arXiv:2301.09707v1 [math.DS] 23 Jan 2023

具有指定 holonomy 的非退化全纯叶状结构芽

JAVIER RIBÓN 和 RUDY ROSAS

摘要

我们旨在刻画与全纯向量场非退化奇点的积分曲线相关联的整体单值映射。在二维情形中，这一描述众所周知，也是研究约化奇点的关键要素。二维情形中最复杂的情况对应于（Siegel）鞍点奇点。本文研究高维鞍点的类似问题。

我们证明，在任意维数下，任意全纯双全纯映射芽都可以实现为与鞍点奇点的一条积分曲线相关联的全纯映射。

一个自然的问题是：在给定全纯映射的情况下，能否指定向量场鞍点芽的线性部分？这个问题在二维中的答案已知是肯定的。我们将看到，在高维中情况并非如此。尽管如此，我们仍给出了一个正面结果，适用于满足某个自然条件的全纯映射。

1. 引言

我们考虑在$(\mathbb{C}^{n+1},0)$中由如下形式的系统定义的奇异全纯叶状结构芽

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= A\cdot y + G(x,y), \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $y=(y_1,\dots,y_n)$，函数 $G\colon(\mathbb{C}^{n+1},0)\to(\mathbb{C}^n,0)$ 是全纯的，且 $G(x,0)=0$，$dG(0)=0$，并且 $A\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$。容易验证，原点处的奇点是孤立的，复流形 $\{x=0\}$和 $\{y=0\}$ 在该叶状结构下是不变的。我们用 $\mathrm{Fol}(n+1)$ 表示上述叶状结构芽的集合。给定 $\mathcal{F}\in\mathrm{Fol}(n+1)$，不变流形$S\colon=\{y=0\}$ 的复维数为一，且 $S\backslash\{0\}$ 是 $\mathcal{F}$的正则叶。因此，我们可以考虑与原点周围一个小的正向

2020 数学主题分类.32S65, 34M35（主要分类）37F75, 34M04（次要分类）。关键词与短语。全纯向量场、向量场的奇点、叶状结构的整体单值化。

$S\backslash\{0\}$中的简单回路相关联的整体单值化。经过全纯共轭后，这个整体单值化是 Diff($\mathbb{C}^n$,0) 中形如以下形式的双全纯映射芽

$$y \mapsto e^{2\pi i A} \cdot y + \text{h.o.t.}$$

我们将此映射记为 Hol($\mathcal{F}$)，并称其为 $\mathcal{F}$的整体单值化，或系统 (1.1) 的整体单值化。这样我们就得到映射

$$\text{Hol}\colon \text{Fol}(n+1) \to \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0). \tag{1.2}$$

注意，若 Fol($n+1$) 中的两个叶状结构 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$ 由一个定义在原点邻域内且保持S的双全纯映射芽共轭，那么它们的整体单值化 Hol($\mathcal{F}$) 和 Hol($\mathcal{F}'$) 解析共轭。因此，Hol 诱导出一个映射 [Hol]，它将 Fol($n+1$) 和 Diff($\mathbb{C}^n$, 0) 的模空间联系起来，用于解析分类。因此，要描述 Fol($n+1$) 中叶状结构的解析模空间，研究映射 [Hol]的性质至关重要。本文证明以下定理。

定理 1. 映射 [Hol] 是满射。

若 $n=1$，这一结果可由 Martinet 和 Ramis 在 [7] 以及 Pérez-Marco 和 Yoccoz 在 [10]的工作推出。具体而言，我们从这些工作中得到以下定理。

定理 2. 设 $h(z) = bz + O(z^2)$ 是 Diff($\mathbb{C}$,0) 中的一个微分同胚，且$|b|=1$。那么，给定满足 $e^{2\pi i a} = b$的 $a<0$，微分同胚 h 在全纯共轭意义下，是如下形式的系统的整体单值化

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= a(y + \cdots). \end{aligned}$$

如果 $|b| \neq 1$，众所周知，形式为 $h(z) = bz + O(z^2)$ 的微分同胚总是可线性化的，因此 h 可作为线性系统的整体单值化得到

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= ay \end{aligned}$$

对于任意满足 $e^{2\pi i a} = b$的 $a \in \mathbb{C}$。

为了更精确地陈述定理 1，我们先引入一些定义。若 $A \in \text{GL}(n,\mathbb{C})$ 的所有特征值的实部均为负，则称其具有负谱。

注记 3。考虑形如 (1.1) 的系统，其中 A 具有负谱，$G(0) = 0$ 且 $dG(0) = 0$。由于虚轴将系统的特征值分成两组，即单元素集 $\{1\}$ 和 A的特征值集合，根据 Hadamard-Perron定理（见[4, 定理 7.1]），存在一个维数为 1、在原点处与 $\{y=0\}$ 相切的全纯不变流形 S。因此，我们可以假设经过全纯坐标变换后，该系统属于 Fol($n+1$)。所以，在负谱情形下，只需在 Fol($n+1$) 中研究解析模空间。

需要指出的是，对于 $n = 1$ 和 A 具有负谱的情形，映射 [Hol]是模空间之间的双射 [8], 见 [4, 定理 22.7]。因此，叶状结构的解析分类可归结为离散映射的类似问题。一般而言，尚不清楚 [Hol] 对于 $n \geq 2$是否为单射，尽管在这方面已有一些部分结果 [3], 另见 [11]。

定义 4. 设 A 是一个 $n \times n$ 复矩阵。我们可以假设，经过线性坐标变换后，其加性约当分解的半单部分 A_s （参见定义 7）具有如下形式： $A_s = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$。给定 $j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$和 $1 \leq k \leq n$，我们定义

$$R_{j;k} = R_{j_1 \ldots j_n;k} := \mu_k - j_1\mu_1 - \ldots - j_n\mu_n.$$

给定 $(j;\ k)$，满足 $j \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $|j| := j_1 + \ldots + j_n \geq 2$和 $1 \leq k \leq n$，若 $R_{j;k}$ 是正（分别为负、非正、非负）整数，则称其为$e^{2\pi iA}$ 的正共振 （分别为负、非正、非负共振）（相对于 A）。

我们证明以下定理及其直接推论。

定理 5. 考虑 $(\ hy) \ = e^{2\pi iA} \cdot y + h.o.t.$，其中 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 属于 $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$，且具有负谱。假设存在关于 A的 h 的一个形式正规形 $\tilde{h}$，且它没有负共振（属于 $e^{2\pi iA}$）。那么，微分同胚 h 在全纯共轭意义下，是形如 (1.1)的系统的整体单值化。

推论 6. 考虑 $(\ hy) \ = e^{2\pi iA} \cdot y + h.o.t.$，其中 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 属于 $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$，且具有负谱。假设 $e^{2\pi iA}$ 没有负共振。那么，微分同胚 h 在全纯共轭意义下，是形如 (1.1)的系统的整体单值化。

形式正规形和负共振的概念在定义 8 和 9 中引入。为说明这一情形，为简单起见，假设 $A = A_s = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$，一般情形将在后文˜讨论。注意，若 h在原点处具有如下形式的泰勒幂级数展开，则称其关于 A 处于形式正规形

$$\tilde{h}(y_1, \ldots, y_n) = \left(\sum_{|j| \geq 1} a_{j;1}\, y^j, \ldots, \sum_{|j| \geq 1} a_{j;n}\, y^j \right),$$

其中，任何满足 $R_{j;k} \notin \mathbb{Z}$ 的系数 $a_{j;k}$ 都为零。微分同胚

˜ h 总有一个形式正规形 h，也就是说， h 可通过一个线性部分为恒等式的形式微分同胚，共轭到某个处于形式正规形的 h。请注意，形式正规形通常并不唯一。不存在负共振这一条件，等价于要求：每当 $a_{j;k} \neq 0$ 时，都有$R_{j;k} \geq 0$。

定理 5 的适用范围非常广。例如，给定具有负谱的A，存在 $\nu \in \mathbb{N}$，使得任一负共振（j，k）的次数均为 $|j| \leq \nu$。因此，只要 h 可线性化到 ν 阶，我们就可以应用定理 5；特别地，若它是形式线性化的，也可以应用。

定理 2 是推论 6 的直接推论，因为在维数为 n =1 时，负谱意味着不存在负共振。第 4 节将解释负共振条件的必要性。

我们来证明定理 1 是定理 5 的直接推论。为此，只需证明：给定 $B \in$ GL($n, \mathbb{C}$)，存在 $A \in$ GL($n, \mathbb{C}$)，使得 $e^{2\pi i A} = B$ 和 B 相对于 A不存在负共振。首先，取任意满足 $e^{2\pi i A} = B$ 的$m \in \mathbb{N}$复矩阵 A，使得 $e^{2\pi i A} = B$。对于每个$m \in \mathbb{N}$，令 A_m: $= A - mI$，其中 I是单位矩阵。由于 A和 mI 可交换，我们有

$$e^{2\pi i A_m} = e^{2\pi i A} e^{-2\pi i m I} = B.$$

此外，显然，若 $m >> 1$，则 A_m 具有负谱，且 B 相对于 A_m 不存在负共振。

本文结构如下。第 2 节介绍微分同胚和标准形的一些已知性质，并研究负共振的概念。第 3 节陈述并证明关于奇异全纯叶状结构的一种延拓性质。第 5 节通过为没有负共振的标准形微分同胚构造模型叶状结构，解决任意有限阶的整体变差问题实现。第 6 节概述定理 5 的证明，并将其归结为命题 21、22 和 23 的证明。第 7 节研究定义在角扇区上的某类函数，并为这些函数定义原点处的阶。最后，命题 21 在第 8 节中证明，命题 22 和 23 则在第 9 节中证明。我们在第 10 节给出主要结果的一个应用。

2. 局部微分同胚的性质与共振

设 Diff($\mathbb{C}^n$,0) 为双全纯映射芽 $f: U \to V$，满足 f(0) $= 0$，其中 U 和 V 是 $\mathbb{C}^n$ 中原点的开邻域。其 $\widehat{\ }$形式完备化 Diff($\mathbb{C}^n$,0)，即所谓的形式微分同胚群，由如下形式的泰勒幂级数展开组成

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \left(\sum_{|j| \geq 1} a_{j;1}\, y^j, \ldots, \sum_{|j| \geq 1} a_{j;n}\, y^j \right)$$

其在原点处的线性部分

$$df(0)(y_1, \ldots, y_n) = \left(\sum_{|j| = 1} a_{j;1}\, y^j, \ldots, \sum_{|j| = 1} a_{j;n}\, y^j \right)$$

属于 GL($n, \mathbb{C}$)。对于任意 $k \in \mathbb{N}$，我们有

- 第 k 阶喷流 $j^k(f\circ g)$ 取决于 $j^k f$和 $j^k g$，其中 $f,g\in$ Diff($\mathbb{C}^n$,0)，并且

- 对于 $f\in$ Diff($\mathbb{C}^n$, 0)， k阶喷流 $j^k(f^{-1})$取决于 $j^k f$。

因此，复合运算在Diff($\mathbb{C}^n$, 0)中定义了一个群运算，使Diff($\mathbb{C}^n$, 0)成为Diff($\mathbb{C}^n$, 0)的子群。

2.1. **Jordan-Chevalley分解与标准形**。给定 $f\in$Diff($\mathbb{C}^n$, 0)，它可以唯一地表示为以下形式： $f=f_s\circ f_u$ 其中

- f_s， $f_u\in\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n,0)$;
- $f=f_s\circ f_u=f_u\circ f_s$;
- f_s 形式共轭于一个对角线性映射，并且
- f_u 是幺幂的，即 spec(df_u(0)) $=\{1\}$。

这相当于线性算子的乘法 Jordan 分解在局部微分同胚中的对应形式 [6], 另见 [12]。如果 f是对角线性映射，我们就称其处于形式正规形 。如果 f_s 处于形式正规形，且 $f\in$ Diff($\mathbb{C}^n$,0) 与 f 形式共轭于 f，那么我们称 $f\in$ Diff($\mathbb{C}^n$,0) 是 f 的形式正规形。

固定满足 $e^{2\pi iA}=df$(0) 的 $A\in$GL($n,\mathbb{C}$)。在实现问题中，我们希望将 f 实现为形式为 (1.1) 的一维向量场的整体单值化，因此需要同时研究该向量场与 f的共振。因此，为了引入一个考虑了 A 作用的 f 形式正规形概念，十分方便。

定义 7. 给定一个 $n\times n$ 复矩阵 M，令 $M=M_s+M_N$为 M 的加性约当分解，即将其表示为一组彼此对易的线性算子之和，其中 M_s 可对角化，而 M_N 是幂零的。

定义 8. 如果存在 $\psi\in$ Diff($\mathbb{C}^n$,0)，使得

- ψ 将 f 共轭到 $\tilde{f}$，且 $d\psi$(0) 将 A 共轭到 $\tilde{A}$，
- A_s是对角矩阵 diag($\mu_1,\ldots,\mu_n$)，并且
- $\tilde{f}_s$具有形式 $\tilde{f}_s(y_1,\ldots,y_n)=(\lambda_1 y_1,\ldots,\lambda_n y_n)$，其中 $\lambda_j=e^{2\pi i\mu_j}$。

通过考虑一个将 A_s对角化的线性共轭，然后用一个切于恒等映射的形式微分同胚将 f_s共轭到 $(\lambda_1 y_1,\ldots,\lambda_n y_n)$，可以得到一个形式正规形。请注意，$f$ 关于 A的形式正规形不一定唯一。

2.2. **共振**。 我们可以将 f 写成如下形式

$$\tilde{f}(y_1,\ldots,y_n)=\left(\sum_{|j|\geq 1}a_{j;1}\,y^j,\ldots,\sum_{|j|\geq 1}a_{j;n}\,y^j\right)=\sum_{|j|\geq 1,\ ,1\leq k\leq n}a_{j;k}\,y^j\,e_k$$

其中， j遍历多重指标（$j_1,\ldots,j_n$）， $\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$满足 $|j|:=j_1+\ldots+j_n\geq 1$, $y^j=y_1^{j_1}\ldots y_n^{j_n}$，且 e_k是 $\mathbb{C}^n$标准基的第 k个元素。

定义 9. 如果 $a_{j;k} \neq 0$，我们称（$j;k$）是 f 的一个共振。

考虑定义 8 中的 f 和 A。如果$a_{j_1 j_2 \dots j_n;k} \neq 0$，由于 $f_s \circ f_u = f_u \circ f_s$，我们有

$$(y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n} e_k) \circ \tilde{f}_s \equiv \tilde{f}_s \circ (y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n} e_k),$$

这等价于等式$\lambda_k \lambda_1^{-j_1} \dots \lambda_n^{-j_n} = 1$。然后，由于

$$e^{2\pi i R_{j_1 \dots j_n;k}} = e^{2\pi i(\mu_k - j_1\mu_1 - \dots - j_n\mu_n)} = \lambda_k \lambda_1^{-j_1} \dots \lambda_n^{-j_n},$$

$a_{j_1 j_2 \dots j_n;k} \neq 0$ 蕴含$R_{j_1 \dots j_n;k} \in \mathbb{Z}$。根据构造， f 中满足 $|j| = 1$ 的所有共振（j； k）都满足 $R_{j;k} = 0$。共振 $R_{j;k}$ 的符号在实现定理 5 中起着重要作用。

注记 10. 必要时，我们可以假设，给定关于 A的 f 的形式正规形 f，矩阵 A 处于若尔当标准形，同时保持共振的符号。更准确地说，存在一个线性映射 L ，它将 A 共轭到一个若尔当标准形矩阵，并且与 A_s可交换。注意，

$$\left[y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n} \frac{\partial}{\partial y_k}, \mu_1 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \mu_n y_n \frac{\partial}{\partial y_n} \right] = R_{j;k} y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n} \frac{\partial}{\partial y_k}$$

并记 $W = L_*(y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n} \frac{\partial}{\partial y_k})$。那么，由于 $L\tilde{A}_s = \tilde{A}_s L$,

$$\left[W, \mu_1 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + \mu_n y_n \frac{\partial}{\partial y_n} \right] = [W, \tilde{A}_s] = R_{j;k} W.$$

