arXiv:2301.09677v1 [math.GM] 23 Jan 2023

由 L-加性函数定义的广义冯·曼戈尔特函数研究

预印本

ES-SAID EN-NAOUI 苏丹穆莱·斯利曼大学理工学院，摩洛哥 essaidennaoui1@gmail.com

2023年1月25日

摘要

本文的主要研究对象是利用 L-加性函数研究广义冯·曼戈尔特函数，这有助于我们得出许多关于经典算术函数的结果。

1 引言

本文讨论两个主要结果：广义冯·曼戈尔特函数与算术函数的狄利克雷卷积 f，以及许多完全加性算术函数的狄利克雷级数。

本文利用 L-加性函数研究广义冯·曼戈尔特函数，从而为许多依赖于加性和完全加性算术函数的级数展开找到替代证明。这些方法易于推广，也可应用于其他 L-加性函数。我们的主要结果如下：

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\Lambda_f(n)}{n^s}=\sum_p\frac{f(p)}{h_f(p)p^s-h_f(p)}$$

其中，f 是 L-加性函数，且 h_f 取非零值。

首先，要研究解析数论，必须掌握相当熟练的算术函数运算技巧。我们从一些初步的讨论开始。

定义 1.1（算术函数）。算术函数是一个函数 $f\colon \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{C}$，其定义域为自然数集 $\mathbb{N}$，值域为复数集 $\mathbb{C}$的子集。

定义 1.2（乘法函数）。函数 f称为乘法函数，当且仅当 f :

$$f(nm)=f(n)f(m) \tag{1}$$

对于每一对互素整数 n、m。若条件 (1) 对任意一对整数 n 和 m 均成立，而它们不一定互素，则函数 f 称为完全乘法函数。

显然，若 f是乘法函数，则对于任意满足 $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_s^{\alpha_s}$的正整数 n，有 $f(n)=f(p_1^{\alpha_1})\dots f(p_s^{\alpha_s})$；若 f是完全乘法函数，则有：$f(n)=f(p_1)^{\alpha_1}\dots f(p_s)^{\alpha_s}$。
上述定义的函数已在文献中得到广泛研究（例如参见 [5, 8, 9, 10]）。

定义 1.3（加性函数）。函数 f 称为加性函数，当且仅当：

$$f(nm)=f(n)+f(m) \tag{2}$$

对于每一对互素整数 n、m。如果条件 (3) 对每一对整数 n 和 m 都成立（它们不一定互素），则称函数 f 为完全加性函数。

显然，如果 f 是加性函数，那么对于任意满足 $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ 的正整数 n，都有 $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) + \dots + f(p_s^{\alpha_s})$；如果 f 是完全加性函数，则有：$f(n) = \alpha_1 f(p_1) + \dots + \alpha_s f(p_s)$。

例 1.1。本文中使用的一些经典算术函数如下：

1. 算术对数导数：$Ld(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \frac{\alpha}{p}$。

2. 计重数的 n 的素因子个数：$\Omega(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \alpha.$

3. 计重数的 n 的素因子个数的推广：$\Omega_k(n) = \sum_{p^\alpha \|^n} \alpha^k.$

4. 定义函数：$A(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \alpha p.$

5. 单位函数：函数定义为 $e(n) = \begin{cases} 1, & \text{当 } n = 1 \text{ 时，对} \\ 0 & \end{cases} \quad n \geq 2$

6. 单位函数：函数定义为 $1(n) = 1$，对所有 $n > 1$。

7. 对数函数：自然对数，限制在 $\mathbb{N}$ 上并视为算术函数。

8. n 的素因子的 k 次幂之和：$\beta_k(n) = \sum p^k .$

9. n 的不同素因子个数：$\omega(n) = \beta_0(n) = \sum 1 .$

10. n 的素因子之和：$\beta(n) = \beta_1(n) = \sum p.$

11. 莫比乌斯函数：$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{若 } n = 1 \\ 0 & \text{若 } p^2 | n \text{ for some prime } p \\ (-1)^{\omega(n)} & \text{否则} \end{cases}$

12. n 的正因子个数定义为：$\tau(n) = \sum 1 .$

定义 1.4（L-加性函数）。如果存在一个完全乘性函数 h_f，使得算术函数 f 满足以下条件，我们就称其为莱布尼茨可加（或简称 L-加性）（参见例如 [1]）：

$$f(mn) = f(m)h_f(n) + f(n)h_f(m) \tag{3}$$

对所有正整数 m 和 n。

那么 $f(1) = 0$，因为 $h_f(1) = 1$。性质 (3) 可视为广义莱布尼茨法则。例如，算术导数 δ 是 L-加性的，其中 $h_\delta(n) = n$，因为它满足通常的莱布尼茨法则

$$\delta(mn) = n\delta(m) + m\delta(n)$$

对所有正整数 m 和 n，函数 $h_\delta(n) = n$ 都是完全乘法的。此外，所有完全加性函数 f 都是 L-加性的，且满足 $h_f(n) = 1$。例如，n 的对数导数是完全加性的，因为

$$\mathrm{ld}(mn) = \mathrm{ld}(m) + \mathrm{ld}(n).$$

定理 1.1. 设 f 是一个算术函数。若 f 是 L-加性的，且 h_f 处处非零，则 f/h_f 是完全加性的。

证明。（例如，参见 [1, 定理2.1]） □

定理 1.2. 设 f 是一个算术函数，若 $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$ 是 n 的素因数分解，且 f 是 L-可加的，其中 $h_f(p_1) \dots, h_f(p_s) \neq 0$，则

$$f(n) = h_f(n) \sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha_i f(p_i)}{h_f(p_i)}.$$

