arXiv:2301.09585v1 [math.DG] 23 Jan 2023

关于圆模式与球面锥度量

XIN NIE

摘要。Koebe-Andreev-Thurston 圆堆积定理及 Bobenko 和 Springborn 对圆模式所作的推广，对于可能带有锥奇点的欧几里得度量和双曲度量均成立；但对于球面度量，由于莫比乌斯变换导致的不唯一性，该定理不再成立。本文证明，对于具有球面锥度量的圆模式，若指定每个圆的总测地曲率，而非锥角，则存在唯一性结论成立。

1. 引言

在一个闭曲面上 Σ 配备球面、欧几里得或双曲度量时，(Delaunay) 圆模式是由有限个$\mathcal{D}$ 开圆盘组成的集合，其典型形态如图1所示。与$\mathcal{D}$ 相关联的是一个带权

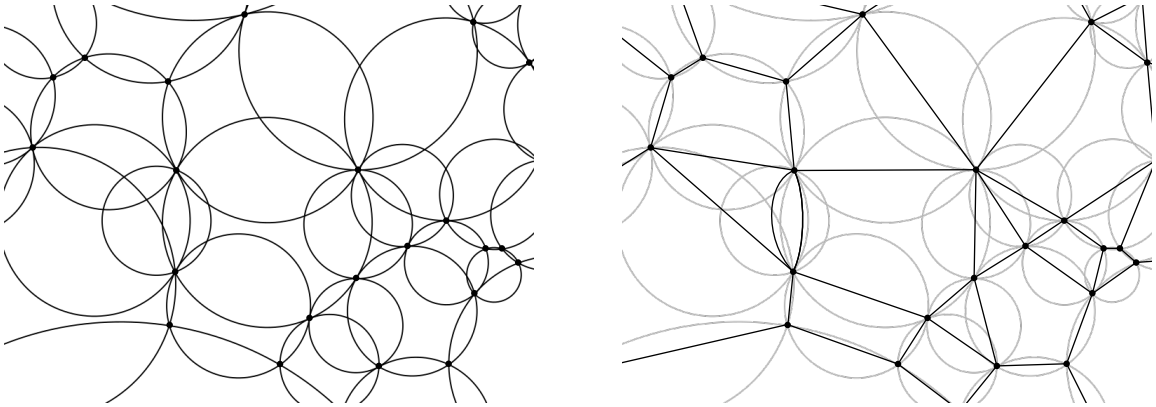

图1. 圆模式的局部示意图。

如右图所示的图 $G_{\mathcal{D}}$ on Σ，其顶点 $V_{\mathcal{D}}$、边 $E_{\mathcal{D}}$ 和面 $F_{\mathcal{D}}$ 分别为：

- $V_{\mathcal{D}} = \Sigma \setminus \bigcup_{D\in\mathcal{D}} D$;
- 每个 $f \in F_{\mathcal{D}}$ 对应一个圆盘 $D_f \in \mathcal{D}$;
- 每个 $e \in E_{\mathcal{D}}$ 对应两个圆盘相交处的一个双边形，其权重为该双边形的内角 $\theta_e \in (0, \pi)$。

本文中，我们假设上述双边形为锐角或直角，即 $\theta_e \in (0, \frac{\pi}{2}]$，但允许 Σ在顶点 $V_{\mathcal{D}}$ 或圆盘的圆心处具有锥奇点。详情见 §2 。在此设定下，双边形彼此不相交（与图 1 中不同），且不含任何奇点。顶点 α_v 处 Σ 的锥角由权重 $v \in V_{\mathcal{D}}$ (θ_e) 通过以下关系确定：

$$\alpha_v = \sum_{e\text{: edge from } v} (\pi - \theta_e) ;$$

此外， α_f 在 D_f 中心处的锥角也满足关于（θ_e）的某个条件；在双曲情形下，该条件为

$$\sum_{f\in \mathsf{F}'} \alpha_f < \sum_{\substack{e\text{: edge incident}\\ \text{with any face in } \mathsf{F}'}} 2\theta_e \quad \text{for any subset of faces } \mathsf{F}' \subset \mathsf{F}. \tag{1}$$

改进了 Colin deVerdière 的证明 [2] Koebe-Andreev-Thurston 圆堆积定理，Bobenko 和 Springborn [1] 证明存在唯一的双曲$(\Sigma, \mathcal{D})$，它实现了指定的加权图并具有指定的锥角，只要这些指定满足上述约束：

定理（[1]）。设 S 是一个闭拓扑曲面，G 是其上的一个图，其边集和面集分别记为 E 和 F，并且每条 $e \in E$ 都赋予某个 $\theta_e \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 权重，每个 $f \in F$ 都是单连通的。那么（α_f）$_{f\in \mathsf{F}} \in \mathbb{R}_+^{\mathsf{F}}$满足 *(1)* 当且仅当 S 上存在一个带有锥奇点的双曲度量 σ，以及（S，σ）上的一个圆模式 D，使得 $G_{\mathcal{D}}$ 与 G 作为加权图（在同痕意义下）重合，并且对所有 $f \in F$，σ 在圆盘 $D_f \in D$ 的中心处具有锥角 α_f。此外，若（σ，D）存在，则它在同痕意义下唯一。