因此，与下列非零单项式相关的共振

$$L \circ y^j e_k \circ L^{-1} \quad \text{or} \quad L_* \left(y_1^{j_1} \dots y_n^{j_n} \frac{\partial}{\partial y_k} \right)$$

都等于 $R_{j;k}$。因此，若（$j;k$）是正共振（分别为负、非正、非负），则 $L \circ y^j e_k \circ L^{-1}$ 的所有非零单项式都是正的（分别为负、非正、非负）。特别地， f 有负共振，当且仅当 $L \circ \tilde{f} \circ L^{-1}$ 有负共振。

2.3. 指数映射。 本小节的论述是经典内容，收录于此是为了完整起见。更多细节可见于[12]。若 X 是 $(\mathbb{C}^n, 0)$ 中的形式向量场，且它是保持极大理想不变的环 $\mathbb{C}[[y_1, \dots, y_n]]$ 的一个导子，则称其为形式向量场。它可表示为

$$b_1(y_1, \dots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + b_n(y_1, \dots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_n}$$

其中，对于 $1 \leq j \leq n$， $b_j = X(y_j)$。若其一阶喷流 $j^1 X = \sum_{j=1}^n j^1 b_j \, \partial/\partial_j$ 是幂零线性算子，则称 X 为幂零。我们用 $X^k(f)$ 表示将算子 X 作用于 f k 次所得的结果。

我们可以定义形式向量场 X 的指数 exp。给定解析向量场 X，即满足 X preserves$\mathbb{C}\{y_1, \dots, y_n\}$ 的形式向量场，我们考虑其流 $\phi(t, y) = (\phi_1(t, y) \dots, \phi_n(t, y))$。它满足

$$\frac{\partial^k \phi_j(t,y)}{\partial t^k}(0,y) = X^k(y_j)(y)$$

对所有 $1 \le j \le n$ 和 $k \ge 1$，在 $\mathbb{C}^n$ 中 0 的某个邻域内成立。若 y 是 X 的奇异点，则结果显然成立；若 y 正则，则由泰勒公式可得，因为每个正则向量场在局部都等价于一个坐标向量场。因此，我们得到

$$\phi_j(t,y) = y_j + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \frac{X^k(y_j)}{k!}$$

对任意 $1 \le j \le n$。根据定义， X 的指数 exp(X) 是其时刻 1 的映射 $\phi(1,y)$。

exp 的定义可推广到形式向量场。事实上，给定形式向量场 $X \in (\mathbb{C}^n, 0)$，其指数 exp(X) 是形式微分同胚 $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$，满足

$$f_j = y_j + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k(y_j)}{k!} \tag{2.1}$$

对任意 $1 \le j \le n$。下一个结果是经典的。

命题 11 (参见， [7, 2] [4, 定理 3。17])。 指数映射在形式幂零向量场与形式幺幂微分同胚之间建立了一一对应。

注 12。 给定一个形式幺幂微分同胚 f，其指数为 f 的唯一形式幂零向量场称为它的无穷小生成元。有一个公式可以计算 f 的无穷小生成元 log f。令 Θ 为 $\mathbb{C}[[y_1, \dots, y_n]]$ 中由 $\Theta(h) = h \circ f - h$ 定义的线性算子。我们有

$$(\log f)(y_j) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\Theta^k(y_j)}{k} \tag{2.2}$$

对任意 $1 \le j \le n$。这个公式是通过注意到 $\mathbb{C}[[y_1, \dots, y_n]]$ 中由 f 定义的算子 $h \mapsto h \circ f$ 具有 id $+\Theta$ 的形式，并考虑 log$(1+z)$ 的展开而得到的。

3. 奇异全纯叶状结构

设 M 是一个维数为 $m \ge 2$的复流形。 M 上的曲线奇异全纯叶状结构 $\mathcal{F}$ 可由一组 $\{(U_i, Z_i)\}_{i \in I}$定义，其中$\{U_i\}_{i \in I}$ 是 M 的一个开覆盖，且每个 Z_i 都是定义在 U_i 上的全纯向量场，其奇异集的余维为 ≥ 2；并且在每个 $U_i \cap U_j$上，向量场 Z_i 和 Z_j 相差一个处处不为零的全纯函数因子。若点 $p \in M$ 是某个 Z_i的奇点，则它是 $\mathcal{F}$ 的奇点。因此， $\mathcal{F}$ 的奇点集 Sing($\mathcal{F}$) 是一个余维为 ≥ 2的解析簇。将 $\mathcal{F}$限制到 $M \setminus$ Sing($\mathcal{F}$)

是经典意义下复维数为一的全纯叶状结构。反过来，众所周知，若 $V \subset M$ 是余维为 ≥ 2 的解析簇，且 $M\backslash V$上存在复维数为一的全纯叶状结构 $\mathcal{F}$，则 $\mathcal{F}$可延拓到 M，成为曲线奇异全纯叶状结构。若 $V \subset M$是任意一个真子簇，则有以下延拓判据。

命题 13. 设 M 是一个复维数为 $m \geq 2$的复流形，$V \subset M$ 是一个真子簇，且 $\mathcal{F}$ 是 $M\backslash V$上的一维全纯叶状结构。假设 $\mathcal{F}$可延拓至 M，成为一个 C^1叶状结构 $\mathcal{F}$。那么 $\mathcal{F}$ 是全纯的。

证明。任取 $p \in V$。若 U 是 M中 p 的一个小邻域，我们可以直接假设 $p \in U \subset \mathbb{C}^m$。给定 $x \in U$，$\mathcal{F}$在x处的切线 $T_x\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{C}^m$的一个实二维子空间。由于 $T_x\mathcal{F}$ 关于 $x \in U$ 连续变化，且当 $x \in U\backslash V$时 $T_x\mathcal{F}$是一条复直线，我们可推知$T_x\mathcal{F}$ 对所有 $x \in U$都是一条复直线。因此，我们可以假设

$$T_p\bar{\mathcal{F}} = [1 : 0 : \cdots : 0] \in \mathbb{P}^{m-1}$$

并且，如有必要缩小 U，我们可以令 $T_x\mathcal{F}$, $x \in U$ 足够接近 $[1 : 0 : \cdots : 0]$，从而可以写成

$$T_x\bar{\mathcal{F}} = [1 : \theta_1(x) : \cdots : \theta_{m-1}(x)],$$

其中

$$\theta_1, \ldots, \theta_{m-1} \colon U \to \mathbb{C}$$

是连续的。因此，由于函数 θ_j 需要在 $U\backslash V$ 上全纯——因为 $\mathcal{F}|_{U\backslash V}$ 是全纯的——可知 $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ 确实在 U 上全纯。因此，$\mathcal{F}|_U$ 由以下全纯向量场生成

$$x \mapsto (1, \theta_1(x), \ldots, \theta_{m-1}(x)),$$

因此，$\mathcal{F}$ 在 $p \in V$ 附近是全纯且正则的。 □

我们主要关注由孤立奇点附近的全纯向量场定义的叶状结构，因此考虑由向量场 Z 在 $0 \in \mathbb{C}^m$ 的邻域 U 上定义的奇异全纯叶状结构 $\mathcal{F}$，它在原点处有唯一奇点。若解析曲线 $S \subset U$ 经过原点，且 S 与 Z 相切，则称 $S \subset U$ 是 $\mathcal{F}$ 的分离曲线。在这种情况下，$S\backslash\{0\}$ 包含在将 $\mathcal{F}$ 限制到 $U\backslash\{0\}$ 所得到的正则叶状结构的一条叶中。因此，根据定义，S 的整体单值化是与 $S\backslash\{0\}$ 中任意一条围绕原点、正向定向的简单回路相关联的全纯映射。相差一个全纯共轭后，该全纯映射是 Diff($\mathbb{C}^{m-1}$, 0) 中的一个芽。

4. 负共振作为实现的障碍

在本节中，我们给出一个例子 $h(y) = e^{2\pi iA} \cdot y + \text{h.o.t.}$，其属于 Diff($\mathbb{C}^2$, 0)，且 h 不是任何形式为 (1.1) 的系统的全纯映射。这个现象源于 $dh(0)$ 存在负共振。

我们取

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

并按下式定义 $h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$

$$h(y_1, y_2) = (-y_1 + y_2^2, -iy_2) = (-y_1, -iy_2) \circ (y_1 - y_2^2, y_2).$$

我们有 $e^{2\pi i A} = dh(0)$。注意，$(-y_1, -iy_2)$ 与 $(y_1 - y_2^2, y_2)$ 可交换，因此 $h_s = (-y_1, -iy_2)$ 和 $h_u = (y_1 - y_2^2, y_2)$。特别地，关于 A，h 处于形式正规形。

命题 14. 不存在形如 *(1.1)* 的系统，其整体单值化与 h 全纯共轭。

证明。为导出矛盾，假设这样的系统存在，且由以下向量场给出

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i+j\geq 1,\, k\geq 0} a_{kij} x^k y_1^i y_2^j \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i+j\geq 1,\, k\geq 0} b_{kij} x^k y_1^i y_2^j \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

考虑与该向量场相关联的富克斯型方程

$$x\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i+j=1,\, k\geq 0} a_{kij} x^k y_1^i y_2^j \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i+j=1,\, k\geq 0} b_{kij} x^k y_1^i y_2^j \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

由于其特征值之差 $-3/2 - (-1/4)$ 不是整数，因此它可通过规范变换 $g \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^3, 0)$ 在解析意义下共轭，即 $x \circ g \equiv x$ 且 $g(x, 0, 0) \equiv (x, 0, 0)$，变为

$$X_1 := x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{2} y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{4} y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

特别地，我们可以假设 $X - X_1$ 的所有系数都属于理想 $(y_1, \ldots, y_n)^2$。接下来，我们要通过考虑形如 $\exp(W)$ 的坐标变换，消去 y 中的二次项，其中

$$W = \sum_{k\geq 0,\, i+j=2} \alpha_{kij} x^k y_1^i y_2^j \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{k\geq 0,\, i+j=2} \beta_{kij} x^k y_1^i y_2^j \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

事实上，我们有

$$\exp(W)^* X - X_1 = (X - X_1) + [W, X] + \frac{1}{2!}[W, [W, X]] + \ldots =$$

$$\sum_{i+j=2} (a_{kij} + \alpha_{kij} R_{kij;2}) x^k y_1^i y_2^j \frac{\partial}{\partial y_1} + \sum_{i+j=2} (b_{kij} + \beta_{kij} R_{kij;3}) x^k y_1^i y_2^j \frac{\partial}{\partial y_2} + O(y^3),$$

其中 $\mu_1 = 1$、$\mu_2 = -3/2$ 和 $\mu_3 = -1/4$ 以及 $R_{kij;2}$、$R_{kij;3}$ 如定义 4 中所引入。我们只需解以下方程

$$a_{kij} + \alpha_{kij} R_{kij;2} = 0 \quad \text{and} \quad b_{kij} + \beta_{kij} R_{kij;3} = 0$$

对所有 $k \geq 0$ 和 $i + j = 2$ 均成立。它们有唯一解，因为可以直接看出，对所有 $k \geq 0$ 和 $i + j = 2$，$R_{kij;2} \neq 0$ 和 $R_{kij;3} \neq 0$ 均成立。由于

$|R_{kij;2}|$ 和 $|R_{kij;3}|$ 均远离零， W 是一个解析向量场。

总而言之，经过坐标变换，我们可以假设 X 具有 $X_1 + O(y^3)$的形式。这类系统的整体单值化具有如下形式

$$(-y_1, -iy_2) + O(y^3)$$

因此， h在解析意义下共轭于一个微分同胚，其二阶喷流等于$(-y_1, -iy_2)$。由此可得 $j^2 h_u \equiv \mathrm{id}$，但这与$j^2 h_u(y_1, y_2) = (y_1 - y_2^2, y_2)$矛盾。□

注记 15。 特征值 $\lambda_1 = -1$ 和 $\lambda_2 = -i$ 恰有一个二次共振，对应于单项式 $y_2^2 e_1$。我们对 A的选择，以及由此对 $\mu_1 = -3/2$ 和 $\mu_2 = -1/4$的选择，使得该共振为负，因为$\mu_1 - 2\mu_2 = -1$。因此，定理 5 需要不存在负共振。

注记 16。 $df(0)$ 的正共振可以由形如 (1.1) 的向量场“共享”。事实上，若 $R_{j;k} = m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，正共振 $y^j e_k$ 与 $x^m y^j \frac{\partial}{\partial y_k}$相关联，而 $x^m y^j \frac{\partial}{\partial y_k}$是形如 (1.1) 的向量场的共振单项式，因为

$$\left[x^m y^j \frac{\partial}{\partial y_k}, x\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{l=1}^{n} \mu_l y_l \frac{\partial}{\partial y_l} \right] = (R_{j;k} - m) x^m y^j \frac{\partial}{\partial y_k} = 0.$$

这一性质对于证明定理 5 至关重要。缺少这一性质，便无法在负谱情形下实现整体单值化。例如，在命题 14 的例子中，由于 y 中不存在阶为 1 或 2 的正共振，我们可以将 y 变量中的系统线性化至 2 阶；但由于整体单值化映射也具有这一性质，因此它与 f 的负共振 $y^2 e_1$ 的存在不相容。

5. 正共振全纯的构造

本节证明一个实现结果：在（正）共振情形下，可实现至任意阶。

命题 17。设有 $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ 和 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$，满足$A_s = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$， $df(0) = e^{2\pi i A}$ 以及 $f_s(y_1, \ldots, y_n) = (\lambda_1 y_1, \ldots, \lambda_n y_n)$。假设 A 具有负谱，且 f 没有负共振。那么，给定 $\nu \in \mathbb{N}$，存在一个形如 (1.1) 的多项式系统，其整体单值化 h（在 $\{x = 1\}$ 上）满足 $j^\nu h = j^\nu f$。

证明。 固定 $\nu \in \mathbb{N}$。注意， f 已经是形式正规形。记

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \left(\sum_{|j|\geq 1} c_{j;1}\, y^j, \ldots, \sum_{|j|\geq 1} c_{j;n}\, y^j \right) = \sum_{|j|\geq 1,\, 1\leq k\leq n} c_{j;k}\, y^j\, e_k.$$

由于 f 的所有共振均为非负数，我们可以定义由下式给出的 $F \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$

$$F(x, y_1, \ldots, y_n) = \left(x, \sum_{1 \le |j| \le \nu} c_{j;1}\, x^{R_{j;1}} y^j, \ldots, \sum_{1 \le |j| \le \nu} c_{j;n}\, x^{R_{j;n}} y^j \right),$$

参见定义 4。考虑线性向量场

$$X := x\frac{\partial}{\partial x} + A \cdot y \frac{\partial}{\partial y},$$

其半单部分等于

$$X_s = x\frac{\partial}{\partial x} + A_s \cdot y \frac{\partial}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

注意，$j^1 F = \exp(2\pi i X)$以及 F 的所有非零单项式都是向量场 X_s的共振项，即 $F^* X_s = X_s$。

这里，我们应用 [13, 定理1.4] ，得到一个形式向量场 Z ，使得 $F = \exp(2\pi i Z)$且 $j^1 Z = X$。为了理解 Z的性质，我们在 [13] 中描述其构造。F的乘法 Jordan 分解 $F = F_s \circ F_u$ 为

$$F_s(x, y_1, \ldots, y_n) = (x, \lambda_1 y_1, \ldots, \lambda_n y_n) \quad \text{and} \quad F_u = F_s^{-1} \circ F.$$

令 $\log F_u$ 为 F_u 的无穷小生成元（见注 12）。 F_u 的所有非零单项式相对于 X_s都是共振的。根据引理 2，$\log F_u$ [13, 也具有这一性质。7], 即 $[X_s, \log F_u] \equiv 0$。我们定义 $Z = X_s + \log_{2\pi i}^{F_u}$，因此，由于 X_s与 $\log F_u$可交换，

$$F = F_s \circ F_u = \exp(2\pi i X_s) \circ \exp(\log F_u) = \exp(2\pi i X_s + \log F_u) = \exp(2\pi i Z).$$

