们得到:

命题 5.2. 若 X 是一个 Moore 空间，则以下条件等价:

(a) X 是可分的；(b) X 是星门格尔；(c) X 是星 Lindel ¨of。

另一方面，在[2], 中，作者探讨了一个问题：何时一个弱 Lindel¨of 空间具有可数延展度。具有这一性质的空间类别包括 GO 空间这一类（见 [2]）以及正规 P-空间这一类（另见 [2] 和 [1]）。换言之，在 GO 空间这一类以及正规 P-空间这一类中，弱 Lindel¨of 性质与具有可数延展度等价。因此，我们得到以下直接推论:

命题 5.3. 若 X 是一个 GO空间或正规 P空间，则以下条件等价:

(a) $e(X) \leq \omega$；(b) X 是星门格尔；(c) X 是弱 Lindel ¨of。

除上述两个类之外，作者（[2]）还证明了某些弱 Lindel¨of 子积 ω_1^2 具有可数延展度。具体而言，ω_1 的两个平稳集的积是弱 Lindel¨of，当且仅当它具有可数延展度（当且仅当它是正规空间）。因此，对于这类积，我们也有类似于命题 5.3 中的等价条件。然而，对于 ω_1^2的任意子空间，已证明具有可数延展度等价于具有星 Lindel¨of 性质（[2]）。因此，我们有以下命题:

命题 5.4. 设 X 是 ω_1^2的一个子空间。以下条件等价:

(a) $e(X) \leq \omega$；(b) X 是星 Menger；(c) X 是星 Lindel ¨of。

关于 ω_1 的可数次幂，[1], 中已证明，对 ω_1^ω 的子空间同样成立。也就是说，若 X 是 ω_1^ω的子空间，则 X 是星 Lindel¨ 当且仅当 X 具有可数度。因此，

命题 5.5。设 $X \subseteq \omega_1^\omega$。那么，以下各项等价：

(a) $e(X) \leq \omega$；(b) X 是星 Menger；(c) X 是星 Lindel¨of。

现在，关于 C_p-理论，以下阿尔汉格尔斯基的结果众所周知，

定理 5.6 ([3])。设 X 是一个二进紧空间，且 $Y \subseteq C_p(X)$。那么$nw(Y) = l(Y)$。

由此，我们可以证明函数空间中的以下等价关系。

命题 5.7. 设 X 是一个二进紧空间。以下条件等价：

(a) $C_p(X)$是星可数；(b) $C_p(X)$是星 Menger；(c) $C_p(X)$是星 Lindel¨of。

证明。我们只需证明 (*c*) 推出 (*a*)。设 $C_p(X)$ 是星 Lindel¨of 空间，并令 $\mathcal{U}$ 为 $C_p(X)$ 的一个开覆盖。我们取 $L \subseteq C_p(X)$ 的一个 Lindel¨of 子覆盖，使得$St(L,\mathcal{U}) = C_p(X)$。由定理 5.6， L 有一个可数网络。这意味着 $C_p(X)$ 是星可分的，也就是说， $C_p(X)$ 是星可数的。 □

注 5.8。在 *[1],* 的定理 1.37 中，已证明若 X 是二进紧空间且 $C_p(X)$ 是星 Lindel¨of 空间，则 X 可度量化。

我们以提及本主题中最后一个有趣的事实来结束本节。每个吉洪诺夫空间都可以嵌入为一个吉洪诺夫星σ-紧空间中的闭 G_δ （见 [2]）。因此，作为其直接推论，星 Menger 情形也有相同结论。为方便读者，我们介绍证明这一事实的思路。

推论 5.9. 如果 X 是吉洪诺夫空间，那么 X 可以嵌入为某个吉洪诺夫星 Menger 空间中的闭G_δ 子集。

证明。令 $Y = (\beta X \times \omega) \cup (X \times \{\omega\})$，并赋予从 $\beta X \times(\omega + 1)$ 继承的拓扑。由于 ω 是门格尔空间， $\beta X \times \omega$ 是 Y的门格尔稠密子集。因此， Y是星 Menger 空间。此外， X 与 $X \times \{\omega\}$ 同胚，其中后一个集合是 Y中的闭 G_δ 集。 □