欧几里得度量也有类似的结果。当 $\alpha_f = 2\pi$ 对所有 f都成立时，我们得到无奇点度量，这意味着 Koebe-Andreev-Thurston 定理成立。对于一般的 (α_f)，该结果可视为 McOwen-Troyanov 一致化定理的离散类比 [5, 8]。

对于球面度量，正如 McOwen-Troyanov 定理的情形一样，由于莫比乌斯变换带来的非唯一性，这种锥角指定结果并不成立；莫比乌斯变换保持角不变，却会扭曲度量。本文旨在为球面度量给出以下唯一存在性结果。该结果的表述几乎与上述定理完全相同，但我们现在指定的是一个与度量关系更密切的量——每个圆的总测地曲率 $T(\partial D_f)$ ∂D_f——而不是角α_f。注意，根据高斯-博内公式，我们有 $T(\partial D_f) = \alpha_f - \text{Area}(D_f)$。

定理 *1.* 设 S和 G 如上一定理所述。则 $(T_f)_{f\in \mathsf{F}} \in \mathbb{R}_+^{\mathsf{F}}$ 满足 *(1)*（其中 α_f替换为 T_f）当且仅当存在 S 上的球面度量 σ，其具有锥奇点，并且在 (S, σ) 上存在一个圆模式 D，使得作为加权图，$G_{\mathcal{D}}$与 G（在同痕意义下）重合，且对于所有 $f \in F$，∂D_f的总测地曲率为 $T(\partial D_f) = T_f$。此外，若 (σ, D) 存在，则其在同痕意义下唯一。

两个定理中 (T_f)和 (α_f) 满足完全相同条件的原因是，对于 $\mathbb{S}^2$ 或 $\mathbb{H}^2$ 中由两段圆弧构成的角为 θ 的双边形（见图 5），球面情形下弧的总测地曲率T_1, T_2的约束与双曲情形下弧的角 α_1, α_2的约束相同，即 $T_1, T_2 > 0, T_1 + T_2 < 2\theta$（见引理 11 和注 12）。

本文余下部分将通过标准变分法证明定理 1 。针对双曲锥角指定问题，原始方法基于关于变量 $u_f = -\log\tanh\frac{r_f}{2}$（$f \in \mathsf{F}$，$r_f$是 D_f的半径）构造一个凸函数，其勒让德对偶变量为锥角 α_f。下文中，我们使用该函数在球面情形下的对应函数，并证明它关于变量 $K_f = \log\cot r_f$是凸的，其勒让德对偶变量为总测地曲率 $T(\partial D_f)$。

2. 球面上的圆模式

尽管圆模式已得到广泛研究，但要在曲面上给出其精确定义颇为技术性，尤其是要严格定义相关概念“圆的自交部分”。Schlenker 和 Yarmola [7]通过提升到万有覆盖，为亏格为 ≥ 1 的闭 $\mathbb{CP}^1$曲面给出了定义。本节将定义一种受限版本的圆模式，适用于任意亏格且带有锥奇点的闭球面。对于欧氏曲面或双曲曲面，所有结论同样成立。

具有球面锥度量的曲面，或简称为球面，是局部由图 2 所示的度量空间$\mathbb{S}^2_\alpha$、 $\alpha > 0$ 建模的曲面。每个 $\mathbb{S}^2_\alpha$ 均由总角度为

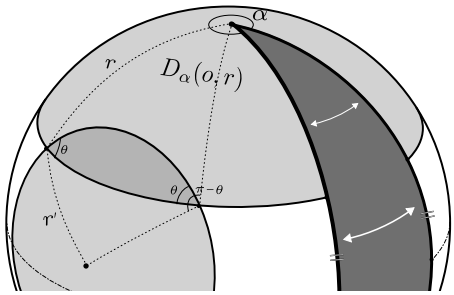

图2. 一个圆盘 $D_\alpha(o,\ r)\subset\mathbb{S}^2_\alpha$ 和一个角为 θ的双边形。

角 α。令 $D_\alpha(o,\ r)$ 表示 r 中以北极 $\mathbb{S}^2_\alpha$ 为中心、半径为 $o\in\mathbb{S}^2_\alpha$的开度量圆盘。我们只考虑满足 $r<\frac{\pi}{2}$ 的这类圆盘，即严格凸的圆盘。在球面上，双边形是指与两个半径小于 $\frac{\pi}{2}$ 的圆盘的交集等距的开集，这两个圆盘 $\mathbb{S}^2$ 互不包含。特别地，双边形不含任何锥点。双边形的角指两边所成的内角 θ （见图2）。

命题 2. 取若干个如上所述的圆盘 $D_i=D_{\alpha_i}(o,r_i),\ \ i=1,\cdots\ \ n$，其中 $\alpha_i\in\mathbb{R}_+, r_i\in(0,\ \frac{\pi}{2})$，并设 ι是从不交并 $D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n$到闭球面 Σ的一个局部等距映射，使得

- ι 的像在 Σ中仅遗漏有限多个点；
- ι 至多是2对1；
- 这些 $\iota(D_i)$彼此不包含。

令 $B:=\{p\in\Sigma\mid\iota^{-1}(p)$有两个点$\}$。那么 $\iota^{-1}(B)$ 是由双边形不交并组成的，如图 3所示，它们填满了 D_i 的边界；而由 $\sim$ 在 $\iota^{-1}(B)$ 上定义的等价关系 “$x\sim y\Leftrightarrow\iota(x)=\iota(y)$ 则是这些双边形的等距配对。