证明。（例如，参见 [1, 定理2.4]） □

推论 1.1. 设 f 为一个算术函数，若 f 是 L-加性函数且 h_f 取值非零，则有：

$$(f * h_f)(n) = \frac{1}{2} f(n)\tau(n)$$

证明。（例如，参见 [1, 推论 3.1]） □

此外，所有完全加性函数 f 都是 L-加性函数，且 $h_f(n) = 1$，因此，将完全加性函数扩展到有理数集 $\mathbb{Q}$ 后，可得以下公式：

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = f(n) - f(m)$$

例如， n 的对数导数是完全加性的，因此有：

$$Ld\left(\frac{n}{m}\right) = Ld(n) - Ld(m)$$

设 f 和 g 是算术函数。它们的狄利克雷卷积为：

$$(f * g)(n) = \sum_{\substack{a,b=1 \\ ab=n}}^{n} f(a)g(b) = \sum_{d|n}^{n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right). \tag{4}$$

其中，求和遍及 n 的所有正因子 d；等价地，遍及所有乘积为 n的不同正整数对 (a, b)。

特别地，对于任意素数 p，有 $(f * g)(1) = f(1)g(1)$,$(f * g)(p) = f(1)g(p) + f(p)g(1)$；对于任意素数幂 p^m，有：

$$(f * g)(p^m) = \sum_{j=0}^{m} f(p^j)g(p^{m-j}) \tag{5}$$

本文研究 L-加性函数，尤其是从将其视为冯·曼戈尔特函数的一种推广这一角度进行探讨。下一节将介绍它们的一般基本性质。最后一节将通过狄利克雷卷积和狄利克雷级数研究这一推广的应用。

2 利用 L-加性函数构造广义冯·曼戈尔特函数：

本节中，设 f为 L-加性函数，且 h_f的取值非零，那么现在我们定义与函数 f 相关的冯·曼戈尔特函数如下：

$$\Lambda_f(n) = \begin{cases} \frac{f(p)}{h_f(p)} & \text{if } n = p^k \text{ for some prime } p \text{ and integer } k \geq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6}$$

那么我们有如下结果：

定理2.1. 如果 $n \geq 1$ 那么我们有：

$$f(n) = h_f(n) \sum_{d|n} \Lambda_f(d)$$

这意味着使用狄利克雷卷积： $f = h_f * h_f\Lambda_f$

证明. 如果 $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$那么我们有：

$$\sum_{d|n} \Lambda_f(d) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{i} \Lambda_f(p_i^k) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{i} \frac{f(p_i)}{h_f(p_i)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{if(p_i)}{h_f(p_i)} = \frac{f(n)}{h_f(n)}$$

如前所述

□

定理 2.2. 对每个正整数 n，我们有：

$$\Lambda_f(n)=\sum_{d|n}\frac{\mu\left(\frac{n}{d}\right)f\left(d\right)}{h_f\left(d\right)}=-\sum_{d|n}\frac{\mu(d)f(d)}{h_f(d)}$$

也就是说，我们有：

$$\Lambda_f=\mu*\frac{f}{h_f}=-1*\frac{\mu f}{h_f}$$

证明。由定理（2.1），应用莫比乌斯反演可得 $\Lambda_f=\mu*\frac{f}{h_f}$，注意：

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\frac{\mu\left(\frac{n}{d}\right)f\left(d\right)}{h_f\left(d\right)}&=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{f\left(\frac{n}{d}\right)}{h_f\left(\frac{n}{d}\right)}=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{h_f(d)}{h_f(n)}\left(\frac{h_f(d)f(n)-h_f(n)f(d)}{h_f^2(d)}\right)\\&=\sum_{d|n}\frac{\mu(d)h_f^2(d)f(n)}{h_f(n)h_f^2(d)}-\frac{\mu(d)h_f(n)h_f(d)f(d)}{h_f(n)h_f^2(d)}\\&=\frac{f(n)}{h_f(n)}\sum_{d|n}\mu(d)-\sum_{d|n}\frac{\mu(d)f(d)}{h_f(d)}\\&=\frac{f(n)e(n)}{h_f(n)}-\sum_{d|n}\frac{\mu(d)f(d)}{h_f(d)}\\&=-\sum_{d|n}\frac{\mu(d)f(d)}{h_f(d)}\end{aligned}$$