6 进一步研究与一些一般问题

本节通过考察满足某些选择假设的星核，给出若干方案，由此构造出几个新的拓扑空间类；并针对这些空间提出了一些一般性问题。首先，我们回顾一些经典且广为人知的选择原理。给定一个无限集 X，令 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为 X的子集族。在 [27], Scheepers 引入了以下经典选择原理的一般形式：

$\mathsf{S_1}(\mathscr{A},\mathscr{B})$：对于 $\mathscr{A}$的任意序列 $\{\mathcal{A}_n:\ n\in\omega\}$，存在一个序列 $\{B_n:\ n\in\omega\}$，使得对于每个 $n\in\omega$，$B_n\in\mathcal{A}_n$ 和 $\{B_n:\ n\in\omega\}$ 都是 $\mathscr{B}$的一个元素。

$\mathsf{S_{fin}}(\mathscr{A},\mathscr{B})$：对于 $\mathscr{A}$的任意序列 $\{\mathcal{A}_n:\ n\in\omega\}$，存在一个序列 $\{\mathcal{B}_n:\ n\in\omega\}$，使得对于每个 $n\in\omega$，$\mathcal{B}_n$ 都是 $\mathcal{A}_n$ 的有限子集，且$\bigcup\{\mathcal{B}_n:\ n\in\omega\}$ 是 $\mathscr{B}$的一个元素。

$\mathsf{U_{fin}}(\mathscr{A},\mathscr{B})$：对于 $\mathscr{A}$的每个序列 $\{\mathcal{A}_n:\ n\in\omega\}$，存在一个序列 $\{\mathcal{B}_n:\ n\in\omega\}$，使得对于每个 $n\in\omega$，$\mathcal{B}_n$ 都是 $\mathcal{A}_n$ 的有限子集，且$\{\bigcup\mathcal{B}_n:\ n\in\omega\}$ 是 $\mathscr{B}$的一个元素。

对于给定的空间 X，有几类开覆盖（见 [27], [17]）：

(1) $\mathcal{O}$ 表示 X的所有开覆盖的集合。(2) Λ 表示 X的所有大覆盖的集合；如果开覆盖 $\mathcal{U}$ 是 X 的大覆盖，那么对于每个 $x\in X$，x 都属于 $\mathcal{U}$的无穷多个元素。(3) Ω 表示 X的所有 ω-覆盖的集合；如果开覆盖 $\mathcal{U}$ 是 X 的ω-覆盖，那么 X 的每个有限子集都包含在 $\mathcal{U}$ 的某个元素中，并且X 不是 $\mathcal{U}$的一个元素。(4) Γ 表示 X的所有 γ-覆盖的集合；如果开覆盖 $\mathcal{U}$ 是 X 的γ-覆盖，那么 $\mathcal{U}$ 是无限的，并且对于每个 $x\in X$，x 属于 $\mathcal{U}$除有限多个以外的所有元素。

不难注意到 $\Gamma\subseteq\ \Omega\ \subseteq\Lambda\subseteq\mathcal{O}$。注意，$S_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$定义了 Menger 性质。其他著名的经典选择性质是罗斯伯格性质和胡雷维奇性质；$S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$定义了罗斯伯格性质，而 $U_{fin}(\mathcal{O},\Gamma)$定义了胡雷维奇性质。

上述记号引出了以下几类星-$\mathcal{P}$ 空间：

定义6.1。设 $\mathscr{A},\mathscr{B}\in\{\mathcal{O},\Lambda,\Omega\ \Gamma\}$。我们称空间 X 为

1. 星-$S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$，如果对于空间 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个集合 $Y\subseteq X$，使其满足选择假设 $S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ 和$St(Y,\mathcal{U})=X$。