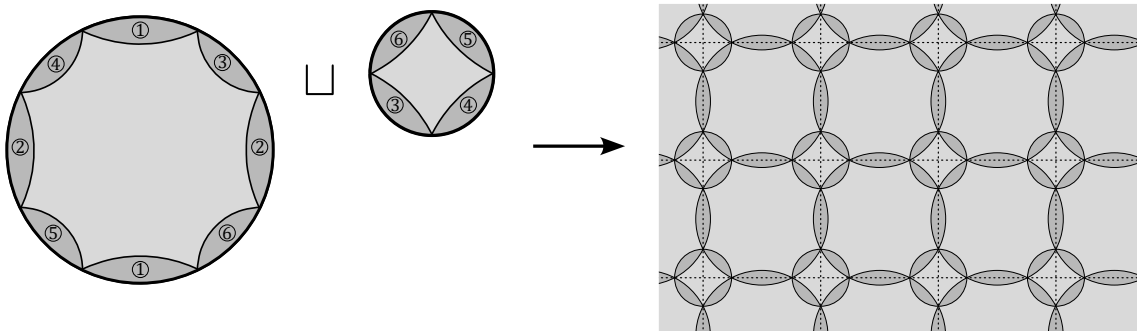

图3。 命题 2 的一个例子，其中 Σ (右侧为万有覆盖 Σ)。 $\iota^{-1}(B)$中双边形的配对由标签标出。

我们省略证明；证明过程是利用圆盘的严格凸性进行冗长但初等的论证。我们将此类 ι 作为本文所研究的受限版本圆模式的定义：

定义 3。局部等距映射 $\iota:\ D_1\sqcup\cdots\sqcup D_n\to\Sigma$如命题 2 中所述，称为圆模式于 Σ，集合 $B\subset\Sigma$ 的每个连通分支称为该圆模式的一个双边形。稍微滥用一下记号，我们也将 D_i 视为 Σ中的一个浸入圆盘，并将浸入圆盘集合$\mathcal{D}=\{D_1,\cdots\ \ D_n\}$也称为圆模式（因此，每个双边形要么是两个此类圆盘的一个交集分支 $D_i,\ \ D_j$ 要么是单个 D_i的“自交分支”）。令$\mathsf{G}_\mathcal{D}$ 表示 Σ 上的加权图，使得

- 顶点是被 ι 避开的有限多个点 $V_{\mathcal{D}} := \Sigma \setminus D_1 \cup \cdots \cup D_n$；
- 边 $E_{\mathcal{D}}$ 与双边形一一对应：给定一个双边形 b，与之对应的 $e \in E_{\mathcal{D}}$ 是 b 中的一条曲线，连接 b 的两个顶点；
- 每条 $e \in E_{\mathcal{D}}$ 都赋予权重，该权重为对应双边形的角 $\theta_e \in (0, \pi)$。

由构造可知，$G_{\mathcal{D}}$ 的面与 $\mathcal{D}$ 中的圆盘对应，并且是单连通的，因此 $G_{\mathcal{D}}$ 给出了 Σ 的一个胞腔分解。反过来，任何闭胞腔曲面都可以通过某个球面锥度量和圆模式以这种方式实现。事实上，我们将在下文的命题 6 中证明，对于给定的角 (θ_e)（取值于 $(0, \frac{\pi}{2}]$）以及给定的圆盘半径，存在唯一的实现。

注 4. 定义 3 比通常的德洛内圆图样概念更严格，因为后者允许双边形像图 1 中那样相互重叠。关于非奇异 [7] 曲面的定义，参见 $\mathbb{CP}^1$。与此同时，允许存在锥点使我们的定义比非奇异情形更灵活：由于我们对 $G_{\mathcal{D}}$ 的限制仅仅是各面的单连通性，$G_{\mathcal{D}}$ 可以有仅与一条边相连的顶点，也可以有仅由一条边围成的面；没有锥点时，这两种情况都不可能出现。

注记5。给定 Σ 上的圆模式 $\mathcal{D}$，Σ 的锥点只能位于 $V_{\mathcal{D}}$ 或圆盘的圆心处。一个基本事实是，虽然本文不会明确使用它，但 $v \in V_{\mathcal{D}}$ 处的锥角 α_v 等于从 v 发出的所有边 e 对应的 $\theta'_e := \pi - \theta_e$ 之和；若 e 是一个环路，则 θ'_e 会计算两次（参见引理 1.11）。

从现在起，我们固定一个闭拓扑曲面 S 和一个图 G，如定理 1 中所述，其中面 F 是单连通的，边 E 赋予某些权重 $(\theta_e)_{e \in E} \in (0, \frac{\pi}{2}]^E$。考虑由实现此加权图的所有球面锥度量构成的模空间 $\mathcal{M}$，即

$$\mathcal{M} := \left\{ (\sigma, \mathcal{D}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma \text{ is a spherical conical metric on } S; \\ \mathcal{D} \text{ is a circle patter on } (S, \sigma) \text{ such that } G_{\mathcal{D}} \\ \text{is isotopic to } G \text{ and their weights match} \end{array} \right\} / \mathrm{Homeo}^0(S).$$