因此 $\Lambda_f(n)=-1*\frac{\mu f}{h_f}$。证明完毕。 □

推论 2.1。设 f 为一个算术函数。若 f 是 L-加性函数且 h_f 取非零值，则：

$$(\tau*\Lambda_f)(n)=\frac{f(n)\tau(n)}{2h_f(n)} \tag{7}$$

证明。由推论（1.1）可知：

$$(f*h_f)(n)=\frac{1}{2}f(n)\tau(n)$$

由定理（2.1）可知：

$$f(n)=\left(h_f*h_f\Lambda_f\right)(n)$$

于是我们得到：

$$\left(h_f*f\right)(n)=\left(h_f*h_f*h_f\Lambda_f\right)(n)=h_f(n)\left(1*1*\Lambda_f\right)(n)$$

由此可得：

$$h_f(n)\left(\tau*\Lambda_f\right)(n)=\frac{1}{2}\tau(n)f(n)$$

至此，定理的证明完成。 □

定理 2.3. 设 g 为一个算术函数，若 g 是完全加性的，则有：

$$\left(1*g\Lambda_f\right)(n)=\frac{1}{2}\sum_{p^\alpha||n}\frac{\alpha(\alpha+1)f(p)g(p)}{h_f(p)} \tag{8}$$

证明. 设 g 为一个完全加性的算术函数，则:

$$\begin{aligned}(1*g\Lambda_f)(n) &= \sum_{d|n} g(d)\Lambda_f(d) = \sum_{p^\alpha||n}\sum_{i=1}^{i=\alpha} g(p^i)\Lambda_f(p^i)\\ &= \sum_{p^\alpha||n}\sum_{i=1}^{i=\alpha}\frac{ig(p)f(p)}{h_f(p)}\\ &= \sum_{p^\alpha||n}\frac{g(p)f(p)}{h_f(p)}\sum_{i=1}^{i=\alpha} i\\ &= \sum_{p^\alpha||n}\frac{\alpha(\alpha+1)f(p)g(p)}{2h_f(p)}\end{aligned}$$

□

定理2.4。设 g 为一个算术函数，若 g 是完全加性的，则有:

$$(\Lambda_f * g)(n) = \frac{f(n)g(n)}{h_f(n)} - (1*g\Lambda_f)(n) \tag{9}$$

证明。设 g 为一个完全加性的算术函数，由于 $g\left(\frac{n}{d}\right) = g(n) - g(d)$，因此:

$$\begin{aligned}(\Lambda_f * g)(n) &= \sum_{d|n}\Lambda_f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n}\Lambda_f(d)\left(g(n)-g(d)\right)\\ &= \sum_{d|n}\Lambda_f(d)g(n) - \sum_{d|n}\Lambda_f(d)g(d)\\ &= g(n)\sum_{d|n}\Lambda_f(d) - \sum_{d|n}\Lambda_f(d)g(d)\end{aligned}$$

由于:

$$\sum_{d|n}\Lambda_f(d)g(d) = (1*g\Lambda_f)(n)$$

根据定理（2.1），我们有:

$$\sum_{d|n}\Lambda_f(d) = \frac{f(n)}{h_f(n)}$$

因此，我们得出:

$$(\Lambda_f * g)(n) = \frac{f(n)g(n)}{h_f(n)} - (1*g\Lambda_f)(n)$$

□

定理2.5. 设 f 和 g 是两个L-加性函数，则有:

$$(\Lambda_f*\Lambda_g)(n) = \begin{cases}\frac{(\alpha-1)f(p)g(p)}{h_f(p)h_g(p)} & \text{if } n=p^\alpha \text{ for some prime } p \text{ and integer } \alpha\geq 1,\\ \frac{f(p)g(q)}{h_f(p)h_g(q)}+\frac{f(q)g(p)}{h_f(q)h_g(p)} & \text{if } n=p^\alpha q^\beta \text{ for some prime } p,q \text{ and integer } \alpha,\beta\geq 1\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{10}$$

证明. 设 f 和 g 是两个L-加性函数，且 $n>1$。
如果 $n=p^\alpha$，那么我们有:

$$\begin{aligned}(\Lambda_f*\Lambda_g)(n) &= \sum_{d|n}\Lambda_f(d)\Lambda_g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{i=1}^{\alpha-1}\Lambda_f(p^i)\Lambda_g(p^{\alpha-i})\\ &= \sum_{i=1}^{\alpha-1}\frac{f(p)}{h_f(p)}\frac{g(p)}{h_g(p)}\\ &= \frac{(\alpha-1)f(p)g(p)}{h_f(p)h_g(p)}\end{aligned}$$

如果 $n = p^{\alpha}q^{\beta}$，那么:

$$\begin{aligned}(\Lambda_f * \Lambda_g)(n) &= \sum_{d|n} \Lambda_f(d)\Lambda_g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{i=1}^{\alpha} \Lambda_f(p^i)\Lambda_g\left(\frac{n}{p^i}\right) + \sum_{i=1}^{\beta} \Lambda_f(q^i)\Lambda_g\left(\frac{n}{q^i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha} \Lambda_f(p^i)\Lambda_g\left(p^{\alpha-i}q^{\beta}\right) + \sum_{j=1}^{\beta} \Lambda_f(q^j)\Lambda_g\left(p^{\alpha}q^{\beta-j}\right) \\ &= \Lambda_f(p^{\alpha})\Lambda_g(q^{\beta}) + \Lambda_f(q^{\beta})\Lambda_g(q^{\alpha}) \\ &= \frac{f(p)g(q)}{h_f(p)h_g(q)} + \frac{f(q)g(p)}{h_f(q)h_g(p)}\end{aligned}$$