2. 星-$S_{fin}(\mathscr{A},\mathscr{B})$，如果对于空间 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个集合 $Y \subseteq X$，使其满足选择假设 $S_{fin}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ 和$St(Y,\mathcal{U}) = X$。 3. 星-$U_{fin}(\mathscr{A},\mathscr{B})$，如果对于空间 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$，都存在一个集合 $Y \subseteq X$，使其满足选择假设 $U_{fin}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ 和$St(Y,\mathcal{U}) = X$。

前述定义实际上包含三种方案，可生成若干类空间；这三种情形中的每一种都可能产生十六种拓扑性质[1]。例如，类星-$S_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ 定义了本文研究的星 Menger 性质；其他值得研究的类包括由类星-$S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ 定义的星罗斯伯格性质，以及由类星-$U_{fin}(\mathcal{O},\Gamma)$ 定义的星胡雷维茨性质。此外，我们还有以下一般问题（在适用时）。令 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{B}$ 取遍集合 $\{\mathcal{O},\Lambda,\Omega\ \Gamma\}$

问题6.2. 对每一类空间星-$S_{fin}(\mathscr{A},\mathscr{B})$，是否都存在相应的例子？对星-$S_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$和星-$U_{fin}(\mathscr{A},\mathscr{B})$这两类，是否也有同样的问题?

问题6.3. 由定义*6.1* 中的方案所定义的各类是否彼此不同?

问题6.4. 请针对定义中得到的每条性质进行研究*6.1*。

致谢

参考文献

[1] O.T. Alas、L.R. Junqueira、J. van Mill、V.V. Tkachuk、R.G. Wilson, *On the extent of star countable spaces* 9 3 2011 603 615 ，《中欧数学杂志》（），（）-。[2] O.T. Alas、L.R. Junqueira、R.G. Wilson, *Countability and star covering properties* 158 2011 620 626 ，《拓扑学及其应用》（）-。[3] A.V. Arkhangel'skii, *Topological Function Spaces*，数学应用（苏联系列）78，Kluwer，多德雷赫特，1992年。[4] J. Casas-de la Rosa、S. A. Garcia-Balan、P. J. Szeptycki, *Some star and strongly star selection principles* 258 2019 572 587 ，《拓扑学及其应用》，（），-。[5]J. Casas-de la Rosa、W. Chen-Mertens、S. A. Garcia-Balan, *Iter-ations and unions of star selection properties on topological spaces*, http://arxiv.org/abs/2210.16638v1[6] J. Casas-de la Rosa、I. Martínez-Ruiz、A. Ramırez-Paramo, *Star-β spaces and related properties* 44 2 2018, 679 693 ，《休斯敦数学杂志》，（）页 -。[7] E.K. van Douwen、~~G.M. Reed、A.W. Roscoe、I.J. Tree~~, *Star covering properties*，《拓扑学及其应用》39（1991年）71-103。[1]我们请读者参阅[27] 和 [17]，以更好地了解选择原理及相关评论。