滥用记号时，我们有时将一对 $(\sigma, \mathcal{D})$ 视为它所代表的 $\mathcal{M}$ 中的点。给定 $(\sigma, \mathcal{D})$，令 $D_f \in \mathcal{D}$ 表示 (S, σ) 中与面 $f \in F$ 对应的浸入圆盘，并令 $r(D_f) \in (0, \frac{\pi}{2})$ 表示此圆盘的半径。根据下面的命题，半径系统 $(r(D_f)) \in (0, \frac{\pi}{2})^F$ 将 $(\sigma, \mathcal{D})$ 确定为 $\mathcal{M}$ 中的一个点，从而给出 $\mathcal{M} \cong (0, \frac{\pi}{2})^F$ 的一个参数化：

命题 6. 映射 $\mathcal{M} \to (0, \frac{\pi}{2})^F$ 由 $(\sigma, \mathcal{D}) \mapsto (r(D_f))_{f \in F}$ 给出，是双射。

证明。唯一非平凡的部分是满射性。为此，我们按如下方式构造具有指定半径 $(r_f) \in (0, \frac{\pi}{2})^F$ 的 $(\sigma, \mathcal{D})$。首先，在每个面 $f \in F$ 内取一点 $p_f \in f$，并添加一条连接 ∂f 上每个顶点与 p_f 的边，从而细分每个面。由此得到 S 的三角剖分。三角形集合记为 E，它与 G 的有向边集合相对应。对于任意一条无向边 $e \in E$，令 $e^{\pm} \in \hat{E}$ 表示位于 e 两侧的三角形，并赋予四边形 $e^+ \cup e^-$ 图 4 所示的特定球面测地四边形结构；该四边形由两个圆盘扇形组成，其半径分别为 $r_{f(e^+)}$ 和 $r_{f(e^-)}$，其中 $f(t) \in F$ 表示包含三角形 $t \in E$ 的面。这些四边形拼合在一起，得到具有指定半径的 $(\sigma, \mathcal{D})$。□

由于半径为 r 的圆盘 $D \subset \mathbb{S}^2$ 的圆周长为 $2\pi \sin r$、面积为 $4\pi \sin^2(r/2) = 2\pi(1 - \cos r)$，利用高斯-博内定理可推知，$\partial D$ 具有恒定的测地曲率 $k(\partial D) = \cot r$。对于圆模式中的任意圆盘 D，无论圆心处的锥角如何，结论都成立。下面我们不采用上述半径参数化 $\mathcal{M} \cong (0, \frac{\pi}{2})^F$，而是改用测地曲率的对数重新参数化：

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^F, \quad (\sigma, \mathcal{D}) \mapsto (K_f)_{f \in F} \text{ with } K_f := \log k(\partial D_f) = \log \cot r(D_f).$$

与此同时，定理1 声称唯一存在 $(\sigma, \mathcal{D}) \in \mathcal{M}$，使得总测地曲率 $T(\partial D_f)$ 的值 ∂D_f 按定义等于 $k(\partial D_f)$ 乘以长度 $\ell(\partial D_f)$，并具有指定值。我们将

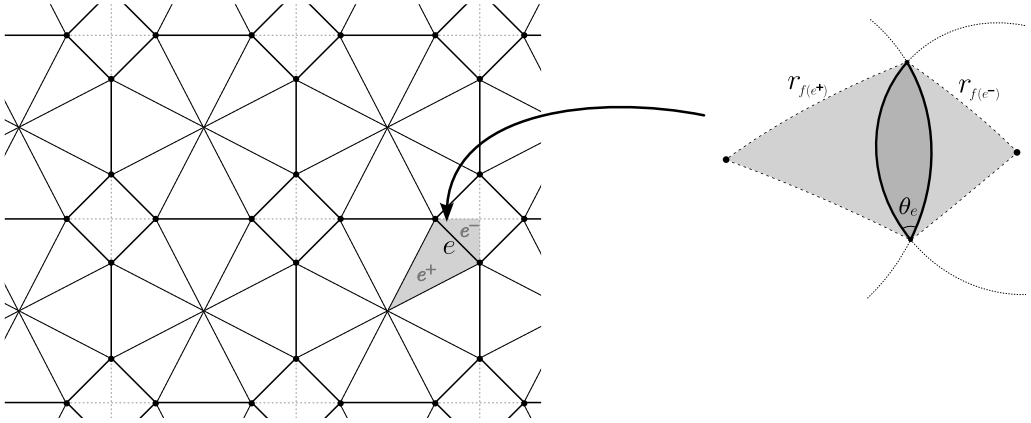

图 4. 命题 6 的证明 (对比图 3)。

求出 $(\sigma,\ \mathcal{D})$，将其视为定义在$\mathcal{M}$ 上的某个函数的临界点；该函数关于上述坐标 $K=(K_f)$ 是严格凸的。这涉及下一节讨论的球面双边形空间上的一个凸函数。