现在，如果 $\omega(n) > 2$，则对于 n 的每个因子 d，我们有 $\Lambda_f(d) = 0$ 或 $\Lambda_f\left(\frac{n}{d}\right)$，则 $(\Lambda_f * \Lambda_g)(n) = 0$ □

定理 2.6. 设 s 为一个复数，若.....，则有:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_f(n)}{n^s} = \sum_p \frac{f(p)}{h_f(p)p^s - h_f(p)}$$

证明. 设 s 为一个复数，使得 $Re(s) > 0$，则

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_f(n)}{n^s} &= \frac{\Lambda_f(1)}{1^s} + \frac{\Lambda_f(2)}{2^s} + \frac{\Lambda_f(3)}{3^s} + \frac{\Lambda_f(4)}{4^s} + \frac{\Lambda_f(5)}{5^s} + \ldots + \frac{\Lambda_f(16)}{16^s} + \ldots \\ &= \frac{f(2)}{h_f(2)2^s} + \frac{f(3)}{h_f(3)3^s} + \frac{f(2)}{h_f(2)2^{2s}} + \frac{f(5)}{h_f(5)5^s} + \frac{f(7)}{h_f(7)7^s} + \frac{f(2)}{h_f(2)2^{3s}} + \ldots + \frac{f(2)}{h_f(2)2^{4s}} + \ldots \\ &= \sum_p \sum_{k\geq 1} \frac{f(p)}{h_f(p)p^{ks}} = \sum_p \frac{f(p)}{h_f(p)} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{p^{ks}} \\ &= \sum_p \frac{f(p)}{h_f(p)} \sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{p^s}\right)^k = \sum_p \frac{f(p)}{h_f(p)} \cdot \frac{1}{p^s} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \\ &= \sum_p \frac{f(p)}{h_f(p)p^s - h_f(p)}\end{aligned}$$

至此证明完成 □

2.1 利用 L-加性函数求算术函数的导数

设 f 为 L-加性函数，且 h_f 不取零值。现在我们定义与函数 f 相关的算术函数的导数:

定义 2.1. 对任意算术函数 g，我们将其导数 g' 定义为由下列等式给出的算术函数:

$$g'(n) = \frac{g(n)f(n)}{h_f(n)} \quad for \quad n \geqslant 1$$

由于对所有 n，$e(n) \ f_{(n)}\, h_f(n) = 0$，因此 $e'(n) = 0$。

由于对所有 n，$1'(n) = f_{(n)}h_f(n)$，因此公式 $\sum_{d|n} \Lambda_f(d) = f_{(n)}h_f(n)$ 可写为

$$1'(n) = (1 * \Lambda_f)(n) \tag{11}$$

利用 L-加性函数定义的导数概念具有许多与初等微积分中讨论的通常导数相同的性质。例如，对和与积求导的常用法则同样适用于狄利克雷卷积。

定理 2.7. 如果 g 和 h 是算术函数，我们有:

a) $(g + h)'(n) = g'(n) + h'(n)$

b) $(g*h)'(n) = (g'*h)(n) + (g*h')(n)$

证明. *(a)* 的证明是显而易见的。当然，为了证明 *(b)*，我们使用恒等式 $\frac{f_{(n)}}{h_f(n)} = \frac{f(d)}{h_f(d)} + \frac{f(\frac{n}{d})}{h_f(\frac{n}{d})}$ 来写出：

$$\begin{aligned}(g*h)'(n) &= \sum_{d|n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right)\frac{f(n)}{h_f(n)} \\ &= \sum_{d|n} g(d)\frac{f(d)}{h_f(d)}h\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right)\frac{f(\frac{n}{d})}{h_f(\frac{n}{d})} \\ &= \sum_{d|n} \frac{g(d)f(d)}{h_f(d)}h\left(\frac{n}{d}\right) + \sum_{d|n} g(d)\frac{h\left(\frac{n}{d}\right)f(\frac{n}{d})}{h_f(\frac{n}{d})} \\ &= (g'*h)(n) + (g*h')(n)\end{aligned}$$

□

定理 2.8（Ennaoui-Selberg 恒等式）。对于 $n > 1$，我们有：

$$\frac{\Lambda_f(n)f(n)}{h_f(n)} + \sum_{d|n}\Lambda_f(d)\Lambda_f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{f^2(d)}{h_f^2(d)} \tag{12}$$

利用狄利克雷卷积，这意味着：

$$\frac{f\Lambda_f}{h_f} + \Lambda_f * \Lambda_f = \mu * \left(\frac{f}{h_f}\right)^2 \tag{13}$$