由于 $x \circ F_u \equiv x$，由方程 (2.2) 得到 $(\log F_u)(x) \equiv 0$，进而 $Z(x) \equiv x$。记 (y) 为 $\mathbb{C}[[x, y_1, \ldots, y_n]]$的理想 $(y_1, \ldots, y_n)$。理想的等式 $(y) \circ F_u = (y)$ 意味着，由方程 (2.2) 可得 $(\log F_u)(y) \subset (y)$，因此 $Z(y) \subset (y)$。现在，很容易验证，性质$Z(x) \equiv x$、 $Z(y) \subset (y)$ 和 $[Z, X_s] \equiv 0$ 蕴含 Z 具有如下形式

$$Z = x\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{1 \le |j|} a_{j;1}\, x^{R_{j,1}} y^j \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \sum_{1 \le |j|} a_{j;n}\, x^{R_{j,n}} y^j \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

此外，由于 $F_u - \exp(2\pi i A_u) \cdot y = O(|y|^2)$，我们得到

$$\log F_u - 2\pi i A_u \cdot y \frac{\partial}{\partial y} = O(|y|^2)$$

将方程 (2.2) 应用于 F_u 和 $\exp(2\pi i A_u) \cdot y$ ，并逐项比较各项之和。因此 $j^1 Z = X$。考虑多项式向量场

$$Z_\nu = x\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{1 \le |j| \le \nu} a_{j;1}\, x^{R_{j,1}} y^j \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \sum_{1 \le |j| \le \nu} a_{j;n}\, x^{R_{j,n}} y^j \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

设 $S=\{y=0\}$。由 Z_ν 生成的叶状结构沿 $S\setminus\{0\}$ 中任意一个正向定向的小型简单回路的整体单值化，在横截面 $\{x=x_0\}$ 上计算，其中 $x_0\neq 0$，等于 $\exp(2\pi i Z)|_{x=x_0}$。该构造以及包含关系 $Z(y)\subset(y)$ 表明

$$j^\nu \exp(2\pi i Z_\nu)|_{x=1}\equiv j^\nu F|_{x=1}\equiv (1,j^\nu f),$$

也就是说，Z_ν 在 $\{x=1\}$ 上的整体单值化映射与 f 具有相同的 ν 阶喷流。 □

注 18。该方法提供了系统 (1.1) 的一个略具选择性的版本。事实上，$G(x,y)$ 的所有分量都属于理想 $(y)^2$。

6. 主要构造

本节将概述定理 5 的证明，并借助一些在后续各节中证明的命题来组织证明。

定理 5 由以下命题推出。

命题 19. 设 $h\in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^n,0)$ 和 $A\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 如定理 5 中所述。则存在一个形如 (1.1) 的系统，其在某个超平面 $\{x=x_0\}$, $x_0\in\mathbb{C}^*$ 中计算得到的整体单值化为

$$(x_0,y)\mapsto (x_0,h(y)).$$

本节余下部分将概述该命题的证明，为此我们引入一些简化。根据假设，存在一个形式坐标变换 ψ，使得 h 和 A 分别变为 $\mathfrak{h}'$ 和 $\mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A}_s=\mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$，$\mathfrak{h}'$ 关于 $\mathcal{A}$ 处于正规形，且 $\mathfrak{h}'$ 没有负共振。注意，我们可以假设，对于任意选取的 $\epsilon>0$，$|\mathcal{A}_N|\le\epsilon$（这可以通过线性坐标变换实现，使 $\mathcal{A}$ 处于若尔当标准形，且对角线外的非零系数等于 ϵ，而非通常的 1，见注释 10）。固定 $\delta_0,\delta_1>0$，使得对每个 $1\le j\le n$ 都有 $-\delta_1<\mathrm{Re}(\mu_j)<-\delta_0$。于是，通过选取充分小的 $\epsilon>0$，我们得到

$$(-\delta_1+\epsilon)|y|^2<\mathrm{Re}\langle \mathcal{A}\cdot y,y\rangle<(-\delta_0-\epsilon)|y|^2 \tag{6.1}$$

对所有 $y\in\mathbb{C}^n$，其中 $\langle\,,\,\rangle$ 表示标准厄米内积。

取定 $\nu\in\mathbb{N}$，使得

$$\delta_0(\nu+1)-\delta_1\ge 4.$$

根据命题 17，存在一个形式为 (1.1) 的多项式向量场 Z，其中以 $\mathcal{A}$ 代替 A，其在 $\{x=1\}$ 上的整体单值化映射 $\mathfrak{h}_0$ 满足 $j^\nu\mathfrak{h}_0\equiv j^\nu\mathfrak{h}'$。考虑坐标变换 $\phi\in\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^n,0)$，使得 $j^\nu\phi\equiv j^\nu\psi$，我们得到与 h 解析共轭的 $\mathfrak{h}\in\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^n,0)$，且满足 $j^\nu\mathfrak{h}\equiv j^\nu\mathfrak{h}'\equiv j^\nu\mathfrak{h}_0$。作为命题 19 证明的主要部分，我们处理关于 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathcal{A}$ 的类似问题。

具有指定整体单值化的抽象叶状结构。我们首先考虑由 Z 定义的奇异全纯叶状结构 $\mathcal{L}$，其在 $\{x=1\}$ 上的整体单值化等于 $\mathfrak{h}_0$。

本小节余下部分所述操作的启发式思路，可以与对叶状结构 $\mathcal{L}|_{\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^n}$ 进行如下手术相比较：首先，我们沿实超曲面 $(0,+\infty)\times\mathbb{C}^n$ 切开 $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^n$，从而形成两个与 $(0,+\infty)\times\mathbb{C}^n$ 微分同胚的面。然后，我们将它们重新粘合，同时注意保持叶状结构不变，但此时产生的整体单值化为 $\mathfrak{h}$，而非 $\mathfrak{h}_0$。构造开始时，我们考虑微分同胚

$$\xi := \mathfrak{h}_0\circ\mathfrak{h}^{-1}, \tag{6.2}$$

它显然满足 $j^\nu\xi\equiv\mathrm{id}$。考虑割平面

$$\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$$

以及割圆盘

$$\widehat{\mathbb{D}}(2)=\{x\in\widehat{\mathbb{C}}\colon |x|<2\}.$$

如下所述，对于以 $\mathbb{C}^n$ 原点为中心的某个球 B，我们可以定义唯一的全纯映射

$$\Phi\colon \widehat{\mathbb{D}}(2)\times B\to\widehat{\mathbb{D}}(2)\times\mathbb{C}^n$$

具有以下性质：

(1) Φ 具有 $\Phi=(x,\phi(x,y))$ 的形式；(2) $\phi(1,y)=\xi(y)$；(3) Φ使叶状结构 $\mathcal{L}$ 保持不变。

来看一下。令 $\mathcal{L}'$ 为 $\mathcal{L}$ 在

$$\widehat{\mathbb{C}}\times\mathbb{C}^n.$$

根据 $x_0\in\widehat{\mathbb{D}}(2)$，若 $y_0\in\mathbb{C}^n$ 足够小，则叶状结构 $\mathcal{L}'$ 中经过 (x_0,y_0) 的叶与超平面 $\{x=1\}$ 交于点

$$\exp(-\log x_0\, Z)(x_0,y_0),$$

其中 log 表示对数的主值分支。若 $|y_0|$ 足够小，则点 $\xi(\exp(-\log x_0\, Z)(x_0,y_0))$ 有良好定义，经过该点的 $\mathcal{L}'$ 的叶将与超平面 $\{x=x_0\}$ 交于点

$$\exp(\log x_0 Z)(\xi(\exp(-\log x_0\, Z)(x_0,y_0))).$$

我们将看到（引理 26），只要 $|y_0|$足够小，该点实际上就有良好定义，且与 $x_0\in\widehat{\mathbb{D}}(2)$ 无关。因此，若 B 是以 $\mathbb{C}^n$ 的原点为中心、半径足够小的球，我们便可定义

$$\Phi(x,y)=\exp(\log x Z)(\xi(\exp(-\log x\, Z)(x,y))) \tag{6.3}$$

对于 $x\in\widehat{\mathbb{D}}(2)$ 和 $y\in B$。那么不难看出，Φ具有形式$\Phi=(x,\phi(x,y))$，并满足上述性质。我们还可以定义ϕ_{-1}，使得

$$(x,\phi_{-1}(x,y))=\exp(\log x Z)(\xi^{-1}(\exp(-\log x\, Z)(x,y))) \tag{6.4}$$

^对于 $x \in \mathbb{D}$(2) $y \in B$。此外，不难验证以下恒等式

$$\phi(x, \phi_{-1}(x, y)) = y, \quad \phi_{-1}(x, \phi(x, y)) = y, \quad x \in \widehat{\mathbb{D}}(2), y \in B. \tag{6.5}$$

考虑开集

$$\Delta_1 = \mathbb{D}\backslash[0, -i], \qquad \Delta_2 = \mathbb{D}\backslash[0, i],$$

它们覆盖穿孔单位圆盘 $\mathbb{D}^*$。我们将集合 $\Delta_1 \times B$ 和$\Delta_2 \times B$ 视为互不相交，并按以下方式将它们粘合，构造一个复流形 $\mathcal{M}$：

(1) 若 $x \in \mathbb{D}^*$、$\mathrm{Re}(x) < 0$ 且 $y \in B$，则将 $(x, y) \in \Delta_1 \times B$ 与 $(x, y) \in \Delta_2 \times B$等同；(2) 若 $x \in \mathbb{D}^*$、$\mathrm{Re}(x) > 0$、 $y \in B$ 且 $\phi(x, y) \in B$，则将 $(x, y) \in \Delta_1 \times B$ 与 $(x, \phi(x, y)) \in \Delta_2 \times B$等同。

经过粘合过程后，集合 $\Delta_1 \times B$ 和 $\Delta_2 \times B$ 成为 $\mathcal{M}$中的开集，分别记为 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$。开集 $\mathcal{M}_1$ 带有一个自然坐标图 ψ_1: $\mathcal{M}_1 \to \Delta_1 \times B$，使得 $\psi_1(p) = (x, y)$ 当且仅当 p 来自粘合过程之前的点 $(x, y) \in \Delta_1 \times B$。同理，我们有一个自然坐标图 ψ_2: $\mathcal{M}_2 \to \Delta_2 \times B$。坐标变换

$$\Psi = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \colon \psi_1(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2) \to \psi_2(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)$$

本质上由上述粘合规则给出：集合

$$\psi_1(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2) \subset \Delta_1 \times B$$

是互不相交的开集之并

$$\mathcal{D}^- = \{(x, y) \in \Delta_1 \times B \colon \mathrm{Re}(x) < 0\}$$

and

$$\mathcal{D}^+ = \{(x, y) \in \Delta_1 \times B \colon \mathrm{Re}(x) > 0,\ \phi(x, y) \in B\}.$$

Then

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{if } (x, y) \in \mathcal{D}^- \\ (x, \phi(x, y)) & \text{if } (x, y) \in \mathcal{D}^+. \end{cases} \tag{6.6}$$

回顾一下， $\Phi = (x, \phi(x, y))$保持叶状结构 $\mathcal{L}$的叶不变。这意味着，粘合过程遵循叶状结构 $\mathcal{L}$，因此流形$\mathcal{M}$ 继承了一个全纯叶状结构，它由$\mathcal{M}_1$上的拉回 $\psi_1^*(\mathcal{L})$以及 $\mathcal{M}_2$上的拉回 $\psi_2^*(\mathcal{L})$给出。我们用 $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$表示这个叶状结构。在坐标 ψ_1 和 ψ_2 中均由方程 $y = 0$ 定义的集合是 $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$的一片叶，记作 L。以下命题由 $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$的构造立即得出。

命题 20. 叶 L 在 $\mathcal{M}$ 中是闭的，且与穿孔圆盘 $\mathbb{D}^*$全纯等价。此外， L 的全纯映射与 $\mathfrak{h}$全纯共轭。

将邻域 $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$**实现为实叶状结构**。第二步，我们的目标是构造一个特定的 C^∞ 微分同胚，将 $\mathcal{M}$ 与 $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ 的一个邻域对应起来，并使其包含垂直超平面

$$E\colon = \{0\} \times \mathbb{C}^n$$

已移除。该微分同胚诱导出一个光滑叶状结构，它将在 C^3 类中延拓为 $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ 的一个邻域上的叶状结构。具体而言，我们有以下命题。

命题 21. 存在 L 在 $\mathcal{M}$ 中的一个开邻域 $\mathcal{M}'$、$0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ 的一个邻域 U，以及一个光滑微分同胚 $F\colon \ \mathcal{M}' \to U\backslash E$，使得以下性质成立：

(1) 对于某个 $r > 0$，集合

$$U(r)\colon = \{(x, y) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C}^n \colon |y| < r\}$$

包含于 U中

(2) 叶 L 经 F 映射到 $\mathbb{D}^* \times \{0\}$.

(3) F 在集合之外是全纯的

$$\psi_1^{-1}\left(\left\{-\frac{\pi}{4} \le \arg(x) \le \frac{\pi}{4}, \quad y \in B\right\}\right).$$

(4) 用 $\mathcal{F}^U$ 表示 $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ 经 F 的推前。那么，存在定义在 $U(r)$ 上的两个向量场 Y_1 和 Y_2，使得：

(a) 它们属于 C^2类；(b) 它们都与 $U(r)\backslash E$上的 $\mathcal{F}^U$ 相切；(c) 它们在 $U(r)\backslash\{0\}$上实线性无关；(d) 它们与垂直超平面 E相切；(e) 它们在原点处奇异，并且有

$$dY_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{bmatrix}.$$

特别是，这类向量场的存在意味着叶状结构 $\mathcal{F}^U$ 可延拓为 $U(r)\backslash\{0\}$上的 C^3 叶状结构，且该结构使 E保持不变。我们也用 $\mathcal{F}^U$ 表示这个延拓。

的全纯实现 $\mathcal{F}^U$。现在，我们的目标是找到合适的坐标，使叶状结构 $\mathcal{F}^U$ 变为全纯。$\mathcal{M}$ 的近复结构在 $U\backslash E$上诱导出一个 C^∞ 近复结构，我们将其记为 J。构造的关键步骤是将 J延拓到 $U(r)$。

命题 22. 近复结构 J 可延拓至 $U(r)$，成为一个 C^2 类的近复结构。此外，该结构在 $E \cap U(r)$ 的每个点处都与典范复结构重合。

在此命题之后，我们可以应用 Nijenhuis 和 Woolf 关于近复结构可积性的下述定理。

定理 23 ([9]). 设 J 是流形 X上的一个近复结构，该流形的实维数为 $2m$ ，且属于 $C^{k,\alpha}$类，其中 k 是自然数，且$\alpha \in (0,1)$。设此结构的挠率 $[J,J]$ 为零。那么， X 中的每个点都有一个邻域，在该邻域上存在 $g_1,\dots,g_m$ 个 $C^{k+1,\alpha/m}$类函数，它们构成与 J相容的复坐标系。

因此，借助此定理，我们证明以下命题。

命题 24。 存在一个形如

$$U' = \{|x| < r', |y| < r'\}, \quad r' > 0$$

以及一个微分同胚 G: $U' \to \Omega$， $G(0) = 0$，其中Ω 是$0 \in \mathbb{C}^{n+1}$的一个邻域，使得以下性质成立：