3. 双边形空间上的凸函数

在本节中固定 $\theta\in$ (0<style id="2">, π)，并令 $\mathcal{B}_\theta$ 表示两条边分别标记为 1 和 2、角为 θ 的球面双边形模空间。考虑此类双边形的以下几何量:

r_i 边界包含边 i 的圆盘 $D_i\subset\mathbb{S}^2$ 的半径（此处及下文中，$i=1,\ 2$）边 i 的测地曲率（$=\cot r_i$）：$=\log k_i\alpha_i$ 边 i所张扇形的角 $D_i\,\ell_i$ 边 i 的长度（$=\alpha_i\sin r_i$）T_i 边 i 的总测地曲率（$=\ell_i k_i$）A 面积（由高斯-博内公式得出$=2\theta-T_1-T_2$）

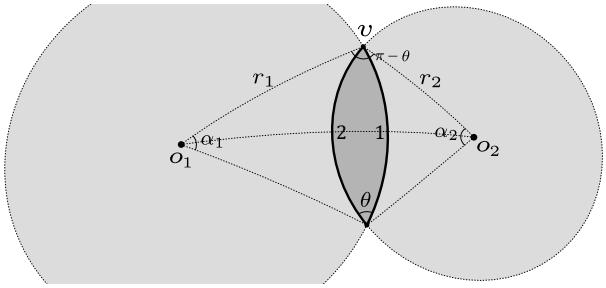

图5. 一个球面双边形。

引理7。 对于任意 $r_1,r_2\in(0,\frac{\pi}{2})$，存在一个给定角度为 θ 的唯一双边形（在等距变换意义下唯一），使得边界包含边 i 的圆盘$D_i\subset\mathbb{S}^2$ 的半径为 r_i。

证明。一个等价的表述是：对于任意 $0<r_2\le r_1<\frac{\pi}{2}$，存在唯一的 $r_3\in(r_1-r_2,\ r_1+r_2)$，满足以下性质：若 $D_1,\ D_2\subset\mathbb{S}^2$ 是半径分别为 $r_1,\ r_2$ 的圆盘，且它们的圆心距离为 r_3，则双边形$D_1\cap D_2$ 的角为 θ。但这可直接由下述关系得出

$$\cos r_3=\cos r_1\cos r_2+\sin r_1\sin r_2\cos(\pi-\theta),$$

这就是余弦定理（参见 [9]），应用于图 o_1vo_2 中的三角形 5。 □

现在我们将上述量视为定义在$\mathcal{B}_\theta$上的函数。于是引理7 意味着$(r_1,\ r_2)$ 是$\mathcal{B}_\theta$ 到$(0,\ \frac{\pi}{2})^2$的一个参数化。因此，$(k_1,\ k_2)$ 和$(K_1,\ K_2)$ 分别给出了通过 $\mathbb{R}^2_+$ 和 $\mathbb{R}^2$的重新参数化。

引理8。1-形式 $\omega_\theta := \ell_1 \mathrm{d}k_1 + \ell_2 \mathrm{d}k_2 = T_1 \mathrm{d}K_1 + T_2 \mathrm{d}K_2$ 在 B_θ 上是闭的。

证明。将 (k_1, k_2) 视为 B_θ的坐标，我们只需证明 $\frac{\partial \ell_1}{\partial k_2} = \frac{\partial \ell_2}{\partial k_1}$。为此，~~再来看图5~~中的三角形 o_1vo_2，其角为 $\alpha_1' := \frac{\alpha_1}{2}, \alpha_2' := \frac{\alpha_2}{2}, \theta' := \pi - \theta$，边长为 r_1, r_2, r_3。余切四部公式（见 [9]）给出 $\cos\ r_1 \cos\ \theta' = \cot r_2 \sin\ r_1 - \cot\ \alpha_1' \sin\ \theta'$，因此

$$\cot \alpha_1' = \frac{1}{\sin \theta'} \left(\cot r_2 \sin r_1 - \cos r_1 \cos \theta' \right).$$

由于 $\theta' =$为常数，$\ell_1 = 2\alpha_1' \sin\ r_1$和 $\cot r_i = k_i$（特别是 $\frac{\partial r_1}{\partial k_2} = \frac{\partial r_2}{\partial k_1} = 0$），对上述等式关于 k_2 求偏导，我们得到

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial k_2} = -\frac{2 \sin^2 r_1 \sin^2 \alpha_1'}{\sin \theta'}.$$

由对称性可知

$$\frac{\partial \ell_2}{\partial k_1} = -\frac{2 \sin^2 r_2 \sin^2 \alpha_2'}{\sin \theta'}.$$

根据正弦定理 $\frac{\sin \alpha_1'}{\sin r_2} = \frac{\sin \alpha_2'}{\sin r_1}$，我们得出 $\frac{\partial \ell_1}{\partial k_2} = \frac{\partial \ell_2}{\partial k_1}$，证毕。 □

引理 9. 将 (K_1, K_2) 视为 B_θ的坐标。则矩阵值函数

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial K_1} & \frac{\partial T_1}{\partial K_2} \\ \frac{\partial T_2}{\partial K_1} & \frac{\partial T_2}{\partial K_2} \end{pmatrix}$$

（根据引理 *8*，它是对称的）是正定的。

证明。利用对称性 $\frac{\partial T_1}{\partial K_2} = \frac{\partial T_2}{\partial K_1}$，对于~~任意~~ $(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$，我们得到