证明。等式 (11) 表明 $1' = 1*\Lambda_f$。对该等式求导可得

$$1'' = 1'*\Lambda_f + 1*\Lambda_f'$$

由于 $1' = 1*\Lambda_f$，我们有：

$$1'' = (1*\Lambda_f)*\Lambda_f + 1*\Lambda_f'$$

现在我们将两边乘以 $\mu = 1^{-1}$，得到：

$$\mu * 1'' = \Lambda_f' + \Lambda_f * \Lambda_f$$

这就是所需的恒等式。 □

2.2 结果：完全加性函数

众所周知，算术函数 f 完全加性，因此是 L-加性函数，且对每个非零整数都有 $h_f(n) = 1(n) = 1$，由此可得与冯·曼戈尔特函数相关的函数 f，其定义如下：

$$\Lambda_f(n) = \begin{cases} f(p) & \text{if } n = p^k \text{ for some prime } p \text{ and integer } k \geq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{14}$$

将 $h_f(n) = 1$ 代入上一节的所有结果，可得：

推论 2.2。设 f 是一个完全加性的算术函数，则：

$$f(n) = \sum_{d|n}\Lambda_f(d)$$

这意味着使用狄利克雷卷积：$f = 1*\Lambda_f$

推论2.3. 设 f 为完全加性算术函数，则有：

$$\Lambda_f(n) = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f(d) = -\sum_{d|n}\mu(d)f(d)$$

也就是说，我们有：

$$\Lambda_f = \mu * f = -1*\mu f$$

推论2.4. 设 g 为一个算术函数，若 g 是完全加性的，则我们有：

$$(1 * g\Lambda_f)(n) = \frac{1}{2}\sum_{p^\alpha||n} \alpha(\alpha+1)f(p)g(p) \tag{15}$$

推论 2.5. 对于 $n > 1$，我们有：

$$(\Lambda_f * g)(n) = f(n)g(n) - (1 * g\Lambda_f)(n) \tag{16}$$

推论 2.6. 若 f 和 g 是两个完全加性算术函数，则我们有：

$$(\Lambda_f * \Lambda_g)(n) = \begin{cases} (\alpha-1)f(p)g(p) & \textit{if } n = p^\alpha \textit{ for some prime } p \textit{ and integer } \alpha \geq 1, \\ f(p)g(q) + f(q)g(p) & \textit{if } n = p^\alpha q^\beta \textit{ for some prime } p, q \textit{ and integer } \alpha, \beta \geq 1 \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases} \tag{17}$$

推论 2.7（Ennaoui-Selberg 恒等式）。对于 $n > 1$，我们有：

$$\Lambda_f(n)f(n) + \sum_{d|n} \Lambda_f(d)\Lambda_f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f^2(d) \tag{18}$$

利用狄利克雷卷积，我们有：

$$f\Lambda_f + \Lambda_f * \Lambda_f = \mu * f^2 \tag{19}$$

推论 2.8. 设 f 是一个算术函数。若 f 是完全加性的，则：

$$(\tau * \Lambda_f)(n) = \frac{1}{2}f(n)\tau(n) \tag{20}$$

推论2.9. 设 s 为一个复数，使得 $Re(s) > 0$，则有：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_f(n)}{n^s} = \sum_p \frac{f(p)}{p^s - 1}$$

3 应用：经典算术完全加性函数

3.1 计算素因子个数（计重数）的 Ω 函数。

我们知道，计算素因子个数（计重数）的 Ω 函数是 L-加性函数，且 $h_\Omega(n)$ =1，因此 Ω 的冯·曼戈尔特函数定义如下：

$$\Lambda_\Omega(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = p^k \text{ for some prime } p \text{ and integer } k \geq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是，根据推论（2.2）和（2.2），我们有：

推论3.1. 对于 $n > 1$，有：

$$\Omega(n) = (1 * \Lambda_\Omega)(n) \tag{21}$$

$$\Lambda_\Omega(n) = (\mu * \Omega)(n) = -(1 * \Omega\mu)(n) \tag{22}$$

将 $f(n) = \Omega(n)$ 代入推论 (2.8)，可得：

推论 3.2. 对于每个整数 $n > 1$，我们有

$$(\Lambda_\Omega * \tau)(n) = \frac{1}{2}\tau(n)\Omega(n) \tag{23}$$

若 $f = g = \Omega$，则根据推论 (2.4)，可得：

$$(1 * \Omega\Lambda_\Omega)(n) = \frac{1}{2}(\Omega_2(n) + \Omega(n)) \tag{24}$$

将 $f(n) = \Omega(n)$ 代入 Ennaoui-Selberg 恒等式 (2.7)，可得：

$$\Omega(n)\Lambda_\Omega(n) + (\Lambda_\Omega * \Lambda_\Omega)(n) = \left(\mu * \Omega^2\right)(n) \tag{25}$$

定理3.1. 对于每个整数 $n>0$，有:

$$(\Lambda_\Omega * \beta_k)(n) = \Omega(n)\beta_k(n) - \beta_k(n) \tag{26}$$

证明。对于任意正整数 n，使得 $n = p_1^{\alpha_1}\dots p_s^{\alpha_s}$，我们有:

$$\begin{aligned}
(\Lambda_\Omega * \beta_k)(n) &= \sum_{d|n}\Lambda_\Omega(d)\beta_k\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{p^\alpha||n}\sum_{i=1}^{i=\alpha}\Lambda_\Omega(p^i)\beta_k\left(\frac{n}{p^i}\right)\\
&= \sum_{p^\alpha||n}\sum_{i=1}^{i=\alpha}\beta_k\left(\frac{n}{p^i}\right)\\
&= \sum_{p^\alpha||n}\left(-p^k + \sum_{i=1}^{i=\alpha}\beta_k(n)\right)\\
&= \sum_{p^\alpha||n} -p^k + \alpha\beta_k(n)\\
&= \beta_k(n)\sum_{p^\alpha||n}\alpha - \sum_{p^\alpha||n}p^k\\
&= \beta_k(n)\Omega(n) - \beta_k(n)
\end{aligned}$$