(1) G 属于 C^2, $^{1/(n+1)}$ 类，特别是 C^2。(2) G 将 J 结构从 $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ 的一个邻域映至 $\mathbb{C}^{n+1}$的典范近复结构。(3) G分别将 $\{y = 0\} \cap U'$映至 $\{y = 0\} \cap \Omega$ ，并将 $E \cap U'$映至 $E \cap \Omega$。(4) $dG(0) = \mathrm{id}$。(5) G将 $U' \backslash \{0\}$ 上的叶状结构 $\mathcal{F}^U$映为$\Omega\backslash\{0\}$上的全纯叶状结构$\mathcal{F}$ 。(6) 叶状结构 $\mathcal{F}$ 由Ω上的全纯向量场 Y 生成，其在原点处有唯一奇点，并且

$$dY(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{A} \end{bmatrix}.$$

(7) 曲线 $S = \{y = 0\}$ 在 Y 下是不变的，且其整体单值化与 $\mathfrak{h}$全纯共轭。

现在，我们可以证明命题 19。

命题 19 的证明。 设 $\mathcal{F}$ 和 Y 如前一个命题所给。通过对 y 变量作线性坐标变换，不妨设

$$j^1 Y = x\frac{\partial}{\partial x} + A \cdot y\frac{\partial}{\partial y} \tag{6.7}$$

根据命题 24 的 (6)。当 $x_0 \in \mathbb{C}^*$ 足够小时， $S = \{y = 0\}$ 的整体单值化可在 $\{x = x_0\}$ 上计算，且具有如下形式

$$h_S \colon (x_0, y) \mapsto (x_0, g(y)),$$

其中 g 是 Diff($\mathbb{C}^n$, 0) 中的一个局部微分同胚。由命题 24 的 (7)， g 与 $\mathfrak{h}$ 全纯共轭，因此也与 h全纯共轭。因此，存在一个局部微分同胚 $\varphi \in$ Diff($\mathbb{C}^n$, 0)，使得

$$\varphi \circ g \circ \varphi^{-1} = h.$$

由于矩阵 $d\varphi$(0) 可逆，我们可以找到 $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$，使得

$$e^{x_0 B} = d\varphi(0).$$

那么，如果 φ 在一个球上定义良好且为单射

$$B_\epsilon = \{y \in \mathbb{C}^n \colon |y| < \epsilon\}, \quad 0 < \epsilon < 1,$$

容易验证，全纯映射

$$H \colon (x, y) \mapsto \Big(x, e^{(x-x_0)B} \cdot \varphi(y)\Big)$$

满足以下性质：

(1) H 在 $\mathbb{C} \times B_\epsilon$上是单射。(2) $H(x_0, y) = (x_0, \varphi(y))$。(3) $dH(0) = \mathrm{id}$。

特别是，集合

$$\Omega \cap (\mathbb{C} \times B_\epsilon)$$

被 H 双全纯地映到 $\mathbb{C}^{n+1}$中的开集 $\tilde{\Omega}$上。由 H 推前 $\mathcal{F}$ 的推前 $\tilde{\mathcal{F}}$ 定义了 $\tilde{\Omega}$ 上的全纯叶状结构 $\mathcal{F}$，它由全纯向量场 Y生成，而该向量场是向量场Y的推前。回顾命题 21 的 (4)，$\mathcal{F}^U$ 叶 $\{y = 0\}$ 和 $\{x = 0\}$ 是不变的。因此，由命题 24 的 (3) 可知，$\{y = 0\}$ 和 $\{x = 0\}$ 也在 $\mathcal{F}$ 下不变。于是，由于 H 保持 $\{y = 0\}$ 和 $\{x = 0\}$，我们得出 $S = \{y = 0\}$ 和 $\{x = 0\}$ 在 $\mathcal{F}$下不变。特别是，

$$\tilde{S} \colon = H(S)$$

$\tilde{S}$ 被 $\tilde{\mathcal{F}}$保持不变。由于 H 保持集合 $\{x = x_0\}$不变，因此在 $\{x = x_0\}$ 中计算的 S的整体单值化为

$$\begin{aligned}(x_0, y) \mapsto H \circ h_S \circ H^{-1}(x_0, y) &= H \circ h_S(x_0, \varphi^{-1}(y)) \\ &= H(x_0, g \circ \varphi^{-1}(y)) \\ &= (x_0, \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}(y)) \\ &= (x_0, h(y)).\end{aligned}$$

由方程 (6.7) 和 H 的性质 (3)，我们可知

$$j^1\tilde{Y} = x\frac{\partial}{\partial x} + A \cdot y\frac{\partial}{\partial y}.$$

结合 $\{y = 0\}$ 以及 $\{x = 0\}$ 被 Y 保持不变这一事实，我们可以得出，$\tilde{\mathcal{F}}$ 由如下形式的全纯系统定义

$$\begin{aligned}x' &= x(1 + u(x, y)) \\ y' &= A \cdot y + v(x, y),\end{aligned}$$

其中 $u(0, 0) = 0$，$dv(0) = 0$ 且 $v(x, 0) = 0$。因此，乘以因子 $1/(1 + u)$ 后，我们得出 $\tilde{\mathcal{F}}$ 也由如下形式的系统定义

$$\begin{aligned}x' &= x \\ y' &= A \cdot y + G(x, y),\end{aligned}$$

其中 $G(x,0) = 0$ 且 $dG(0) = 0$。因此命题 19 得证。 □

本节最后我们来证明引理 26；在本节开头曾用它来说明 (6.3) 是良定义的。首先，固定 $x_0 \in \mathbb{D}(2)$，并考虑 $y_0 \in \mathbb{C}^n$。回想一下， Z 是形如 (1.1) 的系统，其中用$\mathcal{A}$ 代替 A。如果曲线

$$w(t) = (x_0^{1-t}, y(t)) = \exp(-t \log x_0 Z)(x_0, y_0),$$

它是该系统的一个解

$$w' = -\log x_0 Z(w), \tag{6.8}$$

对所有 $t \in [0,1]$ 均有定义，我们定义 $f_{x_0}(y_0) = y(1)$。函数 f_{x_0} 表示从 $\{x = x_0\}$ 到 $\{x = 1\}$ 的 $\mathcal{L}'$ 的全纯映射，它是 $0 \in \mathbb{C}^n$ 邻域之间的双全纯映射，并且固定原点。

引理 25. 存在常数 $r, c_0, c_1 > 0$，使得 f_x 对所有 $x \in \mathbb{D}(2)$ 均在$\widehat{\ }$球 $\{|y| < r\}$ 上有定义，并且

$$c_1 |x|^{\delta_1} |u - v| \le |f_x(u) - f_x(v)| \le c_0 |x|^{\delta_0} |u - v| \tag{6.9}$$

$\widehat{\ }$只要 $x \in \mathbb{D}(2)$， $|u| < r$ 且 $|v| < r$。

证明。如果我们将 $x = \rho e^{i\theta}$, $\rho \in (0, 2)$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ 表示出来，就可以把 $f := f_x$ 视为依赖于参数 $(\rho, \theta) \in (0, 2) \times (-\pi, \pi)$（连续地）。这样做的优点是，$f$ 可以扩展为一族依赖于参数 $(\rho, \theta) \in (0, 2] \times [-\pi, \pi]$ 的双全纯映射，且这种依赖是连续的。因此，若固定 $\varepsilon \in (0, 2)$，由 $[\varepsilon, 2] \times [-\pi, \pi]$ 的紧性不难看出，存在 $r_\varepsilon, c_\varepsilon > 0$，使得对于所有满足 $|x| \ge \varepsilon$ 的 $x \in \mathbb{D}(2)$，映射 f_x 都定义在球 $\{|y| < r_\varepsilon\}$ 上，且

$$(1/c_\varepsilon)|u - v| \le |f_x(u) - f_x(v)| \le c_\varepsilon |u - v|$$

$\widehat{\ }$只要 $x \in \mathbb{D}(2)$， $|x| \ge \varepsilon$, $|u| < r_\epsilon$ 且 $|v| < r_\epsilon$。因此，只需证明将限制条件改为 $|x| \le \varepsilon$ 时同样成立。

我们选择 $\varepsilon = e^{-2\pi|\mathcal{A}|/\delta_0}$。取 $r \in (0, 1]$。固定满足 $|x_0| \le \varepsilon$ 的 $x_0 \in \widehat{\mathbb{D}}(2)$。考虑满足 $|u_0|$、 $|v_0| < r$ 的 u_0、 $v_0 \in \mathbb{C}^n$，并假设曲线

$$(x_0^{1-t}, u(t)) = \exp(-t \log x_0 Z)(x_0, u_0) \quad \text{and}$$
$$(x_0^{1-t}, v(t)) = \exp(-t \log x_0 Z)(x_0, v_0)$$

定义在区间 $[0, s]$ 上，且满足 $s \in (0, 1]$。此外，假设对所有 $t \in (0, s]$，都有 $|u(t)|$、 $|v(t)| < r$。那么，由于 $|x_0| \le 1$，上述曲线包含在 $\{|x| \le 1, |y| \le 1\}$ 中。回顾一下——根据注记（18）——函数 G 在集合 $\{|x| \le 1, |y| \le 1\}$ 中满足如下形式的不等式：$|\partial G / \partial y| \le c|y|$，其中某个 $c > 0$。那么

$$|G(x_0^{1-t}, u(t)) - G(x_0^{1-t}, v(t))| \le cr|u(t) - v(t)|, \quad t \in [0, s].$$

令 $g(t) = |u(t) - v(t)|^2$。则 $g' = 2\mathrm{Re}\langle u' - v'$，因此，利用 u 和 v 是 (6.8) 的解这一事实，可得

$$g'(t) = 2\,\mathrm{Re}\langle -\log x_0 \mathcal{A}(u - v), u - v\rangle + Q,$$

其中

$$|Q| = \left|2\,\mathrm{Re}\langle -\log x_0[G(x_0^{1-t},u) - G(x_0^{1-t},v)], u-v\rangle\right| \le 2cr(-\log|x_0|+\pi)|u-v|^2.$$

另一方面，由（6.1）可知

$$(\log|x_0|(\delta_1-\epsilon)-\pi|\mathcal{A}|)|y|^2 \le \mathrm{Re}\langle -\log x_0\,\mathcal{A}\cdot y, y\rangle \le (\log|x_0|(\delta_0+\epsilon)+\pi|\mathcal{A}|)|y|^2$$

对所有 $y \in \mathbb{C}^n$ 均成立。因此，若我们固定 r，使得 $r < \min\{\epsilon/c, |\mathcal{A}|/c\}$，则得到

$$2\eta_1 g(t) \le g'(t) \le 2\eta_0 g(t), \quad t \in [0,s],$$

其中 $\eta_1 = \delta_1 \log|x_0| - 2\pi|\mathcal{A}|$ 且 $\eta_0 = \delta_0 \log|x_0| + 2\pi|\mathcal{A}| < 0$。因此，我们得出

$$e^{\eta_1 t}|u_0 - v_0| \le |u(t) - v(t)| \le e^{\eta_0 t}|u_0 - v_0|, \quad t \in [0,s], \tag{6.10}$$

已知 u 和 v 有定义，且在 $[0,s]$ $(s \le 1)$ 上 $|u|, |v| < r$。下面证明，事实上，$u(t)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，并且对所有 $t \in [0,1]$，$|u(t)| < r$ —— v 也同样如此。否则，要么解 $(x(t)\ u(t))$ 定义在一个极大区间 $[0,s)$ 上，且 $s \le 1$；要么 u 在 $[0,1]$ 上有定义，并且存在 $s_0 \in [0,1]$，使得对所有 $t \in [0,s_0)$，$|u(t)| < r$ 且 $|u(s_0)| = r$。在第一种情形下，由于 (x,u) 是系统 (6.8) 的极大解，它不可能包含在紧集 $\{|x| \le 1, |y| \le r\}$ 中，因此同样存在 $s_0 \in [0,1]$，使得对所有 $t \in [0,s_0)$，$|u(t)| < r$ 且 $|u(s_0)| = r$。若在 (6.10) 中令 $v_0 = 0$，从而有 $v \equiv 0$，则可得，对所有 $t \in [0,s_0]$，$|u(t)| \le e^{\eta_0 t}|u_0|$，于是 $|u(s_0)| \le |u_0| < r$，这与假设矛盾。

因此，我们证明了整体单值化 f_x 在 $\{|y| < r\}$ 上有定义，并将 η_0 和 η_1 的值代入 (6.10)，得到

$$e^{-2\pi|\mathcal{A}|}|x_0|^{\delta_1}|u_0 - v_0| \le |u(1) - v(1)| \le e^{2\pi|\mathcal{A}|}|x_0|^{\delta_0}|u_0 - v_0|,$$

至此，证明完成。 □

最后，我们可以证明前面陈述的引理 26。

引理 26. 存在 $\delta > 0$ 和 $C > 0$，使映射 Φ 和 Φ^{-1} 有定义且满足

$$\max(|\phi(x,y) - y|, |\phi_{-1}(x,y) - y|) \le C|x|^{\delta_0(\nu+1)-\delta_1}|y|^{\nu+1}$$

当 $x \in \mathbb{D}(2)$ 且 $|y| < \delta$ 时。

证明。考虑引理 25 中的记号。通过缩小 r，我们可以假设 $\{|y| < c_0 2^{\delta_0} r\}$ 包含在 ξ 的定义域中。取 $\delta = \sigma r$，其中 $\sigma \in (0,1)$ 将在稍后定义。设 $x_0 \in \mathbb{D}(2)$ 且 $|y_0| < \delta$。由于 $\delta < r$，由引理 25 可知，$f_{x_0}(y_0)$ 有定义，且 $|f_{x_0}(y_0)| \le c_0|x_0|^{\delta_0}|y_0| < c_0 2^{\delta_0} r$，因此 $\xi \circ f_{x_0}(y_0)$ 有定义。为了证明 $\phi(x_0,y_0)$ 有定义，只需证明 $\xi \circ f_{x_0}(y_0)$ 属于 f_{x_0} 的像；在这种情况下，我们有 $\phi(x_0,y_0) = f_{x_0}^{-1} \circ \xi \circ f_{x_0}(y_0)$。令 $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^n$ 为开

以 y_0为中心、半径为 $(1-\sigma)r$ 的球。由于 $\overline{\mathcal{B}} \subset \{|y| < r\}$，由 (6.9) 可得

$$|f_{x_0}(\zeta) - f_{x_0}(y_0)| \geq r_0 \colon = c_1|x_0|^{\delta_1}(1-\sigma)r, \quad \zeta \in \partial\mathcal{B}.$$

于是， $f_{x_0}(\partial\mathcal{B})$ 与球 B_0 不相交： $= \{|y - f_{x_0}(y_0)| < r_0\}$ ，因此 $f_{x_0}(\partial\mathcal{B})$ 与 B_0 中任意一点的链接数是常数。这个数等于一，因为微分同胚 $f_{x_0}|_{\mathcal{B}}$ 取值为 $f_{x_0}(y_0) \in B_0$。于是 $B_0 \subset f_{x_0}(\mathcal{B})$，因此只需证明 $\xi \circ f_{x_0}(y_0) \in B_0$ ，或者等价地，证明

$$\frac{|\xi \circ f_{x_0}(y_0) - f_{x_0}(y_0)|}{r_0} < 1.$$

由于 $j^\nu\xi \equiv \mathrm{id}$，我们可以假设存在一个常数 $c_\xi > 0$ ，使得$|\xi(y) - y| \leq c_\xi|y|^{\nu+1}$。于是

$$\begin{aligned}\frac{|\xi \circ f_{x_0}(y_0) - f_{x_0}(y_0)|}{r_0} \leq \frac{c_\xi|f_{x_0}(y_0)|^{\nu+1}}{r_0} &\leq \frac{c_\xi\left(c_0|x_0|^{\delta_0}|y_0|\right)^{\nu+1}}{c_1|x_0|^{\delta_1}(1-\sigma)r} \\ &\leq \frac{c_\xi c_0^{\nu+1}2^{(\nu+1)\delta_0-\delta_1}r^\nu\sigma^{\nu+1}}{c_1(1-\sigma)},\end{aligned}$$

$\widehat{}$，当 σ 取得足够小时，该值小于 1。最后，令 $x \in \mathbb{D}$(2) 且$|y| < \delta$。我们已证明 $\phi(x,y) = f_x^{-1} \circ \xi \circ f_x(y)$ 定义良好；由证明可知 $\phi(x,y) \in \mathcal{B}$，从而 $|\phi(x,y)| < r$。于是，若令$u = \phi(x,y)$，并将 $v = y$ 代入 (6.9)，便得到

$$c_1|x|^{\delta_1}|\phi(x,y) - y| \leq |\xi \circ f_x(y) - f_x(y)| \leq c_\xi|f_x(y)|^{\nu+1} \leq c_\xi\left(c_0|x|^{\delta_0}|y|\right)^{\nu+1},$$

