arXiv:2301.09664v1 [math.CO] 23 Jan 2023

二元熵函数的一个实用不等式

Ravi B. Boppana*

2023年1月23日

摘要

我们为二元熵函数的一个有趣不等式给出了一个简单证明。这个不等式曾用于两个不同的研究背景。20世纪80年代，Boppana 运用这一熵不等式证明了布尔公式的下界。近来，该不等式又被用于推动 Frankl 的并封闭集合猜想取得重大进展。我们利用基本微积分证明了这个熵不等式。

1 引言

本文给出了二元熵函数的一个有趣不等式的简单证明，该不等式已用于两个不同的场景。

设 h 为二元熵函数，其定义在区间 $[0,1]$ 上，如下所示：

$$h(x) = \begin{cases} -x\log x - (1-x)\log(1-x) & \text{if } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{if } x = 0 \text{ or } x = 1. \end{cases}$$

这里，log 表示自然对数（底数为 e）。

下面的引理给出了我们将要证明的不等式。

*麻省理工学院数学系，美国马萨诸塞州剑桥。电子邮箱：rboppana@mit.edu。

引理。若 $0 \leq x \leq 1$，则

$$h(x^2) \geq \phi x h(x),$$

其中 ϕ 是黄金比例，$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$。

这个熵不等式的历史颇为有趣。Boppana [2, 3] 最先利用这个不等式证明了布尔公式的下界。更准确地说，他证明了一个关于二元熵函数的二元不等式，而上述一元不等式是它的一个特例。他对这个二元不等式的证明借助了计算机。在未发表的工作中，[4],他给出了这个一元不等式的一个简单证明。我们将在本文中记录这个简单证明。

30 多年后，同一个不等式被用于推动 Frankl 并封闭集猜想取得重大进展。Gilmer [8] 利用信息论中的熵概念，在并封闭集猜想上取得了突破。紧接着，Alweiss、Huang 和 Sellke [1],、Chase 和 Lovett [6],、Pebody [9], 以及 Sawin [10]利用上述熵不等式改进了 Gilmer 的界。至于熵不等式本身，Alweiss、Huang 和 Sellke [1] 给出了一个借助计算机的证明。Chase 和 Lovett [6]引用了 [1]的证明。Pebody [9] 写道“有待证明”。Sawin [10]给出了一个符号证明，并指出“这个证明有些复杂，不过如果存在一个简单的符号证明，也不会令人意外”。我们的证明证实了确实存在一个简单的符号证明。

Cambie [5],、Ellis [7], 和 Yu [11]在并封闭猜想方面取得了进一步进展。

2 熵不等式的证明

本节将使用微分学的基本知识证明熵不等式。

引理。若 $0 \leq x \leq 1$，则

$$h(x^2) \geq \phi x h(x),$$

其中 ϕ 是黄金比例，$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$。

证明。设 $\mathbb{R}$ 为实数集。将 h按如下方式扩展到整个 $\mathbb{R}$ 会更方便:

$$h(x) = \begin{cases} -x\log|x| - (1-x)\log|1-x| & \text{if } x \neq 0 \text{ and } x \neq 1; \\ 0 & \text{if } x = 0 \text{ or } x = 1. \end{cases}$$

设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，其定义为

$$f(x) = h(x^2) - \phi x h(x).$$

为证明该引理，我们将说明 f 在 $[0,1]$ 上非负。

一阶导数 f' 定义在 $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ 上，二阶导数 f'' 定义在 $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ 上，三阶导数 f''' 定义在 $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$ 上。连续求三次导数可知，若 $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$，则

$$f'''(x) = \frac{p(x)}{x(1-x^2)^2},$$

其中 p 是定义如下的三次多项式:

$$p(x) = -\phi x^3 - 4x^2 + 3\phi x + 2\phi - 4.$$

由于 p 的首项系数为负，且 $p(0)$ 为负，因此 p 至少有一个负根。由此，p 至多有两个非负根。因此，三阶导数 f''' 在 (0, 1) 中至多有两个根。

由罗尔定理，连续应用三次可知， f 本身在 $[0,1]$，中计重数至多有五个根。函数 f 在 0 处有一个二重根，在 ϕ^{-1} 处有一个二重根，并在 1 处有一个单根。因此，我们已找到了 f 在 $[0,1]$ 中的全部五个根。

由于 f 在 ϕ^{-1}处有一个二重根，因此它在 $[0,1]$上要么处处非负，要么处处非正。对于 x 一个很小的正数， $f(x)$ 为正。因此，f 在 $[0,1]$上非负。 □

参考文献

[1] Ryan Alweiss、Brice Huang 和 Mark Sellke。《Frankl 并封闭集猜想的改进的下界》。 arXiv:2211.11731，2022年。

[2] Ravi B. Boppana. 概率布尔公式的放大。第26届IEEE计算机科学基础年会，第20–29页，1985年。最终版本见 [3]。

[3] Ravi B. Boppana. 概率布尔公式的放大。《计算研究进展》，第5卷，JAI出版社，第27-45页，1989年。初步版本见 [2]。[4] Ravi B. Boppana. 未发表的笔记，1989年。[5] Stijn Cambie. 运用熵方法改进并封闭集猜想的界。 arXiv:2212.12500，2022年。[6] Zachary Chase 和 Shachar Lovett. 并封闭集猜想的近似版本。 arXiv:2211.11689，2022年。[7] David Ellis. 注：Gilmer 一项可推出并封闭集猜想的猜想的反例。 arXiv:2211.12401，2022年。[8] Justin Gilmer. 并封闭集猜想的常数下界。 arXiv:2211.09055，2022年。[9] Luke Pebody. Gilmer 方法的推广。 arXiv:2211.13139，2022年。[10] Will Sawin. 并封闭集猜想的改进的下界。 arXiv:2211.11504，2022年。[11] Lei Yu. 并封闭集猜想的无维数依赖界。arXiv:2212.00658，2022年。