□

3.2 算术对数导数函数:

现在，我们可以定义与算术导数 Ld 相关联的冯·曼戈尔特函数:

$$\Lambda_{Ld}(n) = \begin{cases} \frac{1}{p} & \text{if } n = p^k \text{ for some prime } p \text{ and integer } k \geq 1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

将 $f(n) = Ld(n)$ 代入推论 (2.2) 和 (2.3)，得到:

$$Ld(n) = (1 * \Lambda_{Ld})(n) \tag{27}$$

并且:

$$\Lambda_{Ld}(n) = (\mu * Ld)(n) = -(1 * Ld\mu)(n) \tag{28}$$

现在将 $f(n) = Ld(n)$ 代入推论 (2.7) 和 (2.8)，得到:

推论3.3. 对于 $n>1$，有

$$(\Lambda_{Ld} * \tau)(n) = \frac{1}{2}\tau(n)Ld(n) \tag{29}$$

$$Ld(n)\Lambda_{Ld}(n) + (\Lambda_{Ld} * \Lambda_{Ld})(n) = \left(\mu * Ld^2\right)(n) \tag{30}$$

定理3.2. 设 g 为一个算术函数，若 g 是完全可加的，则有:

$$(\Lambda_{Ld} * g)(n) = g(n)Ld(n) - \frac{1}{2}\sum_{p^\alpha||n}\frac{\alpha(\alpha+1)g(p)}{p} \tag{31}$$

证明. 首先在推论 (2.5) 中取 $f = Ld$，可得:

$$(\Lambda_{Ld} * g)(n) = g(n)Ld(n) - (1 * g\Lambda_{Ld})(n)$$

同理，将 $f = Ld$ 代入推论 (2.4)，可得:

$$(1 * g\Lambda_{Ld})(n) = \frac{1}{2}\sum_{p^\alpha||n}\alpha(\alpha+1)Ld(p)g(p)$$

代入 $Ld(p) = \frac{1}{p}$ 即可完成证明。 □

定理 3.3. 对于 $n>1$，以及对于 $k\in\mathbb{Z}$，我们有：

$$(\Lambda_{Ld}*\beta_k)(n)=Ld(n)\beta_k(n)-\beta_{k-1}(n) \tag{32}$$

证明：对于任意正整数 n，使得 $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_s^{\alpha_s}$，我们有：

$$\begin{aligned}(\Lambda_{Ld}*\beta_k)(n)&=\sum_{d|n}\Lambda_{Ld}(d)\beta_k\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{p^\alpha||n}\sum_{i=1}^{i=\alpha}\Lambda_{Ld}(p^i)\beta_k\left(\frac{n}{p^i}\right)\\&=\sum_{p^\alpha||n}\sum_{i=1}^{i=\alpha}\frac{\beta_k\left(\frac{n}{p^i}\right)}{p}\\&=\sum_{p^\alpha||n}\left(-\frac{p^k}{p}+\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{i=\alpha}\beta_k(n)\right)\\&=\sum_{p^\alpha||n}-p^{k-1}+\frac{\alpha}{p}\beta_k(n)\\&=\beta_k(n)\sum_{p^\alpha||n}\frac{\alpha}{p}-\sum_{p^\alpha||n}p^{k-1}\\&=\beta_k(n)Ld(n)-\beta_{k-1}(n)\end{aligned}$$

□

推论 3.4。

$$(\Lambda_{Ld}*\Omega)(n)=\Omega(n)Ld(n)-Ld(n)-\sum_{p^\alpha||n}\frac{\alpha^2}{p} \tag{33}$$

3.3 素因数分解中所有素因子之和的函数 A：

函数 A（OEIS A001414）给出一个数 n 的素因子之和（重复计算），是 K. ALLADI 和 P. ERDOS 研究过的算术函数之一（例如参见 [7]）。因此，本节研究这个函数，并给出它与许多经典算术函数的狄利克雷卷积的一些结果。

显然，由于每个整数 n 的素因数分解唯一，函数 A 是完全加性的。于是，冯·曼戈尔特函数 A 定义为：

$$\Lambda_A(n)=\begin{cases}p & \text{if } n=p^k \text{ for some prime } p \text{ and integer } k\geq 1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