也就是说,

$$|\phi(x,y) - y| \leq c_1^{-1}c_\xi c_0^{\nu+1}|x|^{\delta_0(\nu+1)-\delta_0}|y|^{\nu+1}.$$

$|\phi_{-1}(x,y) - y|$ 的不等式可用类似的方法得到。 □

7. 特殊函数类

设 $-\pi \leq a < b \leq \pi$, $r_1, r_2 \in (0, +\infty]$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，并考虑集合$V(a, b, r_1, r_2, n)$: $= \{(x,y) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \colon a < \arg(x) < b, |x| < r_1, |y| < r_2\}$若 $a \neq -\pi$ 或 $b \neq \pi$ 且

$$V(-\pi, \pi, r_1, r_2, n) \colon = \{(x,y) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \colon |x| < r_1, |y| < r_2\}.$$

定义 27。设 $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ，并考虑一个 C^∞ 映射

$$f \colon V(a, b, r_1, r_2, n) \to \mathbb{R}^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

我们称 f 的阶为 (α, p)（在原点处），并记为$f \in O_{\alpha,\ p}$若给定 $k \in \mathbb{Z}_{0 \leq k \leq p}$ ，且给定 g 一个 f 的 k 阶偏导数，函数

$$|x|^{k-\alpha}g(x,y)$$

在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的原点附近有界。我们称 f 的阶为 α，记作 $f \in O_\alpha$，如果对于任意 $p \in \mathbb{N}$，它的阶都是 (α, p)。

命题 28. 若 $f\colon\ V(a,\ b,\ r_1,\ r_2,\ n)\to\mathbb{R}^m$ 的阶为 $(\alpha,\ p)$，则
(1) f 的阶为(α',p')，当 $\alpha'\le\alpha$ 且 $p'\le p$时；并且(2) f 的偏导数的阶为$(\alpha-1,p-1)$，若 $p\ge 1$。

该命题直接由上述定义得出，因此证明留给读者。

命题 29. 设 $f_1,f_2\colon V(a,b,r_1,r_2,n)\to\mathbb{R}^m$ 的阶分别为(α_1,p_1)和(α_2,p_2)，并令 $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$ 且 $p=\min(p_1,p_2)$。
(1) 则 f_1+f_2 的阶为(α,p)；(2) 若 $m=1$，则 f_1f_2 的阶为$(\alpha_1+\alpha_2,p)$；(3) 若 $m=1$ 且 $\alpha_2>0$，则 $f_1/(1+f_2)$ 的阶为(α_1,p)。

证明。断言 (1) 很容易验证，因此我们只处理 (2) 和 (3)。我们对 p 作归纳。容易看出，当 $p=0$ 时，(2) 成立。假设 (2) 对 $p=k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 成立。设 $f_1,f_2\colon V\to\mathbb{R}$ 分别为 (α_1,p_1) 阶和 (α_2,p_2) 阶，且满足 $p=k+1$。由于 f_1f_2 显然是 $(\alpha_1+\alpha_2,0)$ 阶，为证明 f_1f_2 是 $(\alpha_1+\alpha_2,k+1)$ 阶，只需证明 f_1f_2 的每个偏导数都是 $(\alpha_1+\alpha_2-1,k)$ 阶。设 g 是 f_1f_2的一个偏导数。那么 $g=f_1'f_2+f_1f_2'$，其中 f_i'是 f_i的一个偏导数，且 $i=1,2$。由命题 28，我们有 $f_1'\in O_{\alpha_1-1,p_1-1}$ 以及 $f_2\in O_{\alpha_2,p_2-1}$，因此根据归纳假设，$f_1'f_2\in O_{\alpha_1+\alpha_2-1,k}$。同理，$f_1f_2'\in O_{\alpha_1+\alpha_2-1,k}$，由断言 (1) 可得 $g\in O_{\alpha_1+\alpha_2-1,k}$。现在，鉴于断言 (2)，要证明 (3)，只需证明当 $\alpha_2>0$时，$1/(1+f_2)$ 是 $(0,p_2)$ 阶。对此作归纳证明。显然，当 $g\in O_{\beta,p},\beta>0$ 且 $p=0$时，$1/(1+g)\in O_{0,p}$。假设当 $g\in O_{\beta,p},\ \beta>0$ 且 $p=k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$时，$1/(1+g)\in O_{0,p}$。任取满足 $\beta>0$ 的 $g\in O_{\beta,k+1}$。则 $1/(1+g)\in O_{0,0}$，因此，为得到 $1/(1+g)\in O_{0,k+1}$，只需证明 $1/(1+g)$ 的每个偏导数都是 $(-1,k)$ 阶。$1/(1+g)$ 的一个偏导数具有形式 $h=-g'/(1+g)^2,$，其中 g' 是 g的一个偏导数。由于 $g\in O_{\beta,k}$，根据归纳假设，我们有 $1/(1+g)\in O_{0,k}$，从而 $1/(1+g)^2\in O_{0,k}$。于是，由于 $g'\in O_{\beta-1,k}$，由 (2) 可得$h\in O_{\beta-1,k}\subset O_{-1,k}$。□

命题 30. 考虑一个 C^∞ 映射

$$f\colon V(-\pi,\pi,r_1,r_2,n)\to\mathbb{R}^m,\quad m\in\mathbb{N}$$

类为 (α,p) 且满足 $\alpha>0$。设 $k\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ 满足 $k<\alpha$ 和 $k\le p$。那么 f 可延拓为某个集合 $\{|x|<r_1'\}\times\{|y|<r_2'\}$ 上的 C^k 函数，其直到 k 阶的导数都在 $\{x=0\}$上消失。

注意，f 的任意 g 阶不超过 k 的导数，都可通过定义 $g(0,y)\equiv 0$，连续延拓为 $\{x=0\}$，因为 $f\in O_\alpha$ 且 $\alpha>k$。因此，该命题可由以下引理直接得出。

引理31。设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个开子集，且 $M\subset U$ 是一个余维为 ≥ 1的真嵌入 C^1 流形。设 $f\colon\ U\backslash M\to\mathbb{R}^n$ 属于类

。假设 f 及其偏导数连续延拓至 U。则 f 可延拓为 U，且属于 C^1类。

证明。令 $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ 为 f 到 U的延拓。根据假设，只需证明：给定 $p \in M$，我们可以在 p 周围找到一个 C^1 坐标系 $(x_1, \dots, x_m)$，使得 f 在 p 处的偏导数存在，并且在 p的某个邻域内连续。考虑仿射坐标，使标准酉向量 $e_1, \dots, e_m$ 在 p处与 M 横截，并在 p的某个邻域内固定 $j \in \{1, \dots, m\}$ 和 $q \in M$。只需证明

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j}(q) = \lim_{x \to q} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \quad j = 1, \dots, m.$$

由于 e_j 在 q处与 M 横截，当 $t \in \mathbb{R}^*$ 足够小时，欧几里得线段 $[q, q + te_j]$ 仅在 q处与 M相交。因此，若令 $f = (f_1, \dots, f_m)$ 和 $f = (f_1, \dots, f_m)$，根据中值定理，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\bar{f}(q + te_j) - \bar{f}(q)}{t} &= \left(\frac{\bar{f}_1(q + te_j) - \bar{f}_1(q)}{t}, \dots, \frac{\bar{f}_m(q + te_j) - \bar{f}_m(q)}{t} \right) \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(w_1), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(w_m) \right),\end{aligned}$$

其中 $w_1, \dots, w_m$ 是开线段中的点

$$(q, q + te_j) \subset U \backslash M.$$

于是，由于当 t 趋于 0 时，点 $w_1, \dots, w_m$ 趋于 q，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \frac{\bar{f}(q + te_j) - \bar{f}(q)}{t} &= \left(\lim_{x \to q} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x), \dots, \lim_{x \to q} \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) \right) \\ &= \lim_{x \to q} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x),\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

命题 32. 设

$$f\colon V(a, b, r_1, r_2, n) \to \mathbb{C}^m$$

是全纯的，并且对于某个 $\alpha \in \mathbb{R}$，函数 $|x|^{-\alpha}|f(x, y)|$ 在原点附近有界。那么，如果

- $[a', b'] \subset (a, b)$ *or*
- $a' = a = -\pi$ *and* $b' = b = \pi$,

f 在 $V(a', b', r_1, r_2, n)$ 上的限制的阶为 α。

证明。考虑第一种情况，第二种情况更简单。不失一般性，我们可以假设存在 $c > 0$，使得

$$|x|^{-\alpha}|f(x, y)| \le c \text{ on } V\colon = V(a, b, r_1, r_2, n). \tag{7.1}$$

令 $r > 0$ 使得

$$2r < \min\{r_1, r_2\}, \tag{7.2}$$

考虑集合

$$U\colon = V(a', b', r, r, n) \subset V$$

并令

$$\delta\colon U \to \partial V$$

为到 V 边界的距离。给定 $\mathfrak{z} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \in U$，由于点 $(0, \mathfrak{y})$ 属于 ∂V，我们得到

$$\delta(\mathfrak{z}) \leq |\mathfrak{x}| < r. \tag{7.3}$$

此外，我们可以找到 $\mathfrak{z}_\partial = (\mathfrak{x}_\partial, \mathfrak{y}_\partial) \in \partial V$ 使得

$$\delta(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}_\partial - \mathfrak{z}|.$$

若 $|\mathfrak{x}_\partial| = r_1$，利用 (7.2) 可得

$$\delta(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}_\partial - \mathfrak{z}| \geq |\mathfrak{x}_\partial - \mathfrak{x}| \geq |\mathfrak{x}_\partial| - |\mathfrak{x}| \geq r_1 - r > r,$$

这与 (7.3) 矛盾。同理可得 $|\mathfrak{y}_\partial| \neq r_2$。于是只剩下以下几种可能：

(1) $\arg(\mathfrak{x}_\partial) = a$;
(2) $\arg(\mathfrak{x}_\partial) = b$;
(3) $\mathfrak{x}_\partial = 0$。

因此，由于 $\arg(\mathfrak{x}) \in (a', b')$，在上述第一种情形下，我们有

$$\delta(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{z}_\partial - \mathfrak{z}| \geq |\mathfrak{x}_\partial - \mathfrak{x}| \geq |\mathfrak{x}| \Big| \sin\big(\arg(\mathfrak{x}_\partial) - \arg(\mathfrak{x})\big) \Big| \geq |\mathfrak{x}| |\sin(a - a')|.$$

类似地，在第二种情形下，我们有

$$\delta(\mathfrak{z}) \geq |\mathfrak{x}| |\sin(b - b')|.$$

最后，在第三种情形下，我们容易看出

$$\delta(\mathfrak{z}) = |\mathfrak{x}|.$$

因此，若

$$\epsilon\colon = \min\Big\{ |\sin(a - a')|, |\sin(b - b')|, 1 \Big\},$$

我们得出

$$\delta(\mathfrak{z}) \geq \epsilon |\mathfrak{x}|, \quad \mathfrak{z} \in U. \tag{7.4}$$

另一方面，给定 $\mathfrak{z} \in U$，令 $B_\mathfrak{z} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 为以 $\mathfrak{z}$为中心、半径为 $\delta(\mathfrak{z})/2$的球。根据定义，球 $B_\mathfrak{z}$ 包含于 V，因此 f 在 $B_\mathfrak{z}$ 上有定义，并由 (7.1) 得，

$$|f(x, y)| \leq c|x|^\alpha, \quad (x, y) \in B_\mathfrak{z}. \tag{7.5}$$

若 $(x, y) \in B_\mathfrak{z}$，利用 (7.3) 可得

$$|x| \leq |\mathfrak{x}| + \delta(\mathfrak{z}) \leq 2|\mathfrak{x}|,$$

因此，由 (7.5) 可得

$$|f(x, y)| \leq 2^\alpha c |\mathfrak{x}|^\alpha, \quad (x, y) \in B_\mathfrak{z}. \tag{7.6}$$

因此，根据柯西导数估计，给定 $k \in \mathbb{N}$，存在一个常数 $c(k) > 0$，它仅依赖于 k，使得对于 f 的任意 g 阶偏导数 k，

$$|g(\mathfrak{z})| \leq c(k)\frac{2^{\alpha}c|\mathfrak{x}|^{\alpha}}{(\delta(\mathfrak{z})/2)^{k}}. \tag{7.7}$$

因此，由此以及（7.4）可得

$$|\mathfrak{x}|^{k-\alpha}|g(\mathfrak{z})| \leq c(k)\frac{2^{\alpha}c}{(\epsilon/2)^{k}}, \quad \mathfrak{z} \in U, \tag{7.8}$$

这表明 $f|_{U}$ 的阶为 α。 □

引理 33. 设 $\rho\colon \ [a,b] \to \mathbb{R}$ 属于 C^{∞} 类，其中 $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$。考虑定义在集合上的函数 f（z）$= \rho(\arg(z))$

$$V = \{z \in \mathbb{C}\colon a < \arg(z) < b\}.$$

那么 f 的阶为 0。

证明。 我们首先证明

$$\arg\colon V \to \mathbb{R}$$

的阶为 0。由于该函数有界，只需证明其偏导数的阶为 -1。因此，既然

$$\frac{\partial \arg}{\partial x}(z) = \operatorname{Im}(1/z), \quad \frac{\partial \arg}{\partial y}(z) = \operatorname{Re}(1/z), \quad z = x + iy,$$

只需证明函数 $1/z$ 在 V 上的阶为 -1，这直接由命题 32 得出。下面证明 $f = \rho \circ \arg$ 的阶为 0。由于 f 有界，我们只需处理 f的 $k \in \mathbb{N}$ 阶偏导数。固定 $k \in \mathbb{N}$，令 g为 f的 k 阶偏导数。不难看出，g 可以表示为有限项求和

$$g(z) = \sum_{j} \rho^{(k_j)}\big(\arg(z)\big)u_{j1}u_{j2}\cdots u_{jk_j}, \tag{7.9}$$

其中

(1) $k_j \in \{1,\dots,k\}$; (2) u_{jl} 是 arg(z) 的 p_{jl} 阶偏导数，其中 $l = 1$，...
...，k_j; (3) $p_{j1} + p_{j2} + \cdots p_{jk_j} = k$。

由于函数 arg(z) 的阶为 0，对于每个 $l = 1$，....., k_j，函数 $|z|^{p_{jl}}u_{jl}$ 在原点附近有界。于是

$$(|z|^{p_{j1}}u_{j1})\cdots\big(|z|^{p_{jk_j}}u_{jk_j}\big)$$

在原点附近有界，也就是说，

$$|z|^{k}u_{j1}\cdots u_{jk_j}$$

在原点附近有界，因此

$$|z|^{k}\rho^{(k_j)}\big(\arg(z)\big)u_{j1}\cdots u_{jk_j}$$

在原点附近有界，因为 $\rho^{(k_j)}$ 有界。因此，由（7.9）可得 $|z|^k g(z)$ 在原点附近有界。我们得出结论， f 的阶为 0。□

现在，我们定义一类特殊的微分同胚。

定义 34. 设 $F\colon V(a,b,r_1,r_2,n) \to W$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的开集之间的一个微分同胚，并考虑 $\beta > 1$ 和 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。我们称 F 为阶数为 (β,p) 的微分同胚，并记作 $F \in D_{\beta,\ p}$，如果 $x \circ F \equiv x$ 且 $F - \mathrm{id}$ 按照定义 27 的意义是阶数为 (β,p) 的。我们称 F 的阶数为 β，并记作 $F \in D_\beta$，如果对于任意 $p \in \mathbb{N}$，都有 $F \in D_{\beta,\ p}$。