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial K_1} & \frac{\partial T_1}{\partial K_2} \\ \frac{\partial T_2}{\partial K_1} & \frac{\partial T_2}{\partial K_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= -\frac{\partial T_1}{\partial K_2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{\partial (T_1 + T_2)}{\partial K_1} x_1^2 + \frac{\partial (T_1 + T_2)}{\partial K_2} x_2^2 \\ &= -\frac{\partial T_1}{\partial K_2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{\partial A}{\partial K_1} x_1^2 - \frac{\partial A}{\partial K_2} x_2^2,\end{aligned}$$

其中 $A = 2\theta - T_1 - T_2$ 为面积。当 K_1 固定且 K_2 增大（或等价地，r_1 固定且 r_2减小时，双边形会如图6所示缩小，因此有

$$\frac{\partial T_1}{\partial K_2} < 0, \quad \frac{\partial A}{\partial K_2} < 0.$$

同理，$\frac{\partial A}{\partial K_1} < 0$ 也~~成立~~。所需结论随之得出。 □

根据引理 8 和9，任意 $\mathcal{B}_\theta \to \mathbb{R}$ 的 1-形式 ω_θ 都是坐标(K_1, K_2)上的严格凸函数。下文固定这样一个原函数，例如

$$\Omega_\theta(K_1, K_2) := \int_0^{(K_1, K_2)} \omega_\theta,$$

并将用它在$\mathcal{M}$上构造一个函数。注意，$\Omega_\theta(K_1, K_2)$关于 K_1 和 K_2 对称，因为 ω_θ 在对合$\mathcal{B}_\theta \to \mathcal{B}_\theta$ 交换标签1和2时保持不变。

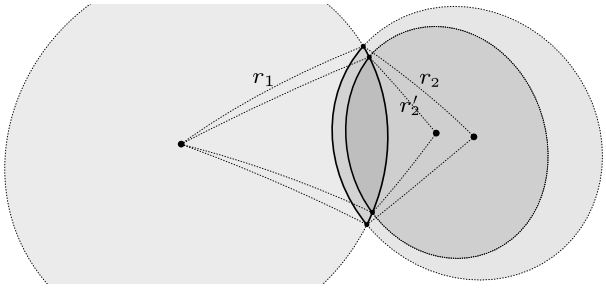

图6。 图 5 在 r_1 固定且 r_2 递减时的变化。

注记10。在$\mathcal{B}_\theta^{\mathbb{H}}$这一由角为 θ的双曲双边形构成的空间上，本节开头列出的量仍然有意义，只是它们现在满足关系 k_i =双曲余切 r_i和 $\ell_i = \alpha_i$双曲正弦 r_i。Bobenko 和 Springborn 的工作 [1]在 §1 中所述，基于1-形式在$\mathcal{B}_\theta^{\mathbb{H}}$上的原函数，其表达式与我们的完全相同，也可以写作

$$\ell_1 \mathrm{d}k_1 + \ell_2 \mathrm{d}k_2 = -\frac{\alpha_1 \mathrm{d}r_1}{\sinh r_1} - \frac{\alpha_2\, \mathrm{d}r_2}{\sinh r_2} = \alpha_1 \mathrm{d}u_1 + \alpha_2 \mathrm{d}u_2, \text{ where } u_i := \int_{r_i}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}r_i}{\sinh r_i} = -\log\tanh\tfrac{r_i}{2}.$$

此函数类似于 Colin de Verdière [2] 关于双曲测地三角形的函数，并且与3维双曲体积有关（例如参见 [4]）。与引理 9 的证明类似的证明表明，相对于上述变量 (u_1, u_2) 而非我们的变量 (K_1, K_2)，该函数是严格凸的。本文本质上是 [1] 的球面对应物，其中 u_i和 α_i 分别由 K_i和 T_i取代。

我们需要关于总曲率参数 T_1 和 T_2的以下事实：

引理 11。 对于任意 $T_1, T_2 > 0$ 且满足 $T_1 + T_2 < 2\theta$，存在一个唯一的双边形（在等距变换意义下），其角为 θ，两条边的总测地曲率分别为 T_1 和 T_2。

证明。 一个等价的表述是，映射 $(T_1,\ T_2) : \mathcal{B}_\theta \to \mathbb{R}^2_+$ 是从 $\mathcal{B}_\theta$ 到三角形$\Delta := \{(T_1,\ T_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid T_1 + T_2 < 2\theta\}$ 的双射。根据以上讨论，该映射是严格凸函数 $\Omega_\theta : \mathcal{B}_\theta \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的梯度，且其像包含于 Δ。然而，一个基本事实是，凸 C^1-函数在 $\mathbb{R}^n$ 上的梯度是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$中某个凸域的同胚。因此，我们的映射是从 $\mathcal{B}_\theta$ 到 Δ 的某个凸子域 Δ' 的双射。我们只需证明 $\Delta' = \Delta$，或者等价地，证明 Δ 的顶点 $(0,\ 0)$、$(2\theta,\ 0)$ 和 $(0,\ 2\theta)$ 是该映射的极限点。