于是，由推论 (2.2) 和 (2.2) 可得：

推论 3.5。对于 $n>1$，有：

$$A(n)=(1*\Lambda_A)(n) \tag{34}$$

$$\Lambda_A(n)=(\mu*A)(n)=-(1*A\mu)(n) \tag{35}$$

将 $f(n)=A(n)$ 代入推论 (2.8)，得到：

推论 3.6。对于每个整数 $n>1$，有

$$(\Lambda_A*\tau)(n)=\frac{1}{2}\tau(n)A(n) \tag{36}$$

将 $f(n)=A(n)$ 代入 Ennaoui-Selberg 恒等式 (2.7)，可得：

$$A(n)\Lambda_A(n)+(\Lambda_A*\Lambda_A)(n)=\left(\mu*A^2\right)(n) \tag{37}$$

现在，利用定理（3.2），若取 $g(n)=A(n)$，则有：

$$(\Lambda_{Ld}*A)(n)=A(n)Ld(n)-\frac{1}{2}\left(\Omega_2(n)+\Omega(n)\right) \tag{38}$$

将 $f=Ld$ 和 $g=A$ 代入推论 (2.4)，则有：

$$(1*A\Lambda_{Ld})=(1*Ld\Lambda_A)(n)=\frac{1}{2}\left(\Omega_2(n)+\Omega(n)\right) \tag{39}$$

定理 3.4. 对于每个整数 $n > 0$，有：

$$(\Lambda_A * \beta_k)(n) = A(n)\beta_k(n) - \beta_{k+1}(n) \tag{40}$$

证明。对于任意满足 $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ 的正整数 n，我们有：

$$\begin{aligned}
(\Lambda_A * \beta_k)(n) &= \sum_{d|n} \Lambda_A(d)\beta_k\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{p^\alpha || n} \sum_{i=1}^{i=\alpha} \Lambda_A(p^i)\beta_k\left(\frac{n}{p^i}\right) \\
&= \sum_{p^\alpha || n} \sum_{i=1}^{i=\alpha} p\beta_k\left(\frac{n}{p^i}\right) \\
&= \sum_{p^\alpha || n} \left(-p^{k+1} + p\sum_{i=1}^{i=\alpha} \beta_k(n)\right) \\
&= \sum_{p^\alpha || n} -p^{k+1} + \alpha p\beta_k(n) \\
&= \beta_k(n) \sum_{p^\alpha || n} \alpha p - \sum_{p^\alpha || n} p^{k+1} \\
&= \beta_k(n)A(n) - \beta_{k+1}(n)
\end{aligned}$$

□

定义 (6) 可视为一个广义冯·曼戈尔特函数。这一术语源于如下观察：对数是一个 L-加性函数，且 $h_{log}(n) = 1$；它满足通常的冯·曼戈尔特函数，其记作：

$$\Lambda(n) = \Lambda_{log}(n) = \begin{cases} \frac{log(p)}{h_{log}(p)} = log(p) & \text{if } n = p^k \text{ for some prime } p \text{ and integer } k \geq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

利用推论 (2.2) 和 (2.3)，冯·曼戈尔特函数的性质均成立，因此我们有

$$log = 1 * \Lambda \quad and \quad \Lambda = \mu * \log = -1 * \mu \log$$

4 狄利克雷级数中的广义冯·曼戈尔特函数

上文我们已经看到广义冯·曼戈尔特函数的许多基本性质。本文最后稍微转换一下视角，说明也可以用狄利克雷级数来研究广义冯·曼戈尔特函数。

式（4）中定义的狄利克雷卷积自然地出现在对狄利克雷级数（如黎曼ζ函数）的研究中。它用系数描述两个狄利克雷级数的乘积：

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(f*g)(n)}{n^s}\right) = \left(\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s}\right) \tag{41}$$

与黎曼ζ函数有关，或定义为：

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$$

这些函数在文献中得到了广泛研究（例如，参见 [2, 3, 4]）。
为方便后续讨论，我们引入 Froberg（1968年）中所述的素数ζ函数（例如，参见 [6]），记作 $P(s)$。其定义为：

$$P(s) = \sum_p \frac{1}{p^s}$$

在本节接下来的部分，我们将使用以下记号：

$$P_f(s) = \sum_p \frac{f(p)}{p^s - 1}$$

定理 4.1. 对于 $s \in \mathbb{C}$ suchthat $Re(s) > 1$，我们有：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\tau(n)\Omega(n)}{n^s} = 2\zeta^2(s)P_\Omega(s)$$

证明。设 $s \in \mathbb{C}$ 使得 $Re(s) > 1$，则利用推论（3.2），我们有：

$$(\Lambda_\Omega * \tau)(n) = \frac{1}{2}\tau(n)\Omega(n)$$

由公式（41），我们有：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\tau(n)\Omega(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{(\Lambda_\Omega * \tau)(n)}{n^s} = 2\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\tau(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_\Omega(n)}{n^s}\right)$$

由于（参见例如 [12]）：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta^2(s)$$

并且由推论（2.9），我们有：

$$P_\Omega(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_\Omega(n)}{n^s}$$

于是我们得出：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\tau(n)\Omega(n)}{n^s} = 2\zeta^2(s)P_\Omega(s)$$

□

定理 4.2. 对于满足 $Re(s) > max(1, 1+k)$ 的 $s \in \mathbb{C}$，我们有：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\Omega(n)\beta_k(n)}{n^s} = \zeta(s)P(s-k)\Big(P_\Omega(s)+1\Big)$$