我们希望考虑 D_β 中的微分同胚与 O_α 中的映射的复合。

命题 35. 考虑

$$f : V(a,b,r_1,r_2,n) \to \mathbb{R}^m \quad \text{and} \quad F : V(a,b,r_1',r_2',n) \to W$$

分别属于 $O_{\alpha,\ p}$ 和 $D_{\beta,\ p}$，其中 $p \geq 1$。那么，存在 $\tilde{r}_1,\ \tilde{r}_2 > 0$，使得 $f \circ F$ 在 $V(a,\ b,\ \tilde{r}_1,\ \tilde{r}_2,\ n)$ 上有定义，且其阶为 $(\alpha,\ p)$。

证明。 由于 $F - \mathrm{id} \in O_{\beta,\ 0}$，很容易找到 $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2 > 0$ 使得

$$F(V(a,b,\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,n)) \subset V(a,b,r_1,r_2,n).$$

不失一般性，我们可以假设 $m = 1$。任意 $k \leq p$ 阶偏导数都可以写成有限个如下形式的表达式之和

$$(u \circ F) v_1 \dots\ v_s$$

其中 u 是 f 的 r阶偏导数，每个 v_j 是 F 某个分量的 $r_j \geq 1$ 阶偏导数，且

$$(r_1 - 1) + \ldots + (r_s - 1) + r = k.$$

F 各分量的一阶导数具有如下形式： $v + h$，其中 $v \in \{0,1\}$ 且 $h \in O_{\beta-1,\ p-1}$，因此它们属于 $O_{0,\ p-1}$。特别地，对于任意 $1 \leq j \leq s$，都有 $v_j \in O_{1-r_j,\ p-r_j}$。此外，由于 $u \in O_{\alpha-r,\ p-r}$，我们推得 $u \circ F \in O_{\alpha-r,\ 0}$。那么 $(u \circ F) v_1 \dots\ v_s$ 的阶为

$$\left((\alpha - r) + \sum_{j=1}^{s} (1 - r_j), 0 \right) = (\alpha - k, 0).$$

由于此性质对任意 $0 \leq k \leq p$ 都成立，因此我们得出 $f \circ F$ 是（α，p）阶的结论。□

命题 36. 设 $f : W \to \mathbb{R}^m$ 是定义在 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中原点某个开邻域 W 内的 C^∞ 映射，并考虑 $F \in D_{\beta,p}$，其中 $\beta > 1$ 和 $p \geq 1$ 定义在某个 $V(a,b,r_1,r_2,n)$ 内。那么 $f \circ F - f \in O_{\beta,p}$.

证明. 不失一般性，可假设 $m=1$。设 $\mathcal{E}$ 为在 $\mathbb{C}^{n+1}$中原点某个邻域内定义的C^∞ 函数集合。显然，对于任意 $g\in\mathcal{E}$，都有 $g\in O_0$。因此，根据命题 35，对于任意 $g\in\mathcal{E}$，有 $g\circ F\in O_{0,p}$。此外，我们有

$$g\circ F-g\in O_{\beta,0}$$

对任意 $g\in\mathcal{E}$，由中值定理可得。命题的证明通过归纳过程完成。设 $q\in\mathbb{Z}_{0\le q<p}$，并假设 $g\circ F-g\in O_{\beta,\,q}$ 对任意 $g\in\mathcal{E}$成立。下面证明 $g\circ F-g\in O_{\beta,\,q+1}$ 对任意 $g\in\mathcal{E}$成立。令 $(u_1,\dots,u_{2n+2})$ 为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的实坐标，其中$u_1=\mathrm{Re}(x)$、$u_2=\mathrm{Im}(x)$、$u_3=\mathrm{Re}(y_1)$，依此类推。令 $g\in\mathcal{E}$，并考虑

$$\Delta_j:=\frac{\partial}{\partial u_j}(g\circ F-g)=\sum_{l=1}^{2n+2}\left(\frac{\partial g}{\partial u_l}\circ F\right)\frac{\partial(u_l\circ F)}{\partial u_j}-\frac{\partial g}{\partial u_j}.$$

只需证明对每个 $1\le j\le 2n+2$，都有 $\Delta_j\in O_{\beta-1,\,q}$。我们有

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u_l}\circ F\right)\frac{\partial(u_l\circ F)}{\partial u_j}\in O_{\beta-1,p-1}\subset O_{\beta-1,q}$$

若 $j\neq l$，这是因为乘积的第一项属于 $O_{0,\,p}$，而第二项属于 $O_{\beta-1,\,p-1}$。因此，只需证明

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u_j}\circ F\right)\frac{\partial(u_j\circ F)}{\partial u_j}-\frac{\partial g}{\partial u_j}=\frac{\partial g}{\partial u_j}\circ F-\frac{\partial g}{\partial u_j}+\left(\frac{\partial g}{\partial u_j}\circ F\right)\frac{\partial(u_j\circ F-u_j)}{\partial u_j}$$

属于 $O_{\beta-1,q}$，对于 $1\le j\le 2n+2$。一方面，项

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u_j}\circ F\right)\frac{\partial(u_j\circ F-u_j)}{\partial u_j}$$

属于 $O_{\beta-1,p-1}$，继而属于 $O_{\beta-1,q}$，与上文类似。另一方面，我们有

$$\frac{\partial g}{\partial u_j}\circ F-\frac{\partial g}{\partial u_j}\in O_{\beta,q}\subset O_{\beta-1,q}$$

根据归纳假设，证明得证。 □

我们的下一个目标是证明 $F\in D_{\beta,p}$, $\beta>1$ 和 $p\ge 1$ 蕴含 $F^{-1}\in D_{\beta,\,p}$。第一步是下面这个拓扑引理。

引理 37。给定 $r>0$，记 $B(r)$ 为以 $\mathbb{C}^n$ 的原点为中心、半径为 r 的球。设 $f\colon B(\mathfrak{r})\to\mathbb{C}^n$, $\mathfrak{r}>0$ 是形如 $f(y)=y+\sigma(y)$ 的函数，其中 $\sigma\colon B(\mathfrak{r})\to\mathbb{C}^n$ 可微，且 $|d\sigma|\le\lambda$ 对某个 $\lambda\in[0,1)$ 成立。则 $f(B(\mathfrak{r}))$ 是开集，且 $f\colon B(\mathfrak{r})\to f(B(\mathfrak{r}))$ 是微分同胚。此外，如果 $f(0)=0$，则 f 的像包含球 $B\big((1-\lambda)\mathfrak{r}\big)$。

证明。 由于 $|d\sigma|\le\lambda$，由中值不等式可知

$$|\sigma(y_1)-\sigma(y_2)|\le\lambda|y_1-y_2|,\quad y_1,y_2\in B(\mathfrak{r}). \tag{7.10}$$

Then

$$|f(y_1)-f(y_2)|=|(y_1-y_2)+(\sigma(y_1)-\sigma(y_2))|\ge|y_1-y_2|-|\sigma(y_1)-\sigma(y_2)|,$$

$$|f(y_1)-f(y_2)|\geq(1-\lambda)|y_1-y_2|,\quad y_1,y_2\in B(\mathfrak{r}).$$

于是，由于 $1-\lambda>0$，逆映射 f^{-1} 存在且连续。因此 f 是一个同胚，故 $f(B(\mathfrak{r}))$ 是开集。最后，由于 $|d\sigma|\leq\lambda$ 保证 $df=\mathrm{id}+d\sigma$ 可逆，我们得出 f 是一个微分同胚，这就证明了引理的第一个断言。现在假设 $f(0)=0$，即 $\sigma(0)=0$。反设存在 $p\in B\big((1-\lambda)\mathfrak{r}\big)$ 使得 $p\notin f(B(\mathfrak{r}))$。任取满足条件的 $\mathfrak{r}'<\mathfrak{r}$，使得

$$|p|<(1-\lambda)\mathfrak{r}'. \tag{7.11}$$

首先，注意到由于 $p\notin f(B(\mathfrak{r}'))$，$f(\partial B(\mathfrak{r}'))$与 p的链接数为零。另一方面，函数

$$H(y,t)=y+t\sigma(y),\quad y\in\partial B(\mathfrak{r}'),t\in[0,1]$$

是 $\partial B(\mathfrak{r}')$与 $f\big(\partial B(\mathfrak{r}')\big)$之间的一个同伦。由于

$$\begin{aligned}|H(y,t)|&=|y+t\sigma(y)|\geq|y|-|\sigma(y)|=|y|-|\sigma(y)-\sigma(0)|\\&\geq|y|-\lambda|y|=(1-\lambda)\mathfrak{r}'\\&>|p|,\end{aligned}$$

H 确实是 $\mathbb{C}^n\backslash\{p\}$中的一个同伦。这意味着$\partial B(\mathfrak{r}')$与 p 的链接数等于 $f\big(\partial B(\mathfrak{r}')\big)$ 与 p的链接数，而正如我们上文所见，该链接数等于零。也就是说，$\partial B(\mathfrak{r}')$与 p 的链接数为零。但这与从 (7.11) 得出的 $p\in B(\mathfrak{r}')$矛盾，因此 $\partial B(\mathfrak{r}')$与 p 的链接数实际上等于一。□

注 38。引理 37 意味着，如果 $F\colon\ V(a,b,r_1,r_2,n)\to W$属于$D_{\beta,\ p}(\beta>1,\ p\geq1)$，那么存在 $r_1',r_2'>0$，使得 $V(a,b,r_1',r_2',n)$ 包含于 F 的像中，因此 F^{-1} 在这样的集合中有定义。

命题 39。设 $F\in D_{\beta,\ p}$，其中 $\beta>1$ 且 $p\geq1$。则 $F^{-1}\in D_{\beta,\ p}$。

证明。由于 F 属于 C^1 类，F^{-1} 也属于该类。性质 $F-\mathrm{id}\in O_{\beta,\ p}$ 意味着，当 r_1' 和 r_2' 足够小时，在 $V(a,b,r_1',r_2',n)$ 中有 $F^{-1}-\mathrm{id}\in O_{\beta,\ 0}$。我们有

$$dF^{-1}-\mathrm{id}=(dF)^{-1}\circ F^{-1}-\mathrm{id}$$

根据链式法则。

我们断言，$(dF)^{-1}-\mathrm{id}\in O_{\beta-1,\ p-1}$。注意到

$$dF(z)^{-1}=(\det dF(z))^{-1}\mathrm{adj}(dF(z)).$$

由于 $O_{\beta-1,p-1}$ 中元素的乘积属于 $O_{\beta-1,p-1}$，很容易看出

$$\det dF-1\in O_{\beta-1,p-1}\quad\text{and}\quad\mathrm{adj}(dF)-\mathrm{id}\in O_{\beta-1,p-1}.$$

因此，为了证明 $(dF)^{-1}-\mathrm{id}\in O_{\beta-1,\ p-1}$ 我们只需证明，对于任意 h_1，$h_2\in O_{\beta-1,\ p-1}$ 都有

$$\frac{h_1}{1+h_2}\in O_{\beta-1,p-1}\quad\text{and}\quad\frac{1+h_1}{1+h_2}-1\in O_{\beta-1,p-1},$$

这由命题 29 得出。现在，我们得到

$$dF^{-1} - \mathrm{id} = (\mathrm{id} + O_{\beta-1,p-1}) \circ F^{-1} - \mathrm{id} = (F^{-1} - \mathrm{id}) + O_{\beta-1,0} \in O_{\beta-1,0},$$

其中第二个等式由恒等式 $x \circ F^{-1} \equiv x$ 以及 $F^{-1} - \mathrm{id}$ 在 $O_{\beta,0}$ 中的包含关系得出。由此，我们得到 $F^{-1} \in D_{\beta,1}$。为了完成证明，只需证明：对于某个 $1 \le q < p$，$F^{-1} \in D_{\beta,q}$ 蕴含 $F^{-1} \in D_{\beta,q+1}$。因此，假设 $F^{-1} \in D_{\beta,q}$ 且 $1 \le q < p$。由命题 35 可知，只要 $h \in O_{\beta-1,q}$，就有 $h \circ F^{-1} \in O_{\beta-1,q}$。于是

$$dF^{-1} - \mathrm{id} = (\mathrm{id} + O_{\beta-1,p-1}) \circ F^{-1} - \mathrm{id} = (F^{-1} - \mathrm{id}) + O_{\beta-1,q} \in O_{\beta-1,q},$$

由此得出 $F^{-1} \in D_{\beta,q+1}$。 □

8. 命题 21 的证明

本节致力于证明命题 21。由于证明相当冗长，我们借助若干结果——命题 40、43、44——来组织证明，这些结果也将在过程中得到证明。

回顾第 6 节引言中的内容：$\delta_0(\nu+1) - \delta_1 \ge 4$。我们记

$$\phi(x,y) = y + \tilde{\phi}(x,y) \quad \text{and} \quad \phi_{-1}(x,y) = y + \tilde{\phi}_{-1}(x,y).$$

我们有

$$\tilde{\phi} = O(|x|^4|y|^{\nu+1}) \quad \text{and} \quad \tilde{\phi}_{-1} = O(|x|^4|y|^{\nu+1})$$

根据引理 26。从现在起，我们记

$$\mathbb{D}^+ = \{x \in \mathbb{C} \colon |x| < 1,\ \mathrm{Re}(x) > 0\}$$

and

$$\mathbb{D}^+(2) = \{x \in \mathbb{C} \colon |x| < 2\ \ \mathrm{Re}(x) > 0\}.$$

命题 40。函数 ϕ 和 ϕ_{-1} 在 $\mathbb{D}(2) \times B$ 上全纯，并满足以下性质：

(1) 若限制在 $\mathbb{D}^+(2) \times B$ 上，函数 $\tilde{\phi}$ 和 $\tilde{\phi}_{-1}$ 的阶为 4，这符合定义 27。

(2) 若 $R > 0$ 是 B 的半径，则存在 $\mathfrak{r} \in (0, R)$ 使得

$$\left|d_y\tilde{\phi}(x,y)\right|, \left|d_y\tilde{\phi}_{-1}(x,y)\right|, \left|d_y\tilde{\phi}\big(x,\phi_{-1}(x,y)\big)\right| < \frac{1}{2}, \quad x \in \widehat{\mathbb{D}}(2), |y| \le \mathfrak{r}.$$

证明。根据定义可知，ϕ 和 ϕ_{-1} 在 $\mathbb{D}(2) \times B$ 上全纯。因此，命题 40 的 (1) 对 ϕ 和 ϕ_{-1} 均可由命题 32 推出。下面证明命题 40 的 (2)。由引理 26，利用变量 y 上的柯西不等式，可得 $\tilde{c}_1 > 0$ 使得

$$\left|d_y\tilde{\phi}(x,y)\right| \le \tilde{c}_1|x|^4|y|^\nu \quad \text{for } x \in \widehat{\mathbb{D}}(2) \text{ and } |y| < R/2. \tag{8.1}$$

那么，当 $\mathfrak{r} > 0$ 足够小时，

$$|d_y\tilde{\phi}| < 1/2, \quad x \in \widehat{\mathbb{D}}(2),\ |y| \le \mathfrak{r}, \tag{8.2}$$

这就是命题 40 中 (2) 的第一个不等式。(2) 中的第二个不等式也可用完全相同的方法得到，并且我们可以假设对同一个 $\mathfrak{r}$ 已完成这一步。下面证明命题 40 中 (2) 的第三个不等式。由引理 26，$\phi_{-1}(x,y) = O(y)$。因此，如果 y 足够小，由 (8.2) 可得

$$\left| d_y \tilde{\phi}\left(x, \phi_{-1}(x,y)\right) \right| < 1/2, \quad x \in \widehat{\mathbb{D}}(2).$$

最后，通过约化 $\mathfrak{r}$，我们可以假设这一不等式对 $x \in \widehat{\mathbb{D}}(2)$ 和 $|y| \leq \mathfrak{r}$ 成立，从而完成证明。□

我们开始构造微分同胚 F。令 $B(\mathfrak{r})$ 表示以 $\mathbb{C}^n$ 的原点为中心、半径为 $\mathfrak{r}$ 的球。取一个光滑函数

$$\rho\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$$

使得

$$\rho(s) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad -\frac{\pi}{2} < s < -\frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{if} \quad \frac{\pi}{4} < s < \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{8.3}$$