为此，考虑 $\mathrm{B}_\theta \cong \mathbb{R}^2$ 中的序列 $a_n := (-n, -n)$ 和 $b_n := (n, -n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$（回想一下，我们使用的是 B_θ 的 (K_1, K_2)-参数化）。对于双边形 a_n，由于测地曲率 $k_1(a_n) = k_2(a_n) = e^{-n}$ 在 $n \to \infty$时趋于 0，总曲率 $T_i(a_n) = \ell_i(a_n)k_i(a_n) \le \pi k_i(a_n)$ 也趋于 0，因此 $(0, 0)$ 是 a_n 的像的极限点。对于 b_n，出于相同原因，我们有 $T_2(b_n) \to 0$；而 $r_1(b_n) \to 0$，因为 $\log\cot r_1(b_n) = K_1(b_n) = n \to +\infty$。由此可知，面积 $A(b_n)$ 小于半径为 $r_1(b_n)$ 的圆盘的面积，且趋于 0。根据高斯 - 博内定理，我们有 $T_2(b_n) = 2\theta - T_1(b_n) - A(b_n) \to 2\theta$。因此，$(2\theta, 0)$ 是 b_n 的像的极限点。由对称性可知，$(0, 2\theta)$ 也是一个极限点。□

注记 12. 对于双曲双边形，将角参数 α_1 和 α_2 替换T_1 和 T_2时，同样的结论也成立。这与注记 10中阐述的本情形与双曲情形之间的类比相吻合。

4. 定理 1的证明

证明的其余部分是标准的。我们通过将以下形式的函数相加，在空间 $\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^{\mathsf{F}}$ 上构造一个函数，这些函数来自 §2：$\Omega_{\theta_e}(K_{f(e^+)}\ K_{f(e^-)})$，其中 $K = (K_f)_{f\in\mathsf{F}} \in \mathbb{R}^{\mathsf{F}}$ 是坐标，$e \in \mathsf{E}$ 是一条边，而$f(e^\pm) \in \mathsf{F}$ 是从两侧与 e 相邻的面（符号见命题 6 的证明）。换言之，

我们将 $(\sigma,\mathcal{D}) \in \mathcal{M}$ 中所有双边形处的 Ω_θ 值相加。所得函数是严格凸函数，因为 Ω_θ 在 $\mathcal{B}_\theta$ 上是严格凸的。对该函数作线性修正即可解决问题：

命题 13. 设 S 是一个闭曲面，且 G 是一个以 $(\theta_e)_{e\in\mathsf{E}}$ 为权的图，如定理 1中所述。给定 $(T_f)_{f\in\mathsf{F}} \in \mathbb{R}_+^{\mathsf{F}}$，以下关于严格凸函数的陈述成立

$$\Omega : \mathcal{M} \cong \mathbb{R}^{\mathsf{F}} \to \mathbb{R}, \quad \Omega(K) := \sum_{e\in\mathsf{E}} \Omega_{\theta_e}(K_{f(e^+)}, K_{f(e^-)}) - \sum_{f\in\mathsf{F}} T_f K_f.$$

(i) K 是Ω 的临界点，当且仅当相应的$(\sigma, D) \in M$ 满足 $T(\partial D_f) = T_f$对所有 $f \in \mathsf{F}$均成立。*(ii)* Ω 是适当的，当且仅当(T_f) 满足

$$\sum_{f\in\mathsf{F}'} T_f < \sum_{\substack{e\text{: edge incident}\\ \text{with any face in } \mathsf{F}'}} 2\theta_e \quad \textit{for any subset of faces } \mathsf{F}' \subset \mathsf{F}. \tag{2}$$

证明。 (i) 我们采用命题6 证明中的记号，并考虑其中的三角剖分，其三角形集合 $\hat{}\mathsf{E}$ 与 G的有向边一一对应。给定 $K \in \mathcal{M} \cong \mathbb{R}^{\mathsf{F}}$，每个三角形 $t \in \hat{}\mathsf{E}$ 自然对应于一个球面圆盘扇形：事实上，图 4 中的四边形是分别对应于三角形 e^+ 和 e^-的两个扇形的并。令 $\hat{} T_t(K)$ 表示该扇形边界弧的总测地曲率。

根据 1-形式 $\omega_\theta = \mathsf{d}\Omega_\theta$ 在 §3中的定义，我们有

$$\mathsf{d}\sum_{e\in\mathsf{E}} \Omega_{\theta_e}(K_{f(e^+)}, K_{f(e^-)}) = \sum_{e\in\mathsf{E}} \Big(T_1(K_{f(e^+)}, K_{f(e^-)})\mathsf{d}K_{f(e^+)} + T_2(K_{f(e^+)}, K_{f(e^-)})\mathsf{d}K_{f(e^-)}\Big). \tag{3}$$

但采用上述记号，我们可以写成 $T_1(K_{f(e^+)}\ K_{f(e^-)}) = \hat{} T_{e^+}(K)$ 以及 $T_2(K_{f(e^+)}\ K_{f(e^-)}) = \hat{} T_{e^-}(K)$。因此，我们可以将（3）改写为对所有三角形求和 $t \in \hat{}\mathsf{E}$，得到

$$\mathsf{d}\sum_{e\in\mathsf{E}} \Omega_{\theta_e}(K_{f(e^+)}, K_{f(e^-)}) = \sum_{t\in\hat{\mathsf{E}}} \hat{T}_t(K)\mathsf{d}K_{f(t)} = \sum_{f\in\mathsf{F}} T(\partial D_f)\mathsf{d}K_f,$$