证明. 设 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $Re(s) > Max(1, k+1)$，则利用定理（3.1），我们有 ：

$$(\Lambda_\Omega * \beta_k)(n) = \Omega(n)\beta_k(n) - \beta_k(n)$$

于是由公式（41），我们有：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\Omega(n)\beta_k(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{(\Lambda_\Omega * \beta_k)(n)}{n^s} + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_k(n)}{n^s} = \left(\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_k(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_\Omega(n)}{n^s}\right) + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_k(n)}{n^s}$$

由于（例如，参见 [12]）：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_k(n)}{n^s} = \zeta(s)P(s-k)$$

并且由推论（2.9），我们有：

$$P_\Omega(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_\Omega(n)}{n^s}$$

因此我们得出：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\Omega(n)\beta_k}{n^s} = \zeta(s)P(s-k)P_\Omega(s) + \zeta(s)P(s-k)$$

至此证明完成 □

定理 4.3. 对于满足 $Re(s) > max(1, k-1)$ 的 $s \in \mathbb{C}$，我们有：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{Ld(n)\beta_k(n)}{n^s} = \zeta(s)\Big(P(s-k)P_{Ld}(s) + P(s-k+1)\Big)$$

证明. 设 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $Re(s) > max(1, k-1)$，则由定理 (3.3) 可得：

$$(\Lambda_{Ld} * \beta_k)(n) = Ld(n)\beta_k(n) - \beta_{k-1}(n)$$

于是，由公式（41）可得：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{Ld(n)\beta_k(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{(\Lambda_{Ld} * \beta_k)(n)}{n^s} + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_{k-1}(n)}{n^s} = \left(\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_k(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_{Ld}(n)}{n^s}\right) + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_{k-1}(n)}{n^s}$$

由于（例如，参见 [12]）：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_k(n)}{n^s} = \zeta(s)P(s-k)$$

并且由推论（2.9）可得：

$$P_{Ld}(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_{Ld}(n)}{n^s}$$

于是我们得到：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{Ld(n)\beta_k}{n^s} = \zeta(s)P(s-k)P_{Ld}(s) + \zeta(s)P(s-k+1)$$

由此完成证明。 □

定理 4.4. 对于满足 $Re(s) > max(1, k+2)$ 的 $s \in \mathbb{C}$，我们有：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{A(n)\beta_k(n)}{n^s} = \zeta(s)\Big(P(s-k)P_{Ld}(s) + P(s-k-1)\Big)$$

证明. 设 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $Re(s) > max(1, k+2)$，则由定理（3.4）可得：

$$(\Lambda_A * \beta_k)(n) = A(n)\beta_k(n) - \beta_{k+1}(n)$$

则由公式（41）可得：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{A(n)\beta_k(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{(\Lambda_A * \beta_k)(n)}{n^s} + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_{k+1}(n)}{n^s} = \left(\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_k(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_A(n)}{n^s}\right) + \sum_{n\geq 1} \frac{\beta_{k+1}(n)}{n^s}$$

因为（例如，参见 [12]）：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\beta_k(n)}{n^s} = \zeta(s)P(s-k)$$

并且由推论（2.9）可得：

$$P_A(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\Lambda_A(n)}{n^s}$$

于是我们得到：

$$\sum_{n\geq 1} \frac{A(n)\beta_k}{n^s} = \zeta(s)P(s-k)P_A(s) + \zeta(s)P(s-k-1)$$

至此，证明完成。 □

5 结论：

与 L-加性函数 f 相关的冯·曼戈尔特函数 Λ_f 是解决许多算术函数的狄利克雷级数问题的另一种方法。

参考文献

[1] P. Haukkanen、J. K. Merikoski 和 T. Tossavainen。《算术导数与莱布尼茨加性函数》，《数论与离散数学札记》，24.3，（2018年）。[2] T. M. Apostol，《解析数论导论》，施普林格出版社，纽约（1976年）。[3] M.Lewinter 和 J.Meyer。《带编程的初等数论》，威立出版社，（2016年）。[4] Heng Huat Chan，《本科生解析数论》，世界科学出版公司，（2009年）。[5] I. Kiuchi、M. Minamide，《完全加性函数的狄利克雷卷积》。《整数数列杂志》17，文章编号14.8.7（2014年）。[6] Froberg, C.-E.《素数ζ函数》，《北欧信息处理期刊（BIT）》，8:187-202（1968年）。[7] K. ALLADI、P. ERDOS，《整数大素因子渐近行为》。《太平洋数学杂志》第82卷（第2期），518–528（1979年）。[8] P. J. McCarthy，《算术函数导论》，施普林格出版社，纽约（1986年）。[9] E. D. Schwab，《狄利克雷卷积与完全加性算术函数》，《新数学档案》13(2)，187–193（1995年）。[10] H. N. Shapiro，《数论导论》，Wiley InterScience，纽约（1983年）。[11] Merikoski, Jorma K.；Haukkanen, Pentti；Tossavainen, Timo，《有理数上的完全加性、完全乘性和莱布尼茨加性》，《整数》（2021年）。[12] Gould, H. W. 和 Shonhiwa, T.，《有趣的狄利克雷级数目录》，《密苏里数学科学杂志》，1;2-18（2008年）。