并定义光滑映射 $\tilde{\sigma}_1\colon \ \Delta_1 \times B(\mathfrak{r}) \to \mathbb{C}^n$ 为

$$\tilde{\sigma}_1(x,y) = \begin{cases} (1-\rho(\arg x))\tilde{\phi}(x,y) & \text{if } \operatorname{Re}(x) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{8.4}$$

现在，定义光滑函数

$$\begin{aligned} &\sigma_1\colon \Delta_1 \times B(\mathfrak{r}) \to \mathbb{C}^n \\ &F_1\colon \Delta_1 \times B(\mathfrak{r}) \to \mathbb{C}^{n+1} \\ &\sigma_2\colon \Delta_2 \times B(\mathfrak{r}) \to \mathbb{C}^n \\ &F_2\colon \Delta_2 \times B(\mathfrak{r}) \to \mathbb{C}^{n+1} \end{aligned}$$

by

$$\begin{aligned} &\sigma_1(x,y) = y + \tilde{\sigma}_1(x,y) \\ &F_1(x,y) = (x, \sigma_1(x,y)) \\ &\sigma_2(x,y) = \begin{cases} \sigma_1\left(x, \phi_{-1}(x,y)\right) & \text{if } \operatorname{Re}(x) > 0 \\ y & \text{otherwise} \end{cases} \\ &F_2(x,y) = (x, \sigma_2(x,y)). \end{aligned}$$

我们来说明一下 σ_2 的定义域：先验地说，当 $(x, \phi_{-1}(x,y))$ 属于 σ_1 的定义域时，此函数定义在点 (x,y)、$\operatorname{Re}(x) > 0$。然而，容易看出，只要 ϕ 在 $(x, \phi_{-1}(x,y))$ 处有定义，σ_1 就可在 $(x, \phi_{-1}(x,y))$ 处定义。因此，由 (6.5) 可知，对于所有 $x \in \mathbb{D}$、$\operatorname{Re}(x) > 0$, $y \in B(\mathfrak{r})$，$\sigma_1\left(x, \phi_{-1}(x,y)\right)$ 都可以定义

因此， $\sigma_2(x,y)$ 在 $\Delta_2 \times B(\mathfrak{r})$ 上有良好定义。由定义 (8.4) 可直接得到

$$\tilde{\sigma}_1(x,y) = \begin{cases} \tilde{\phi}(x,y) & \text{if } -\frac{\pi}{2} < \arg(x) < -\frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{if } \frac{\pi}{4} < \arg(x) < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

因此我们有

$$F_1(x,y) = \begin{cases} (x, \phi(x,y)) & \text{if } -\frac{\pi}{2} < \arg(x) < -\frac{\pi}{4} \\ (x,y) & \text{if } \frac{\pi}{4} < \arg(x) < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \tag{8.5}$$

函数 $F_1 \circ \psi_1$ 和 $F_2 \circ \psi_2$ ——其中 ψ_1 和 ψ_2 是 $\mathcal{M}$的坐标图——分别定义在集合

$$\mathcal{M}_1' \colon = \psi_1^{-1}\left(\Delta_1 \times B(\mathfrak{r}/2)\right)$$

and

$$\mathcal{M}_2' \colon = \psi_2^{-1}\left(\Delta_2 \times B(\mathfrak{r}/2)\right).$$

集合 $\mathcal{M}' \colon = \mathcal{M}_1' \cup \mathcal{M}_2'$ 显然是叶 L的一个邻域。利用 (6.5) 以及 (6.6) 中给出的 $\Psi = \psi_2 \circ \psi_1^{-1}$表达式，可以直接验证 $F \colon \mathcal{M}' \to \mathbb{C}^{n+1}$ 可由下式良好定义

$$F = \begin{cases} F_1 \circ \psi_1 & \text{on } \mathcal{M}_1' \\ F_2 \circ \psi_2 & \text{on } \mathcal{M}_2' \end{cases}$$

我们来证明 F 是到其像上的光滑微分同胚。首先证明 F是单射。假设 $F(p) = F(q) = (x_0, y_0)$。由于$\phi(x,y) = y + \phi(x,y)$，根据命题 40 的 (2)，可知若 $x \in \mathbb{D}^+$ 和$|y| < \mathfrak{r}$,

$$|d_y \phi| \le 1 + |d_y \tilde{\phi}| < \frac{3}{2}.$$

因此，若 $|y| < \mathfrak{r}/2$ 且 $x \in \mathbb{D}^+$，我们得到

$$|\phi(x,y)| = |\phi(x,y) - \phi(x,0)| < \frac{3}{2}|y| < \frac{3\mathfrak{r}}{4} < \mathfrak{r}.$$

因此，若 $x_0 \in \Delta_1$ （分别地， $x_0 \in \Delta_2$），则 $p, q \in \psi_1^{-1}(\Delta_1 \times B(\mathfrak{r}))$（分别地， $p, q \in \psi_1^{-1}(\Delta_2 \times B(\mathfrak{r}))$)。接下来只需证明 F_1 在 $\psi_1^{-1}(\Delta_1 \times B(\mathfrak{r}))$ 中是单射，并且由于 $\mathbb{D} \setminus \Delta_1 = [0, -i)$，证明 F_2 在 $\psi_2^{-1}((0,-i) \times B(\mathfrak{r}))$ 的某个邻域内是单射。后一性质显然成立，因为F_2 在 $(0,-i) \times B(\mathfrak{r})$ 的某个邻域内是恒等映射。因此我们着重考察 F_1的单射性。由命题 40 的 (2) 和 (8.4) 可得

$$\left|d_y \tilde{\sigma}_1(x,y)\right|, \left|d_y \tilde{\sigma}_1(x, \phi_{-1}(x,y))\right| < 1/2, \quad x \in \Delta_1,\ y \in B(\mathfrak{r}). \tag{8.6}$$

因此，对于每个 $x \in \Delta_1$，引理 37 表明映射

$$y \in B(\mathfrak{r}) \mapsto \sigma_1(x,y) \in \mathbb{C}^n$$

是到其像上的微分同胚。因此，对于每个 $x \in \Delta_1$，函数F_1 将 $\{x\} \times B(\mathfrak{r})$ 微分同胚地映入同一个纤维 $\{x\} \times \mathbb{C}^n$。这

保证了 F_1 是到其像上的微分同胚。因此， F 是单射；又由于我们还证明了 F 是局部微分同胚，因此得出 F 是到其像上的微分同胚。此时，命题 21 的 (2) 和 (3) 直接由 F的定义得出。显然，我们有 $F(\mathcal{M}') \subset \mathbb{C}^n \backslash E$。下面证明 $F(\mathcal{M}')$ 包含集合 $\mathbb{D}^* \times B(\mathfrak{r}/4)$，其中 $B(\mathfrak{r}/4)$ 是半径为 $\mathfrak{r}/4$ 、中心为 $0 \in \mathbb{C}^n$的球。给定 $x \in \Delta_1$，由于

$$|d_y \tilde{\sigma}_1(x,y)| < 1/2, \quad y \in B(\mathfrak{r}),$$

由引理 37，映射的像

$$y \in B(\mathfrak{r}/2) \mapsto \sigma_1(x,y) \in \mathbb{C}^n$$

包含球 $B(\mathfrak{r}/4)$。因此，对于每个 $x \in \Delta_1$ ，集合 $\{x\} \times B(\mathfrak{r}/4)$ 都包含在 F_1 的像中，从而 $F_1(\mathcal{M}_1')$ 包含集合 $\Delta_1 \times B(\mathfrak{r}/4)$。由于

$$F_2((0,-i) \times B(\mathfrak{r}/2)) = (0,-i) \times B(\mathfrak{r}/2),$$

$F(\mathcal{M}')$ 包含 $\mathbb{D}^* \times B(\mathfrak{r}/4)$，因此集合

$$U\colon = F(\mathcal{M}') \cup \big(\{0\} \times B(\mathfrak{r}/4)\big)$$

是开集。显然， $F(\mathcal{M}') = U \backslash E$，因此只需取任意一个，即可得到命题 21 的第 (1) 项成立

$$r \leq \mathfrak{r}/4. \tag{8.7}$$

注记 41。 若 $x \in \mathbb{D}^+$ 和 $y \in B(\mathfrak{r})$，由 (8.4) 可得

$$\tilde{\sigma}_1(x,y) = (1 - \rho(\arg x))\tilde{\phi}(x,y).$$

因此，由于 $\tilde{\phi}$ 在 $\mathbb{D}^+(2) \times B(\mathfrak{r})$ 上定义良好，函数 $\tilde{\sigma}_1$ 可延拓到 $\mathbb{D}^+(2) \times B(\mathfrak{r})$。因此， F_1 可光滑地延拓到 $\mathbb{D}^+(2) \times B(\mathfrak{r})$，并且

$$F_1(x,y) = (x, y + \tilde{\sigma}_1(x,y)).$$

现在，完全按照得到 (8.6) 的方法，我们有

$$|d_y \tilde{\sigma}_1(x,y)|, |d_y \tilde{\sigma}_1(x, \phi_{-1}(x,y))| < 1/2, \quad x \in \mathbb{D}^+(2),\ y \in B(\mathfrak{r}).$$

由此，如上所述，我们证明 F_1 是从$\mathbb{D}^+(2) \times B(\mathfrak{r})/2$ 到其像的一个微分同胚。

注记 42。 用于证明以下结论的论证完全相同

$$F_1(\{x\} \times B(\mathfrak{r}/2)) \supset \{x\} \times B(\mathfrak{r}/4), \quad x \in \Delta_1$$

同样可用于证明：给定一个以 $0 \in \mathbb{C}^n$ 为中心、半径为 $\mathfrak{r}' \leq \mathfrak{r}/2$ 的球 $B(\mathfrak{r}')$，我们有

$$F_1(\{x\} \times B(\mathfrak{r}')) \supset \{x\} \times B(\mathfrak{r}'/2), \quad x \in \Delta_1.$$

命题 43. F_1 限制于

$$\nabla(\mathfrak{r}/2)\colon = \{(x,y) \in \mathbb{D}^* \times B\colon |\arg(x)| < 3\pi/4,\ |y| < \mathfrak{r}/2\}$$

属于 D_4。

证明。 回忆一下，如果 $(x,y)\in\mathbb{D}^+\times B(\mathfrak{r})$,

$$F_1(x,y)=\left(x,y+[1-\rho(\arg x)]\tilde{\phi}\right),$$

因此，只需证明

$$\left(\left[1-\rho(\arg x)\right]\tilde{\phi}\right)\Big|_{\nabla(\mathfrak{r}/2)}$$

属于 O_4，这又是引理 26、命题 32、引理 33 和命题 29 的推论。□

向量场的构造 Y_1 和 Y_2。 向量场 Z 在 $\mathcal{M}'$ 中定义了一个全纯向量场 $\mathcal{Z}$，因为 Z 在坐标变换 Ψ下不变：事实上,

$$(\Psi^*Z)(x)\equiv Z(x\circ\Psi)\equiv Z(x)\equiv x$$

推出 $\Psi^*Z\equiv Z$。我们定义向量场

$$Y_1\colon=(F)_*(\mathcal{Z})\quad\text{and}\quad Y_2\colon=(F)_*(i\mathcal{Z})$$

在 $F(\mathcal{M}')$ 中。向量场 Y_1和 Y_2与叶状结构 $\mathcal{F}^U$相切——如命题 21 的 (4) 中所定义。根据注 42，我们有

$$F_1(\Delta_1\times B(\mathfrak{r}/2))\supset\Delta_1\times B(\mathfrak{r}/4),$$

因此，由于 $F_2((0,-i)\times B(\mathfrak{r}/4))=(0,-i)\times B(\mathfrak{r}/4)$， Y_1和 Y_2定义在该集合上

$$\mathbb{D}^*\times B(\mathfrak{r}/4).$$

命题 44. 向量场 Y_1-Z 和 Y_2-iZ 限制在

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{D}^*\times B\colon|y|<\mathfrak{r}/4\right\}.$$

属于 O_3。特别是， Y_1 和 Y_2 延拓为 $U(r)$ （见命题 *21*），作为向量场，只要 $r>0$ 足够小。

证明。 由命题 43 可得 $F_1\in D_4$，因此 $dF_1-\mathrm{id}\in O_3$。此外，由命题 39 可得 $F_1^{-1}\in D_4$。由命题 29 可知

$$dF_1\cdot Z-Z\in O_3.$$

我们有

$$Y_1=(dF_1\cdot Z)\circ F_1^{-1}\implies Y_1-Z=(Z\circ F_1^{-1}-Z)+[dF_1\cdot Z-Z]\circ F_1^{-1}.$$

上一个等式右侧的第二项由命题 35 知属于 O_3，而 $Z\circ F_1^{-1}-Z\in O_4$ 由命题 36 知。因此，Y_1-Z 属于定义域 $\nabla(\mathfrak{r}/4)$ 的 O_3。于是，由于 $Y_1-Z\equiv 0$ 在

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{D}^*\times B\colon\pi/4<\arg(x)<7\pi/4,\ |y|<\mathfrak{r}/4\right\},$$

我们在 $\mathbb{D}^*\times B(\mathfrak{r}/4)$ 上得到 $Y_1-Z\in O_3$。显然， Y_1 可延拓为 $\{x=0\}\times B(r)$ 上的 C^2 向量场，其中某个 $r>0$，使得 $(Y_1)|_{x=0}\equiv Z|_{x=0}$，由命题 30 可知。关于 Y_2 的论证类似，我们得到 $(Y_2)|_{x=0}\equiv iZ|_{x=0}$。□

命题 21 的证明结束。由命题 44 可知， Y_1和 Y_2 可延拓为

$$U(r) = \mathbb{D} \times B(r)$$

属于类 C^2。因此，命题 21 的 (4a) 得证。命题 21 的断言 (4b) 直接由 Y_1 和 Y_2的定义得出。根据构造，向量场 Y_1 和 Y_2 在 $\mathbb{D}^* \times B(r)$ 上实线性无关。由于

$$Y_1 \equiv Z \quad \text{and} \quad Y_2 \equiv iZ \ \text{ on } \ \{0\} \times B(r), \tag{8.8}$$

它们在 $U(r)\backslash\{0\}$ 上线性无关，因此得到命题 21 的 (4c)。此外，显然 (8.8) 也证明了命题 21 的 (4d)。由于 Y_1 属于类 C^2 ，且根据命题 30， $Y_1 - Z$ 的所有二阶及以下阶导数在 $\{x = 0\}$ 上均为零，我们得出

$$dY_1(0) = dZ(0),$$

因此，命题 21 的 (4e) 得证。 □

9. 近复结构的延拓

我们首先回顾一些关于近复结构的基本事实。设$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2m}$ 为一个开集。设 $u_1, \dots, u_m$ 为定义在 $\mathcal{U}$ 上的向量场，它们在 $\mathcal{U}$的每一点处实线性无关。$\mathcal{U}$上的近复结构 $\mathcal{J}$ 由以下向量场确定

$$v_1 = \mathcal{J}(u_1), \dots, v_m = \mathcal{J}(u_m).$$

任意选取向量场 $v_1, \dots, v_m$ ，只要这些向量场

$$u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$$

在 U上构成一个实标架：在这种情况下，容易看出

$$\mathcal{J}(u_1) = v_1, \dots, \mathcal{J}(u_m) = v_m, \ \mathcal{J}(v_1) = -u_1, \dots, \mathcal{J}(v_m) = -u_m$$

确实定义了一个近复结构。

现在，设 $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 如命题 21 中所述。考虑 $U\backslash E$ 上的向量场

$$u = \frac{\partial}{\partial x}, \quad u_j = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