$\hat{}$ 其中，最后一个等式是先对包含在某个面 f 中的那些 $t \in \mathsf{E}$ 求和得到的。所需结论由最后一个表达式推出。

(ii) 这是基于这样一个事实：使用线性规划证明于 [1, 命题 4]（另见 [3, 6]），条件“(T_f) 满足（2）”等价于存在一个相容角度系统[1] 对于 (T_f)，其定义是某个 $(\hat{} T_t)_{t\in\hat{\mathsf{E}}} \in \mathbb{R}_+^{\hat{\mathsf{E}}}$，使得对于任意一条边 e 以及 f G 的任意一个面，都有

$$\hat{T}_{e^+} + \hat{T}_{e^-} < 2\theta_e, \qquad \sum_{t\text{: triangle in } f} \hat{T}_t = T_f.$$

根据这一事实，只需证明Ω 是适当的，当且仅当存在一个相容角度系统($\hat{} T_t$) 对应于(T_f)。若Ω 是适当的，则 Ω 存在一个临界点 $K \in \mathcal{M} \cong \mathbb{R}^{\mathsf{F}}$。根据陈述(i)，上述定义的$(\hat{} T_t(K))_{t\in\hat{\mathsf{E}}}$ 是(T_f)的一个相容角度系统。这就证明了“仅当”部分。

反过来，给定一个对应于（T_f）的相容角度系统（ $\hat{} T_t$），我们可以将 Ω（K）的线性部分改写为

$$\sum_{f\in\mathsf{F}} T_f K_f = \sum_{e\in\mathsf{E}} \left(\hat{T}_{e^+} K_{f(e^+)} + \hat{T}_{e^-} K_{f(e^-)}\right),$$

因此写作

$$\Omega(K) = \sum_{e\in\mathsf{E}} \left(\Omega_{\theta_e}(K_{f(e^+)}, K_{f(e^-)}) - \hat{T}_{e^+} K_{f(e^+)} - \hat{T}_{e^-} K_{f(e^-)}\right). \tag{4}$$

[1]在 [1, 2], 这样的系统中表示角。这里我们处理的是一个由相同条件定义的系统，因此沿用这个名称，尽管它现在表示的是全测地曲率而非角（参见注释12）。

式（4）中的每一项都可以理解为定义在双边形空间 $\mathcal{B}_\theta \cong \mathbb{R}^2$ 上的如下形式的函数

$$\Omega_{\theta,\hat{T}_1,\hat{T}_2}(K_1,K_2) := \Omega_\theta(K_1,K_2) - \hat{T}_1K_1 - \hat{T}_2K_2$$

对于常数 $\hat{T}_1$、$\hat{T}_2 > 0$、$\hat{T}_1 + \hat{T}_2 < 2\theta$。此函数的微分为

$$\mathrm{d}\Omega_{\theta,\hat{T}_1,\hat{T}_2} = \omega_\theta - \hat{T}_1\mathrm{d}K_1 - \hat{T}_2\mathrm{d}K_2 = (T_1 - \hat{T}_1)\mathrm{d}K_1 + (T_2 - \hat{T}_2)\mathrm{d}K_2.$$

因此，$\Omega_{\theta,\hat{T}_1,\hat{T}_2}$ 在双边形处有一个临界点，其两条边的总测地曲率分别为 $\hat{T}_1$ 和 $\hat{T}_2$；根据引理11，该双边形存在。由于定义在整个 $\mathbb{R}^n$ 上的严格凸函数当且仅当具有临界点时才是适当的，我们推知$\Omega_{\theta,\hat{T}_1,\hat{T}_2}$ 在$\mathcal{B}_\theta$ 上是适当的，因此整个和式（4）在$\mathcal{M}$上是适当的。这就证明了“若”部分。□

为推出定理1，注意到根据命题13 (i)，我们可以将定理理解为：$(T_f) \in \mathbb{R}^{\mathsf{F}}_+$ 满足（2）当且仅当Ω 具有临界点，并且若该临界点存在，则它是唯一的。唯一性来自严格凸性，而“当且仅当”的结论则来自命题13(ii)以及上述证明结尾引用的关于严格凸函数的事实。

参考文献

[1] A. I. Bobenko 和 B. A. Springborn，圆模式的变分原理与 *Koebe* 定理，《美国数学会汇刊》，356 (2004)，第 659–689 页。[2] Y. Colin de Verdière，圆堆积的变分原理，《数学创刊》，104 (1991)，第 655–669 页。[3] R. Guo，关于曲面上圆模式的一则注记，《几何奉献》，125 (2007)，第 175–190 页。[4] F. Luo，多面体曲面的刚性，*I*，《微分几何杂志》，96 (2014)，第 241–302 页。[5] R. C. McOwen，黎曼曲面上的点奇点与共形度量，《美国数学会会刊》，103 (1988)，第 222–224 页。[6] I. Rivin，几何中的组合优化，《应用数学进展》，31 (2003)，第 242–271 页。[7]J.-M. Schlenker 和 A. Yarmola，复射影结构上圆填充与 *Delaunay* 圆模式的适当性，arXiv:1806.05254 (2018)。[8] M. Troyanov，在带锥奇点的紧曲面上指定曲率，《美国数学会汇刊》，324 (1991)，第 793–821 页。[9] 维基百科，球面三角学。 https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_trigonometry。

东南大学丘成桐中心，南京 210096，中国电子邮箱：
nie.hsin@gmail.com