[8] E.K. van Douwen、F.D. Tall、W.A.R. Weiss, *Nonmetrizable hereditarily Lindelöf spaces with point-countable bases from* 64, 1, 1977 连续统假设, 《美国数学会会刊》, 。[9] E.K. van Douwen, *The Pixley-Roy topology on spaces of subsets*, 《集合论拓扑》, 学术出版社, （1977年）111-134。[10] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann出版社, 柏林, Sigma纯数学丛书6, （1989年）。[11] R. Fleischman, *A new extension of countable compactness*, 《基础数学》67（1970年）1-9。[12] F. Hern´andez-Hern´andez、M. Hruˇs´ak, *Topology of Mrówka-Isbell spaces*。载于《伪紧拓扑空间》, 编者：Hruˇs´ak、Tamariz、Tkachenko。Springer International Publishing AG, 2018年。[13] G.R. Hiremath, *On star with Lindelöf center property*, 《印度数学会杂志》59（1993年）, 227-242。[14] R. Hodel, *Cardinal Functions I*, 载于：K. Kunen、J.E. Vaughan（编）, 《集合论拓扑学手册》, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1984年, 第1-61页。[15] Ikenaga S., *Topological concepts between Lindelöf and pseudo-Lindelöf*, 奈良工业高等专门学校研究报告, 1990年, 26, 103-108。[16] H. Judah、S. Shelah, *Q-sets, Sierpiński sets, and rapid filters*, 《美国数学会会刊》111（1991年）, 第3期, 821–832。[17] W. Just、A.W. Miller、M. Scheepers、P.J. Szeptycki, *The combinatorics of open covers II* 73 1996 241 266 , 《拓扑学及其应用》, （）, - 。[18] Lj.D.R. Koˇcinac, *Star-Menger and related spaces*, 《德布勒森数学出版物》55（1999年）, 421-431。[19] Lj.D.R. Koˇcinac, *Star-Menger and related spaces II*, Filomat 13（1999年）, 129-140。[20] Lj.D.R. Koˇcinac, *Star selection principles: A survey*, 海亚姆数学杂志, 1（2015年）, 82-106。[21] M.V. Matveev, *A survey on star covering properties*, 拓扑学图谱, 1998年, 预印本 ♯ 330, 可见 http://at.yorku.ca/v/a/a/a/19.htm[22] J. van Mill、V.V. Tkachuk、R.G. Wilson, *Classes defined by stars and neighbourhood assignments* 154 2007 2127 2134 , 《拓扑学及其应用》（）- 。[23] A.W. Miller, *Special subsets of the real line*, 载于：K. Kunen、J.E. Vaughan（编）, 《集合论拓扑学手册》, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1984年, 第201-233页。[24] A.D. Rojas-S´anchez, ´A. Tamariz-Mascarua, , 《数学讨论会》, 第 - 页。[25] A.D. Rojas-S´anchez, ´A. Tamariz-Mascar´ua, *Spaces with star countable extent*, 《布拉格查理大学数学评论》57（3）（2016年）, 第381-395页。[26] M. Sakai, *Star versions of the Menger property*, 《拓扑学及其应用》176（2014年）22-34。[27] M. Scheepers, *Combinatorics of open covers I: Ramsey Theory*, 《拓扑学及其应用》69（1996年）, 31-62。*The star countable spread and star ccc property* 158, 213 232

[28] Y.K. Song, *A pseudocompact Tychonoff space that is not star Lindelöf*, 澳大利亚数学会会刊 84 (2011年), 452-454.[29] Y.K. Song, *On $\mathcal{L}$-starcompact spaces*, 捷克斯洛伐克数学杂志, 56 (131) (2006), 781–788.[30] Y. K., Song, *On star-K-Menger spaces*, Hacettepe 数学与统计杂志, 43, 5 (2014), 769- 776.[31] Y.-K. Song, *Remarks on countability and star covering properties*, 《拓扑学及其应用》158 (2011年) 1121-1123.[32] Y.-K. Song, *Remarks on neighborhood star-Lindelöf spaces II*, Filo mat 27:5 (2013) 875-880.[33] Y. K., Song, *Remarks on star-K-Menger spaces*, 比利时数学会 Simon Stevin 会刊, 22 (2015), 697-706.[34] Y.K. Song, W.F. Xuan, *Notes on star covering properties*, 《数学问题》 (2020年) 1-9.[35] Y.K. Song, Z. Yin, *On star-C-Menger spaces*, 《数学问题》37, 3 (2014) 337-347.[36] F. D. Tall, *Normality versus collectionwise normality*, 载于：K. Kunen, J.E. Vaughan（编），《集合论拓扑学手册》，North-Holland，阿姆斯特丹，1984年，第685-732页。[37] R. Telg´arsky, *Concerning product of paracompact spaces*, 《基础数学》74 (1972) 153-159.[38] L. Wingers, *Box products and Hurewicz spaces*, 《拓扑学及其应用》64 (1995) 9-21.

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, Circuito Exterior S/N, Ciudad Universitaria, CP 04510, Ciudad de México, México.
Email address: J. Casas-de la Rosa：olimpico.25@hotmail.com
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, Circuito Exterior S/N, Ciudad Universitaria, CP 04510, Ciudad de México, México.
Email address: ´A. Tamariz-Mascar´ua：atamariz@unam.mx