将其视为实向量场。 $U\backslash E$ 上的近复结构 J 由以下向量场确定

$$J(u), \quad J(u_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

在坐标图 $\psi_1 = (x, y)$ 中，映射 F 由 F_1 给出，因此 J 在 F_1 的像上的结构是由典范复结构经 F_1 推前得到的。回想一下，若 $a \in \Delta_1$，则 F_1 将竖直的 $\{x = a\}$ 双全纯地映入其自身。因此 F_1 保持 $\{x = a\}$ 的典范复结构。这意味着， J 在 $\{x = a\}$ 上的限制正是 $\{x = a\}$ 的典范近复结构。接着，由于向量场 u_j

与 $\{x=a\}$ 相切，我们有 $J(u_j)$ 在 $\{x=a\}$ 上满足 $=iu_j$。对另一个坐标图 ψ_2 作同样的论证后，我们得出

$$J(u_j)=iu_j \text{ on } U\backslash E,\quad j=1,\dots,n. \tag{9.1}$$

由于向量场 u、u_1、J（u_1）.....、u_n、J（u_n）可光滑延拓至 $\mathbb{C}^{n+1}$，因此，将 J 延拓至 U，等价于将向量场 J（u）延拓至 U，使得这些向量场

$$u, J(u), u_1, J(u_1), \dots, u_n, J(u_n)$$

在 U 上定义一个实标架。由于 J 是由 F 将 $\mathcal{M}$ 上的复结构推前得到的，因此有 J（p）；当 F 在点 F^{-1}（p）处的导数是复线性时，$p\in U$ 是标准近复结构。因此，根据命题 21 的 (3)，结构 J 在 $U\backslash E$ 中集合

$$\nabla\colon=\left\{(x,y)\in U\colon -\frac{\pi}{4}\le \arg(x)\le\frac{\pi}{4}\right\}.$$

特别地，我们有

$$J(u)=iu \quad \text{on} \quad U(r)\backslash\overline{\nabla}\subset U\backslash E. \tag{9.2}$$

命题 45. $J(u)$满足 $J(u)-iu\in O_3$，并且当 $r>0$ 足够小时，可在 C^2 类中延拓到 $U(r)$。

证明。若 $p\in\nabla(r)$（见命题 43），则有

$$J(u)(p)=dF_1(F_1^{-1}(p))\cdot idF_1^{-1}(p)\cdot u. \tag{9.3}$$

微分同胚 F_1 属于 D_4（命题 43），F_1^{-1}也属于 D_4（命题 39）。因此，我们得到

$$idF_1^{-1}\cdot u-iu\in O_3.$$

注意到

$$dF_1\circ F_1^{-1}-\mathrm{id}=(dF_1-\mathrm{id})\circ F_1^{-1}+(F_1^{-1}-\mathrm{id}).$$

右侧的第一项由命题 35 可知属于 O_3，而$F_1^{-1}\in D_4$ 意味着第二项属于 O_4。于是

$$dF_1\circ F_1^{-1}-\mathrm{id}\in O_3.$$

因此，由于

$$J(u)-iu=(dF_1\circ F_1^{-1}-\mathrm{id})\cdot idF_1^{-1}\cdot u+(idF_1^{-1}\cdot u-iu),$$

我们看到，对于足够小的 $r>0$，$J(u)-iu\in O_3$ 于 $\nabla(r)$。此外，$\equiv iu$ $J(u)$ 于 $U(r)\setminus\overline{\nabla}$，因此很容易看出，对于 $U(r)\setminus E$，$J(u)-iu\in O_3$。由命题 30 可知，$J(u)$ 在类 C^2 中延拓到 $U(r)$，其中 $r>0$ 足够小；并且根据命题 30，$J(u)|_E\equiv(iu)|_E$。□

命题 22 的证明。 根据命题 45，向量场 $J(u)$ 在类 C^2 中延拓至 $U(r)$。于是向量场

$$u, J(u), u_1, J(u_1), \dots, u_n, J(u_n)$$

属于 C^2 on $U(r)$ 类。因此，命题 22 的第一项断言归结为证明上述向量场在 $U(r)$ 上构成一个实标架。由于它们在 $U(r)\backslash E$ 上确实如此，接下来只需考察 $E \cap U(r)$ 中的点，因此该命题的证明归结为证明其最后一项断言。令 $p \in E \cap U(r)$。由 (9.1) 可得

$$J(u_j)(p) = iu_j(p), \quad j = 1, \dots, n.$$

于是，只需证明 $J(u)(p) = iu(p)$，这成立是因为等式 (9.2) 由连续性延拓到 $E \cap U(r)$。□

命题 24 的证明。由于 J on $U(r)\backslash E$ 上的结构来自 $\mathcal{M}$ 的复结构，因此 $J|_{(U(r)\backslash E)}$ 满足近复结构的可积性条件。于是，由连续性可知， J 在整个 $U(r)$ 上满足可积性条件；直接应用定理 23，便得到一个 C^2 类的局部微分同胚 G_1 ,$1/(2n+2)$, 它定义在 $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ 的邻域之间，并将结构 J 映到 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的标准复结构。向量场 u 显然与子流形 $\{y = 0\}$ 相切。由于 $\{y = 0\}$ 被 F_1 逐点固定，由 (9.3) 和 (9.2) 可知， $J(u) = iu$ 在 $\{y = 0\}$ 上，这意味着 $J(u)$ 也与子流形 $\{y = 0\}$ 相切。因此， $\{y = 0\}$ 是 $(U(r)\ J)$ 的近复子流形。另一方面，正如本节开头所见， J 在纤维 $\{x = a\}$, $a \neq 0$ 上的限制与 $\{x = a\}$ 上的典范近复结构重合。显然，由连续性可将这一事实延拓到 $E = \{x = 0\}$ ，由此可得 E 也是 $(U(r)\ J)$ 的近复子流形。因此， $\{y = 0\}$ 和 E 在 G_1 下的像成为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的复子流形；它们在原点处彼此横截，其中一个维数为一，另一个余维为一。于是我们可以找到一个局部双全纯映射

$$G_2 \colon (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$$

将这些子流形分别映至 $\{y = 0\}$ 和 E。因此，若我们选取 $G = G_2 \circ G_1$, 将 $r' > 0$ 取得足够小，并按命题 24 的陈述取 U' ，再令 $\Omega = G(U')$，则命题 24 的断言 (1)、(2) 和 (3) 均成立。由于dG将结构 J 变为典范复结构，特别地，我们有

$$dG(0) \circ J(0) = i dG(0).$$

因此，由于命题 22 保证 $J(0)$ 只是乘以 i，我们发现 $dG(0)$ 与典范复结构可交换，这意味着

$$dG(0) \colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$$

是一个复线性同构。由于 G 使 $\{y=0\}$ 和 $\{x=0\}$保持不变，对于 $dG(0)$ 也同样成立。因此，我们用 $dG(0)^{-1}\circ G$ 替代G，于是命题 24 中的 (1)、(2) 和 (3) 仍然成立，但现在我们有

$$dG(0)=\mathrm{id},$$

因此命题 24 的 (4) 成立。令 $\mathcal{F}$ 为叶状结构 $\mathcal{F}^U|_{U'\setminus\{0\}}$ 经 G 推前所得。则 $\mathcal{F}$ 是 $\Omega\setminus\{0\}$ 上的 C^1 叶状结构。回顾一下， $\mathcal{M}$ 的近复结构经 F 映射为 $U\setminus E$ 上的近复结构 J，而后者又经 G 映射为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的典范复结构。这意味着 $G\circ F$ 映射

$$\tilde{\mathcal{M}}:=F^{-1}(U'\setminus E)$$

双全纯地映到 $\Omega\setminus E$ ，并将叶状结构 $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ 映为叶状结构 $\mathcal{F}|_{\Omega\setminus E}$，因此 $\mathcal{F}$ 在 $\Omega\setminus E$ 上是全纯的。由命题 13 可知， $\mathcal{F}$ 在 $\Omega\setminus\{0\}$ 上是全纯的，因此命题 24 的 (5) 成立。令 Y 为 Y_1 经微分同胚 G 推前所得，即

$$Y(p)=dG(G^{-1}(p))\cdot Y_1(G^{-1}(p)),\quad p\in\Omega.$$

注意， Y 在 $\Omega\setminus E$ 中与 $\mathcal{Z}$ 经 $G\circ F$ 推前所得的映射重合，因此在 $\Omega\setminus E$ 中是全纯的。由于 Y 连续，它在 Ω 中是全纯的，由此得出 Y 是生成 $\mathcal{F}$ 的全纯向量场，且具有孤立奇点。此外，由于 $dG(0)=\mathrm{id}$ 且 $dY_1(0)=dZ(0)$——见命题 21，我们得到

$$dY(0)=dZ(0)$$

因此，命题 24 的断言 (6) 得证。

根据命题 21 的 (2),

$$\mathbb{D}^*\times\{0\}=F(L)$$

是 $\mathcal{F}^U$ 的一片叶。然后

$$F(L)\cap U'=\{y=0\}\cap U'$$

是 $\mathcal{F}^U|_{U'}$ 的一片叶。因此

$$S:=G(\{y=0\}\cap U')=(\{y=0\}\cap\Omega)\setminus\{0\}$$

是 $\mathcal{F}$ 的一片叶——也就是说， $\{y=0\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一条分离曲线——并且我们有

$$\tilde{L}:=(G\circ F)^{-1}(S)\subset L$$

是限制在 上的 $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ 的一片叶

$$\tilde{\mathcal{M}}=F^{-1}(U'\setminus E).$$

˜ ˜因此， $G\circ F$ 将 $\mathcal{M}$ 映到 $\Omega\setminus E$ ，并将 $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}|_{\tilde{\mathcal{M}}}$ 的叶 L 映到 $\mathcal{F}$的叶 S。由于 $G\circ F$是叶状结构$\mathcal{F}^{\mathcal{M}}|_{\tilde{\mathcal{M}}}$与 $\mathcal{F}|_{\Omega\setminus E}$ 之间的全纯等价， S的整体单值化与 L的整体单值化全纯共轭；而根据命题 20，后者又与 $\mathfrak{h}$全纯共轭。命题 24 得证。□

10. 实现定理的一个应用

我们将利用定理 5 构造一个在 $(\mathbb{C}^3, 0)$ 中的向量场芽的例子，它除一个超曲面外都具有闭叶。以下这个在 $(\mathbb{C}^2, 0)$ 中的局部微分同胚例子由 L. Lisboa 在其论文中提出 [5]：给定一个 $\lambda \in \mathbb{S}^1$，它不是单位根，且满足 $\liminf_{j\to\infty} \sqrt[j]{|\lambda^j - 1|} = 0$，即一个 Cremer 数，则存在形如以下形式的 $f \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$

$$f(y_1, y_2) = (\lambda y_1, y_2 + a(y_1)),$$

其中 $a(y_1) \in \mathbb{C}\{y_1\}$，且存在原点的一个开邻域 U，使得 f 在 U 上的限制的任意轨道都是有限的。我们注意到，点 y 在 U 中的正向轨道是集合

$$\{f^j(y) \colon j \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ f^k(y) \in U\ \forall k = 0, \dots, j\};$$

负向轨道的定义类似。若点 y 的正向轨道和负向轨道都是有限集合，则称 y 的轨道是有限的。有限轨道有两种类型，即周期轨道——满足对某个 $k \in \mathbb{Z}^*$，$f^k(y) = y$的轨道——以及满足 $f^k(y)$ 仅对有限多个 $k \in \mathbb{Z}$在 U 中有定义的轨道。

容易看出，f 在形如 $(y_1, y_2) \mapsto (y_1, y_2 - b(y_1))$ 的变换下，与 $(y_1, y_2) \mapsto (\lambda y_1, y_2)$ 形式共轭。此外，f恰有一条解析不变曲线和一条发散形式不变曲线，分别为 $y_1 = 0$ 和 $y_2 = b(y_1)$。

记 $A = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2)$，其中我们选择 $\mu_1 \in \mathbb{R}^- \backslash \mathbb{Q}$，使得 $e^{2\pi i \mu_1} = \lambda$ 且 $\mu_2 \in \mathbb{Z}^-$。由于 f 是形式线性化的，我们可以应用定理 5，得到一个形式为 (1.1) 的向量场 Y，其整体单值化与 f 解析共轭。f 的解析不变曲线生成了 Y 的一个光滑不变超曲面。类似地，可以看出，由 f 的纯形式不变曲线生成的发散形式不变超曲面也存在。将 Y 限制在 $E = \{x = 0\}$ 上，得到如下形式的系统

$$y' = A \cdot y + G(0, y).$$

由于 (μ_1, μ_2) 位于庞加莱域中，且此类特征值不存在共振，因此 $Y|_E$ 通过与恒等映射相切的映射 $h \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ 与 $y' = A \cdot y$ 解析共轭，所以我们可以假设 $G(0, y) \equiv 0$。因此，若 $\mathcal{F}$ 是由 Y 在原点的一个足够小邻域 W 上生成的叶状结构，则有

- 坐标轴 x、y_1 和 y_2 是 $\mathcal{F}$的分离曲线；
  E 中 $\mathcal{F}$ 的叶，除分离曲线外，在 W中都不是闭的。

此外，只要 W 足够小，并利用 f 在原点的某个邻域内具有有限轨道这一事实，不难证明，W中位于 E 之外且不同于 x 轴的所有叶都是闭的。

注记 46。对于局部一维叶状结构，如果一条叶的闭包是闭解析曲线，我们就称这条叶是闭的。根据这一定义，分离曲线也可以视为闭叶。因此，上述叶状结构 $\mathcal{F}$ 是

一个例子，其中所有非闭叶都隐藏在真解析集内，即除子 E。这个例子清楚地表明，如果我们有一个具有闭叶的一维叶状结构，并对其作双有理变换，例如对一个点作爆破，就不能预先假定变换后的叶状结构仍具有闭叶。

参考文献

[1] C. Camacho、A. Lins Neto 和 P. Sad。全纯向量场的拓扑不变量与等奇异化。《微分几何杂志》20 (1984)，143–174。[2] J. Écalle。迭代理论：全纯不变量理论导论。《纯粹与应用数学杂志》54 (1975)，183–258。[3] P.-M. Elizarov、Yu. S. Ilyashenko。关于向量场芽的轨道解析分类的注记。《苏联数学文集》49 (1984)，111–124。[4] Y. Ilyashenko、S. Yakovenko。解析微分方程讲义。《数学研究生教材》86 (2008)。[5] L. Lisboa、J. Ribón。有限轨道局部微分同胚的不动点曲线定理。已被《遍历论与动力系统》接受发表。预印本 arXiv:2103.07926v2。[6] J. Martinet。全纯向量场的正规化（据 *A.-D. Brjuno*）。《数学讲义》901 卷 (1981)。[7] J. Martinet、J.-P. Ramis。一阶共振非线性微分方程的解析分类。《高等师范学校科学年刊》第四辑，第 4 卷 (1983)，第 16 期，571–621 页。[8] J.-F. Mattei、R. Moussu。整体单值性与第一积分。《高等师范学校科学年刊》第四辑，第 13 卷 (1980)，第 4 期，469–523 页。[9] A. Nijenhuis 和 W. Woolf。几乎复流形与复流形上的若干积分问题。《数学年刊》 77 (1963)，第 3 期，424–489。[10] R. Pérez-Marco、J.-C. Yoccoz。具有预设整体单值性的全纯叶状结构芽。《Astérisque》，第

222　1994　345 371　卷 ( )，第 – 页。

[11] H. Reis。叶状结构的等价性与半完备性。《非线性分析：理论、方法与应用》A 辑，理论与方法 64 (2006)，第 8 期，1654–1665。[12] J. Ribón。局部微分同胚的有限维群。《以色列数学杂志》227 (2018)，第 1 期，289–329。[13] J. Ribón。通过 *Jordan–Chevalley* 分解嵌入光滑与形式微分同胚。《微分方程杂志》253 (2012)，第 12 期，3211–3231。[14] R. Rosas。全纯向量场代数重数的可微不变性。《微分几何杂志》83 (2009)，第 2 期，337–376。[15] R. Rosas。全纯向量场代数重数的 C^1 不变性。《格勒诺布尔傅里埃研究所年刊》60 (2010)，第 6 期，2115–2135。